

В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

Профільний рівень

**Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти**



**ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН**

ББК 22.1я72
74.262.21
Т13

- Тадеев В.О.**
Т13 Геометрія (профільний рівень) : підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2019. — 272 с.: іл.

Даний підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для навчання на профільному рівні в 11-х класах закладів загальної середньої освіти. Крім програмового матеріалу містить також додатковий, який відповідає практиці навчання на поглибленому рівні, а також у спеціалізованих фізико-математичних школах, ліцеях та гімназіях. Навчальний матеріал усіх рівнів чітко розмежований, але подається паралельно. Відтак кожен учень при користуванні підручником може вибирати для себе той рівень засвоєння кожної теми, який відповідає його прагненням та можливостям.

У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

ББК 22.1я72
74.262.21

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

Переднє слово до учнів та вчителів

Викладачі математики дають учням завдання кількох варіантів складності. Кожному надається можливість вибрати те, що йому під силу. Оскільки ж розумова праця відбувається в колективі, вона набуває характеру змагання творчих здібностей: ніхто не хоче бути слабшим, кожний прагне випробувати свої сили на складному завданні. В атмосфері змагання розкриваються таланти.

*Василь Сухомлинський.
«Павлівська середня школа»*

Шановні друзі! Підручник, який ви щойно розгорнули, є продовженням підручника «Геометрія–10». У ньому завершується виклад програмового матеріалу з геометрії у просторі (стереометрії), передбаченого для навчання на профільному рівні у загальноосвітніх навчальних закладах. Водночас подається і матеріал для поглибленого вивчення математики. Навчальний матеріал структурований таким чином, що ті питання для вивчення на поглибленому рівні, які виходять за межі профільного рівня, подаються як доповнення, розширення або поглиблення останнього — одразу після матеріалу профільного рівня або паралельно з ним. Водночас, обидва ці рівні чітко розмежовані за допомогою відповідних поліграфічних засобів: матеріал для поглибленого рівня друкується трошки меншим шрифтом і на блакитному фоні.

Принцип рівневої диференціації навчання — найважливіший з тих, що реалізуються в цьому підручнику. Окрім зазначеного поєднання профільного й поглибленого рівнів, для реалізації цього принципу у підручнику запроваджено рубрику «Для тих, хто хоче знати більше». Навчальний матеріал цієї рубрики часом виходить навіть за програму поглибленого рівня, однак все ще тісно пов'язаний з ним і часто викладається у спеціалізованих фізико-математичних школах (ліцєях, гімназіях). Він друкується на світло-сірому фоні і адресується в першу чергу тим учням, які проявляють підвищений інтерес до теоретичних питань математики та її застосувань і в майбутньому планують пов'язати з цим свою професійну діяльність.

Таким чином, кожен учень, незалежно від того, в якій школі чи класі він навчається, має змогу вибрати та опановувати програму того рівня навчання, яка відповідає його інтересам і можливостям. Так само й учитель дістає додаткові засоби для реалізації диференційованого навчання.

Окрім зазначених поліграфічних засобів (шрифтів і кольорів), навчальний матеріал для поглибленого рівня та додаткового ознайомлення супроводжується портретами геніальних математиків Михайла Остроградського  і Софії Ковалевської



. Це має символічне значення, адже життя цих видатних учених засвідчує, зокрема, що математика однаково доступна як для чоловіків, так і для жінок, а також,

що успіхи в науці не залежать від місця народження — Остроградський народився на полтавському хуторі, а Ковалевська — у Москві. Біографії цих видатних математиків є яскравим прикладом того, що для досягнення успіху потрібно бути наполегливим та цілеспрямованим: і Остроградський, і Ковалевська з різних причин спочатку не здобули визнання на батьківщині, однак завдячуючи таланту й сумлінній праці згодом «підкорили» всю Європу.

Другим важливим принципом, втіленим у підручнику (після принципу рівневої диференціації навчання), є *принцип історичної перспективи*, або історичного підходу. Окрім величезного значення для гуманітаризації навчання, для підвищення інтересу до вивчення наук, для виховання моральності та поваги до інших народів і культур, цей принцип має ще й важливу дидактичну функцію. При його реалізації учні у своєму розвитку неначе проходять важливими етапами, які пройшла сама наука, не перескакуючи через них і не опиняючись час від часу несподівано на тих рівнях, які їм ще недоступні.

Реалізація історичного підходу здійснюється двома шляхами. По-перше, поданням історичних відомостей під час розгортання основного змісту, а по-друге, введенням спеціальної рубрики «Сторінки історії», в якій подаються додаткові відомості про наукові дослідження у різні епохи, які безпосередньо пов'язані з темою, що вивчається. Хоча матеріал цієї рубрики не є обов'язковим для вивчення, однак він суттєво розширює кругозір і допомагає збагнути деякі внутрішні й зовнішні мотиви у розвитку математики, а отже, сприяє глибшому розумінню основ цієї науки. «Сторінки історії» друкуються на світло-блакитному фоні з музою історії Клію зі знаменитої

картини Генріха Семирадського «Парнас» : у правій руці муза тримає книгу та перо, а красномовним жестом лівої руки спонукає оглянутись назад.

Третім є *принцип міжпредметних зв'язків та прикладної спрямованості навчання*. Він дає змогу суттєво підвищити мотивацію до навчання, а також постійно підтримувати пізнавальний інтерес учнів. Зокрема, великого значення у підручнику надається зв'язкам геометрії з класичним мистецтвом. З цією метою подаються репродукції живописних і графічних творів, а також зображення архітектурних споруд, що мають «геометричний» підтекст.

І, нарешті, четвертий важливий принцип — це *принцип відповідності логіки розгортання змісту навчання логіці основних методів досліджень у математиці*. Геометрія у підручнику подається не догматично, не як одкровення, що зійшло на обраних і передається від учителя до учнів. Навпаки, підручник постійно спонукає учнів теоретизувати (що, до речі, у дослівному перекладі з грецької означає «придивлятися») і бути активними співучасниками у відкритті нового знання. Відповідно до цього, структурні блоки теорії рідко розпочинаються з «готових» означень нових понять чи формулювання теорем, а здебільшого завершуються ними як результатом проведеного дослідження. У підручнику також витримано належний рівень математичної строгості в обґрунтуванні основних положень і в наведених розв'язаннях задач.

