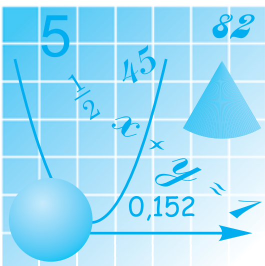
Алгебра

Ю.І. Мальований
Г.М. Литвиненко
Г.М. Бойко

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
М21

Рецензенти:
доцент кафедри математики і методики викладання математики
Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка
В.Д. Галан,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Лапій

Мальований Ю.І.

М21 Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Ю.І. Мальований, Г.М. Литвиненко, Г.М. Бойко. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 256 с : іл. + 1 електрон. опт. диск (CD). — Електрон. версія. — Режим доступу: http://www.bohdan-digital.com/edu.

ISBN 978-966-10-4110-2

Пропонований підручник відповідає програмі з алгебри для 7-го класу й передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, запитання для перевірки знань, задачі і вправи на повторення, а також письмові роботи, призначені для самоконтролю.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72

ISBN 978-966-10-4110-2

Піктограмою у підручнику позначено ті його складові, які можна відкрити у pdf-файлі або скориставшись CD, що входить у комплект.

У зв'язку з великим обсягом електронної складової підручника у pdf-файлі активною є тільки її частина. Для завантаження всіх матеріалів треба перейти за посиланням:

http://www.bohdan-digital.com/edu.

Алгебра щедра, вона часто дає більше, ніж у неї просять.

Ж. Д'Аламбер,
французький математик

СЛОВО ДО УЧНІВ

Дорогі семикласники!

Перед вами підручник, за яким вам доведеться вивчати новий навчальний предмет з курсу математики — *алгебру*. До цього часу ви мали справу в основному з обчисленнями, які виконували з конкретними числами. Ви ознайомилися з правилами і прийомами таких обчислень, навчилися виконувати чотири математичні дії (операції) з цілими і дробовими числами. Ці та інші відомості, що стосуються чисел, вивчає галузь математики, яка називається *арифметикою*.

На відміну від арифметики, в алгебрі числа записують не лише за допомогою цифр, але в багатьох випадках позначають буквами. Алгебра вивчає правила перетворення виразів, складених із чисел, букв, знаків математичних дій. Вивчаючи алгебру, ви ознайомитеся з новими математичними операціями, а також поняттями, без яких не можна уявити не лише математики, але й більшості наук, навіть, здавалося б, далеких від неї. Протягом усієї історії становлення і розвитку алгебри як самостійної галузі математики важливим предметом її вивчення були рівняння. Вам уже відомі найпростіші рівняння, і ви вмієте їх розв'язувати. У процесі вивчення алгебри ваші знання про рівняння значно розширяться. Ви ознайомитеся з багатьма новими видами рівнянь і способами їх розв'язування, дізнаєтесь багато цікавого про функцію як могутній інструмент опису і дослідження реальних процесів навколишнього світу.

Отже, попереду у вас захоплююча подорож у світ алгебри. Сподіваємось, що здолати всі труднощі цієї подорожі вам допоможе підручник. Яким він буде помічником — добрим чи не дуже — залежить і від вас. Ось декілька порад щодо роботи з ним.

Ніколи не намагайтеся виконувати вправи, не ознайомившись із теоретичним матеріалом, поданим у відповідному пункті підручника.

Щоб привернути вашу увагу до особливо важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом. Означення та властивості, які потрібно запам'ятати, виділено **напівжирним** шрифтом і позначено ➡. Основні формули записано на кольоровій плашці. Послідовність виконання певних дій, перетворення виразів, розв'язування задач надруковано *курсивом*. Курсивом виділено й окремі терміни, які зустрічаються вперше.

Для зручності вивчення навчальний матеріал підручника розподілено за трьома розділами. Вони містять параграфи, які розбито на пункти, а ті, у свою чергу, — на підпункти. Кожна з цих складових частин має заголовок і відповідний порядковий номер. Зокрема, номер підпункту позначено цифрою всередині кружечка.

Зосередити увагу на найсуттєвішому вам допоможуть відповідні запитання та завдання для самоперевірки, подані в кінці кожного пункту, а також основні вимоги щодо засвоєння змісту кожного розділу, які його завершують.

У тексті наведено приклади розв'язування ряду вправ із детальними поясненнями і зразками відповідних записів. У рубриці «Увага!» ви знайдете застереження від можливих помилок, яких нерідко припускаються школярі.

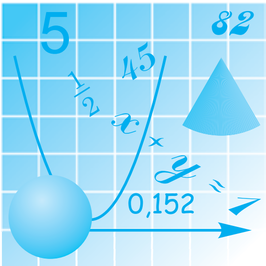
Виконуючи завдання для самоперевірки, ви зможете оцінити свої навчальні досягнення.

На рівень складності пропонованих задач і вправ указують умовні позначки: знак ° біля номера завдання позначає вправи, що відповідають початковому і середньому рівням; знак * — вправи високого рівня навчальних досягнень. Під номером без усіляких позначень умішено вправи, що відповідають достатньому рівню.

У кінці підручника подано основні відомості з курсу математики 5–6-х класів, які допоможуть пригадати навчальний матеріал, потрібний для вивчення певного пункту.

Що ж, тепер залишається поринути у світ невідомого. Успіхів вам у його пізнанні!

Автори



Розділ I

ЦІЛІ ВИРАЗИ

§1. РАЦІОНАЛЬНІ АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ

1.1. Вирази зі змінними. Раціональні алгебраїчні вирази

! Пригадайте

1. Наведіть приклади числового виразу і буквеного виразу.
2. Як знайти значення числового виразу?
3. Що необхідно знати, щоб знайти значення буквеного виразу?
4. До яких відомих вам формул входять букви? Поясніть їхній зміст.

① **Що таке алгебраїчний вираз.** У попередніх класах ви вже неодноразово зустрічалися з числовими виразами, тобто такими, де всі числа записані цифрами, а також із буквеними виразами, в яких одне або декілька чисел були позначені буквами. До числових належать, наприклад, вирази $6{,}8 - 3{,}5 \cdot 4$, $\frac{45-11}{2}$, $0{,}8 - 4 \cdot (13{,}1 + 14{,}9)$, $\left(\frac{2}{3} - 18\right) \cdot (7{,}5 + 12)$, а до буквених — $2m - 3n$, $0{,}5a^2$,

$2 \cdot (3x + y)$, $\frac{2b-1}{3}$. Одне число, записане цифрами (6; 384; –3,12 тощо) також уважають числовим виразом, а число, позначене буквою (m, x, c тощо), — буквеним виразом.

У буквеному виразі одна і та сама буква може позначати різні числа залежно від конкретних умов. Наприклад, у виразі $2(a + b)$, що є загальним записом правила обчислення периметра прямокутника зі сторонами a і b, букви a і b позначають будь-які додатні числа, якими можуть виражатися довжини відповідних сторін прямокутника. Тобто вони можуть змінювати свої значення. Тому їх називають ***змінними***, а цей та інші буквені вирази — ***виразами зі змінними*** (або зі змінною, якщо змінна — одна).

Числові вирази і вирази зі змінними, які містять лише арифметичні дії над числами, мають загальну назву ***раціональних алгебраїчних виразів***. Саме їх ми і будемо вивчати.

Якщо у вираз $a^2 - 5a + 4$ підставимо, наприклад, замість змінної a число 4 і виконаємо зазначені дії, то дістанемо числове значення, або коротше, ***значення*** цього виразу. Тобто,

якщо $a = 4$, то $a^2 - 5a + 4 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$;

якщо $a = 2$, то $a^2 - 5a + 4 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 4 - 10 + 4 = -2$;

якщо $a = -3$, то $a^2 - 5a + 4 = (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$, і т. д.

0, –2, 28 — усе це значення виразу $a^2 - 5a + 4$ за відповідних значень a.

Бачимо, що для різних значень a дістаємо різні значення даного виразу. Тому кажуть, що значення цього виразу залежить від значення a.

Приклад 1. Розглянемо вираз $(4x + 96) : 4 - x$ і знайдемо його значення для кількох різних значень x:

якщо $x = 0$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot 0 + 96) : 4 - 0 = 96 : 4 = 24$;

якщо $x = 2$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot 2 + 96) : 4 - 2 = 104 : 4 - 2 = 26 - 2 = 24$;

якщо $x = -3$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot (-3) + 96) : 4 - (-3) = (-12 + 96) : 4 + 3 = 84 : 4 + 3 = 21 + 3 = 24$.

Чи випадково числові значення виразу для різних значень x виявилися однаковими?

Для відповіді на це запитання спростимо даний вираз, скориставшись правилом ділення суми на число. Маємо:

$$(4x + 96) : 4 - x = 4x : 4 + 96 : 4 - x = x + 24 - x = 24.$$

Тепер очевидно, що яким би не було значення x, значення виразу дорівнюватиме 24. Тому кажуть, що значення виразу $(4x + 96) : 4 - x$ *не залежить* від значення x.

Приклад 2. Обчислюючи значення виразу $\frac{2b}{b-5}$, коли $b = 5$, дістанемо числовий вираз $\frac{2 \cdot 5}{5-5}$, який не має значення, бо знаменник дробу дорівнює нулю. У такому разі кажуть, що, коли $b = 5$, вираз $\frac{2b}{b-5}$ *не має смислу*.

Вираз $\frac{3a+4}{a^2-1}$ не має смислу, коли $a = 1$ та $a = -1$. Поясніть, чому.

Алгебраїчний вираз, який не містить ділення на змінну, називається ***цілим виразом***. Далі ми розглядатимемо перетворення цілих виразів.

② **Як назвати вираз.** Обчислюючи значення виразу $(a-2)(a+4)$, слід виконувати дії в такій послідовності:

1) віднімання в перших дужках;
2) додавання у других дужках;
3) множення першого результату на другий.

Назву результату дії, яку в процесі знаходження значення виразу виконують останньою, поширюють на назву самого виразу. У даному випадку остання дія — множення, її результатом є добуток. Тому даний вираз є добутком виразів $a - 2$ і $a + 4$. У свою чергу, $a - 2$ — це різниця чисел a і 2, а $a + 4$ — сума чисел a і 4. Отже, остаточна назва виразу $(a - 2)(a + 4)$ така: добуток різниці чисел a і 2 та суми чисел a і 4.

При обчисленні значення виразу (140 + 10) : (52 – 22) останньою дією є ділення, а її результатом — частка, що й визначає назву даного виразу: частка суми чисел 140 і 10 та різниці чисел 52 і 22.

Вирази виду $m : n$, або $\frac{m}{n}$, називають ще відношенням m і n.

Отже, попередній вираз (140 + 10) : (52 – 22) можна назвати ще й так: відношення суми чисел 140 і 10 та різниці чисел 52 і 22.

Вираз $3 \cdot 8$ є добутком чисел 3 і 8. Використовують також іншу назву цього виразу — потроєне число 8. Вираз $2ab$ називають подвоєним добутком чисел a і b; $\frac{7+4}{2}$ — півсумою чисел 7 і 4; $\frac{1}{3} \cdot (5 \cdot 10)$ — третиною добутку чисел 5 і 10.

Історична довідка

Перший крок до створення буквеної символіки зробив давньогрецький математик Діофант (III ст.), який використовував скорочений запис слів.

Франсуа Вієт

Основоположником застосування буквеної символіки в алгебрі вважають французького математика Франсуа Вієта (1540–1603). Його буквена символіка відрізняється від сучасної. Проте її використання дало змогу Вієту зробити важливі відкриття в математиці.

Спростив і узагальнив алгебраїчну символіку видатний французький учений Рене Декарт (1596–1650). Запровадженими ним позначеннями послуговуються і сучасні математики.

Запитання для самоперевірки

1. Які вирази належать до раціональних алгебраїчних? Наведіть приклади.

2. Як знайти значення раціонального алгебраїчного виразу, якщо він є: а) числовим; б) виразом зі змінною?
3. Який алгебраїчний вираз називають цілим? Наведіть приклади.
4. Як утворити назву алгебраїчного виразу? Поясніть на прикладах.

Задачі та вправи

Знайдіть значення виразів (1–2):

1°. а) $92 \cdot 5$; б) $103 \cdot 12$; в) $-98 \cdot 7$;
г) $27\frac{7}{8} \cdot 8$; ґ) $34{,}3 : 7$; д) $0{,}25 \cdot 7$.

2°. а) $1{,}5 \cdot \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}$; б) $2{,}6 + 3{,}4 : 1\frac{1}{16}$;
в) $2\frac{1}{49} \cdot 1\frac{1}{55} - 1{,}16 : 0{,}56$; г) $(51{,}8 + 44{,}3 + 48{,}2 - 24{,}3) : \frac{1}{3}$.

3. Чи правильні рівності:
а) $4\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1\frac{7}{9} - \frac{4}{9}\right) = 5$; б) $5\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \left(1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3$;
в) $90{,}9 : 3{,}03 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) = 1$; г) $\left(\frac{2}{5} + 2\frac{3}{5}\right) \cdot (12{,}4 : 3{,}1) = 12$;
ґ) $\frac{12{,}5 - 4{,}1}{4} = 1{,}7 + 0{,}6$; д) $\frac{0{,}75 - 0{,}15}{2} = 0{,}15 + 0{,}25$?

4°. Значення якого з виразів дорівнює 4:
а) $5 - 3\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot (-8)$; б) $12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2$;
в) $-3\frac{1}{3} \cdot 0{,}9 - \frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$; г) $2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{4} \cdot 8\frac{4}{21} - 13$?

5°. Знайдіть значення виразів:
а) $2k$, якщо $k = 103$; б) $2k + 1$, якщо $k = 103$;
в) $2k - 1$, якщо $k = 28$; г) $3k + 1$, якщо $k = 25$;
ґ) $3k - 1$, якщо $k = 29$; д) $5k + 1$, якщо $k = 35$;
е) vt, якщо $v = 48{,}5$, $t = 2{,}6$.

6. Складіть і запишіть числовий вираз, який не має смислу.

Знайдіть значення виразів (7–9):

7°. а) $3a + 7{,}4$, якщо $a = 12$; б) $0{,}5x + 14$, якщо $x = -3$;
в) $24{,}5 - 4m$, якщо $m = 6$; г) $-k + 17$, якщо $k = -7$.

8°. а) $14a + 15b$, якщо $a = 1{,}5$ і $b = 0{,}5$;
б) $15a - 14b$, якщо $a = 2{,}5$ і $b = 0{,}5$;
в) $x(0{,}5a - 4)$, якщо $a = 42$ і $x = 0{,}2$;
г) $84a + 12b$, якщо $a = 0{,}25$ і $b = -\dfrac{3}{4}$.

9. а) $2(a + b)$, якщо $a = 6{,}4$ см, $b = 0{,}045$ м;
б) $a + b + c$, якщо $a = 3{,}4$ см, $b = 0{,}4$ дм, $c = 0{,}05$ м;
в) ah, якщо $a = 0{,}028$ км, $h = 18{,}5$ м;
г) $4(a + b + c)$, якщо $a = 4{,}3$ дм, $b = 30$ см, $c = 0{,}27$ м.

10*. Запишіть вирази для обчислення периметрів фігур, зображених на рисунку 1. Яка з фігур має найбільшу площу?

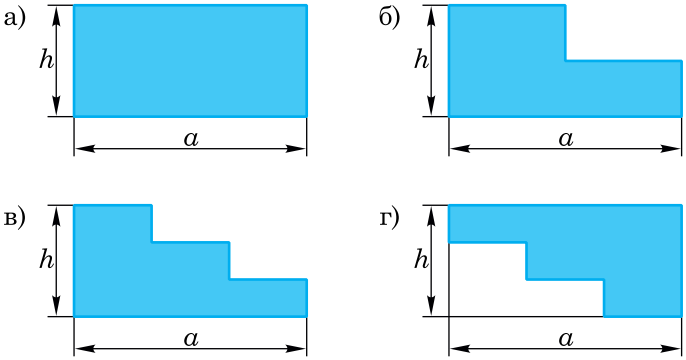


Рис. 1

11°. Нафтопровід перекачує 7 тис. т нафти за годину. Скільки тонн нафти можна перекачати нафтопроводом за 3 год? За 2,5 год? За t год? За добу? За 2 доби? За k діб?

