О.А. Сарана

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ: ПРОСТЕ І СКЛАДНЕ ПОРУЧ

Навчальний посібник

Друге видання, доповнене

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 21.1я721
С20

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник (лист №1/1-1113 від 22 лютого 2010 р.)

Рецензенти: Кукуш О.Г., професор кафедри математичного аналізу Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук
Номіровський Д.А., професор кафедри обчислювальної математики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, заслужений учитель України
Полонський В.Б., учитель математики Києво-Печерського ліцею №171 «Лідер», заслужений учитель України

Сарана О.А.

С20 Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 400 с.

ISBN 978-966-10-1616-2

Посібник призначений для проведення факультативної роботи з математики та для підготовки до участі у математичних олімпіадах.

У посібнику описано основні методи та ідеї розв'язування олімпіадних задач, які недостатньо вивчаються у шкільному курсі математики. Кожен метод супроводжується теоретичним обґрунтуванням, прикладами розв'язаних задач та задачами для самостійного розв'язування. Усього запропоновано понад 1000 задач, з них 264 задачі подано з розв'язаннями, до інших наведено відповіді чи вказівки. Уміщено приклади завдань обласних та Всеукраїнських олімпіад юних математиків за 1997–2002 роки та за 2009 рік.

Для учнів старших класів, учителів, викладачів підготовчих курсів, керівників гуртків, студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 21.1я172

Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

© Навчальна книга – Богдан, майнові права, 2011

ISBN 978-966-1616-2

Передмова

Даний посібник написано для того, щоб учень школи зміг самостійно (можливо, без допомоги вчителя) підготуватися до успішного виступу на обласній чи Всеукраїнській математичній олімпіаді. Тому посібник орієнтується на задачі міських, обласних та національних олімпіад. При підборі задач я виходив із досвіду проведення факультативних занять з розв'язування олімпіадних завдань в Житомирському державному університеті імені Івана Франка, Житомирському міському ліцеї та Житомирському обласному педагогічному ліцеї. При цьому з метою забезпечення достатньої для факультативної роботи кількості задач використано багато задач, які пропонувались на Київських, Всеукраїнських та Соросівських олімпіадах. Також включено деякі задачі, складені автором. Усього в посібнику подано 264 задачі з повними розв'язаннями, більш як 800 задач з відповідями та вказівками та 100 задач для самостійного розв'язування (без відповідей та вказівок). Як ілюстративний матеріал, наведено приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків за 1997–2002 роки та за 2009 рік.

Засвоєння методів розв'язування олімпіадних задач вимагає від учня напруженої, активної та кропіткої самостійної роботи. Хочу нагадати вислів відомого математика Д. Пойа, який учень повинен пам'ятати завжди: *"Розв'язування задач — практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах чи грі на фортепіано; навчитись його можна, тільки беручи приклад із кращих зразків та постійно практикуючись… Та пам'ятайте: якщо ви хочете навчитись плавати, то сміливо входьте в воду, а якщо хочете навчитись розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх".*

З метою економії часу при проведенні занять математичного гуртка краще, щоб теоретичний матеріал та задачі з розв'язаннями учні опрацювали вдома, а під час занять — розв'язувати ті задачі, що дані в посібнику без розв'язань. При підготовці до олімпіад роботу з даним посібником також варто поєднувати з роботою над рекомендованою літературою.

Зокрема, якісно готуватись до олімпіад рівня обласних та національних не можна без журналів "У світі математики" та "Математика у школі". Ці журнали публікують повну інформацію про Міжнародні та Всеукраїнські математичні олімпіади, про математичні олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка, інших вищих навчальних закладів України. Також у цих журналах публікуються статті про специфічні підходи при розв'язуванні олімпіадних задач (кожна з них може бути матеріалом для занять математичного гуртка), розповіді про новітні досягнення та застосування математики до розв'язання проблем економіки, фінансової математики, природознавства, соціальних наук тощо.

Друге видання книги після доопрацювання має відмінності порівняно з першим. Зокрема, його доповнено новим §12 «Раціональні та ірраціональні числа» та вилучено §2 «Доведення від супротивного», у зв'язку з чим змінена нумерація з §3–§12 на §2–§11. Оскільки основна частина книги зазнала суттєвого доопрацювання, то також було змінено номери деяких задач.

Після номера кожної задачі в дужках вказано класи, для яких можна пропонувати дану задачу (проте у зв'язку з відмінностями у навчальних програмах та зміною кількості класів навчання цю вказівку потрібно коригувати). Після номерів деяких задач додатково вказано, на якій олімпіаді пропонувалась ця задача і в якому році (при цьому номер класу вказано на час проведення олімпіади). Прийнято такі скорочення: ММО — Міжнародна математична олімпіада, УМО — Всеукраїнська математична олімпіада, ВТЮМ — Всеукраїнський турнір юних математиків, КМО — Київська математична олімпіада, ОМО — обласна математична олімпіада, СМО — Соросівська математична олімпіада, РМО — Всеросійська математична олімпіада. Багато задач наведено з повними розв'язаннями. При цьому в багатьох задачах акцентується увага не на самому розв'язку, а на тому, як до нього можна прийти. До деяких задач на доведення, розв'язання яких не потребує особливих ідей, вказівок не дано.