По завершенні вивчення кожного параграфу радимо учням випробувати себе, даючи відповіді на запитання, які для вас приберегла легендарна пташка-Сфінкс

з головою жінки, а тілом лева  (фрагмент картини Густава Моро «Едіп і Сфінкс»), яка, за переказами, пропускала лише тих подорожніх, хто правильно відповідав на її запитання. Запитання до змісту поглибленого рівня надруковані на блакитному фоні, а до матеріалу «Для тих, хто хоче знати більше», — на сірому.

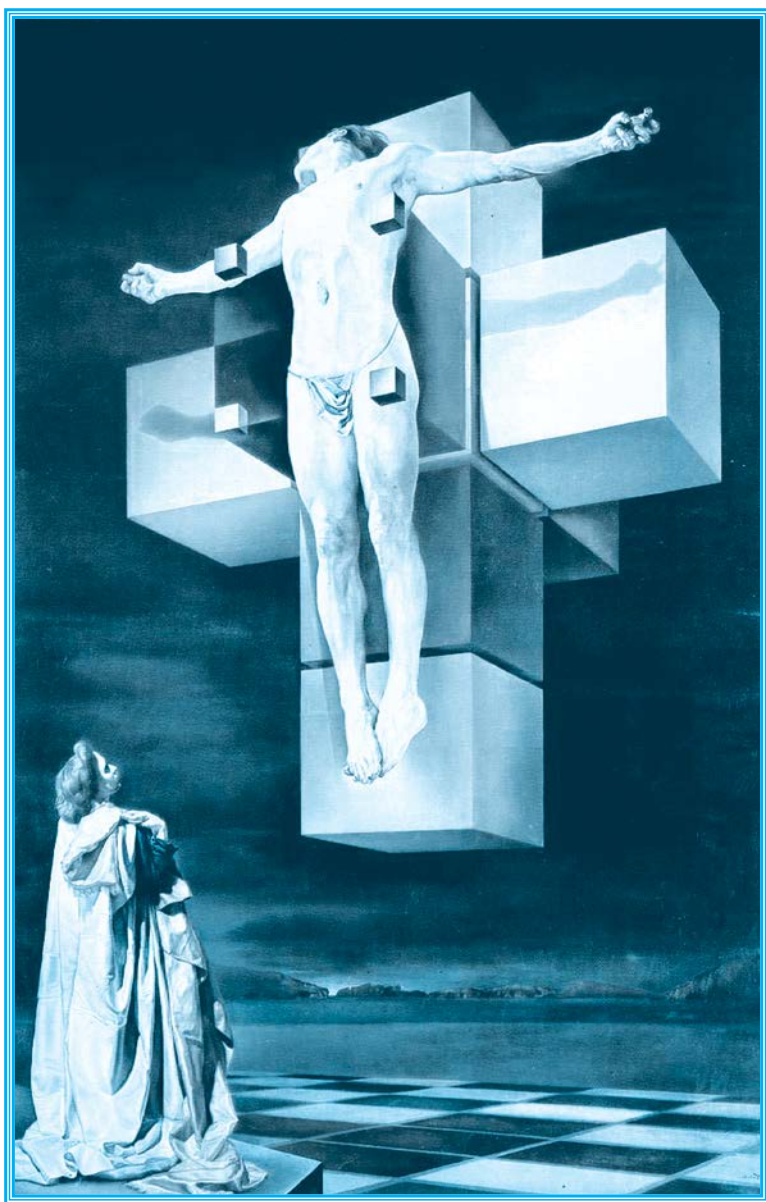
Задачі і вправи розміщені в кінці кожного пункту теорії в порядку наростання їхньої складності. Спочатку звичайним шрифтом друкуються задачі і вправи профільного рівня, потім на блакитному фоні — додаткові задачі для поглибленого рівня, а насамкінець (на сірому фоні) — задачі і вправи до рубрики «Для тих, хто хоче знати більше». У межах кожного теоретичного рівня (профільного або поглибленого) виділяються три рівні складності задач: середній (рівень А, їхні номери позначені кружечками), достатній (рівень Б, номери без додаткових позначок) та високий (рівень В, номери позначені зірочками). Рубрику задач і вправ по всьому

підручнику супроводжує зображення богині мудрості Афіни з її мудрою совою , реконструйоване за мотивами знаменитої скульптури Фідія.

У підручнику вміщені також типові завдання для контрольних робіт. Ці завдання подаються з певним «надлишком», відтак кожен учень може заздалегідь належним чином підготуватися до цих випробувань. Тут збережено той самий принцип градації задач за рівнями.

Чимало задач у підручнику вміщено із розв'язаннями. На їхньому прикладі демонструються застосування поданих теоретичних фактів, а в окремих випадках — і деякі загальні підходи до розв'язування задач зі стереометрії. Крім цього, ці задачі слугують прикладами завдань, які зазвичай пропонуються на різноманітних іспитах і тестуваннях, а подані розв'язання — взірцями для оформлення, яких рекомендується дотримуватись.

Бажаємо всім учням успіхів у вивченні, а вчителям — натхнення у навчанні однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук — геометрії!



Сальвадор Далі. Гала перед розп'яттям на гіперкубі.
Многогранники та їхні комбінації в усі часи
привертати увагу митців

Розділ I

Многогранники

Усі відомості про природні тіла та їхні властивості повинні містити точні дані про кількість, вагу, об'єм, розміри. Практика народжується з тісного поєднання фізики й математики.

Френсіс Бекон

§1. Найпростіші многогранники

1.1. Загальні поняття про геометричні тіла та многогранники

Поняття про геометричне тіло формується шляхом абстрагування від фізичних характеристик реальних просторових тіл, утворених з твердої породи, наприклад, з висохлої глини, суцільного каменю, мінералу, деревини тощо. Зв'язок між геометричними і фізичними тілами такий великий, що дав підставу видатному французькому математику Анрі Пуанкаре (1854–1912) сказати: «Якби у природі не було твердих тіл, то не було б і геометрії».

У геометрії до уваги береться лише зовнішня форма твердих фізичних тіл та просторова структура їхньої внутрішності, що виражається такими характеристиками, як обмеженість, замкненість та зв'язність.