12°. Для яких значень змінної y не мають смислу вирази:

а) $\dfrac{3}{y-5}$; б) $\dfrac{y}{y+3}$; в) $\dfrac{7}{y^2+1}$; г) $\dfrac{13y}{6y-4}$; ґ) $\dfrac{y+5}{2y}$?

13*. Знайдіть, якщо це можливо, пару значень змінних a і b, для яких не мають смислу вирази:

а) $\frac{17}{a-b}$; б) $\frac{5}{a+b}$; в) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2+b^2+4}$.

14. Чи може значення виразу $-2x$ бути додатним числом? Якщо може, то наведіть приклади.

15. Чи може вираз $1 + a^2$ набувати від'ємних значень? Відповідь поясніть. Укажіть найменше значення цього виразу.

16*. Задумайте ціле число, помножте його на 3, від одержаного результату відніміть 27, різницю поділіть на 3 і від частки відніміть задумане число. Яке число ви дістали? Доведіть, що одержаний результат не залежить від задуманого числа.

17. Заповніть таблицю (рух рівномірний прямолінійний):

Шлях, км	200	s	s	s		
Швидкість, км/год			50	v	60	v
Час, год	4	t			5	10

18. Заповніть таблицю:

Урожайність, ц з 1 га	4,1	P	25	P	
Площа ділянки, га	8,5	8			6,5
Валовий збір урожаю, ц			500	m	m

Запишіть вирази для розв'язування задач (19–22):

19. Зошит коштує a коп., ручка — вдвічі дорожча. Скільки коштують п'ять зошитів і три ручки?

20. Учні посадили x саджанців дуба, саджанців сосни — в 1,4 разу більше, а саджанців клена — на 80 штук менше, ніж саджанців сосни. Скільки саджанців сосни і клена посадили учні?

21. Турист ішов 5 год зі швидкістю a км/год і 3 год зі швидкістю b км/год. Яку відстань подолав турист?

22. Яку відстань пройде моторний човен проти течії за 2,4 год, якщо власна його швидкість 7,5 км/год, а швидкість течії x км/год?

23. Із двох населених пунктів A і B вирушають одночасно назустріч один одному пішохід та велосипедист і зустрічаються через t год. Складіть вираз для визначення відстані між цими населеними пунктами, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а швидкість велосипедиста 12 км/год. Знайдіть цю відстань, якщо: а) $t = 2{,}5$ год; б) $t = 4$ год.

24. Периметр прямокутника 48 дм, основа a дм. Складіть вираз для обчислення площі прямокутника. Знайдіть площу прямокутника, якщо: а) $a = 7$ дм; б) $a = 11{,}5$ дм; в) $a = 14$ дм.

25. Запишіть чотири натуральні числа, кратні числу 3. Подайте кожне з них у вигляді добутку числа 3 на відповідне натуральне число. Запишіть вираз зі змінною, який позначає натуральне число, що ділиться на 3 без остачі.

26*. Складіть за рисунком 2 вираз для обчислення довжини відрізка CD.

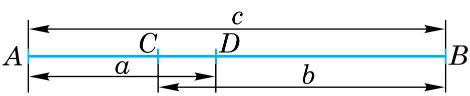


Рис. 2

Запишіть у вигляді виразу і обчисліть (27–29):

27°. а) Суму чисел 27,29 і 72,71;

б) різницю чисел 68,1 і –31,3;

в) добуток чисел $1\frac{3}{8}$ і $-1\frac{3}{5}$;

г) частку чисел 0,01 і –0,002;

ґ) подвоєну суму чисел 37,29 і 62,71;

д) потроєну різницю чисел 68,1 і –41,9;

е) подвоєний добуток чисел 7,5 і 0,4;

є) третину суми чисел 5,8 і 3,5;

ж) піврізницю чисел 9 і 15.

28°. а) Суму чисел m і n, якщо $m = 4\frac{1}{4}$, $n = -5{,}3$;

б) різницю чисел m і n, якщо $m = 0{,}6$, $n = -2\frac{2}{5}$,

в) подвоєну суму чисел m і n, якщо $m = 10{,}7$, $n = 5{,}3$.

29*. а) Різницю частки чисел $\frac{11}{15}$ і $3\frac{2}{3}$ та числа 0,5, зменшену на число, протилежне числу –0,3;

б) суму добутку чисел $5\frac{1}{3}$ і 0,75 та числа 2,4, збільшену на число, протилежне числу –0,6.

30°. Від суми чисел $-15\frac{1}{4}$ і $7\frac{3}{4}$ відніміть 0,25.

31°. Від добутку чисел $3\frac{1}{2}$ і $-5\frac{3}{4}$ відніміть суму чисел 10,7 і –3,3.

32. На скільки:

а) різниця чисел 65,71 і – 24,3 більша від їх суми;

б) добуток чисел 14,6 і –1,5 менший від суми чисел 47,89 і –28,7?

33*. Що більше і на скільки: різниця числа 2 та добутку чисел 0,25 і $7\frac{1}{5}$, поділена на $1\frac{2}{3}$, чи сума числа 3 та добутку чисел $-2\frac{1}{2}$ і 0,4, помножена на $\frac{1}{3}$?

1.2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

① **Що таке тотожність.** Два числові вирази, сполучені знаком «=», утворюють ***числову рівність***.

Якщо значення лівої і правої частин рівності одне й те саме число, то рівність називають ***правильною***.

Наприклад, рівність $(56 + 24) \cdot 2 = 160$ правильна, оскільки $(56 + 24) \cdot 2 = 80 \cdot 2 = 160$. Правильною є також рівність $3 \cdot (15 - 9) = (41 - 5) : 2$, бо $3 \cdot (15 - 9) = 3 \cdot 6 = 18$ і $(41 - 5) : 2 = 36 : 2 = 18$.

Приклад 1. Розглянемо три вирази з однією і тією самою змінною: $2x + 2$, $0,5 + 0,5x$, $2(x + 3) - 4$.

Знайдемо їхні значення, якщо $x = 2$. Маємо:

$$2x + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6;$$

$$0,5 + 0,5x = 0,5 + 0,5 \cdot 2 = 1,5;$$

$$2(x + 3) - 4 = 2 \cdot (2 + 3) - 4 = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Числа 6; 1,5; 6 називають ***відповідними значеннями*** даних виразів.

Знайдемо відповідні значення даних виразів для кількох інших значень змінної x і порівняємо їх між собою. Для зручності результати обчислень занесемо до таблиці:

x	1	0	–1	–2	–3
$2x + 2$	4	2	0	–2	–4
$0,5 + 0,5x$	1	0,5	0	–0,5	–1
$2(x + 3) - 4$	4	2	0	–2	–4

Як бачимо, відповідні значення всіх виразів рівні між собою, якщо $x = -1$. Відповідні значення першого і третього виразів рівні між собою для всіх наведених у таблиці значень x.

Цікаво, чи будуть вони рівними і для інших значень змінної x? Щоб відповісти на це запитання, перетворимо третій вираз, скориставшись розподільним законом множення. Маємо:

$$2(x + 3) - 4 = 2x + 6 - 4 = 2x + 2.$$

Отже, рівність $2(x + 3) - 4 = 2x + 2$ правильна для будь-яких значень змінної x. Таким чином, відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному при всіх значеннях змінної x. Про такі вирази кажуть, що вони тотожно рівні, або тотожні.

Вирази називають тотожно рівними, якщо всі їхні відповідні значення дорівнюють одне одному.

Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, називають ***тотожністю***.

Наприклад, рівності $2(x + 3) - 4 = 2x + 2$, $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ є тотожностями.

Очевидно, які б значення змінних не підставляти в тотожність, дістанемо правильну рівність.

Тотожність — це рівність, правильна за всіх значень змінних, що входять до неї.

Заміну виразу тотожно рівним йому називають ***тотожним перетворенням виразу***.

Тотожні перетворення виразів виконують на основі законів і властивостей арифметичних дій, правил тощо. Так, заміну виразу $k(a + b)$ на тотожно рівний йому вираз $ka + kb$ зроблено з використанням розподільного закону множення відносно додавання.

Тотожне перетворення виразу $3a - (a - 2b)$ можна виконати, послідовно застосувавши правила розкриття дужок і зведення подібних доданків. Маємо: $3a - (a - 2b) = 3a - a + 2b = 2a + 2b$.

② **Як довести тотожність.** Довести тотожність — означає встановити шляхом логічних міркувань, що дані два вирази тотожно рівні. Для цього один із виразів або обидва тотожно перетворюють так, щоб звести їх до однакового вигляду.

Приклад 2. Встановити тотожну рівність виразів $3x + 6$ і $1{,}5 \cdot (4 + 2x)$.

Розв'язання. Перетворимо другий вираз у тотожно рівний йому на основі розподільного закону множення:

$$1{,}5 \cdot (4 + 2x) = 6 + 3x.$$

За переставним законом додавання маємо: $6 + 3x = 3x + 6$.

Після цього тотожність виразів $3x + 6$ і $1{,}5 \cdot (4 + 2x)$ не викликає сумніву.

Приклад 3. Встановити тотожність виразів $(b + d)a + dc$ і $(a + c)d + ab$.

Розв'язання. Зведемо обидва вирази до однакового вигляду:

1) $(b + d)a + dc = ab + ad + dc$;

2) $(a + c)d + ab = ad + dc + ab = ab + ad + dc$.

Отже, $(b + d)a + dc = (a + c)d + ab$. Таким чином, дані вирази теж тотожні.

Завдання встановити тотожну рівність двох виразів може бути сформульоване інакше: *довести тотожність*. У цьому випадку процес перетворень залишається тим самим.

Приклад 4. Довести тотожність $2a + 5(7 + a) – 40 = 7a – 5$.

Доведення. $2a + 5(7 + a) – 40 = 2a + 35 + 5a – 40 = 7a – 5$.

Отже, $7a – 5 = 7a – 5$. Тотожність доведено.

Для доведення тотожностей можна використати ще й такий спосіб: записують різницю лівої та правої частин даної рівності і одержаний вираз спрощують. Якщо в результаті дістали нуль, то тотожність уважають доведеною. Доведіть таким способом попередню тотожність.

Тотожні перетворення виразів, тотожності та їх доведення лежать в основі курсу алгебри і постійно зустрічатимуться у процесі розв'язування задач і вправ.

УВАГА! Щоб довести тотожність двох виразів, недостатньо порівняти між собою лише кілька відповідних значень цих виразів і переконатися, що вони дорівнюють одне одному. Адже йдеться про рівність *усіх* відповідних значень виразів, що шляхом обчислень перевірити неможливо, бо таких значень безліч. Тому застосовують розглянуті вище способи доведення.

А от для того, щоб установити, що дані вирази не є тотожно рівними, достатньо назвати хоча б одне значення змінної, при якому відповідні значення їх не дорівнюють одне одному.

Запитання для самоперевірки

1. Які значення двох виразів називають відповідними?
2. Які вирази називають тотожно рівними (тотожними)?
3. Що таке тотожність? Наведіть приклади.
4. Що таке тотожне перетворення виразу?
5. Які способи доведення тотожності двох виразів ви знаєте?

Задачі та вправи

34°. Запишіть відомі вам тотожності, що виражають властивості арифметичних дій.

35°. Чому дані вирази тотожно рівні:

а) $3a + 2$ і $2 + 3a$;
б) $3(x + 4) = 3x + 12$;
в) $a(2b) = 2ab$;
г) $3 + (4 - 5x) = 7 - 5x$?

36°. Які вирази тотожно рівні:

а) $3(x + y)$ і $3x + 3y$;
б) $5{,}7(x + y)$ і $5{,}7x + 5{,}7y$;
в) $4{,}8(a + b)$ і $4{,}8a + b$;
г) $(a - b) \cdot 8 + a$ і $7a - 8b$;
ґ) $4(m - 3)$ і $4m - 3$;
д) $1 - a + b$ і $1 - (a - b)$?

37. Доведіть тотожності:

а) $-5(4 + a) + 28 = 8 - 5a$;
б) $-0{,}8(-2 + 0{,}75a) = 1{,}6 - 0{,}6a$;
в) $(x + 3{,}5) \cdot 4 - 3x = x + 14$;
г) $4{,}2(x - 5) - 3{,}2x = x - 21$.

38. Заповніть таблицю:

x	0	1	–1	2	–2	2,5
$3(2x - 1) + 4$						
$6x + 1$						

Чи тотожні вирази $3(2x - 1) + 4$ і $6x + 1$? Відповідь обґрунтуйте.

39. Заповніть таблицю:

x	0	1	2	3	4	–1	–2	0,1
$\lvert x\rvert + 3$								
$x + 3$								

Чи тотожні вирази $\lvert x\rvert + 3$ і x + 3? Обґрунтуйте відповідь.

40. Складіть вирази для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 3, спочатку доповнивши фігуру до прямокутника, а потім розбивши її на два прямокутники. Доведіть тотожність утворених виразів.

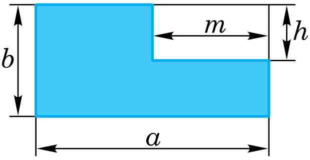


Рис. 3

41*. У тотожності $3x + 4x = 7x$ замініть змінну x виразом $a - 6$. Чи є тотожністю утворена рівність? Обґрунтуйте відповідь.

42*. У тотожності $2y + 8y = 10y$ замініть змінну y виразом $a - b$. Доведіть, що утворена рівність є тотожністю.

43. Доведіть, що значення виразів не залежить від a:

а) $6(3 - 2a) + 12a$; б) $-1{,}5(a - 8) + 3{,}5 \cdot \frac{3}{7}a$.

44*. Доведіть тотожність виразів:

а) $\frac{1}{2}mn - 0{,}5kn$ і $kn + \frac{1}{2}(m - k)n$;

б) $y(x - m) + m(y - n)$ і $xy - nm$.

45*. Запишіть замість «*» такий вираз, щоб утворилася тотожність:

а) $4x(m + 0{,}5n) - 2xm = *(m - n)$;

б) $*(x - y) = 3kx - 3ky$.

1.3. Степінь з натуральним показником

! Пригадайте

1. За якими формулами обчислюють площу квадрата зі стороною a і об'єм куба з ребром b?
2. Як ви розумієте записи: a^2; a^3?
3. Обчисліть: 5^2; 2^3; $0{,}5^2$; 4^3.

① **Що таке степінь з натуральним показником.** Ви вже відновили в пам'яті, що $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Тобто в цих виразах числа 2 і 3 вказують відповідно на кількість множників a, з яких утворено добуток.

Аналогічно вважають, що вираз a^5 — це добуток п'яти множників a: $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Відповідно добуток шести однакових множників b записують так: b^6. Отже, $b^6 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$.

У виразі a^5 число a називають ***основою степеня***, 5 — ***показником степеня***, а весь вираз a^5 — ***степенем***.

Читають вираз a^5 так: a в п'ятому степені або п'ятий степінь числа a.

Аналогічно: b^6 — шостий степінь числа b або b в шостому степені. Основою степеня тут є число b, а показником степеня число 6.

Степенем числа а з натуральним показником **n ($n \neq 1$) називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a:**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$

В означенні обумовлено, що $n \neq 1$. Це природно, адже немає смислу говорити про добуток, що складається з одного множника.

Втім, домовилися першим степенем будь-якого числа вважати саме це число. Тобто $a^1 = a$. Показник степеня 1, як правило, у запису пропускають.

Нагадаємо, що другий степінь числа називають його *квадратом*, а третій — *кубом* цього числа.

УВАГА! Для правильного вживання терміна «степінь» не забувайте, що це іменник чоловічого роду.

Зазначимо, що основою степеня може бути будь-яке число або вираз.

Наприклад, $(-7{,}3)^3 = -7{,}3 \cdot (-7{,}3) \cdot (-7{,}3)$; $\left(\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$; $(6mn)^2 = 6mn \cdot 6mn$; $(x - 3y)^3 = (x - 3y) \cdot (x - 3y) \cdot (x - 3y)$.