Бажаю всім читачам успіхів, творчого задоволення, оригінальних ідей та красивих розв'язків.

Кожна розв'язана мною задача ставала зразком, який служив потім для розв'язування інших задач.

Р. Декарт

Частина I

Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач

Однак тоді отримуємо $f(x+1)f(x) = -1 - f(x+1) < 0$. Це суперечить отриманому вище висновку про те, що функція $f(x)$ зберігає знак. ■

✔ **Задача 19.15 (УМО-2002, 10).** Знайти всі пари багаточленів P, Q з дійсними коефіцієнтами ненульових степенів такі, що для всіх дійсних x, y справджується рівність

$$\left(P(x)\right)^2 + \left(Q(y)\right)^2 = P(y^2) + Q(x^2).$$

Розв'язання. Нехай $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, де $a_k \neq 0$, $b_n \neq 0$.

Підставивши $x = 0$, отримуємо рівність

$$a_0^2 + \left(Q(y)\right)^2 = P(y^2) + b_0,$$

лівою частиною якої є багаточлен степеня $2n$, а правою частиною — багаточлен степеня $2k$. Степені лівої і правої частин рівні, тобто $k = n$. Прирівнявши старші коефіцієнти, отримуємо $b_n^2 = a_k$.

Підставивши $y = 0$, отримуємо рівність

$$\left(P(x)\right)^2 + b_0^2 = a_0 + Q(x^2).$$

За доведеним вище, ліва і права частини цієї рівності є багаточлени степеня $2k$. Прирівнявши старші коефіцієнти, отримуємо $a_k^2 = b_n$.

Звідси знаходимо $a_k = b_n = 1$.

Отже,

$$P(x) = x^k + P_1(x),\ Q(x) = x^k + Q_1(x),$$

де $P_1(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q_1(x) = b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0$, $p < k$, $q < k$, $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, а задана в умові задачі рівність може бути записана у вигляді:

$$\left(P_1(x)\right)^2 + 2x^k P_1(x) + \left(Q_1(y)\right)^2 + 2y^k Q_1(y) = P_1(y^2) + Q_1(x^2). \qquad (*)$$

Підставивши $x = 0$, отримуємо рівність, лівою частиною якої є багаточлен степеня $k + q$, а правою частиною – багаточлен степеня $2p$. Степені лівої і правої частин рівні, тобто $k + q = 2p$.

Підставивши $y = 0$, отримуємо рівність, лівою частиною якої є багаточлен степеня $k + p$, а правою частиною – багаточлен степеня $2q$. Степені лівої і правої частин рівні, тобто $k + p = 2q$.

Звідси послідовно знаходимо $k = 2p - q = 2q - p$, $p = q$, $k = p = q$. Це суперечить тому, що $p < k$, $q < k$.

Тому рівність (*) може виконуватись лише у випадку $P_1(x) \equiv 0$, $Q_1(x) \equiv 0$.

Отже, $P(x) = Q(x) = x^k$, $k \in N$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

✏ **Задача 19.16 (10–11).** Розв'язати на множині дійсних чисел функціональні рівняння:

1) $f(x+y) = f(x) + y, \quad x, y \in R;$

2) $f(x+y) - f(x-y) = 2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin y, \quad x, y \in R;$

3) $f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y, \quad x, y \in R;$

4) $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2f\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad x \neq 0, x \neq 1;$

5) $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \quad x, y \in R.$

✏ **Задача 19.17 (УМО-1974, 10).** Знайти усі функції f, які визначені на всій множині дійсних чисел і при будь-яких дійсних значеннях x і y задовольняють рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y.$$

✏ **Задача 19.18 (УМО-1982, 8).** Знайти усі багаточлени $f(x)$ такі, щоб рівність

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$$

виконувалась для всіх дійсних x і y.

✏ **Задача 19.19 (УМО-1982, 10).** Функція $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;1]$, для будь-яких $a, b \in [0;1]$ задовольняє нерівність

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a) + f(b).$$

Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$.

а) Довести, що рівняння $f(x) = 0$ має безліч розв'язків.

б) Навести приклад такої функції, яка б не дорівнювала тотожно нулю.

✏ **Задача 19.20 (1 СМО-1994, 11).** Функція $f(x)$, яка визначена на множині невід'ємних дійсних чисел, набуває дійсних значень. Відомо, що $f(0) = 0$ та функція $\frac{f(x)}{x}$ неспадна для $x > 0$. До-

21. Довести, що для будь-яких α, β, γ хоча б одне з чисел

$$\sin\alpha\cos\beta,\quad \sin\beta\cos\gamma,\quad \sin\gamma\cos\alpha$$

не більше за $\frac{1}{2}$.