Обмеженість геометричної фігури F означає, що відстань між будь-якими двома її точками не перевищує певної скінченної величини. Інакше цю властивість можна сформулювати так: існує сфера, яка повністю охоплює дану фігуру F (рис. 1.1).

Обмеженими, зокрема, є такі просторові фігури, як призми, піраміди, циліндри і конуси. Необмеженою, для прикладу, є

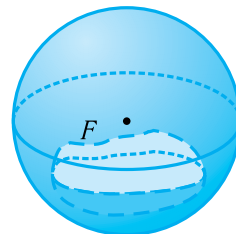


Рис. 1.1

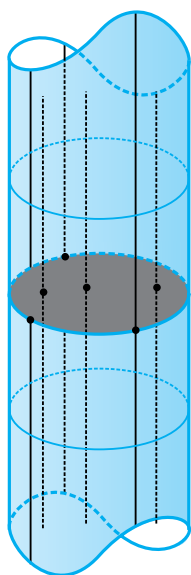


Рис. 1.2

фігура, утворена всіма прямими, що перетинають даний круг і перпендикулярні до його площини — нескінченний циліндр (рис. 1.2).

Кожне фізичне тверде тіло відокремлюється від решти простору своєю межею, або *поверхнею*, а решта його точок є внутрішніми. При цьому належність точки A до межі фігури F (рис. 1.3) означає, очевидно, що на як завгодно малій відстані від A існують як точки фігури F , так і точки, які даний фігурі не належать. Інакше це можна виразити так: будь-яка кулька із центром у *граничній* точці A (тобто у точці межі фігури) містить як точки фігури F , так і точки, які цій фігурі не належать.

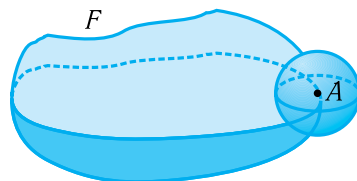


Рис. 1.3

Внутрішність фігури дістанемо, якщо в уяві відокремимо від неї межу, тобто усі її граничні точки. Кожна точка внутрішності фігури називається *внутрішньою* точкою цієї фігури.

Вийде, таким чином, що для кожної внутрішньої точки B фігури F існує таке додатне число r , що всі точки простору, які знаходяться від B на відстані, не більший за r , належать даний фігурі F . Або інакше: для кожної внутрішньої точки B фігури F існує кулька з центром B і деяким радіусом r , яка повністю належить фігурі F (рис. 1.4).

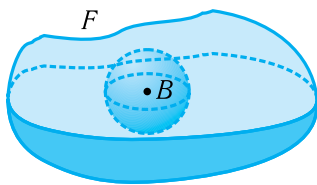


Рис. 1.4

Узагалі взаємозв'язок між внутрішністю просторової фігури і її межею може бути дуже різноманітним.

По-перше, просторова фігура узагалі може не мати межі, як, наприклад, куля, взята без обмежуючої її сфери (*відкрита куля*).

По-друге, просторова фігура може не мати й внутрішності, як, наприклад, будь-яка плоска фігура або сфера.

По-третє, певні граничні точки фігури можуть не бути граничними для внутрішності цієї фігури. Такою є, наприклад, куля «з голками» (рис. 1.5): граничні точки, що належать голкам, не межують з внутрішністю кулі.

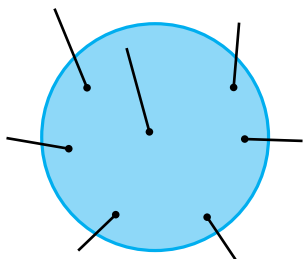


Рис. 1.5

Жодну із цих фігур і подібних на них фігур не відносять до геометричних тіл, вважаючи, таким чином, що *геометричне тіло повинно містити свою межу і ця межа має бути межею його внутрішності*. Цю властивість коротко називають *замкненістю* геометричного тіла.

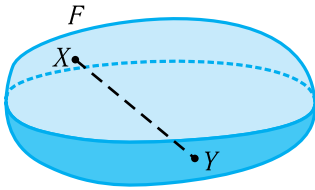


Рис. 1.6

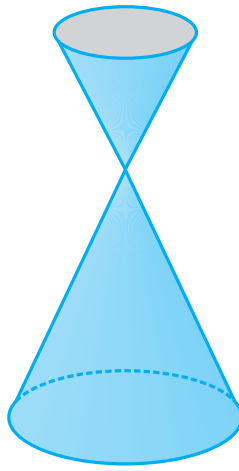


Рис. 1.8

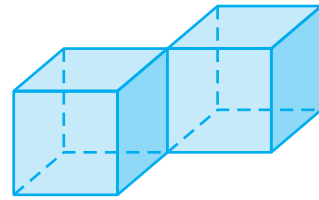


Рис. 1.9

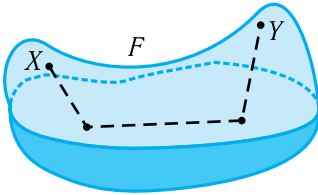


Рис. 1.7

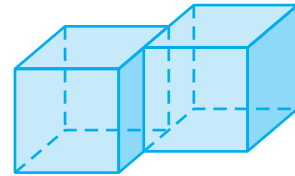


Рис. 1.10

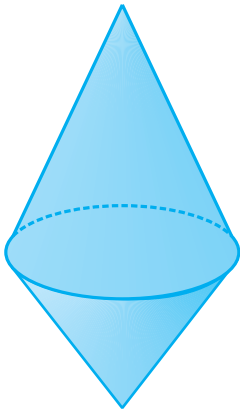


Рис. 1.11

Нарешті, геометричне тіло завжди уявляється *зв'язною* фігурою, тобто не роз'єднаною на окремі частини. Це означає, що будь-які дві внутрішні точки X, Y тіла можна сполучити ламаною, яка належить його внутрішності. Якщо усі ці ламані можуть складатися лише з однієї ланки, то тіло називається *опуклим* (рис. 1.6), а в протилежному разі — *неопуклим* (рис. 1.7). Отже, будь-які дві внутрішні точки опуклого геометричного тіла можна сполучити відрізком, який повністю належить його внутрішності; для неопуклого тіла таке можливо не для всіх внутрішніх точок.