Зверніть увагу на відмінність між виразами $(6mn)^3$ і $6mn^3$. У першому виразі показник степеня стосується всього добутку, що стоїть у дужках, а в другому — лише множника n. Тобто $(6mn)^3 = 6mn \cdot 6mn \cdot 6mn$, а $6mn^3 = 6m \cdot n \cdot n \cdot n$.

Корисно знати, що:

степінь додатного числа з будь-яким натуральним показником є число додатне;

степінь від'ємного числа з парним показником є додатним числом, а з непарним — від'ємним;

0 *у будь-якому степені з натуральним показником дорівнює* 0;

будь-який степінь 1 *дорівнює* 1.

Спробуйте обґрунтувати ці твердження самостійно.

Варто пам'ятати і таке правило: *щоб піднести до степеня дріб, треба піднести до цього степеня чисельник дробу і його знаменник та записати перший результат у чисельнику, а другий — у знаменнику нового дробу*.

Це правило випливає з означення степеня з натуральним показником і правила множення звичайних дробів. Зокрема $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$. Взагалі $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

② **Як правильно обчислювати.** Вам відомо, що додавання кількох рівних між собою чисел замінюють множенням, наприклад,

$$\underbrace{5+5+5+5}_{\text{4 рази}} = 5 \cdot 4.$$

Аналогічно, множення рівних між собою множників замінюють новою дією, яку називають ***піднесенням до степеня***.

Ви знаєте, що додавання і віднімання — це дії *першого ступеня*, множення і ділення — *другого ступеня*. Піднесення до степеня належить до дій *третього ступеня*. Під час обчислень і перетворення виразів спочатку виконують (з урахуванням дужок) дії третього ступеня, потім — другого і нарешті — першого, в тому порядку, як вони записані.

Наприклад, $3 \cdot (4^2 + 56) : 2^2 = 3 \cdot (16 + 56) : 4 = 3 \cdot 72 : 4 = 54$.

Піднесення числа до степеня за допомогою мікрокалькулятора замінюють дією множення.

Наприклад, $4{,}2^3$ можна обчислити за такою програмою:

4,2 $\boxed{\times}$ 4,2 $\boxed{\times}$ 4,2 $\boxed{=}$ 74,088, або 4,2 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ 74,088, тобто після набору 4,2 натиснути клавішу $\boxed{\times}$, а потім двічі на $\boxed{=}$.

? Запитання для самоперевірки

1. Як ви розумієте запис: b^n, де n — натуральне число, відмінне від 1? Яку назву в цьому випадку мають b, n і b^n?
2. Який порядок виконання дій у процесі обчислення значення виразу $4 \cdot 3^2 - 8(6^3 + 7^2)$?

Задачі та вправи

Обчисліть значення виразів (46–47):

46°. а) 2^2, 4^2, 5^2, $0{,}1^2$, $0{,}1^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(\frac{6}{7}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{3}{5}\right)^3$;

б) $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-3)^2$, $(-3)^3$, $(-0{,}5)^2$, $(-0{,}5)^3$, $(-0{,}6)^2$.

47. а) $1{,}5^2$, $2{,}5^2$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(1\frac{2}{5}\right)^3$;

б) 8^2, $(-8)^2$, 11^2, $(-11)^2$, $1{,}2^2$, $(-1{,}2)^2$, $2{,}1^2$, -3^2, $-0{,}3^2$.

48°. Обчисліть площу квадрата зі стороною:

а) $a = 5$ см; б) $a = 7\frac{1}{2}$ см; в) $a = 2{,}5$ дм; г) $a = 3\frac{1}{4}$ дм.

49°. Обчисліть об'єм куба з ребром:

а) $a = 4$ см; б) $a = 1{,}5$ дм; в) $a = 2\frac{1}{2}$ дм; г) $a = 3$ м.

50°. Запишіть вирази у вигляді степеня:

а) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$;

б) $2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a$;

в) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$;

г) $4m^2n \cdot 4m^2n$.

51. Поясніть відмінність між виразами, записавши кожний із них у вигляді добутку без показника степеня:

а) $2a^4$ і $(2a)^4$; б) $3xy^2$ і $(3xy)^2$;
в) $5(m - n)^3$ і $(5(m - n))^3$; г) $2c^2d^2$ і $(2cd)^2$.

52. Випишіть вирази, які слід піднести до відповідного степеня:

а) $3b^5$; б) $5mn^3$; в) $(2xy)^4$; г) $(3b)^5$;
ґ) $4x^3y$; д) $0{,}1xy^2$; е) $(1{,}2x^3y)^2$; є) $(4x^2)^3$.

53. Серед даних виразів знайдіть ті, що є степенями, і запишіть їх:

а) $0{,}4a^2$; б) x^9; в) $25y^2$; г) $(-3x^2y)^4$;
ґ) $\frac{1}{27}$; д) x^2y^2; е) $(c - d)^3$; є) $(-a)^4$.

54°. Які з виразів є тотожними:

а) $(-a)^6$ і $-a^6$; б) $(-a)^3$ і $-a^3$;
в) $x - 2a$ і $-2a + x$; г) pp^3 і p^4?

55°. Серед даних виразів знайдіть тотожно рівні та запишіть їх:

а) $(-m)^7$; б) $(-a)^4$; в) $2a^2b^2$; г) $-m^7$; ґ) m^7;
д) $(2ab)^2$; е) a^4; є) $-a^4$; ж) $2ab^2$.

56°. Вкажіть порядок дій при обчисленні значень виразів:

а) $2 \cdot 3^4$; б) $(2 \cdot 3)^4$; в) $(10 - 2)^2$; г) $10^2 - 2^2$;
ґ) $7ab^4$; д) $(7ab)^4$; е) $2 \cdot (3 - 4)^2$; є) $(2 \cdot (3 - a))^2$.

57°. Обчисліть значення виразів:

а) $0{,}25 \cdot 2^2$; б) $(0{,}25 \cdot 2)^2$; в) $(-5)^2 \cdot (-2)^2$; г) $-5^2 \cdot (-2^2)$.

58°. Спростіть вирази:

а) $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$;
б) $a \cdot a - b \cdot b \cdot b$;
в) $m \cdot m + n \cdot n$;
г) $c \cdot c \cdot c - p \cdot p$;
ґ) $r \cdot r + x \cdot x \cdot x$;
д) $p \cdot p \cdot p + r \cdot r$.

59°. Запишіть вирази:

а) квадрат числа x;
б) квадрат суми чисел x і y;
в) різниця квадратів чисел x і y;
г) квадрат різниці чисел x і y;
ґ) куб числа a;
д) куб суми чисел a і b;
е) сума кубів чисел a і b;
є) різниця кубів чисел a і b.

60. Обчисліть:

а) суму квадратів чисел 3 і –2;
б) квадрат різниці чисел 25 і 8;
в) різницю куба числа –3 і квадрата числа 5;
г) суму куба числа –2 і різниці кубів чисел 4 і –1.

61. Значення якого з числових виразів дорівнює 5:

а) $(-1)^8 + 2^2 + 0{,}4 \cdot \ 3\frac{1}{3} \ - \ \frac{1}{3}$;
б) $3^2 + 0{,}5 \cdot 2^3 - 2^3$;
в) $1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 1\frac{2}{5} + (-1)^7$;
г) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-5\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 2\frac{1}{2} + 2^2$?

62. Обчисліть:

а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4^2 + 3$;
б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot (0{,}5)^2$;
в) $-(-5)^3 \cdot 0{,}5 + 10^2$;
г) $-5 \cdot (-2)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-6)^2$.

63. Чи тотожні вирази:

а) $-x^2$ і $(-x)^2$;
б) $-x^3$ і $(-x)^3$;
в) $3(-x)^2$ і $3(-x^2)$;
г) $4(-x)^3$ і $4x^2(-x)$?

64. Запишіть у вигляді степеня з основою 10 такі числа: 100; 1000; 100 000; 10 000 000.

65*. Куб, об’єм якого дорівнює 1 м^3, розрізали на кубічні сантиметри і розклали їх упритул в один ряд. Яку довжину матиме ряд (у сантиметрах)? Запишіть результат у вигляді степеня числа 10.

66*. Швидкість світла дорівнює 300 000 000 м/с. Запишіть це число з використанням степеня числа 10.

67*. Відстань від Землі до планети Нептун дорівнює 4,5 мільярда кілометрів. Запишіть значення цієї відстані, використавши степінь числа 10.

68*. У Київському інституті кібернетики створено суперкомп’ютер, який виконує 1 млрд операцій за 1 с. Запишіть за допомогою степеня числа 10, скільки операцій він виконає за 1 год; за 10 год.

69*. Назвіть порядок дій, які слід виконати у даних виразах, і запишіть назву кожного з них:

а) $\frac{a+b}{(a-b)^2}$; б) $(m+n)^3 - x^2$; в) $2(a^2 - b^2)$; г) $2x^2y + \frac{x}{y^2}$.

70*. Знайдіть x:

а) $x^4 = 81$; б) $x^3 = -8$; в) $x^2 = \frac{9}{16}$;

г) $2^x = 8$; ґ) $0{,}3^x = 0{,}027$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{25}$.

1.4. Властивості степеня з натуральним показником

① **Швидка лічба.** Спробуйте без калькулятора миттєво обчислити добуток $128 \cdot 256$. На перший погляд, зробити це неможливо.

Тим часом, завдання не є таким безнадійним.

Запишемо перші п’ятнадцять натуральних чисел, а під кожним із них — відповідний степінь числа 2. Дістанемо таку таблицю:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16 384	32 768

Знайдемо добуток $128 \cdot 256$ на калькуляторі або письмово. Дістанемо 32768. Як бачимо, це число теж стоїть у рядку степенів числа 2, і йому відповідає показник степеня 15, тобто $32\,768 = 2^{15}$. У свою чергу, $128 = 2^7$, $256 = 2^8$. Помічаємо, що $15 = 7 + 8$. Отже, $2^7 \cdot 2^8 = 2^{7+8} = 2^{15}$.

Щоб обчислити добуток $32 \cdot 64$, знайдемо у верхньому рядку таблиці відповідні цим множникам показники степенів 5 і 6, додамо їх і під сумою 11 прочитаємо результат — 2048. Множення 32 на 64 звичайним способом показує, що результат дістали правильний.

Для обчислення частки $8192 : 512$ знайдемо різницю відповідних показників степенів: $13 - 9 = 4$. Під показником 4 шукаємо потрібний результат — 16. Перевірте правильність відповіді.

Обчисліть аналогічно: $8192 : 1024$; $16\,384 : 512$.

Ці обчислення виявилися можливими на основі властивостей степеня з натуральним показником, з якими ви зараз ознайомитесь. Зауважимо, що далі поряд зі словосполученням «степінь з натуральним показником» буде вживатися просто «степінь», що означатиме те саме поняття.

② Властивості степеня.

Властивість 1. **Добуток степенів однієї основи дорівнює степеню цієї самої основи, показник якого дорівнює сумі показників множників:**

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}.} \qquad (1)$$

Доведення. Скористаємось означенням степеня з натуральним показником. Маємо:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ разів}} = a^{m+n}.$$

На основі цієї властивості можна сформулювати таке правило: *щоб помножити степені однієї основи, треба показники степенів додати, а основу залишити ту саму.*

Наприклад: 1) $2^5 \cdot 2^9 = 2^{5+9} = 2^{14}$; 2) $b^{13} \cdot b^4 = b^{17}$.

Цю властивість називають ***основною властивісю степеня*** з натуральним показником. Вона має місце для трьох і більше степенів. Наприклад, $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}$.

Властивість 2. **Частка степенів однієї основи дорівнює степеню цієї самої основи, показник якого дорівнює різниці показників діленого і дільника:**

$$\boxed{\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}\ (m > n,\ a \neq 0).}} \qquad (2)$$

Доведення. Ви знаєте, як перевірити правильність виконання ділення. Для цього треба частку помножити на дільник. У результаті маємо дістати ділене. Скористаємось цим у даному випадку. Помножимо частку a^{m-n} на дільник a^n і результат знайдемо за основною властивістю степеня. Маємо:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Дістали ділене. Отже, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Зверніть увагу на застереження у формулюванні властивості 2: $m > n$ і $a \neq 0$. Вони не випадкові. Адже коли $m = n$ або $m < n$, тоді різниця $m - n$ не буде натуральним числом, а йдеться про степінь з натуральним показником; $a \neq 0$, бо на нуль ділити не можна.

Наприклад: 1) $6^9 : 6^7 = 6^{9-7} = 6^2$; 2) $\dfrac{c^{16}}{c^{12}} = c^4$.

З цієї властивості випливає правило:

щоб поділити степені однієї основи, треба від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника, а основу залишити ту саму.

Властивість 3. **Степінь добутку двох множників дорівнює добутку степенів множників:**

$$\boxed{\boldsymbol{(ab)^n = a^n \cdot b^n.}} \qquad (3)$$

Доведення. Для перетворення виразу $(ab)^n$ скористаємося означенням степеня з натуральним показником, а також переставним і сполучним законами множення. Маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n\ \text{разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{разів}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ \text{разів}} = a^n \cdot b^n.$$

Ця властивість має місце і для добутку більше двох множників.

Отже, правило піднесення добутку до степеня з натуральним показником таке:

щоб піднести добуток до степеня, треба кожний множник піднести до цього степеня і записати добуток отриманих результатів.

Наприклад: 1) $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$; 2) $(3ab)^3 = 3^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 27a^3b^3$.

Властивість 4. **Степінь степеня дорівнює степеню тієї самої основи, показник якого є добутком даних показників степенів:**

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}.} \qquad (4)$$

Доведення. За означенням степеня з натуральним показником маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ разів}}.$$

За основною властивістю степеня маємо:

$$a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{\underbrace{m+m+\ldots+m}_{n \text{ доданків}}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Відповідне правило піднесення степеня можна сформулювати так:

щоб піднести степінь до степеня, треба основу степеня залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: 1) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$; 2) $(b^6)^5 = b^{6 \cdot 5} = b^{30}$.

Усі розглянуті властивості степеня обґрунтовано для натуральних показників, більших за 1. Якщо показник степеня дорівнює 1, то ці властивості очевидні. Переконайтеся у цьому самостійно.

③ **Спрощуємо обчислення.** Кожну з розглянутих тотожностей можна використовувати, помінявши місцями ліву і праву їхні частини.

Наприклад, обчислення виразу $2^5 \cdot 5^5$ можна суттєво спростити, скориставшись тотожністю (3): $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, прочитаною справа наліво: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Маємо:

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\ 000.$$

Аналогічно, скориставшись тотожністю $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, одержаною з розглянутої на с. 22 тотожності $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, спрощуємо обчислення виразу $\frac{32^4}{16^4}$:

$$\frac{32^4}{16^4} = \left(\frac{32}{16}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

? Запитання для самоперевірки

1. Якими властивостями степеня з натуральним показником скористалися у перетворенні виразів:
   а) $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$; б) $(7ab^3)^2 = 49a^2b^6$;
   в) $32^3 : 16^2 = (2^5)^3 : (2^4)^2 = 2^{15} : 2^8 = 2^7$?
2. Яка з рівностей правильна:
   а) $2^4 \cdot 3^4 = 6^8$; б) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$; в) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$?

Задачі та вправи

71°. Виконайте множення:

а) $x^4 \cdot x^6$; б) $a^{12} \cdot a^7$; в) $y^4 \cdot y^6$; г) $m \cdot m^2$;
ґ) $b^3 \cdot b^2 \cdot b$; д) $c \cdot c$; е) $c^3 \cdot c^2 \cdot c$; є) $2a^2 \cdot a^3$;
ж) $3b^4 \cdot b^5$; з) $2^5 \cdot 2^2$; и) $3^3 \cdot 3^3$; і) $7{,}8 \cdot 7{,}8^2$;
ї) $a^n \cdot a^2$; й) $b^3 \cdot b^k$; к) $c^m \cdot c^n$.

Піднесіть до степеня (72–73):

72°. а) $(a^2)^3$; б) $(b^4)^2$; в) $(x^8)^3$; г) $(m^3)^3$;
ґ) $(y^{10})^{10}$; д) $(c^7)^4$; е) $(a^5)^5$; є) $(p^8)^8$;
ж) $(x^n)^3$; з) $(m^4)^p$.

