Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатися перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед усіх різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп’ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку його проводили для учнів Донецької області, згодом ці межі розширили, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

Завдання конкурсу складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість завдань не є оригінальною, вона запозичена з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптована для конкурсу.

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2010 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 роки надруковано у першому, другому, третьому, четвертому і п'ятому випусках «Математичний конкурс. 4–9 класи», що вийшли в серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для вчителів.

Завдання заочного туру конкурсу

4–5 класи

Перша частина завдань

1. Диванну подушку квадратної форми обшили по краях стрічкою. Скільки стрічки пішло на кожну сторону подушки, якщо всього витратили 2 м стрічки, а крім того, по 5 см на кожен кутик для її прикріплення?

А	Б	В	Г
180 см	50 см	45 см	55 см

2. Мотузку склали навпіл, потім — ще раз навпіл. Далі її розрізали спочатку в місці другого згину, а потім — першого. На скільки частин розпалася мотузка?

А	Б	В	Г
На дві	На три	На чотири	На п'ять

3. Серед шести батарейок є 3 нових і 3 відпрацьованих. Годинник працює тільки від двох нових батарейок. Можна вставити в годинник будь-які дві батарейки, щоб перевірити, чи вони працюють. За яку найменшу кількість спроб можна гарантовано вставити в годинник дві нові батарейки?

А	Б	В	Г
За 10	За 11	За 12	За 13

4. Майданчик прямокутної форми для зустрічі почесних гостей має периметр 880 м. Його застелили килимом, краї якого знаходяться на відстані 100 м від країв майданчика. Який периметр килима?

А	Б	В	Г
80 м	180 м	280 м	480 м

Розв’язки завдань заочного туру конкурсу

4–5 класи

Перша частина завдань

Відповіді

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	В	Г	А	Г	В	Г	В	В	Б	А	В	В	Б	В

Розв’язки

1. На чотири сторони подушки витратили $200 - 5 \cdot 4 = 180$ (см), а на одну сторону — $180 : 4 = 45$ (см). ■

Відповідь: В. 45 см.

2. Після розрізу по другому згину мотузка розпалася на три частини, після розрізу по першому згину одна з цих частин розпалася на дві — всього вийшло чотири частини. ■

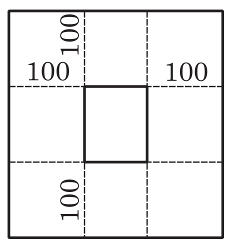
Відповідь: В. На чотири.

3. Підрахуємо найбільшу кількість спроб, при яких хоча б одна батарейка виявиться не новою. Дві відпрацьовані батарейки можна відібрати з трьох відпрацьованих трьома способами, рівно одну відпрацьовану — $3 \cdot 3 = 9$ способами. Отже, всього — $9 + 3 = 12$ способів. Наступна спроба приводить обов’язково до двох нових батарейок. ■

Відповідь: Г. За 13.

4. Щоб знайти периметр килима, потрібно від периметра майданчика відняти суму довжин відрізків, позначених на рисунку штриховими лініями: $880 - (4 \cdot 200) = 80$ м. Отже, периметр килима дорівнює 80 м. ■

Відповідь: А. 80 м.



5. Сума номерів сторінок на кожному листку — непарна, сума 15-ти непарних чисел — непарна. Тому Богдан не міг отримати число 2010. Неважко перевірити, що всі інші числа, наведені у відповідях, можна отримати. Наприклад, суму 1995 можна отримати, якщо вирвати від 27-го аркуша до 41-го включно.■

Відповідь: Г. 2010.

6. У колі між кожними двома хлопчиками — дівчинка, між кожними двома дівчатками — хлопчик, тобто дівчатка і хлопчики чергуються, їхня кількість — однакова.■

Відповідь: В. 9.

7. З рівності отриманих квадратиків випливає, що вертикальних і горизонтальних ліній поділу є однакова кількість. 12 вертикальних прямих сітки ділять квадрат на 13 однакових смужечок, кожна з яких горизонтальними прямими ділиться на 13 квадратиків. Усього отримаємо $13 \cdot 13 = 169$ квадратиків.■

Відповідь: Г. Інша відповідь.

8. Завдання зводиться до підрахунку кількості двоцифрових чисел, у яких одна цифра на 3 більша від іншої: цифра десятків — номер хлопчика, цифра одиниць — номер дівчинки. Це такі числа: 14, 25, 30, 36, 41, 47, 52, 58, 63, 69, 74, 85, 96. Усього — 13 чисел.■

Відповідь: В. 13.

9. Щоб повернутися в початкове положення, коникові потрібно зробити однакову кількість стрибків управо і вліво, тобто загальна кількість стрибків має бути парною. Будь-яка парна кількість стрибків задовольняє умову.■

Відповідь: В. 25.

10. З 20.00 до 8.00 пройде 12 годин. За 12 годин будильник відстане на 4 хв. Його треба перевести вперед на 4 хв.■

Відповідь: Б. На 4 хв.