У зв'язку з умовою зв'язності, тілом, наприклад, не вважаються два конуси, що мають тільки спільну вершину (рис. 1.8), або два куби, що мають спільним тільки одне ребро (рис. 1.9). Натомість два куби зі спільною частиною двох граней (рис. 1.10) або два конуси зі спільною основою (рис. 1.11) вважаються тілами.

Підсумовуючи, маємо таке означення.

Означення (геометричного тіла).

Геометричним тілом називається будь-яка обмежена, замкнена і зв'язна просторова геометрична фігура. Межа геометричного тіла називається його *поверхнею*.

Найважливішим класом геометричних тіл є многогранники — просторові аналоги плоских многокутників.

Означення (многогранника).

Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників. Самі ці многокутники називаються *гранями* многогранника, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* многогранника.

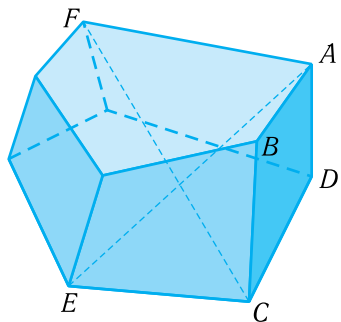


Рис. 1.12

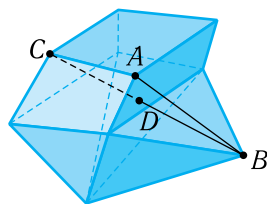


Рис. 1.13

На рис. 1.12 зображено приклад многогранника. Позначено літерами вершини A, B, C, D, E, F , ребра AB, BC, CD, DA, CE, FA і грань $ABCD$.

Відрізок, який сполучає дві вершини многогранника, що не лежать у площині якої-небудь з його граней, називається *діагоналлю* многогранника. У зображеному на рис. 1.12 многограннику проведено діагоналі AE та FC .

Многогранник, який містить усі свої діагоналі, є *опуклим*. В протинному разі, тобто якщо хоча б одна з діагоналей містить точки, які не належать многограннику, многогранник є *неопуклим*. На рис. 1.12 зображено опуклий многогранник, а на рис. 1.13 — неопуклий (в останньому випадку діагональ AB зовсім не належить многограннику, а діагональ CB належить йому лише частково).

Чіткі геометричні форми многогранних тіл завжди привертали особливу увагу як дослідників, так і численних практиків та шукачів прекрасного, які втілювали ці форми у предметах і спорудах, у мистецьких творах, у науковому моделюванні природи та при створенні естетичних концепцій. Своєрідним

гімном цим формам є зображення многогранника (обтесаного каменя) серед інших символів наукового і естетичного осмислення світу на передньому плані знаменитої гравюри Альбрехта Дюрера «Меланхолія» (рис. 1.14).



Рис. 1.14



Рис. 1.15

Природними многогранниками є кристали (рис. 1.15). У середні віки уявлення про те, що саме в кристалах заховані усі таємниці буття, знайшло своє відображення у приписуванні їм надприродної чудодійної сили. Не випадково в одній зі старовинних легенд про чорнокнижника Фауста, які послужили Гете першоджерелом для його знаменитого твору, доктор Фауст бесідує з духом на ймення «Кристалос». У наш час існує ціла індустрія

штучних кристалів найрізноманітнішого призначення. При їхньому створенні велике значення має відповідне геометричне моделювання, а це потребує ґрунтовної геометричної теорії многогранників.

Відповідно до означення, сукупність усіх граней многогранника утворює його поверхню. Однак дуже часто поверхню многогранника ділять на основи і бічну поверхню. Тоді сукупність усіх граней (основ і бічної поверхні) для більшої виразності називають *повною поверхнею* многогранника.

Теорема 1.1 (про відношення площ поверхонь подібних многогранників).

Відношення площ повних поверхонь подібних многогранників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Доведення. Відповідно до означення подібних фігур, два многогранники F і F' є *подібними*, якщо існує таке перетворення фігури F на фігуру F' , при якому для будь-яких двох точок X, Y фігури F та відповідних їм точок X', Y' фігури F' справджується рівність: $X'Y' = kXY$, у якій $k > 0$ — сталий *коефіцієнт подібності* (рис. 1.16). Із цього означення випливає, що будь-які дві відповідні грані подібних многогранників є подібними многокутниками з тим самим коефіцієнтом подібності k . Тоді, як відомо з планіметрії, для площ $S_1, S_2, S_3, \dots$ граней многогранника F і площ $S'_1, S'_2, S'_3, \dots$ відповідних їм граней многогранника F' справджуються рівності:

$$S'_1 = k^2 S_1; \quad S'_2 = k^2 S_2; \quad S'_3 = k^2 S_3; \quad \dots$$

Якщо додамо почленно ці рівності, то дістанемо співвідношення:

$$S' = k^2 S,$$

в якому S — площа повної поверхні многогранника F , а S' — площа повної поверхні многогранника F' . Звідси

$$S' : S = k^2,$$

що й треба було довести.

Наслідок.

Відношення площ повних поверхонь подібних многогранників дорівнює відношенню квадратів їхніх відповідних ребер.

Зауваження. Зазначимо, що часто, особливо у формулюваннях задач, площу повної поверхні многогранника називають просто *повною поверхнею*.

Далі у цьому параграфі ми дамо строгі означення і з'ясуємо найважливіші властивості двох достатньо відомих вам уже видів многогранників — пірамід і призм. Окремим видом пірамід є тетраедри, а окремим видом призм — паралелепіпеди. Тетраедр можна вважати стереометричним аналогом трикутника, а паралелепіпед — паралелограма. Все це вказує на особливе місце цих фігур у стереометрії.

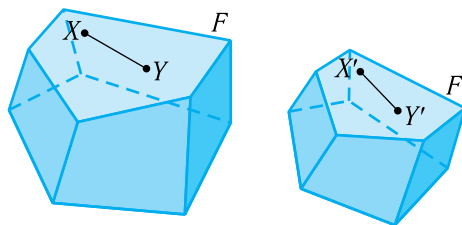


Рис. 1.16

1.2. Тетраедри

Слово «тетраедр» у перекладі з грецької мови означає «чотиригранник» («тетра» — «чотири», «едра» — «грань»). Отже, тетраедр — це многогранник з чотирма гранями.