73°. а) $(a^2b^2)^2$; б) $(x^3y^3)^3$; в) $(2m^2n^4)^2$; г) $(3xy^5)^2$;
ґ) $(0{,}1p^3n)^3$; д) $(a^nx^2)^4$; е) $(a^2x^m)^n$; є) $(b^mc^n)^p$.

Виконайте ділення (74–75):

74°. а) $y^8 : y^4$; б) $a^6 : a^3$; в) $m^{12} : m^4$; г) $c^{16} : c^8$; ґ) $x^{24} : x^{12}$; д) $b^{36} : b^6$; е) $n^{18} : n^3$; є) $p^{25} : p^5$; ж) $x^{14} : x^7$; з) $y^{30} : y^{15}$.

75°. а) $x^{16} : x^8$; б) $x^{16} : x^2$; в) $x^{16} : x^{10}$; г) $a^8 : a^5$; ґ) $a^{18} : a^2$; д) $a^{18} : a^9$; е) $a^{18} : a^{12}$; є) $b^{17} : b^{15}$; ж) $2^7 : 2^5$; з) $c^4 : c^3$; и) $5^{16} : 5^{15}$; і) $y^n : y^5$; ї) $x^7 : x^p$; й) $m^n : m^k$.

76*. Спростіть вирази:

а) $m^{p-2} \cdot m^{3-p}$; б) $a^{2k} \cdot a^{1-k}$; в) $b^{3n} \cdot b^n$; г) $x^n \cdot x^n$; ґ) $y^{3p} : y^{2p}$; д) $y^{p+1} : y^p$; е) $c^{k+3} : c^{k+2}$; є) $m^{k-1} : m^{k-3}$.

77. Замість крапок запишіть відповідні множники, щоб утворилися тотожності:

а) $x^8 \cdot \ldots = x^{16}$; б) $m^{12} \cdot \ldots = m^{24}$; в) $\ldots \cdot 2^6 = 2^{12}$; г) $\ldots \cdot 3^3 = 3^6$; ґ) $\ldots \cdot x^5 = x^5$; д) $a^8 \cdot \ldots = a^{10}$; е) $b^4 \cdot \ldots \cdot b^5 = b^{11}$; є) $y \cdot y^2 \cdot \ldots = y^6$; ж) $n \cdot \ldots \cdot n^3 = n^5$.

Знайдіть і виправте допущені помилки (78–79):

78°. а) $x^3 \cdot x^2 = x^6$; б) $x^5 \cdot x^4 = x^9$; в) $(y^4)^2 = y^6$; г) $(p^3)^4 = p^{12}$; ґ) $(a^2)^2 = a^4$; д) $c^{27} : c^9 = c^3$; е) $a^{15} : a^5 = a^{10}$; є) $a^3 \cdot b^2 = ab^5$; ж) $(ab^2)^3 = ab^6$; з) $(ab^2)^3 = ab^5$; и) $(ab^2)^4 = a^4b^6$; і) $(ab^2)^4 = a^4b^8$.

79. а) $(4x^3y^4)^2 = 8x^6y^8$; б) $(3x^4y)^2 = 9x^8y^2$; в) $(0{,}3x^2y^2)^2 = 0{,}9x^4y^4$; г) $(2a^3b^4)^4 = 16a^{12}b^{16}$; ґ) $5 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$; д) $\dfrac{75^2}{15^2} = 5$.

80°. Запишіть у вигляді степеня:

а) a^2b^2; б) x^4y^4; в) b^6c^6; г) $36m^2n^2$; ґ) x^6y^2; д) $4m^4n^6$; е) $c^{12}d^9$; є) $8x^6$; ж) $-p^3$; з) -5^5.

Обчисліть (81–84):

81°. а) $0{,}25^{10} \cdot 4^{10}$; б) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^4 \cdot 16^4$; в) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^{10} \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$; г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^7 \cdot 6^7$; ґ) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^5$; д) $(0{,}125)^6 \cdot 8^6$.

82. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2^7$; б) $(0,2)^8 \cdot 5^9$; в) $(1,25)^4 \cdot 8^6$; г) $(0,5)^9 \cdot 4^8$.

83. а) $\frac{2^4 \cdot 3^5}{6^6}$; б) $\frac{2^9}{4^4}$; в) $\frac{9^5}{3^9}$; г) $\frac{27^4}{9^6}$;

ґ) $\frac{4^{10}}{8^6}$; д) $\frac{27^{10}}{81^7}$; е) $\frac{6^{10}}{2^9 \cdot 3^9}$; є) $\frac{2^5 \cdot 5^5}{100^2}$.

84*. а) $\frac{4^2 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 25}$; б) $\frac{(-2)^6 \cdot 49^2}{7^5 \cdot 8^2}$; в) $\frac{5^3 \cdot 9^4}{3^9 \cdot 25^2}$; г) $\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 100^2}{1000^2}$.

85*. Порівняйте:

а) 4^8 і 8^5; б) 9^7 і 27^4; в) 10^{20} і 20^{10}; г) 6^5 і 3^{10}.

Розв'яжіть рівняння (86–88):

86. а) $4^2 \cdot x = 4^3$, $2^4 \cdot x = 2^6$, $3^2 \cdot x = 3^7$,

б) $a : 2^3 = 2^2$, $5^3 : x = 5^2$, $3^6 : x = 9^2$.

87. а) $\frac{x}{2^2} = 2^3$; б) $\frac{4^5}{x} = 4^3$; в) $\frac{4^5 \cdot x}{4^2} = 4^4$; г) $\frac{(-3)^2 t}{3^3} = 3$.

88*. а) $(2^x)^3 = 2^6$; б) $(3^2)^x = 3^6$; в) $(2^2)^x = 2^8$;

г) $x^3 = 1$; ґ) $(x - 3)^2 = 0$; д) $(x - 3)^2 = 1$.

89*. Заповніть порожні клітинки таблиць числами так, щоб добуток усіх чисел по кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював одному й тому самому числу. Числа, записані в клітинках, розставте у порядку зростання. Визначте закономірність розміщення чисел.

а)

		2^6
	2^5	
2^4	2^3	

б)

	-32	
16	-8	2^8

90*. Обчисліть за допомогою калькулятора і результати округліть до десятих:

а) $4{,}2^2 \cdot 5{,}6^3$; б) $8{,}8^3 : 4^3$; в) $\frac{6{,}1^2 \cdot 2^3}{3{,}1^2}$; г) $\frac{7{,}48^2 \cdot 3^2}{2^3}$.

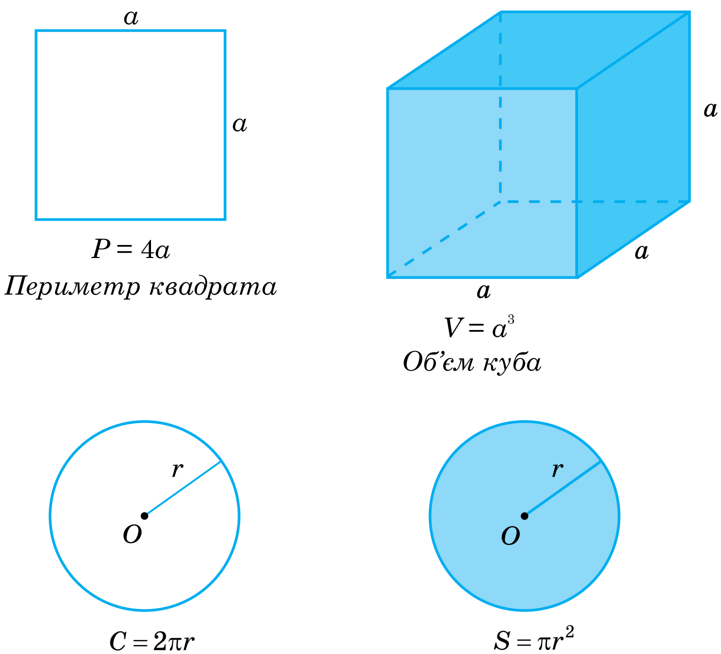
91*. Для якого значення x вирази мають найменше або найбільше значення? Які саме?

а) $x^2 + 3$; б) $2 - x^2$; в) $|x| + 3$;

г) $\frac{4 + x^2}{2}$; ґ) $\frac{4 - x^2}{2}$; д) $\frac{4}{x^2 + 2}$.

1.5. Одночлен. Перетворення одночленів

① **Що таке одночлен.** Розглянемо відомі формули, що стосуються зображених на рисунку 4 чотирьох фігур.



$P = 4a$

Периметр квадрата

$V = a^3$

Об'єм куба

$C = 2\pi r$

Довжина кола

$S = \pi r^2$

Площа круга

Рис. 4

Вирази, що містяться у правих частинах формул, є добутками чисел (4, 2, π), змінних (a, r) або їхніх степенів. Такі вирази називають ***одночленами***.

Вираз, що є добутком чисел, змінних та їхніх степенів, називають *одночленом*.

Приклади одночленів: $2a^2b$, $-3x^3y^4$, $4c^8d^2 \cdot 0{,}1m$.

Одночленами вважають також числа, змінні та їхні степені. Наприклад: 5, 2^2, a^3.

Вираз $\dfrac{5m^2n^4}{2}$ за означенням не є одночленом (бо містить дію ділення на 2), але його можна записати у вигляді одночлена, виконавши нескладне перетворення: $\dfrac{5m^2n^4}{2} = \dfrac{5}{2}m^2n^4$, де $\dfrac{5}{2}$ — число.

Вирази $2(a + b)$, $(x - y)^2$, $3ab - 4c^3$ не є одночленами, бо, крім множення і піднесення до степеня, містять додавання або віднімання.

② **Стандартний вигляд одночлена.** Трапляється, що одночлен містить кілька числових множників або степенів однієї змінної. У такому разі їх, як правило, замінюють одним числовим множником і одним степенем відповідної змінної.

Розглянемо для прикладу таку задачу.

Задача 1. Знайдіть масу товару, що може вмістити рефрижератор (рис. 5), якщо маса 1 м^3 товару дорівнює 0,12 т.

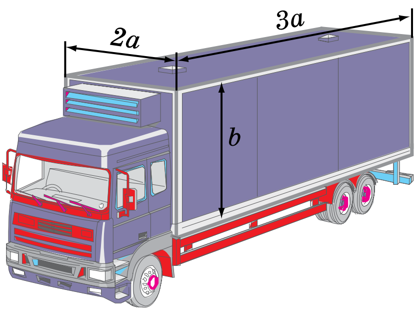


Рис. 5

Розв'язання. Оскільки рефрижератор має форму прямокутного паралелепіпеда, то його об'єм дорівнює: $3a \cdot 2a \cdot b$ (м^3).

Отже, маса товару в рефрижераторі буде: $0{,}12 \cdot 3a \cdot 2a \cdot b$ (т).

Одержаний вираз легко перетворити, скориставшись переставним і сполучним законами множення:

$$0{,}12 \cdot 3a \cdot 2ab = (0{,}12 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (aa)b = 0{,}72a^2b.$$

Аналогічно можна перетворити одночлени:

а) $-0{,}3x \cdot 5xy$; б) $4a^2b \cdot (-2{,}4a^3b^4)$.

Маємо:

а) $-0{,}3x \cdot 5xy = -0{,}3 \cdot 5xxy = -1{,}5x^2y$;

б) $4a^2b \cdot (-2{,}4a^3b^4) = 4 \cdot (-2{,}4)a^2a^3bb^4 = -9{,}6a^5b^5$.

Зверніть увагу на те, що в кожному з одержаних одночленів числовий множник стоїть на першому місці і кожна змінна входить до них тільки один раз.

Одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, і до якого кожна змінна в певному степені входить тільки один раз, називають *одночленом стандартного вигляду*.

Перетворення, внаслідок якого з даних одночленів дістають одночлени стандартного вигляду, називають ***зведенням одночленів до стандартного вигляду***.

Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають ***коефіцієнтом***.

Наприклад, коефіцієнти одночленів $\frac{1}{2}ah$, $6a^2$, $4a$, $-1{,}5x^2y$ дорівнюють відповідно $\frac{1}{2}$, 6, 4, –1,5.

В одночлені a^3 коефіцієнтом уважають 1, бо a^3 можна записати як $1 \cdot a^3$. Одиниці дорівнюють і коефіцієнти в таких одночленах: ab^2, m^5, x^4y^7 тощо. Аналогічно коефіцієнт одночлена $-x^3y^4$ дорівнює –1, бо $-x^3y^4 = -1 \cdot x^3y^4$.

УВАГА! Не забувайте про це в майбутньому і не припускайтеся помилки, вважаючи, наприклад, що у виразі ab коефіцієнта немає!

③ **Як звести одночлен до стандартного вигляду.** Ми розглянули кілька прикладів зведення одночленів до стандартного вигляду. Так само слід підходити до виконання більшості вправ: їхні умови можуть бути сформульовані по-різному, але суть залишається тією самою.

Наприклад:

а) виконайте множення $4x^4 \cdot 2x^4y$;

б) виконайте дії: $4x^4 \cdot 2x^4y$;

в) спростіть вираз $4x^4 \cdot 2x^4y$;

г) знайдіть добуток $4x^4 \cdot 2x^4y$.

Усі ці формулювання, по суті, означають одне: потрібно звести одночлен $4x^4 \cdot 2x^4y$ до стандартного вигляду.

Для виконання цього завдання достатньо скористатися відповідними законами арифметичних дій і властивостями степеня:

$$4x^4 \cdot 2x^4y = 4 \cdot 2x^4x^4y = 8x^8y.$$

Зводячи одночлен $4x^4 \cdot 2x^4y$ до стандартного вигляду, ми фактично замінили добуток двох одночленів $4x^4$ і $2x^4y$ одним одночленом.

Якщо потрібно перетворити в одночлен стандартного вигляду степінь одночлена, застосовують правило піднесення до степеня добутку.

Наприклад: $(3a^2b^4)^2 = 3^2(a^2)^2(b^4)^2 = 9a^4b^8$.

④ **Як записати одночлен у вигляді добутку двох одночленів.** Інколи доводиться виконувати перетворення, обернене до попереднього, — записувати одночлен стандартного вигляду як добуток двох одночленів.

Наприклад, одночлен $6x^4y^8$ потрібно записати у вигляді добутку двох одночленів, один із яких дорівнює $3xy^2$. Щоб знайти другий одночлен, порівнюють відповідні множники даних одночленів і з'ясовують, на який вираз слід помножити один із них, щоб дістати потрібний. У даному випадку такими множниками є 6 і 3; x^4 і x; y^8 і y^2. Щоб дістати 6, потрібно 3 помножити на 2; щоб дістати x^4, треба x помножити на x^3; щоб дістати y^8, слід y^2 помножити на y^6. Отже, шуканий одночлен дорівнює $2x^3y^6$. Тобто $6x^4y^8 = 3xy^2 \cdot 2x^3y^6$.

⑤ **Степінь одночлена**. Одночлен $3x^2$ містить змінну x у другому степені, а одночлен $2{,}4x^5$ — у п'ятому. В такому разі кажуть, що одночлен $3x^2$ — *другого степеня*, а одночлен $2{,}4x^5$ — *п'ятого степеня*.

Степінь одночлена з кількома змінними дорівнює сумі показників степенів цих змінних.

Наприклад, вираз $4x^3y^2z$ є одночленом шостого степеня, бо сума показників степенів змінних, що входять до нього, дорівнює $3 + 2 + 1 = 6$. Одночлен $7xy$ — другого степеня, оскільки до нього входять змінні x та y в першому степені: $1 + 1 = 2$.

? Запитання для самоперевірки

1. Який вираз називають одночленом? Наведіть приклади.
2. Які з одночленів є одночленами стандартного вигляду:
   а) $3a^3ba$; б) $4xy^3$; в) $-4{,}5m^4n \cdot 2$;
   г) $a^2b^7c^4$; ґ) $3ddd$?
   Відповідь поясніть.
3. Яку неточність допущено в означенні: числовий множник, який стоїть в одночлені на першому місці, називається його коефіцієнтом?
4. Як звести одночлен до стандартного вигляду? Поясніть на прикладі.

Задачі та вправи

92°. Які з виразів є одночленами:

а) $3c^3d^2$; б) $\frac{5}{8}x^4$; в) $\frac{3mn^3}{4}$; г) $\frac{a}{-1{,}3}$;

ґ) $-\frac{c}{6}$; д) $(x-4)^3$; е) 1; є) $(8a^3)^2$?