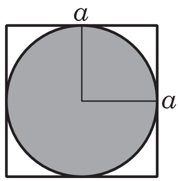
11. Кожна кількість очок на пластинках комплекту звичайного доміно повторюється 8 разів. На пластинках усередині ланцюжка 3 очки трапляються або 6 разів (якщо серед них є пластинка 3-3), або 5 разів (якщо передостання пластинка має 3 очки, а останньою є 3-3). Отже, в обох випадках на іншому кінці ланцюжка теж 3 очки.■

Відповідь: А. 3.

8. За умовою, $\left(\frac{3}{4}x\right)^2=\frac{9}{16}$. Звідси випливає, що x дорівнює 1 або –1. Тому вираз $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ може дорівнювати $\frac{49}{16}$ або $\frac{1}{16}$. ■

Відповідь: Г. Інша відповідь.

9. Нехай сторона квадрата дорівнює a. Тоді його площа — a^2, а найбільша площа круга, який міститься в квадраті, дорівнює $\frac{\pi a^2}{4}$. Отже, відсоток площі незафарбованої фігури, яка зображує відходи, від площі квадрата становить $\frac{a^2-\frac{\pi a^2}{4}}{a^2}\cdot 100=\frac{4-\pi}{4}\cdot 100\approx 21\%$.



З наведених відповідей найближчою до 21% є відповідь **В.** ■

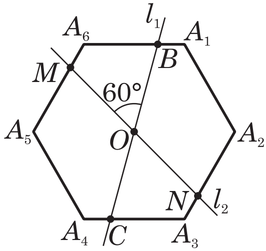
Відповідь: В. 20%.

10. Нехай вміст води у ванні — V л. Тоді $\frac{V}{20}$ л/хв — швидкість наповнення ванни гарячою водою, а $\frac{V}{10}$ л/хв — холодною. Позначимо через x час, за який ванна наповнюється лише гарячою водою, а через y — і гарячою, і холодною. Тоді умову задачі можна записати у вигляді системи рівнянь $\begin{cases} x\cdot\frac{V}{20}+y\left(\frac{V}{20}+\frac{V}{10}\right)=V, \\ (x+y)\frac{V}{20}=1{,}5y\cdot\frac{V}{10} \end{cases}$ або $\begin{cases} x+3y=20, \\ x+y=3y. \end{cases}$

Звідси, $x=8$, $y=4$. Шуканий час дорівнює 8 хв. ■

Відповідь: Б. 8 хв.

11. Нехай точка O — центр правильного шестикутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, прямі l_1 і l_2 проходять через точку O і утворюють між собою кут 60° (див. рис.). При повороті навколо центра O на 60° проти годинникової стрілки шестикутник відображається на себе, вершина A_1 переходить у A_6, A_6 в A_5 і т. д. При цьому повороті пряма l_1 відобразиться на l_2, а точки B і C — відповідно

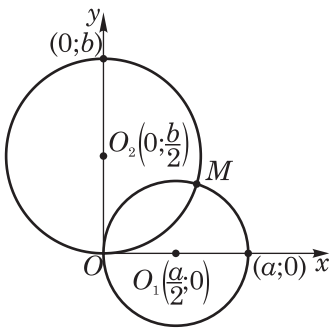


в точки M і N. Отже, відрізок MN отримаємо поворотом навколо точки O відрізка BC. Тому довжини цих відрізків рівні. ■

12. Позначимо через x кількість придбаних дисків. Зрозуміло, що $x > 5$. Тому заощаджена сума складається з $5 \cdot 0{,}05 \cdot 8$ (грн) і $(x - 5) \cdot 0{,}07 \cdot 8$ (грн). Маємо рівняння $(x - 5) \cdot 0{,}56 + 2 = 5{,}92$, або $0{,}56x = 6{,}72$. Звідси, $x = 12$. ■

13. Усього можливих варіантів виходу пасажирів — 64 (кожен пасажир може вийти на будь-якому поверсі з чотирьох можливих, а пасажирів — 3: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$). Задовольняють умову $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ з цих варіантів, тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$. ■

14. Виберемо систему координат так, як це показано на рисунку. Перетин кіл з центрами O_1 і O_2 та з радіусами $\frac{a}{2}$ і $\frac{b}{2}$ визначаємо системою рівнянь:



$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \\ x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 - ax + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - by = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є пари (0; 0) і $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}; \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$, яким відповідають точки O і M.

Ці розв'язки легко знайти, бо одним з наслідків системи є рівняння $ax = by$. Використовуючи його, можна кожне рівняння системи звести до неповного квадратного рівняння з однією змінною:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)x^2 - ax = 0, \\ \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)y^2 - by = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x((a^2 + b^2)x - ab^2) = 0, \\ y((a^2 + b^2)y - a^2b) = 0. \end{cases}$$

Звідси $OM = \sqrt{\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^4 + a^4b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Це і є шукана відстань. ■

Зміст