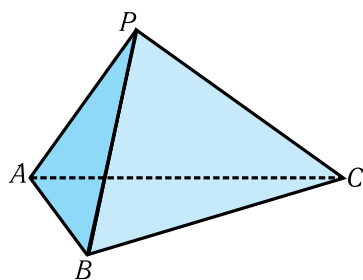


Рис. 1.17

Утворити цю фігуру можна так. Візьмемо у просторі довільний трикутник ABC і точку P , що не лежить у площині цього трикутника (рис. 1.17). Сполучивши точку P відрізками з вершинами трикутника ABC , дістанемо ще три трикутники PAB , PBC та PCA . Многогранник, обмежений чотирма трикутниками ABC , PAB , PBC і PCA , є *тетраедром* (зрозуміло, що самі ці трикутники беруться разом з частинами площин, які вони обмежують, тобто є плоскими трикутниками). Вказані трикутники є *гранями* тетраедра, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* тетраедра. Отже, у тетраедра 4 грані, 6 ребер і 4 вершини.

Тетраедр називають *правильним*, якщо всі його ребра рівні між собою.

Два ребра тетраедра, які не мають спільної вершини, називаються *протилежними ребрами*. На рис. 1.17 протилежними є такі пари ребер: PA і BC , PB і AC , PC і AB .



Тетраедри у побуті



Моріс Ешер.

Подвійний платеноїд.

Гравюра.

Сплетіння двох правильних тетраедрів, можливо, символізує тут гармонію природного й рукотворного у житті людини

Інколи одну з граней тетраедра виділяють, називаючи *основою*, а решту граней — *бічними гранями* тетраедра. Якщо ABC — основа тетраедра, то четверта його вершина P називається *протилежною вершиною* (мається на увазі: протилежною до основи), або просто — *вершиною* тетраедра; тоді A , B , C — вершини основи. Тетраедр з вершиною P і основою ABC позначають як $PABC$.

При зображенні тетраедра його основу зазвичай уявляють розміщеною горизонтально, а вершину — над нею. Ребра, які вважають невидимими, зображають пунктирними лініями.

Задача. Через середини двох ребер основи тетраедра проведено площину, паралельну тільки одному з бічних ребер. Довести, що ця площина перетинає дві бічні грані тетраедра по паралельних відрізках.

Розв'язання. Нехай $PABC$ — даний тетраедр, M, N — середини ребер AC і BC основи тетраедра (рис. 1.18). Тоді проведена площина буде паралельною бічному ребру PC . Справді, якби вона була паралельною, наприклад, PA , то пряма ML її перетину з площиною PAC теж була б паралельною PA (інакше проведена площина перетиналася б з PA). Крім цього, $MN \parallel AB$ — як середня лінія у $\triangle CAB$. Тому, за ознакою паралельності двох площин, мали б: $MNL \parallel APB$, а отже, проведена площина MNL , всупереч умові, була б паралельною ще й іншому бічному ребру PB .

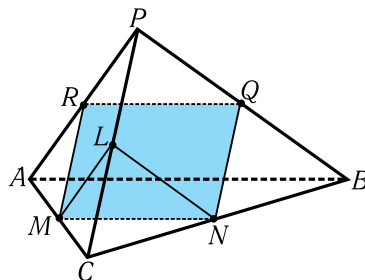


Рис. 1.18

Оскільки таким чином з'ясовано, що проведена площина паралельна ребру PC , то площини PAC і PBC вона перетинає по прямих $MR \parallel PC$ і $NQ \parallel PC$ ($R \in PA$, $Q \in PB$). Тому $MR \parallel NQ$. Твердження задачі доведено. ■



Задачі і вправи

- 1°. Чи існує такий тетраедр, грані якого містять разом 5 прямих кутів?
- 2°. Доведіть, що площина, яка проходить через середини бічних ребер тетраедра, паралельна його основі.
3. Через вершину тетраедра проведено площину, паралельну основі. Побудуйте лінії перетину цієї площини з площинами бічних граней тетраедра.
4. Точки L, M, N є серединами ребер AC, PB і BC тетраедра $PABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною LMN і визначте його периметр, якщо $AB = 6$ см, $PC = 10$ см.
5. Через точку перетину медіан бічної грані тетраедра проведено площину, паралельну основі. Визначте відношення периметра і площі основи тетраедра відповідно до периметра і площі утвореного перерізу.
6. Точки L, M, N належать бічним ребрам PA, PB, PC тетраедра $PABC$. Побудуйте точку перетину площини LMN з прямою, проведеною через вершину P і точку перетину медіан основи ABC даного тетраедра.
- 7*. Яку форму має переріз тетраедра площиною, паралельною двом його протилежним ребрам?

- 8*. Доведіть, що сума квадратів усіх ребер тетраедра в чотири рази більша від суми квадратів трьох відрізків, що сполучають середини протилежних ребер (ці відрізки називаються *середніми лініями* тетраедра).
- 9*. У тетраедрі $PABC$ бісектриси бічних граней PBC , PAC , PAB перетинають ребра BC , AC , AB відповідно у точках A_1 , B_1 , C_1 . Доведіть, що відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 перетинаються в одній точці.

1.3. Піраміди

Означення (піраміди).

*Пірамідою називається многогранник, одна з граней якого є деяким плоским n -кутником (вона називається *основною піраміди*), а решта граней — трикутники зі спільною вершиною (ці грані називаються *бічними гранями* піраміди, а їхня спільна вершина — *вершиною* піраміди). Ребра, які виходять з вершини, називаються *бічними ребрами* піраміди. Бічні грані піраміди утворюють *бічну поверхню*, а разом з основою — *повну поверхню* піраміди.*

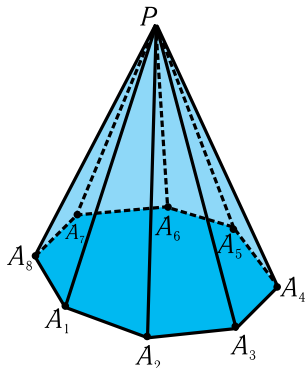


Рис. 1.19

Утворити піраміду можна так. Візьмемо у просторі деякий плоский n -кутник $A_1A_2A_3\dots A_n$ і приймемо його за основу піраміди. Візьмемо також деяку точку P , що не лежить у площині цього n -кутника, і приймемо її за вершину піраміди (рис. 1.19 при $n = 8$). Сполучивши точку P відрізками з усіма вершинами n -кутника, дістанемо бічні грані піраміди: PA_1A_2 , PA_2A_3 , ..., PA_nA_1 . Ребра PA_1 , PA_2 , PA_3 , ..., PA_n (які виходять з вершини) є *бічними ребрами* піраміди.