Які з них можна записати у вигляді одночлена? Зробіть це.

93°. Зведіть одночлени до стандартного вигляду і назвіть коефіцієнти утворених одночленів:

а) $ab^3 \cdot (-3b^4)$; б) $-8x^2 \cdot (-4x^3y^4)$; в) $4m \cdot 0{,}25n$;

г) $-5c^2d^3 \cdot 0{,}2cd$; ґ) $2\frac{1}{3}mn \cdot \frac{1}{7}mn$.

94°. Знайдіть добуток одночленів:

а) $17a^2$ і $5a$; б) $-6ab$ і $2a$; в) $-9ab$ і $-8ab$;

г) $-0{,}5a^2$ і $9ab$; ґ) $-\frac{4}{7}a^2b$ і $\frac{5}{9}a$; д) $-0{,}8a^3b$ і $\frac{4}{7}ab^2$;

е) $-0{,}6a$ $-\frac{3}{4}ab$; є) $\frac{7}{8}a^3b$ і $-0{,}2ab$; ж) $-\frac{4}{9}ab$ і $-18a^3b$.

95°. Спростіть вирази:

а) $(3ax)^2$; б) $(2ax)^3$; в) $(0{,}4ab)^2$;

г) $(-0{,}2ab)^3$; ґ) $(-0{,}5ab)^2$; д) $(-0{,}4a^2b)^3$;

е) $(-0{,}6a^3b)^2$; є) $(-0{,}3a^2b)^3$; ж) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^2$.

Піднесіть одночлени до степеня (96–97):

96°. а) $(3xy)^2$, $(4xy)^3$, $(-4x^2)^2$, $(-7xy^2)^2$, $(2x^2y)^3$;

б) $(0{,}1x)^2$, $(0{,}1x)^3$, $(0{,}4x^3)^2$, $(-0{,}4x^2)^2$, $(-0{,}6x^2y)^3$.

97. а) $\left(\frac{3}{7}x^3\right)^2$; б) $\left(-\frac{3}{7}x^2y\right)^2$; в) $\left(-\frac{7}{9}x^2y\right)^2$;

г) $\left(\frac{12}{17}xy\right)^2$; ґ) $\left(\frac{15}{17}x^2y\right)^2$.

Виконайте дії (98–99):

98°. а) $2x \cdot (3x)^2$; б) $0{,}8x \cdot (-4x)^2$; в) $(-2x)^3 \cdot (-0{,}8x)$;

г) $\frac{4}{3} \cdot 2{,}1x$; ґ) $4x^2 \cdot (-4x)^2$; д) $7xy \cdot (-3x^2)^3$.

99°. а) $(-3x)^2 \cdot (-2x)^3$; б) $(-0{,}8x^2)^2 \cdot 1\frac{2}{7}xy$;

в) $\left(1\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}x^3y\right)$.

100. Перетворіть вирази в одночлени стандартного вигляду, а потім, якщо можливо, запишіть їх у вигляді степеня:

а) $2a^3b^4 \cdot 8ab^2$; б) $0{,}7x^3y \cdot 6xy^2$; в) $\frac{1}{2}x^2y \cdot 2x^4y^3$;

г) $8cd^2 \cdot 2c^3d^2$; ґ) $(-3xy^4) \cdot (-12xy^2)$; д) $8m^2n^5 \cdot (-8mn)$.

101*. Знайдіть помилки, виправте їх і поясніть, порушення яких правил призвело до них:

а) $x \cdot x = 2x$; б) $5 \cdot 2^2 = 10^2$; в) $x^3 \cdot x^2 = x^6$;
г) $(x^3)^2 = x^9$; ґ) $(x^4)^3 = x^7$; д) $4^2 \cdot 3^2 = 12^4$;
е) $(-3x)^4 = -12x^4$; є) $a^2b^3 = (ab)^5$; ж) $-a^4 \cdot 2a^3 = 2a^7$.

Заповніть пропущені місця відповідними множниками так, щоб утворилися тотожності (102–104):

102. а) $8x^3 = 4x^2 \cdot \ldots$; б) $25x^2y = \ldots \cdot y$;
в) $16x^2y^3 = 4x^2y \cdot \ldots$; г) $9x^3y^2 = -3x^2y \cdot \ldots$;
ґ) $64x^4y^2 = \ldots \cdot 4x^2y$; д) $-7b^2c \cdot \ldots = 63b^5c^4$.

103. а) $4m^2n \cdot \ldots = m^5n^3$; б) $\ldots \cdot (-5x^2y) = x^4y$;
в) $5a^2b^4 \cdot \ldots = -5a^2b^4$; г*) $3a^3b \cdot \ldots = \frac{1}{9}a^3b^3$;
ґ*) $16m^3n^4 = (2mn)^2 \cdot \ldots$; д*) $36x^5y^2 = \ldots \cdot (3x^2y)^2$.

104*. а) $200x^5y^5 = (5\ldots)^2 \cdot (\ldots)^3$; б) $2x^7y^5 = (\ldots)^3 \cdot (0{,}5\ldots)^2$;
в) $\frac{9}{8}x^5y^5 = \left(\frac{3}{2}\ldots\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(\ldots)^3$; г) $\frac{2}{27}x^5y^5 = \left(\frac{2}{3}\ldots\right)^3 \cdot (\ldots)^2$.

105. Вантажним автомобілем привезли 50 дощок завдовжки a м, завширшки b дм, завтовшки $0{,}2b$ дм кожна. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз для обчислення маси всіх дощок, якщо 1 м^3 деревини має масу 0,8 т.

106*. Розставте в порожніх клітинках таблиць одночлени так, щоб їхній добуток у кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював $a^{12}b^{15}$:

а)

		ab^6
a^2b^9		a^6b

б)

	a^4b^5	
a^5b^6	b	

Одночлени, записані в клітинках, розмістіть у порядку зростання степенів букви b. Визначте закономірність розміщення одночленів, записаних у клітинках.

107*. Розставте в порожніх клітинках таблиць одночлени так, щоб добуток усіх одночленів кожної вертикалі, горизонталі та діагоналі був одночленом однакового степеня:

а)

x^4y^2		x^2y^6
	x^5y^5	
		x^6y^8

б)

		a^3b^5
		a^2
	b^2	a^7b^7

Розмістіть одночлени в порядку:
а) спадання степеня y;
б) зростання степеня a.

Завдання для самоперевірки

I – II рівні

1. Обчисліть:

а) $(-3)^2$; б) $(-6)^3$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; г) $(5-3)^3$;

г) $3^3 - 5$; д) $1{,}5^2$; е) -3^3; є) $\frac{3^3}{3^2}$.

2. Знайдіть значення виразу $x^2 - 3x + 7$, якщо:

а) $x = -4$; б) $x = \frac{2}{3}$; в) $x = 1{,}2$; г) $x = 0$.

3. Виконайте дії:

а) $a^4 : a^3$; б) $x^2 \cdot x \cdot x^5$; в) $3m^8 : m^4$; г) $y^3 \cdot 2y \cdot y^5$.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $5^3 \cdot x = 5^6$; б) $x : 3^3 = \frac{1}{3}$; в) $5^5 : x = 5^2$; г) $3^2 \cdot x = 27$.

5. Для яких значень змінної x не мають смислу вирази:

а) $\frac{4}{x-3}$; б) $\frac{x}{x+4}$; в) $\frac{2x}{x^2-4}$; г) $\frac{x+3}{x}$.

6. Які з виразів тотожно рівні:

а) x^5; б) $(x^3)^2$; в) x^6; г) $x^2 \cdot x^3$?

7. Спростіть вирази:

а) $x^3 \cdot x^2$; б) $x^6 : x^2$; в) $(x^3)^2$; г) $x^4 : x^2$?

8. Запишіть одночлени у стандартному вигляді і назвіть їхні коефіцієнти:

а) $3x^4 \cdot x$; б) $-2a^3 \cdot 3a$;

в) $-5a^2x \cdot 0{,}1ax^3$; г) $0{,}25mn \cdot 4m^2n$.

9. Допишіть замість крапок такі множники, щоб утворилися тотожності:

а) $a^4b^2 = a^2b^2 \ldots$; б) $x^5y^6 = x^3y^2 \ldots$;

в) $3m^4n^4 = 3mn^3 \ldots$; г) $12x^3y^5 = \ldots 2xy^2$.

10. Запишіть вирази:

а) половина різниці чисел x і y;

б) чверть добутку чисел a і b;

в) подвоєна сума чисел m і n;

г) потроєна частка чисел c і d.

III рівень

1. Обчисліть:

а) $\dfrac{2^4 \cdot 4^8}{8^5 \cdot 16}$; б) $\dfrac{27^2 \cdot 3^6}{81 \cdot 9^3}$; в) $\dfrac{3^5 \cdot 64}{2^3 \cdot 9^2}$; г) $\dfrac{125 \cdot 4^2}{128 \cdot 5^6}$.

2. Обчисліть:

а) квадрат різниці чисел 8 і –3;

б) різницю квадратів чисел 9 і –4.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $9^3 : x = 27^2$; б) $x : 3^3 = \dfrac{1}{3}$;

в) $8^5 \cdot x = 16^4$; г) $(-0{,}5)^3 \cdot y = 0{,}25$.

4. Знайдіть помилки, якщо вони допущені, та виправте їх:

а) $a^8 : a^4 = a^2$; б) $x^3x^2 = x^5$; в) $b^8c^8 = bc^8$;

г) $b^8c^8 = (bc)^{16}$; ґ) $(mp^2)^3 = m^3p^5$; д) $(m^4n)^4 = m^{16}n^4$.

5. Запишіть вирази у вигляді степеня:

а) $3^2a^3a^5$; б) $a^3b^2 \cdot ab^6$; в) $2x^2 \cdot 2^4x^3y^5$; г) $c^2d^3 \cdot c^2d^5$.

6. Запишіть одночлени у стандартному вигляді:

а) $-mn \cdot 0{,}5m^2n^4 \cdot 2m$; б) $2c^2 \cdot (-3c^2d)^3$;

в) $(-8a^2b^3)^3 \cdot 2a^2b^3$; г) $-3xy^3 \cdot (3x^2y^2)^2$.

7. Запишіть вирази, якщо це можливо, як одночлени стандартного вигляду:

а) $\dfrac{xy^2}{2}$; б) $\dfrac{a+b}{3}$; в) $2m + 5m$; г) $\dfrac{3ab}{c}$.

8. Допишіть замість крапок одночлени так, щоб утворилися тотожності:

а) $12a^4bc^3 = 4abc \ldots$; б) $15m^8n^6p^3 = \ldots \cdot 3m^4n^2p$;

в) $36x^5y^2 = \ldots (3xy)^2$; г) $-18k^3l^4m^5 = 6kl^2m^5 \ldots$.

9. Запишіть вирази:

а) половина добутку суми чисел x і y та їх різниці;

б) квадрат третини добутку чисел a і b;

в) різниця квадратів чисел m і n;

г) куб половини різниці чисел k і l.

10. Спростіть вираз:

а) $4^{2n} \cdot 4^{3n-1} \cdot 4^{5n+1}$; б) $4^n \cdot 2^{2n-1} \cdot 2^{3n}$.

IV рівень

1. Запишіть вираз зі змінною m, який не має числового значення, якщо:

а) $m = 2$ і $m = -1$; б) $m = 4$; в) $m = -3$ і $m = 0$.

2. Обчисліть:

а) $\left(3\dfrac{5}{9}\right)^2 . (3{,}375)^3$; б) $\dfrac{5^{27} \cdot 4{,}6 + 2{,}7 \cdot 5^{28}}{25^{13}}$;

в) $\dfrac{8 \cdot 1000^n}{2^{3n} \cdot 5^{3n}}$; г) $\dfrac{1000^n}{2^{3n+1} \cdot 5^{3n+2}}$.

3. Виконайте дії:

а) $(-0{,}5x^ny)^3 \cdot 2xy^{4n}$; б) $(0{,}3a^{n+1}b)^2 \cdot \dfrac{5}{9}(ab^3)^3$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}x^2y^3\right)^3 \cdot \left(-9x^4y^2\right)^2$; г) $\left(-4c^{3m}d^5\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}c^3d^{2m-1}\right)^2$.

4. Запишіть, якщо це можливо, вирази у вигляді степеня:

а) $27x^2y^3 \cdot x^4$; б) $4m^2n^4 \cdot 8m^4n^6$;

в) $12ab^2 \cdot 3a^2b$; г) $c^{n-1}d^{2k-1} \cdot 9c^{n+3}d$.

5. Допишіть замість крапок одночлени так, щоб утворилися тотожності:

а) $24a^2b^3d^7 = 2ab^3 \cdot 3d^2 \cdot \ldots$;

б) $100x^7y^4 = (\ldots)^2 \cdot 4x$;

в) $-\dfrac{24}{49}m^6n^5p^3 = 6mn^2 \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{7}m^2p$;

г) $32c^5d^4n^6 = -4c^2n^3 \cdot \dfrac{2}{3}dn^2 \cdot \ldots$.

6. За якого значення x вираз набуває найбільшого або найменшого значення і якого:

а) $(4-x)^2 + 7$; б) $10 - (3-x)^2$;

в) $(2{,}5-x)^2 + 3\dfrac{2}{3}$; г) $3{,}6 - \left(2\dfrac{3}{4} - x\right)^2$?

7. Знайдіть число, 60 % якого:

а) більші за його третину на 24;

б) менші від його третини на 24.

8. Запишіть вирази:

а) потроєний добуток квадрата суми чисел a і b та їх різниці;

б) різниця куба суми виразів $3m$ і $2n$ та квадрата їх різниці.

9. Запишіть словами назви виразів:

а) $2(a^2 - b^2) + (a-b)^2$; б) $3xy - (x^3 + y^3)$.

10. Розв’яжіть рівняння:

а) $(x-7)^2 = 0$; б) $(4+x)^2 = 0$;

в) $(x-4)^2 = 1$; г) $|x|^2 = 4$.

§2. МНОГОЧЛЕН. ПЕРЕТВОРЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

2.1. Поняття многочлена та його стандартного вигляду

Пригадайте

1. Які доданки називають подібними? Наведіть приклади.
2. Поясніть, як зводять подібні доданки, виконавши зведення їх у виразах:
   а) $4a + 3a + a$; б) $7b - 3c + 4b - 2b$.

① **Що таке многочлен.** Розглянемо рисунок 6. Місткість рефрижератора з причепом, зображеного на ньому, дорівнює $ac^2 + bch$.

Вираз $ac^2 + bch$ — це сума двох одночленів: ac^2 — місткість рефрижератора; bch — місткість причепа.

Площа зафарбованої фігури, зображеної на рисунку 7, дорівнює

$$ab - \pi r^2 - c^2,$$

де ab — площа прямокутника, πr^2 і c^2 — площі відповідно круга і квадрата, вирізаних із даного прямокутника.

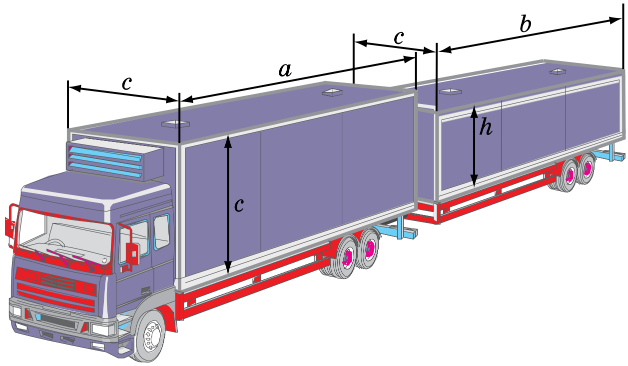


Рис. 6

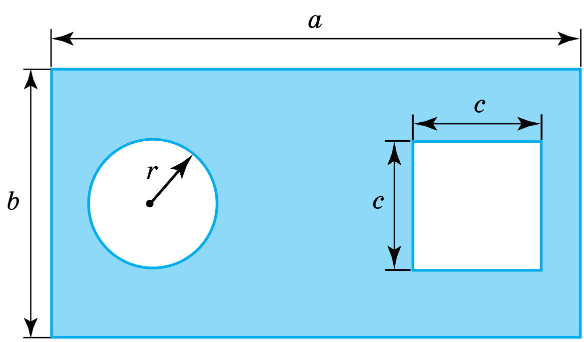


Рис. 7

Оскільки різницю двох виразів завжди можна записати у вигляді суми (наприклад, $a - b = a + (-b)$), то вираз $ab - \pi r^2 - c^2$ теж можна розглядати як суму одночленів:

$$ab - \pi r^2 - c^2 = ab + (-\pi r^2) + (-c^2).$$

Такі вирази називають *многочленами*.