22. Знайти всі натуральні числа m і n, для яких виконується рівність

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{m} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

23. Знайти найбільше значення виразу $\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta$, якщо $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$.

24. Розв'язати рівняння $13 + 4\cos 2x = 9\cos x + 6\sin 2x$.

25. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^3 + 3 = 4y(y+1)$.

Поради учаснику олімпіади

1. Уважно прочитайте умови задач і визначте порядок, в якому будете їх розв'язувати (краще починати з легших задач, які, як правило, розміщені напочатку).

2. Якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не вибирайте найзручніший для себе, а зверніться за консультацією до членів журі.

3. Якщо неясно, чи правильне деяке твердження, спробуйте його довести або спростувати.

4. Не зациклюйтесь на одній задачі. Якщо немає ідеї розв'язання, то задачу краще (хоча б на деякий час) відкласти.

5. Розв'язавши задачу, зразу ж оформляйте розв'язання. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших задач.

6. Кожен, навіть очевидний, крок розв'язання потрібно записувати. Громіздкі розв'язання краще записувати у вигляді кількох тверджень (лем).

7. Перед тим, як здати роботу, уважно перечитайте її "очима членів журі" — чи зможуть вони в ній розібратись?

Критерії оцінювання олімпіадних робіт

Ціль математичної олімпіади – виявити учнів, здатних нестандартно (і при цьому правильно) думати і застосовувати набуті в школі знання до розв'язування "нешкільних" задач. Тому часто при перевірці робіт описки та дрібні помилки прощаються. В останні роки традиційною є така система оцінок:

7 балів — задача розв'язана правильно;

6 балів — задача розв'язана, але є дрібні зауваження до розв'язання (наприклад, не розглянуто деякі прості часткові випадки);

5 балів — задача розв'язана в цілому, недоліки розв'язання легко усуваються;

3–4 бали — задача розв'язана "наполовину", тобто хід розв'язання правильний, є значний прогрес у розв'язанні, але повне розв'язання додатково потребує інших істотних ідей;

1–2 бали — задача не розв'язана, але підхід до розв'язання правильний або задача розв'язана для найпростіших частинних випадків;

0 балів — розв'язання задачі неправильне та не містить ідей, за допомогою яких задача може бути розв'язана, або задача не розв'язувалась.

Як правило, журі олімпіади розробляє критерії оцінювання розв'язань та нарахування балів за кожною задачею окремо. Ці критерії можуть відрізнятися від наведених вище. При цьому часто за розв'язання простих (на думку журі) задач нараховуються лише такі оцінки: 7 балів, 6 балів, 1 бал, 0 балів.

Список літератури

Основна література

1. Аннікушин А.В., Арман А.Р., Білокопитов Є.О., Добасевич О.М., Клурман О.О., Крюкова Г.В., Лішунов В.Г., Маліцький Ю.В., Мартюшова І.В., Мисок Д.П., Рубльов Б.В., Торба С.М., Усольцева О.С., Шепельська В.Д. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007-2009, 2008-2009, 2010. – Львів, "Каменяр", 2010.
2. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – Москва, "Наука", 1975.
3. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – Москва, "Наука", 1988.
4. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – Москва, "Наука", 1986.
5. Вишенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – Издательство при Киевском университете, Киев, 1984.
6. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. – Київ, "Либідь", 1993.
7. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади. – Київ, "Вища школа", 1993.
8. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – Москва, "Просвещение", 1986.
9. Гєнкін С.А., Ітенберг І.В., Фомін Д.В. Ленінградські математичні гуртки. – Київ, "ТВіМС", 1997.
10. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. – Кам'янець-Подільський, "Абетка", 2005.
11. Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. Зарубежные математические олимпиады. – Москва, "Наука", 1987.
12. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. – Київ, "Абрис", 1994.

21. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. – Харків, «Основа», 2006.

Науково-популярна література

1. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – Москва, "Мир", 1971.
2. Гарднер М. Крестики-нолики. – Москва, "Мир", 1971.
3. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. – Москва, "Мир", 1977.
4. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – Москва, "Наука", 1976.
5. Пойа Д. Математическое открытие. – Москва, "Наука", 1976.

Зміст

Частина I
Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач

Частина II
Приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків

Частина III
Задачі для самостійного розв'язування

КНИГА ПОШТОЮ
"НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН"
А/С 529
м. Тернопіль, 46008
☎ (0352) 287489
511141, 0673501870
mail@bohdan-books.com
ЗАМОВЛЯЙТЕ
КНИГИ ПОШТОЮ

Навчальне видання

САРАНА Олександр Анатолійович

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ:
ПРОСТЕ І СКЛАДНЕ ПОРУЧ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 16.03.2011. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 23,25. Умовн. фарбо-відб. 23,25.

Видавництво «Навчальна книга — Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга — Богдан, а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (607) 350-18-70
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1616-2
9 789661 016162