Зазвичай піраміду з вершиною P і основою $A_1A_2A_3\dots A_n$ позначають так: $PA_1A_2A_3\dots A_n$. При зображенні піраміди її основу зазвичай уявляють розміщеною горизонтально, а вершину — над нею. Ребра, які вважають невидимими, зображають пунктирними лініями.

За кількістю сторін, які має основа, піраміда називається *трикутною*, *чотирикутною*, *п'ятикутною*, *n -кутною*. Вживається також термін *багатокутна піраміда*. Трикутна піраміда має чотири трикутні грані, тобто є *тетраедром*.

Бічні ребра піраміди, які проходять через суміжні вершини основи, називаються *суміжними*, а ті, що



Приклад застосування багатокутних пірамідальних форм в ужитковій архітектурі

проходять через протилежні вершини основи, — *протилежними*. Бічні грані, які проходять через суміжні сторони основи, називаються *суміжними*, а ті, що проходять через протилежні сторони — *протилежними*.

На рис. 1.19 у восьмикутній піраміді $PA_1A_2A_3\dots A_8$ суміжними з бічним ребром PA_2 є ребра PA_1 і PA_3 , а протилежним — ребро PA_5 . Суміжними з бічною гранню PA_1A_2 є грані PA_2A_3 та PA_8A_2 , а протилежною — грань PA_5A_6 .

У тетраедрі будь-які два бічні ребра і будь-які дві бічні грані є суміжними.

Якщо усі бічні ребра піраміди рівні між собою, а в основі лежить правильний многокутник, то така піраміда називається *правильною*. На рис. 1.20 зображено правильну чотирикутну піраміду $PABCD$, а також приклад реального втілення такої геометричної форми.

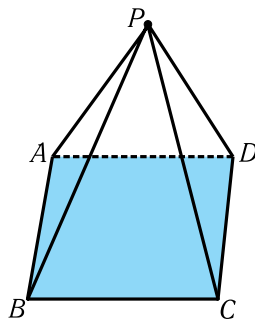


Рис. 1.20

Форму правильних чотирикутних пірамід мають легендарні єгипетські піраміди, які видатний французький архітектор Ле Корбузьє (1887–1965) назвав «німим трактатом з геометрії». З Єгипту, можливо, походить і сам термін «піраміда». За однією з гіпотез, відповідне грецьке слово «піраміс» утворилося від давньоєгипетського «пер о», що означало «великий будинок» — саме так називали єгиптяни усипальниці своїх фараонів.



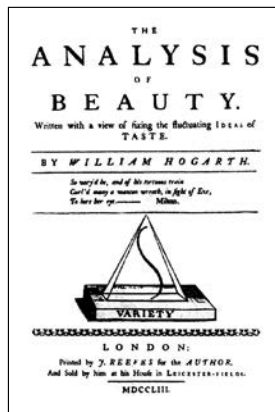
Ліворуч. Знамениті єгипетські піраміди Менкаура, Хафра (або Хефрена) та Хуфу (або Хеопса) поблизу Гізи, що вважаються найпершим із семи чудес світу. Побудовані у II тис. до н. е. Довжина ребра основи найбільшої з них — піраміди Хуфу — становить 230 м, а висота — 146 м.

Праворуч. За подобою єгипетських пірамід у 2002 р. збудовано нове приміщення паризького Лувра. На 2-му форзаці підручника зображено сучасну культову споруду (мечеть в Ісламабаді), в основі композиції якої, окрім класичної чотирикутної піраміди, виділяються ще чотири трикутні піраміди.

Інша гіпотеза про походження терміна «піраміда» виникла в Середні віки. Середньовічні вчені, услід за Платоном, пов'язуючи з пірамідою форму найактивнішої стихії — вогню, вважали, що термін «піраміс» утворився від грецького слова «пор»,

тобто «вогонь». У деяких середньовічних підручниках з геометрії піраміда так і називалася — «вогненне тіло».

Правильні пірамідальні форми здавна приваблювали художників. Нижче подано два приклади.



Ліворуч. «Долина пірамід». Картина литовського художника і композитора Мікалоюса Чюрльоніса (1875–1911). Використовуючи геометричні засоби, художник контрастно зіставив різні сторони буття.

Праворуч. Титульна сторінка з трактату «Аналіз краси» англійського художника і дослідника XVIII ст. Вільяма Хогарта. Трактат видано в Лондоні у 1753 р. «з метою закріпити мінливі ідеї смаку». Символом естетичного кредо автора була зображена тут чотирикутна піраміда зі вписаною вигнутою лінією, яку Хогарт називав «лінією краси». У живописній композиції, за Хогартом, повинні гармонійно поєднуватися геометричні і суто художні начала. Це дає змогу досягти VARIETY, тобто різноманіття.

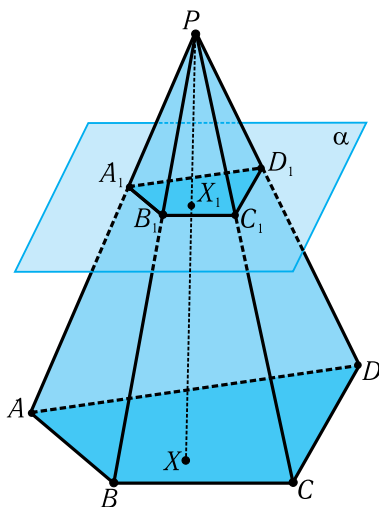


Рис. 1.21

Теорема 1.2 (про переріз піраміди площиною, паралельною основі).

Площина, яка перетинає бічні ребра піраміди у внутрішніх точках і паралельна її основі, перетинає піраміду по многокутнику, гомотетичному основі.

Доведення. Нехай для визначеності дано чотирикутну піраміду $PABCD$, а площина α , яка паралельна основі $ABCD$ піраміди, перетинає бічне ребро PA у внутрішній точці A_1 (рис. 1.21). Оскільки прямі PB , PC , PD перетинають площину ABC , то вони перетинають і паралельну їй площину α . Позначимо відповідні точки перетину через B_1 , C_1 , D_1 . Оскільки прямі A_1B_1 та AB є лініями перетину площини PAB з паралельними площинами α та ABC , то $A_1B_1 \parallel AB$.