***Многочлен* — це сума кількох одночленів.**

Одночлени, які утворюють многочлен, називають ***членами многочлена***.

Зокрема, многочлен $ac^2 + bch$ має два члени: ac^2 і bch; членами многочлена $ab - \pi r^2 - c^2$ є вирази ab, $-\pi r^2$, $-c^2$.

Многочлен, що складається з двох членів, називають ***двочленом***, многочлен, що містить три члени, — ***тричленом***.

② **Подібні члени многочлена та їх зведення.** Вирази $4a + 3a + a$ і $7b - 3c + 4b - 2b$ є многочленами, тому подібні доданки, що входять до них, називають ***подібними членами*** цих многочленів. Подібні члени у многочлені відшукати неважко: це такі одночлени, які відрізняються між собою лише коефіцієнтом або нічим не відрізняються.

Наприклад, у многочлені $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b$ всі члени подібні; у многочлені $\underline{3mn} - \underline{\underline{4y^2}} + \underline{5mn} + 1 + \underline{\underline{3y^2}}$ подібними є перший і третій, а також другий і п'ятий члени.

Перша пара подібних членів підкреслена однією рискою, а друга — двома рисками.

Подібні члени, як і подібні доданки, можна зводити. Таке зведення виконують на основі розподільного закону множення:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Якщо поміняти місцями ліву і праву частини цієї рівності, то дістанемо: $ac + bc = a(b + c)$.

Скориставшись останньою тотожністю, вираз $5ay + 8ay$ можна перетворити так: $5ay + 8ay = ay(5 + 8) = 13ay$.

Оскільки розподільний закон множення стосується будь-якої кількості доданків, то зводячи подібні члени многочлена $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b$, маємо: $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b = a^2b(4 - 3 + 5 + 4) = 10a^2b$.

Зведення подібних членів многочлена застосовують для його спрощення. Для виконання цього перетворення користуються таким правилом:

щоб звести подібні члени многочлена, потрібно знайти суму їхніх коефіцієнтів і до одержаного результату дописати спільний буквений множник.

Приклад. Звести подібні члени многочлена $2x^2 - 3xy - 5x^2 + 6xy$.

Розв'язання. Многочлен має дві пари подібних членів: $2x^2$ і $-5x^2$ та $-3xy$ і $6xy$. Коефіцієнти першої пари подібних членів дорівнюють 2 і –5, а їхня сума: $2 + (-5) = -3$.

Коефіцієнти другої пари дорівнюють –3 і 6, а їхня сума відповідно дорівнює: $-3 + 6 = 3$.

Отже, в результаті зведення першої пари подібних членів дістанемо $-3x^2$, а другої пари — дістанемо $3xy$. Записують таке перетворення так:

$$\underline{2x^2} - \underline{3xy} - \underline{5x^2} + \underline{6xy} = \underline{(2-5)x^2 + (-3+6)xy} = -3x^2 + 3xy.$$

Згодом підкреслений проміжний запис можна пропускати.

③ **Зведення многочлена до стандартного вигляду.** Поряд із поняттям одночлена стандартного вигляду існує поняття ***многочлена стандартного вигляду***.

Многочленом стандартного вигляду **називають многочлен, що містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних.**

Наприклад, $5a^2b - 3a$ і $4x^2y - 5xy + y^2$ — многочлени стандартного вигляду. А многочлени $0{,}3a^2 - 6b^2b + 1$ чи $8x^2 - 2xy + x^2 - 3$ не є многочленами стандартного вигляду, оскільки у першому з них другий член не є одночленом стандартного вигляду, а в другому не зведено подібні члени $8x^2$ та x^2.

Таким чином, *щоб звести многочлен до стандартного вигляду, потрібно записати кожний член цього многочлена у стандартному вигляді і звести подібні члени.*

Наприклад: $2a^2a + 3xy - 5a^3 = 2a^3 + 3xy - 5a^3 = -3a^3 + 3xy$.

Записувати члени у многочлені можна в різній послідовності. Інколи їх упорядковують за спадними степенями певної змінної, тобто розміщують члени з цією змінною у порядку поступового зменшення показника степеня даної змінної.

Наприклад, многочлен $4ax + 2x^3 - 3 + 5x^2$, упорядкований за спадними степенями змінної x, має вигляд: $2x^3 + 5x^2 + 4ax - 3$.

Цей самий многочлен, упорядкований за зростаючими степенями x, матиме такий вигляд: $-3 + \underline{4ax} + \underline{5x}^2 + \underline{2x}^3$.

Як і для одночлена, існує поняття ***степеня многочлена***. Його визначають за найвищим степенем одночлена з усіх одночленів, що утворюють даний многочлен. Наприклад, серед членів многочлена $7m^2n - 4m^4 + 5m^3n^2 - 6$ найвищий степінь має член $5m^3n^2$; він дорівнює 5 ($3 + 2 = 5$). Тому кажуть, що даний многочлен п'ятого степеня. Многочлен $x^4 - 15x^2y + y^3$ — четвертого степеня (найвищий степінь його члена x^4 дорівнює 4); многочлен $a^2 - 4ab + 3b^2$ — другого степеня, а многочлен $9x - 2$ — першого степеня.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке многочлен? Наведіть приклади.
2. Які члени многочлена називають подібними? Наведіть приклади.
3. Як звести подібні члени многочлена? Проілюструйте прикладом.
4. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду?
5. Які перетворення многочлена слід виконати, щоб звести його до стандартного вигляду?
6. Як визначити степінь многочлена?

Задачі та вправи

108°. Назвіть і запишіть члени многочленів:

а) $3a + 4b - c$; б) $4{,}2a^2 - \frac{3}{4}b + c$;

в) $-2{,}5a^2 + 2a - 1$; г) $4{,}5a^2 - 3a + b$;

ґ) $8a^2 - \frac{4}{7}b - \frac{2}{3}$; д) $-4{,}5a + 2{,}7a^2 - 5b^3$.

109°. Запишіть многочлени у вигляді суми одночленів:

а) $3ab - 4a^2 + 3{,}5b^2 + 3{,}5ab$; б) $-1{,}5x^4 + 3x^2 - 12x - 0{,}4$;

в) $-\frac{4}{7}xy - 1{,}2x^2 - 4{,}5y^2$; г) $2{,}5x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7$.

Зразок. $4{,}8x^2 - \frac{1}{3}xy - 2x = 4{,}8x^2 + \left(-\frac{1}{3}xy\right) + (-2x).$

110°. Запишіть суму одночленів:

а) $4a$ і $0{,}8b$; б) $-4a^2$ і $2b$; в) $3{,}5a$ і $\frac{1}{2}a^2$;

г) $\frac{3}{4}a$ і $\frac{1}{2}b$; ґ) $-3{,}5a^2$ і $3a$; д) $7{,}5a$ і $\frac{3}{2}b$;

е) $5m^2$, $-6mn$ і -8; є) $2{,}1x^3$, $-7x^2$, $0{,}9xy^2$ і $-y$.

111°. Утворіть многочлени з таких одночленів:

а) a^2, $-2ab$, 3; б) $5x^2$, $4x^2y$, $-6x^2$, -1;

в) $-0{,}2c$, $9{,}2d^2$, $-5cd^3$, 1; г) $-2m$, $4m^3n$, $-3n^2$, $-8m^2n^4$.

112. Упорядкуйте два останні многочлени із вправи 111 спочатку за спадними, а потім за зростаючими степенями кожної змінної.

113. Які з виразів є многочленами:

а) $x + 3$; б) $m^2 - 8m + n$; в) $a(a - 3)$;

г) $(4 - x)^2$; ґ) $p^3 - 3p + g + 1$; д) $b^2 + 2(b - c)$;

е) $\frac{x}{2} + y^2 - 1$; є) $3x^2m - 2(1 - mx)$?

114°. Зведіть подібні члени многочленів:

а) $18a - 15a$; $-12a + 18a$; $14a^2 - 29a^2$; $8{,}9a^3 - 1{,}9a^3$;

б) $7{,}5a^2 - 14a^2$; $4\pi r^2 - 3\pi r^2$; $2\pi r + 8\pi r$; $\pi r^2 + 2\pi r^2$;

в) $7a^3 - 2a^3 - 1{,}5a^3$; $4{,}5xy - 2{,}6xy$; $3xy - 5x - 1{,}8xy$;

г) $8{,}4a^2h - 4{,}7a^2h + a^2h$; $3\pi r^2 - 1{,}5\pi r^2$; $\pi r^2h - 0{,}5\pi r^2h$.

115. Знайдіть допущені помилки і виправте їх:

а) $x + x = x^2$; б) $3a + 7a = 10a$; в) $7a - 3a = 4$;

г) $12x - x = 12$; ґ) $x^5 - x^2 = x^3$; д) $2a + 3b = 5ab$;

е) $2ab + 3ab = 5ab$; є) $12x - x = 11x$.

Зведіть подібні члени многочленів (116–117):

116°. а) $0{,}3c^3 - 3c^2 - 0{,}5c^3 + c^2$; б) $4x^2 - 7y^2 - 6y^2 + 3x^2$;

в) $5ab + 4a^2b^2 + 8a^2b^2 - 3ab$; г) $2y^2 - 3y + 2y - y^2$.

117. а) $11m^2 + 4mn - m^2 - 4mn$; б) $-c^3 - d^3 + 2c^3 - d^3$;

в) $\frac{2}{5}xy - 0{,}2x^2y + \frac{5}{6}xy + 4{,}5x^2y$; г) $6\pi r^2h - 1{,}5\pi r^2h + \pi rh$.

118°. Запишіть многочлени у стандартному вигляді:

а) $2{,}4m^2 - 4n^2n + 6m^2 - n^3$; б) $x^4 - 2x \cdot 4y^2 - x^2x + 5xyy$;

в) $a - 5a \cdot 3ab + 7b \cdot 2a^2 + a$; г) $b^{10} - b^6 - b^2b^4 - b^9b + 2b^6$.

119. Спростіть вирази:

а) $-9m^2 \cdot \frac{1}{3}n + m^2n + 24m \cdot \frac{1}{3}mn$;

б) $2ab \cdot \frac{1}{2}ac - 2a \cdot 2ac - a^2bc + 10a^2 \cdot \frac{1}{2}c$;

в) $2abc \cdot 5a + 1\frac{5}{7}a^2 \cdot \frac{7}{12}bc - 2\frac{2}{3}ab \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right)$;

г) $3xy + 2a^2b - 3a^2 \cdot 0{,}5b^2 - 2a^2 \cdot 1{,}5b + 5a^2 \cdot 0{,}5b^2 + 2ab$;

ґ) $8c^2 \cdot 4cd^2 - 5cd \cdot (-9cd^2) - 4c \cdot 5d \cdot 2c^2d$;

д) $5x^2 \cdot 3xy^2 - 4xy \cdot (-8xy^2) - 3x \cdot 5y \cdot 4x^2y$.

120*. Запишіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 8, та обчисліть її, якщо $a = 4$ дм, $b = 1{,}6$ дм.

121*. Запишіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 9, якщо кожен із двох отворів — круг, радіус якого дорівнює r. Обчисліть площу фігури, якщо $a = 4$ дм, $b = 2$ дм, $r = 4$ см.

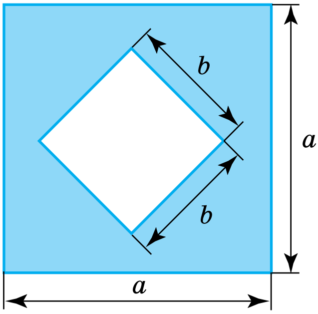


Рис. 8

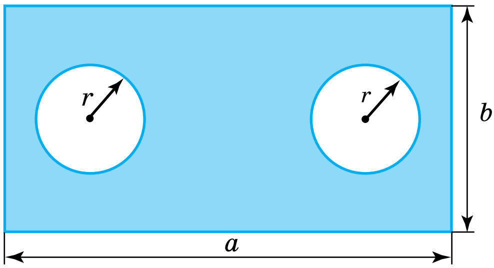


Рис. 9

122*. Складіть вирази для обчислення площі S і довжини лінії, якою обмежена кожна з фігур, зображених на рисунку 10.

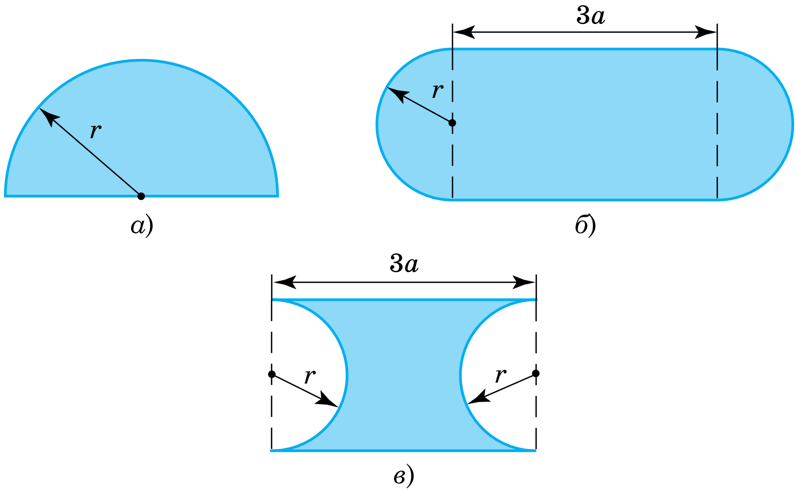


Рис. 10

2.2. Сума і різниця многочленів

! Пригадайте

1. Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+»?
2. Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «–»?

① **Як знайти суму многочленів.** Розглянемо трикутник, зображений на рисунку 11. Його периметр P дорівнює сумі довжин сторін: $P = AB + BC + AC$.

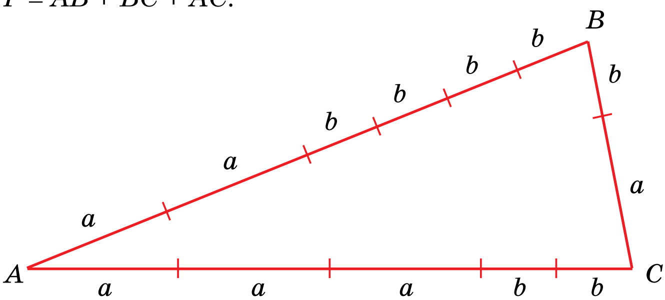


Рис. 11

Оскільки $AB = 2a + 4b$, $BC = a + b$, $AC = 3a + 2b$, то

$$P = (2a + 4b) + (a + b) + (3a + 2b).$$

Знайдений вираз є сумою трьох многочленів: $2a + 4b$, $a + b$ і $3a + 2b$. Розкривши дужки і звівши подібні члени, дістанемо:

$$(2a + 4b) + (a + b) + (3a + 2b) = 2a + 4b + a + b + 3a + 2b = 6a + 7b.$$

Отже,

щоб знайти суму многочленів, потрібно спочатку скласти відповідний вираз, узявши многочлени-доданки в дужки і поставивши між ними знак «+», а потім перетворити одержаний вираз, розкривши дужки і звівши подібні члени.

Приклад 1. Знайти суму многочленів $c^2 - 5cd + 1$ і $8cd - 3$.

Розв'язання. $(c^2 - 5cd + 1) + (8cd - 3) = c^2 - 5cd + 1 + 8cd - 3 = c^2 + 3cd - 2$.

② **Як знайти різницю многочленів.** Різницю многочленів знаходять аналогічно.