А оскільки точка A_1 є внутрішньою для сторони PA трикутника PAB , то точка B_1 є внутрішньою для сторони PB цього трикутника. Аналогічно $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$, $A_1D_1 \parallel AD$, а точки C_1 і D_1 є внутрішніми для бічних ребер PC і PD піраміди. Отже, у перерізі піраміди площиною α матимемо деякий чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$.

Залишається показати, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичний основі $ABCD$. Нехай X_1 — довільна точка чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, а X — точка перетину прямої PX_1 з площиною ABC . Оскільки $A_1X_1 \parallel AX$, і отже, $\triangle PA_1X_1 \sim \triangle PAX$, то $\frac{PX_1}{PX} = \frac{PA_1}{PA} = \text{const}$. Відповідно до означення гомотетичних фігур, яке у стереометрії дослівно те саме, що й у планіметрії, чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$ та $ABCD$ є гомотетичними із центром гомотетії P і коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{PA_1}{PA}$. Теорему доведено.

Наслідок.

Якщо S — площа основи піраміди, а S_1 — площа її перерізу площиною, паралельною основі, то

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{PX_1}{PX} \right)^2,$$

де P — вершина піраміди, X_1 — довільна точка площини перерізу, X — точка перетину прямої PX_1 з площиною основи піраміди (див. рис. 1.21).

Доведення. Даний наслідок випливає з того, що відношення площ S_1 і S подібних фігур у стереометрії, як і в планіметрії, дорівнює квадрату коефіцієнта подібності $k = \frac{PA_1}{PA} = \frac{PX_1}{PX}$.

Задача. Бічне ребро піраміди поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено дві площини, паралельні основі піраміди. Площа основи 900 см^2 . Визначити площі утворених перерізів.

Розв'язання. Нехай дано піраміду з вершиною P , бічне ребро PA якої поділено точками A_1 і A_2 на три рівні частини ($AA_1 = A_1A_2 = A_2P$). Нехай S — площа основи піраміди, S_1 , S_2 — площі многокутників, утворених у перерізі піраміди з площинами, проведеними через точки A_1 , A_2 паралельно основі (рис. 1.22). Відповідно до теореми про переріз піраміди площиною, паралельною основі, утворені перерізи подібні до основи піраміди, причому коефіцієнти подібності дорівнюють:

$$k_1 = \frac{PA_1}{PA} = \frac{2}{3}; \quad k_2 = \frac{PA_2}{PA} = \frac{1}{3}. \quad \text{Тому:}$$

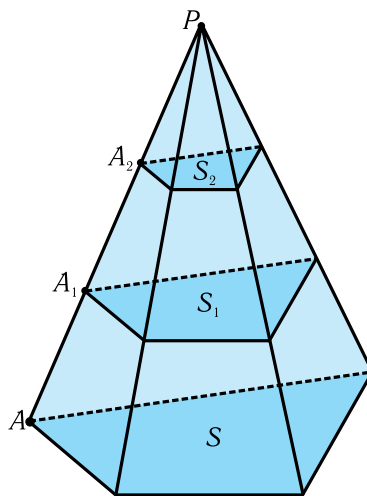


Рис. 1.22

$$S_1 = k_1^2 S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 900 = 400 \text{ (см}^2\text{)}; S_2 = k_2^2 S = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 900 = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 400 см²; 100 см². ■

З доведеної теореми 5.2 про переріз піраміди площиною, паралельною основі, також випливає, що площина, яка перетинає бічні ребра n -кутної піраміди у внутрішніх точках і паралельна основі піраміди, відтинає від цієї піраміди меншу піраміду, гомотетичну даній (див. рис. 1.21). Друга частина перерізаної піраміди теж є многогранником. Він називається

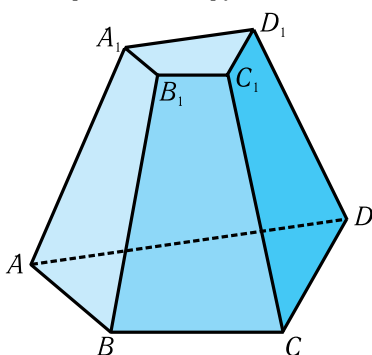


Рис. 1.23

n -кутною зрізаною пірамідою (рис. 1.23).

Грані зрізаної піраміди, що лежать у паралельних площинах, називаються *основами* цієї піраміди, а всі інші грані — *бічними* гранями. Бічні грані зрізаної піраміди — трапеції. Бічні сторони цих трапецій називаються *бічними ребрами* зрізаної піраміди. Бічні грані утворюють *бічну поверхню* цієї піраміди, а разом з основами — *повну поверхню*.

Часто для зручності меншу основу зрізаної піраміди називають *верхньою*, а більшу — *нижньою*. При цьому вважається, що ці основи розміщені у горизонтальних площинах.

Зрізана піраміда, утворена з правильної повної піраміди, теж називається *правильною*. Очевидно, що у зрізаної правильної піраміди всі бічні ребра рівні між собою.

Позначення зрізаної піраміди утворюють з позначень її основ. Наприклад, на рис. 1.23 зображено зрізану піраміду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Задачі і вправи

- 10°. Скільки вершин, ребер і граней має n -кутна піраміда?
11. На зображенні піраміди, в основі якої лежить трапеція, побудуйте зображення прямих, по яких перетинаються площини протилежних бічних граней піраміди.
12. Площа основи піраміди дорівнює 400 см². У якому відношенні, беручи від вершини піраміди, потрібно поділити її бічне ребро, аби площа перерізу, проведеного через точку поділу паралельно основі піраміди, дорівнювала 16 см²?
- 13°. Чи існує зрізана піраміда, всі ребра якої рівні між собою?
14. У зрізаній чотирикутній піраміді сторони однієї з основ дорівнюють 5 см, 7 см, 9 см і 12 см, а найбільша сторона іншої основи дорівнює 36 см. Визначте довжину решти сторін цієї основи.
- 15*. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 2 см² і 32 см². Бічне ребро піраміди поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основам піраміди. Визначте площі утворених перерізів.