Наприклад, щоб від многочлена $3x^2 + 10y$ відняти многочлен $7y - 2$, спочатку складають відповідний вираз — різницю цих многочленів, узявши їх у дужки і поставивши між ними знак «–»: $(3x^2 + 10y) - (7y - 2)$. Потім вираз перетворюють, розкриваючи дужки і зводячи подібні члени:

$$(3x^2 + 10y) - (7y - 2) = 3x^2 + 10y - 7y + 2 = 3x^2 + 3y + 2.$$

Надалі можна не брати в дужки перший многочлен, бо це не впливає на результат віднімання або додавання.

Завдання знаходження суми або різниці многочленів можна сформулювати по-різному:

а) додайте або відніміть многочлени;

б) знайдіть суму або різницю виразів;

в) знайдіть суму або різницю многочленів.

У кожному з таких випадків спочатку записують суму або різницю даних многочленів (якщо її ще не утворено), а потім перетворюють одержаний вираз. Коли ж вираз, що є сумою (різницею) многочленів, уже записано, то його потрібно лише спростити, тобто перетворити у многочлен стандартного вигляду, розкривши дужки і звівши подібні члени.

Приклад 2. Спростити вираз $3m - 12n - (7m + 2n)$.

Розв'язання. $3m - 12n - (7m + 2n) = 3m - 12n - 7m - 2n = -4m - 14n$.

③ **Як узяти многочлен у дужки.** Ви вже знаєте, як записати суму або різницю многочленів і перетворити одержаний вираз у многочлен.

Часто доводиться виконувати обернене перетворення — даний многочлен записувати у вигляді суми або різниці двох многочленів.

Наприклад, многочлен $3m + 2n + 4a - b$ можна подати у вигляді суми двох многочленів так:

$$3m + 2n + 4a - b = 3m + 2n + (4a - b),$$

а у вигляді різниці многочленів так:

$$3m + 2n + 4a - b = 3m + 2n - (-4a + b).$$

Розкривши дужки, легко встановити, що записи виконано правильно.

Головне у таких перетвореннях — правильно записати многочлен, який має бути в дужках. Для цього слід користуватися таким правилом:

знаки членів многочлена, взятого в дужки, не змінюють, якщо перед дужками ставлять знак «плюс», і змінюють на протилежні, якщо перед дужками ставлять знак «мінус».

Запишемо, користуючись цим правилом, многочлен $7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4$ у вигляді суми двочлена і тричлена, утворених відповідно з двох перших і трьох останніх членів даного многочлена. Оскільки для утворення такої суми перед узятим у дужки тричленом слід поставити знак «плюс», то знаки його членів залишаються такими самими, які вони були у многочлені. Маємо:

$$7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4 = 7a^4 - 3b + (-10b^2 + 6d^3 - c^4).$$

Записуючи даний многочлен у вигляді різниці тих самих двочлена і тричлена, знаки взятих у дужки трьох останніх членів даного многочлена слід змінити на протилежні, бо для утворення різниці перед дужками потрібно поставити знак «мінус». Отже,

$$7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4 = 7a^4 - 3b - (10b^2 - 6d^3 + c^4).$$

Корисно пам'ятати і ще одне правило:

щоб змінити знаки членів многочлена, який стоїть у дужках, на протилежні, потрібно змінити на протилежний знак, що стоїть перед дужками.

Наприклад:

1) $a + (6b - c) = a - (c - 6b)$;

2) $m - (3x - 5y) = m + (5y - 3x)$;

3) $c - n(-2a + b - 2d) = c + n(2a - b + 2d)$.

? Запитання для самоперевірки

1. Запишіть два многочлени. Знайдіть їхню суму, а потім їхню різницю. Які тотожні перетворення вам довелося виконати при цьому?
2. Що слід зробити зі знаками всіх членів многочлена, який беруть у дужки зі знаком «+» перед ними, щоб дістати вираз, тотожний даному многочлену?
3. Що слід зробити зі знаками всіх членів многочлена, який беруть у дужки зі знаком «–» перед ними, щоб дістати вираз, тотожний даному многочлену?

Задачі та вправи

123°. Розкрийте дужки:

а) $(4m - 3n)$; б) $1 + (2x + 5y)$;
в) $(7a - 3) + (4b - 8c)$; г) $-(9xy + 2)$;
ґ) $-(13c - d^2)$; д) $20 - (x^2 - xy + y^2)$;
е) $(a - b) + (c - d) - (x + y)$; є) $x + (3a - 1) - (m - 2n - 5)$.

124°. Знайдіть і виправте помилки в рівностях:

а) $x + (2y - 3z) = x + 2y - 3z$; б) $-(x + y) + 5 = -x + y + 5$;
в) $8 + (a + 3b) = 8a + 3b$; г) $-(x + y) + 5 = -x - y - 5$;
ґ) $3m - (c + 5d) = 3m - c + 5d$; д) $-(x + y) + 5 = -x - y + 5$;
е) $(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$; є) $m - (2n + 1) = m - 2n - 1$.

125°. Спростіть вирази:

а) $11a^2 + 7a + (9a^2 - 5a)$; б) $5b + (3b - 2c) + (b - 2c)$;
в) $3x^2 - 5y + (2x^2 - 3y) + (6x^2 + 4y)$; г) $m^2 - 2n - (5m^2 + 4n)$;

ґ) $4x^2y + 8xy - (3x^2y - 5xy^2) + (2x^2y + x^2y)$;
д) $m - (3m - 4) - (m + n)$;
е) $4 + (x^2 - 3x + 2) - (2x^2 + 4x - 1)$;
є) $a + 3 - (a + 2) - (a^2 - 4a - 4)$.

Знайдіть суму і різницю многочленів (126–128):

126°. а) $3x + 28y + 16z$ і $12x + 7z + 6y$;
б) $3a + 42b + 4c$ і $11a + 12b$;
в) $3{,}7xy + 8x^2 - \frac{2}{3}y$ і $12x^2 - 1\frac{1}{3}y + 4{,}5$;
г) $\frac{3}{4}x + 1{,}4y - 3xy$ і $1{,}6y + 1{,}25x$.

127. а) $4x + 12y + 4{,}5$ і $2x + 7y + 3{,}5$;
б) $14x^2 + 14x - 3{,}5$ і $9x^2 - 2{,}5x + 8$;
в) $4{,}5xy - 3{,}2x + 1{,}2$ і $4{,}7xy - 4x + 0{,}8$;
г) $2\frac{3}{5}xy + 3{,}5x - 8$ і $4{,}2xy + 4{,}6x - 4{,}7$.

128. а) $6{,}5x^2 - 7xy + 4x$ і $8{,}3xy + 2{,}5x^2 - 3{,}2x$;
б) $\frac{7}{8}x - 1{,}8xy$ і $-1{,}2xy - \frac{1}{8}x$;
в) $-8{,}5x + 3{,}8y - 0{,}8$ і $-6{,}7x + 6{,}9y$.

129*. Дано три многочлени: $A = a^2 - b^2 + ab$, $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$ і $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$. Знайдіть:
а) $A + B - C$; б) $A - B + C$; в) $A - B - C$; г) $A + B + C$.

130*. Знайдіть многочлен M, якщо:
а) $3x^2 - xy - 3 + M = 5x^2 - xy + 1$; б) $M - (a^2 - 3a + 5) = 6a + 1$.

131*. Користуючись схемою, зображеною на рисунку 12, з’ясуйте, які операції і з якими многочленами виконує машина. Знайдіть остаточний результат.

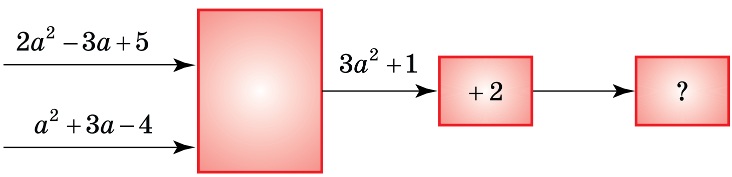


Рис. 12

Обчисліть значення виразів, попередньо спростивши їх (132–133):

132°. а) $(a^2 + 4b - ab) + (-4b + a^2 + ab)$, якщо $a = 0,4$;
б) $(a^2 + 9b - 6a) - (a^2 - 4b + 2,5b)$, якщо $a = 0,5$, $b = 2$;
в) $(4a - 8b + c) - (a - 8b + c)$, якщо $a = 4,25$;
г) $a^2 - 2ab - (3a^2 - ab + a) + (2a^2 + 3ab - b)$, якщо $a = 2,2$, $b = -1,8$.

133*. а) $(5x^2 - 7xy) + (7y^2 - 5xy)$, якщо $x = 4$, $y = -3$;
б) $\left(\frac{4}{5}a - 0,4b\right) - \left(-1,7a + \frac{3}{4}b\right)$, якщо $a = 5$, $b = 4$.

Розв'яжіть рівняння (134–135):

134°. а) $(17 - 5x) - (3x - 11) = 4$;
б) $(43 - 12x) - (33 - 7x) = 4$;
в) $(12,8 - 0,7x) - (15,8 - 0,5x) = 1$;
г) $(23,7 - 0,6x) - (12,2 - 0,8x) = 2,1$.

135. а) $(4x^2 + 12x + 9) - (7x + 4x^2 + 1) = 4$;
б) $(10x^3 - 7x^2 - 9x + 13) + (1 - 10x^3 + 7x^2) = 5$;
в) $(5 - 8x^3 + 7x^2 - 6x) + (8x^3 - 7x^2 - x) = -9$;
г) $x - (5x + 1) = 4x + 1 + (2x - 3)$.

136*. Доведіть, що за будь-яких значень a вирази набувають лише додатних значень:
а) $5a^2 - 4a - (3a^2 - 4a - 2)$;
б) $3a^4 + 2a + (2a^2 - 6a - 7) - (a^2 - 4a - 10)$;
в) $a^2 - 4a - (6a^2 - 7a + 5) - (3a - 5a^2 - 6)$;
г) $a^2 + 2 - (4a - a^2 - 12) + (4a + 5)$.

137*. Запишіть многочлен $a^4 - 2b^3 - 4a^2 + 5a - 3$ у вигляді:
а) суми двочлена $a^4 - 2b^3$ і тричлена;
б) різниці двочлена $a^4 - 2b^3$ і тричлена.

138*. Який двочлен потрібно додати до многочлена $x^2 + 2y^2 - 3xy + 1$, щоб дістати многочлен, що не містить:
а) змінної x; б) змінної y?

139. Запишіть вирази у вигляді многочленів і спростіть їх:
а) $\overline{abc} + \overline{cba}$; б) $\overline{abc} - \overline{ba}$; в) $\overline{abc} + \overline{bc}$; г) $\overline{abc} - \overline{ac}$.

Примітка. Запис $\overline{abc}$ позначає натуральне число, яке має c одиниць, b десятків і a сотень. Тобто $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

140*. Доведіть, що:

а) сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;

б) сума чотирьох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

141*. Знайдіть різницю двоцифрового числа і суми його цифр. Чи ділиться ця різниця на 3?

142*. Доведіть, що:

а) різниця трицифрового числа і суми його цифр ділиться на 9;

б) різниця трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 99.

143*. Доведіть, що:

а) сума чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна сумі a і b;

б) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться на 9.

144*. До задуманого числа справа приписали 0 і одержане число відняли від 143. У результаті дістали задумане число. Яке число задумали?

2.3. Добуток одночлена і многочлена. Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

! Пригадайте

Запишіть розподільний закон множення відносно додавання для випадку:

а) двох доданків у сумі;

б) трьох доданків у сумі.

① **Добуток одночлена і многочлена.** Аналізуючи тотожність, що є записом розподільного закону множення для трьох доданків $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, бачимо, що ліва частина цієї тотожності є добутком одночлена a і многочлена $b + c + d$, а права частина — многочленом, який дістали внаслідок перетворення цього добутку. Щоб вивести правило такого перетворення, звернемо увагу, що кожен член останнього многочлена є добутком одночлена a і відповідного члена даного многочлена $b + c + d$.

Отже,

добуток одночлена і многочлена дорівнює сумі добутків цього одночлена і кожного члена многочлена.

Оскільки добуток — результат множення, а сума — результат додавання, то це твердження можна сформулювати інакше:

щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити одночлен на кожний член многочлена і одержані добутки додати.

Скористаємось цим правилом для перетворення добутку одночлена $2x$ і многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ у многочлен. Маємо:

$$2x(3x^2 - xy + 5y^2) = \underline{2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot (-xy) + 2x \cdot 5y^2} = 6x^3 - 2x^2y + 10xy^2.$$

У подальшому, виконуючи такі перетворення, підкреслений проміжний запис можна пропускати.

② **Винесення спільного множника за дужки.** Помінявши місцями ліву і праву частини тотожності $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, маємо:

$$ab + ac + ad = a(b + c + d).$$

Бачимо, що многочлен $ab + ac + ad$ записано у вигляді добутку множника a, що є спільним для всіх членів многочлена, та іншого многочлена $b + c + d$.

Таке перетворення називають ***розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки***.

Якщо спільний множник виокремлено, то розкладання на множники не викликає труднощів.

Наприклад:

1) $a^2 \cdot 2b - a^2 \cdot 3cd = a^2(2b - 3cd)$;

2) $3x \cdot 5y^2 + 3x \cdot 2 = 3x(5y^2 + 2)$;

3) $3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = 3x(5y^2 - 4y + 1)$.

УВАГА! Часто у випадках, подібних до останнього, припускаються помилки, записуючи: $3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = 3x(5y^2 - 4y)$.

У неправильності одержаної відповіді легко переконатися, перетворивши добуток $3x(5y^2 - 4y)$ у многочлен. Суть помилки полягає в тому, що «загубився» третій член многочлена. Щоб цього уникнути, на перших порах варто використовувати підкреслений проміжний запис:

$$3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = \underline{3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x \cdot 1} = 3x(5y^2 - 4y + 1).$$

Для самоконтролю варто пам'ятати, що кількості членів даного многочлена і многочлена в дужках мають бути однакові.

У більшості випадків спільний для всіх членів многочлена множник доводиться виокремлювати самостійно. Для цього достатньо:

знайти найбільший спільний дільник модулів коефіцієнтів усіх членів многочлена, взятий зі знаком «+» або знаком «–», і дописати до нього як множники змінні, що одночасно входять до всіх членів многочлена, — кожну змінну з найменшим показником, який вона має в даному многочлені.

Приклад. Знайти спільний множник для членів многочлена $12a^3b^3 - 8a^2b^5c$.

Розв'язання. Найбільший спільний дільник 12 і 8 дорівнює 4. До обох членів многочлена входять лише дві змінні a і b. Найменший показник степеня змінної a у многочлені дорівнює 2, змінної b дорівнює 3. Отже, спільним множником є вираз $4a^2b^3$ або $-4a^2b^3$.

Крім знаходження спільного множника, який потім виносять за дужки, важливо вміти записати кожний член многочлена у вигляді добутку цього спільного множника й іншого одночлена, тобто: $12a^3b^3 - 8a^2b^5c = \underline{4a^2b^3} \cdot 3a - \underline{4a^2b^3} \cdot 2b^2c$.

Отже,

щоб розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки, потрібно:

1) *знайти спільний множник членів многочлена*;

2) *записати кожний член многочлена у вигляді добутку знайденого спільного множника та відповідного одночлена*;

3) *записати спільний множник перед дужками, а в дужках — многочлен, що залишається.*

Наприклад: $12x^2y^3 - 16x^3y^2 = \underline{4x^2y^2} \cdot 3y - \underline{4x^2y^2} \cdot 4x = 4x^2y^2(3y - 4x)$.

Згодом підкреслений проміжний запис $4x^2y^2 \cdot 3y - 4x^2y^2 \cdot 4x$ можна пропустити.

За дужки можна винести спільний множник, який є не одночленом, а, наприклад, двочленом або будь-яким іншим многочленом.

Наприклад, у виразі $c^2(2m + n) - 3d(2m + n)$ спільним множником є двочлен $2m + n$, а у виразі $2x(3a - b + 4) + 5y(3a - b + 4)$ — тричлен $3a - b + 4$.

Перетворивши ці вирази, маємо:

$$c^2(2m + n) - 3d(2m + n) = (2m + n)(c^2 - 3d);$$

$$2x(3a - b + 4) + 5y(3a - b + 4) = (3a - b + 4)(2x + 5y).$$

УВАГА! Перетворюючи вирази, не забувайте брати в дужки многочлен, який винесено за дужки. Уникайте помилок на зразок:

$$c^2(2m + n) - 3d(2m + n) = 2m + n \cdot (c^2 - 3d).$$

Отже, на основі розподільного закону множення стосовно додавання можна виконати два тотожні перетворення: перетворити добуток одночлена і многочлена у многочлен, і навпаки — розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки.

Перетворення добутку одночлена і многочлена у многочлен

$$\longrightarrow$$

$$\boldsymbol{a(b + c + d) = ab + ac + ad}$$

$$\longleftarrow$$

Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

Запитання для самоперевірки

1. Які два перетворення виразів виконують на основі розподільного закону множення?
2. Як перетворити добуток одночлена і многочлена у многочлен?
3. Як виконати розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть на прикладі.

Задачі та вправи

145°. Виконайте множення:

а) $12(a + 4)$; б) $3(x - 7)$; в) $6(x + 2y)$;
г) $9(a - 4b)$; ґ) $(x^2 - 8x) \cdot 5$; д) $(3a + 4b) \cdot 9$;
е) $7(a - b + c)$; є) $(2a - 4b + 5c) \cdot 12$; ж) $8(3a^2 - 4b - 6)$.

Запишіть вирази у вигляді многочленів (146–148):

146°. а) $(20{,}5x + 8{,}2y) \cdot 4$; б) $a(3x - 4y - 12z)$;
в) $-8x(11 - 12x)$; г) $-5a(12a - 14b + 15c)$;
ґ) $-3x^2(-x^3 + x - 7)$; д) $(x^2y - xy^2 - xy) \cdot 3xy^2$.

147. а) $-4{,}5x(2x - 3)$; б) $\frac{2}{3}a\,(3a - 6b + 15c)$;
в) $-2{,}5a(a - b)$; г) $0{,}5x(x^2 - 6x + 10)$.

148*. а) $(6a^2 - 7ab)(-a)$; б) $(5k^2 - 3k + 1{,}2)(-0{,}4k)$;
в) $1{,}3a(a^2 - 3a)$; г) $(1 - 0{,}4a + 0{,}6ab)(-0{,}7a)$;
ґ) $12a(6a - 7b)$; д) $(4a^2 - 3a - 1)\left(-\frac{7}{8}a\right)$.

149. Бічна сторона прямокутника дорівнює a м, основа — на 4 м довша. Визначте периметр і площу прямокутника. Периметр знайдіть двома способами. Доведіть, що вирази тотожні.

150. Із двох міст назустріч один одному рухаються автомобілі. Швидкість одного — v км/год, другого — u км/год. Через t годин вони зустрілися. Яка відстань між містами? Задачу розв'яжіть різними способами. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

151. Від пристані вниз річкою одночасно відпливли пліт зі швидкістю v км/год і катер, власна швидкість якого u км/год. Якою буде відстань між плотом і катером через t год? Розв'яжіть задачу двома способами. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

152°. Спростіть вирази:

а) $(a + b) + b(a - b)$; б) $2a^2 - a(2a - 5b)$;

в) $3(x + y) - 5(x - y)$; г) $-2(a - 3b) + a(2 - b)$;

ґ) $m(m + n) - 3(m^2 + mn)$; д) $0,5x(2x - 4y) - 2y(3y - x)$.

153. Виправте допущені помилки і запишіть правильно:

а) $a - 3(a^2 + b) = a - 3a^2 + 3b$; б) $-x^2 + x(y - 2) = x^2 + xy - 2x$;

в) $m - n(-m - 5) = m + mn - 5n$; г) $3x \cdot 2(x + y) = 6x(3x^2 + 3xy)$.

Спростіть вирази (154–156):

154°. а) $15(2a - 3b) - 12(3a - 2b)$; б) $17a(a - b) - 18b(2a - 5b)$;

в) $12,5(6a - 4b) - 3(8a - b)$; г) $19a(a - b) - 21b(2a - 3b)$.

155. а) $(a^2 - 1) \cdot 0,4x - 5x(2 - x^2)$; б) $-0,8a(7a - 1) - 0,9a(4a - 1)$;

в) $4a(x - 8) - 18x(3a - 1)$.

156*. а) $4\frac{1}{3}a^2 - 0,4(2,5a^2 + a - 1)$; б) $4,5a^2 - 3,8a - 0,5a(6a - 7)$;

в) $3,2a(a^2 - a + 1) + (-3,2a^3 + 3,2a^2)$.

157°. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:

а) $2m^2 - m(2m - 5n) - n(2m - n)$;

б) $6x^2 - 5x(-x + 2y) + 4x(2,5y - 3x)$;

в) $10a(5a^2 + 2b) - 6a(3b + 7a^2) - 3ab$;

г) $4c(5d - 2c) - (3c - 2d) \cdot 2c$.

158*. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

а) $5(2n - 1) - (n - 14)$ ділиться на 9;

б) $7(3n - 1) - (n + 3)$ ділиться на 10;

в) $5(2n - 1) - 2(4n - 2,5)$ є парним числом.

159*. Значення якого з виразів при будь-якому цілому значенні n ділиться на 3:

а) $5n(n + 2) - 2(n^2 - 5) - 7n + 6$; б) $3n(n - 2) + 6(n + 1)$;

в) $n(3n - 1) + 4(n + 1)$; г) $7n(n - 3) - 2(2n - 1)$?

160. Доведіть тотожності:

а) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + b^2$; б) $b(a + b) - b(a - b) = 2b^2$;

в) $n(n + 1) - n(n - 1) = 2n$; г) $3(a^2 - ab) - a(2a - 3b) = a^2$.

161. Розв'яжіть рівняння:

а) $3(x - 5) + 18 = 48$; б) $5x - 4(x - 3) = 10$;

в) $6(x - 3) + 2(x + 2) = 10$; г) $5(y - 1) - 3(y - 3) = 0$;

ґ) $2x - 3(x + 4) = 4(x + 2)$; д) $x(x - 2) + 3 = x(x - 5)$.

162°. Знайдіть спільні множники для одночленів:

а) $3x^2$ і $6x^3$; б) $6a^2x$ і $12ax^2$;

в) $9a^2$ і $-6a^2b$; г) $4x^3y^3$ і $8x^2y^2$;

ґ) $6a^3$; $3ab$; $9ab^2$; д) $-40m^4n^2$; $25m^3n^3$; $20m^2n^4$.

163°. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $3m \cdot 4n + 3m \cdot p$; б) $5x \cdot 4y^2 + 5x \cdot 2y + 5x \cdot 3$;

в) $2x^2 \cdot y^2 - 2x^2 \cdot z + 2x^2 \cdot 4$; г) $ab \cdot 7x + ab \cdot 6y + ab$.

164°. Запишіть відповідні одночлени з попередньої вправи у вигляді добутку двох множників, один із яких — знайдений спільний множник.

165. Заповніть пропуски так, щоб утворилися тотожності:

а) $4a^2 \cdot (\ldots - \ldots) = 20a^5 - 4a^2$; б) $(2x^2 - \ldots) \cdot 3x^3 = \ldots - 15x^4$;

в) $(4a^2 - 3b^2) \cdot \ldots = -8a^2b - \ldots$; г) $(11a^2 - \ldots) \cdot \ldots = 1{,}1a^3 - 0{,}3a$;

ґ) $\ldots \cdot (3x^4 - \ldots) = 3{,}6x^6 - 4{,}8ax^2$; д) $-3x^2 \cdot (\ldots - 0{,}4x) = 3x^3 - \ldots$.

166. Розкладіть вирази на множники:

а) $14xy - 21y$; б) $6ab - 3bc$; в) $-15ax - 20ay$;

г) $mn - n^2$; ґ) $y^3 + y^4$; д) $x^2y + xy^2$;

е) $a^3b^2 - a^2b^3$; є) $3a^2x + 6ax^2$; ж) $9a^4 - 12a^3b$;

з) $5xy^2 - 10x^3y^4$; и) $3x^3y^3 + 15x^2y^2$; і) $9m^4 - 6m^3$.

167. Не обчислюючи значення виразу, доведіть, що:

а) $73^2 - 73 \cdot 17$ ділиться на 8; б) $97 \cdot 24 + 97^2$ ділиться на 11;

в) $12^3 + 12^2$ ділиться на 13; г) $49^4 - 49^3$ ділиться на 24.

168. Доведіть, що:

а) $5^6 - 5^5 + 5^4$ ділиться на 7; б) $27^3 - 3^7$ ділиться на 8;

в*) $10^4 + 5^3$ ділиться на 9; г*) $21^3 - 14^3 - 7^3$ ділиться на 5.

169°. Знайдіть значення виразів, попередньо розклавши їх на множники:

а) $5ab + a^2$, якщо $a = 1{,}15$, $b = 0{,}17$;

б) $4m^2 - mn$, якщо $m = 1{,}47$, $n = 5{,}88$;

в) $a^2y - a^3$, якщо $a = -3{,}5$, $y = 6{,}5$;

г) $3{,}27b + b^2$, якщо $b = -2{,}27$;

ґ) $-x^2 - xy$, якщо $x = 0{,}3$, $y = 9{,}7$;

д) $4p^2x + 4px^2$, якщо $p = \frac{1}{4}$, $x = 2\frac{3}{4}$.

170°. Подайте у вигляді добутку:

а) $30a - 75b + 15$;
б) $17a - 17b - 34$;
в) $5x^2 - 10xy + 5y^2$;
г) $a^3 - 2a^2 - a$;
ґ) $m^4 + 3m^3 - m^2$;
д) $5x + 15xy + 10ax$;
е) $3ab - 9ac - 12ad$;
є) $12ax^3 - 8ax^2 + 4ax$;
ж) $3a^2b^3 + 6a^2b^2 - 18a^4b^4$;
з) $16a^4 - 8a^3 - 4a^2$.

171. Обчисліть зручним способом:

а) $5{,}83 \cdot 19 + 5{,}83 \cdot 54 + 5{,}83 \cdot 27$; б) $16{,}22 + 14{,}8 \cdot 16{,}2 - 16{,}2$.

172*. Знайдіть допущені помилки і виправте їх:

а) $2x^2y - 6x^3y^3 + 4xy = 2x(xy - 3x^2y^3 + 2y)$;

б) $x^8 - x^6 + x^2 = x^2(x^4 - x^3)$;

в) $a^9 + 6a^6 - a^3 = a^3(a^6 + 6a^3 - 1)$;

г) $b^2x^3 + cx^2 + x = x(b^2x^2 + cx)$.

173*. Відомо, що $a + b = 15$, а $x + y = m$. Знайдіть:

а) $3a + 3b$;
б) $\frac{1}{2}(a + b)$;
в) $0{,}8a + \frac{4}{5}b$;
г) $7{,}5x + 7\frac{1}{2}y$;
ґ) $0{,}25x + \frac{1}{4}y$;
д) $12x + 8 \cdot 1{,}5y$.

174*. Відомо, що $a + 5b$ ділиться на 9. Чи ділиться:

а) $7a + 35b$ на 9;
б) $15a + 75b$ на 3;
в) $2a + 10b$ на 6;
г) $4a + 20b$ на 18?

175. Розв'яжіть рівняння, розклавши ліву частину на множники:

а) $2x^2 - 3x = 0$;
б) $4x^2 + 10x = 0$;
в) $x^2 - 4{,}2x = 0$;
г) $5x^3 - 7{,}5x^2 = 0$;
ґ) $x^4 - 4x^2 = 0$;
д) $-x^2 + x = 0$.

Розв'язання. а) $x(2x - 3) = 0$.

Добуток двох множників x і $2x - 3$ дорівнює 0 лише тоді, коли один із них або обидва дорівнюють 0. Маємо: $x = 0$; $2x - 3 = 0$; $x = 3 : 2$; $x = 1{,}5$.

Відповідь. $x = 0$; $x = 1{,}5$.

176°. Винесіть за дужки спільний множник:

а) $2a(a - b) + (a - b)$;
б) $x(m + n) - y(m + n)$;
в) $m(a + 4) - n(a + 4)$;
г) $x(y - 1) - y(y - 1)$;
ґ) $a(7 - b) + (7 - b)$;
д) $(b + 5) - a(b + 5)$;
е) $6a(c - d) - 5b(c - d)$;
є) $(m + n) + b^3(m + n)$.

177. Знайдіть значення виразу, спочатку розклавши його на множники:

а) $x(a + 3) - y(a + 3)$, якщо $a = 4$, $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{2}$;

б) $m(n - 5) - n(n - 5)$, якщо $m = 6{,}8$, $n = -3{,}2$.

178*. Складіть двома способами вирази для обчислення площ зафарбованих фігур (рис. 13). Доведіть, що обидва вирази, одержані для кожної фігури, тотожні.

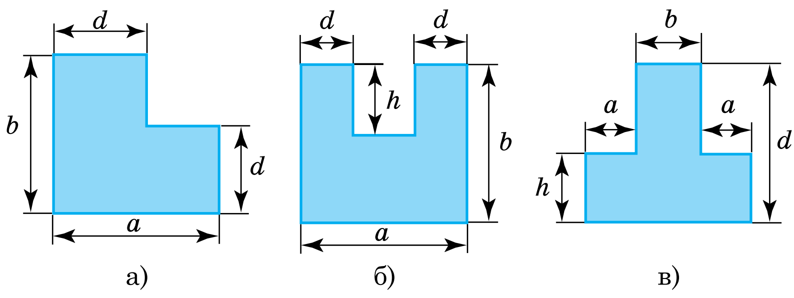


Рис. 13

179*. Для обчислень за допомогою калькулятора використовують тотожності:

$ax^2 + bx + c = (ax + b)x + c$ та $ax^3 + bx^2 + cx + d = ((ax + b)x + c)x + d$.

(Перевірте їх.)

Користуючись калькулятором, обчисліть значення виразів:

а) $7{,}9x^2 + 28x - 29{,}5$, якщо $x = 8{,}26$;

б) $-12,75x^2 - 8,5x + 48,3$, якщо $x = 0,7$;

в) $7,8x^3 - 83,4x^2 + 7x + 28$, якщо $x = 14,5$;

г) $42,5x^3 + 0,28x^2 - 8,75x - 28,4$, якщо $x = 4,35$.

Розв'язання. а) $7,9x^2 + 28x - 29,5 = (7,9x + 28)x - 29,5$.

Якщо $x = 8,26$, то $(7,9 \cdot 8,26 + 28) \cdot 8,26 \cdot 29,5$.

Обчислення на калькуляторі виконуємо в такій послідовності:

$$(\ 7.9 \ \boxed{\times} \ 8.26 \ \boxed{+} \ 28 \ ) \ \boxed{\times} \ 8.26 \ \boxed{-} \ 29.5 \ \boxed{=} \ 740.7704.$$

Результат округлюємо до десятих: $\approx 740,8$.

2.4. Добуток многочленів. Розкладання многочлена на множники способом групування

① **Добуток двох многочленів.** Перетворимо у многочлен вираз $(a + b)(c + d)$, що є добутком двох двочленів $a + b$ і $c + d$. Зробимо це, скориставшись відомим уже правилом перетворення у многочлен добутку одночлена і многочлена. Для цього позначимо двочлен $c + d$ буквою x:

$$c + d = x.$$

Тоді $(a + b)(c + d) = (a + b)x$.

Останній вираз перетворимо як добуток многочлена і одночлена. Маємо:

$$(a + b)x = ax + bx.$$

Підставимо у вираз, що дістали, замість x позначений ним двочлен $c + d$ і ще раз застосуємо правило перетворення добутку одночлена і многочлена у многочлен:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Остаточно маємо:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Помічаємо, що утворений вираз є сумою добутків кожного члена першого двочлена і кожного члена другого двочлена.

Отже,

ЗМІСТ

Розділ II. Функція

Розділ III. Лінійні рівняння та їхні системи

Повторення

Навчальне видання

МАЛЬОВАНИЙ Юрій Іванович
ЛИТВИНЕНКО Григорій Миколайович
БОЙКО Григорій Михайлович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 18.01.2015. Формат 60×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. 16.
Умовн. фарбо-відб. 64.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com