1.4. Паралелепіеди

Слово «паралелепіед» у перекладі з грецької мови означає «плоскопаралельне тіло». Утворити цю фігуру можна так. Візьмемо дві паралельні площини α_1 та α і в першій з них побудуємо паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.24, а). Спроектуємо цей паралелограм паралельно деякому напрямку l на площину α . Відповідно до властивостей паралельного проектування, у проекції дістанемо рівний паралелограму $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм $ABCD$, сторони якого відповідно паралельні сторонам паралелограма $A_1B_1C_1D_1$. Отже, чотирикутники A_1B_1BA , B_1C_1CB , C_1D_1CD , D_1A_1AD — теж паралелограми.

Многогранник, обмежений шістьма плоскими паралелограмами $A_1B_1C_1D_1$, $ABCD$, A_1B_1BA , B_1C_1CB , C_1D_1CD та D_1A_1AD , називається *паралелепіедом* (рис. 1.24, б). Самі ці паралелограми є *гранями* паралелепіеда, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* паралелепіеда. Отже, в паралелепіеді 6 граней, 12 ребер і 8 вершин.

Грані $A_1B_1C_1D_1$ та $ABCD$ називаються *основами* паралелепіеда. Одну з основ зазвичай називають *верхньою*, а другу — *нижньою*. Інші чотири грані називають *бічними гранями* паралелепіеда. При цьому ребра A_1A , B_1B , C_1C та D_1D цих граней називають *бічними ребрами* паралелепіеда.

Бічні ребра, які не належать одній грані (A_1A і C_1C , а також B_1B і D_1D), називаються *протилежними*. Дві бічні грані, які мають спільне бічне ребро (наприклад, AA_1B_1B та AA_1D_1D), називаються *суміжними*, а ті, що не мають спільного бічного ребра (наприклад, грані AA_1B_1B та CC_1D_1D), — *протилежними*.

Паралелепіед з нижньою основою $ABCD$ і верхньою основою $A_1B_1C_1D_1$ позначається так: $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (при цьому бічні ребра повинні позначатися однаковими буквами, наприклад, AA_1).

При зображенні паралелепіедів їхні основи зазвичай уявляють розміщеними горизонтально. А з урахуванням властивостей паралельного проектування вони зображуються рівними паралелограмами з відповідно паралельними сторонами. Ребра, які вважаються невидимими, зображують пунктирними лініями.

Бічні грані паралелепіеда утворюють його *бічну* поверхню, а разом з основами — *повну* поверхню, або просто *поверхню* паралелепіеда.

Втім, поділ граней паралелепіеда на основи і бічні грані є суто умовним. Кожну з двох пар протилежних бічних граней паралелепіеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ також можна вважати його основами. Справді, розглянемо, наприклад, грані D_1A_1AD та C_1B_1BC

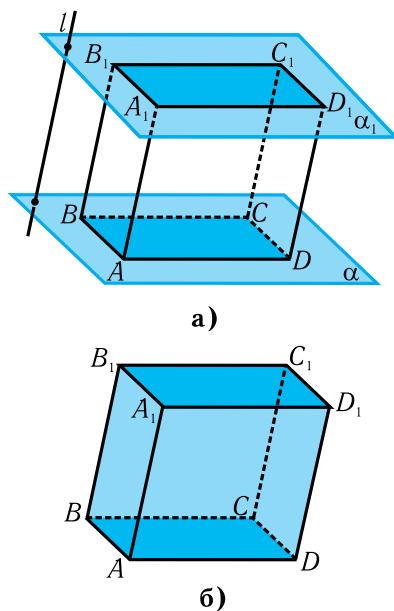


Рис. 1.24

паралелепіеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (див. рис. 1.24, б). Оскільки $D_1 A_1 \parallel C_1 B_1$, а $D_1 D \parallel C_1 C$, то, за ознакою паралельності площин, площини цих граней є паралельними. А оскільки $D_1 C_1 \parallel A_1 B_1 \parallel DC \parallel AB$, то грань $C_1 B_1 BC$ можна розглядати як паралельну проекцію грані $D_1 A_1 AD$. Відповідно до означення, це й означає, що ці грані можна вважати основами даного паралелепіеда.

Як наслідок, маємо таку властивість.

Протилежні бічні грані паралелепіеда є паралельними (тобто лежать у паралельних площинах) і рівними між собою.

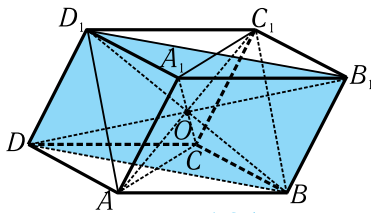


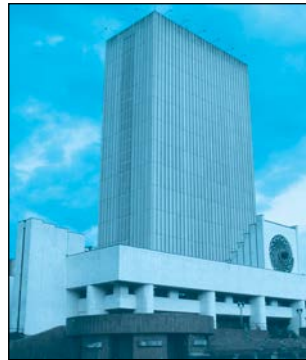
Рис. 1.25

Дві вершини паралелепіеда, які не належать одній грані, називаються *протилежними*. Відрізок, що сполучає дві протилежні вершини, є *діагоналлю* паралелепіеда. Кожний паралелепіед має 4 діагоналі. Переріз паралелепіеда площиною, яка містить два його протилежних бічних ребра, а отже, і дві діагоналі паралелепіеда, називається *діагональним перерізом*.

У паралелепіеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, зображеному на рис. 1.25, діагоналями є відрізки AC_1 , BD_1 , CA_1 та DB_1 , а діагональними перерізами — паралелограми $DD_1 B_1 B$ та $AA_1 C_1 C$. Із того, що діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, легко вивести, що цю властивість мають і діагоналі паралелепіеда, тобто, що *всі чотири діагоналі паралелепіеда перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл*.

Якщо всі бічні грані паралелепіеда є прямокутниками, то такий паралелепіед називається *прямим*. А якщо, крім того, прямокутниками є й основи, то паралелепіед називається *прямокутним*. Непрямі паралелепіеди часто називають *похилими*.

Нижче наводяться два приклади архітектурного втілення прямокутних паралелепіедів. Приклади такого втілення похилих паралелепіедів зображено на першому форзаці підручника.



«Прямокутні паралелепіеди» Інституту науково-технічної та економічної інформації Національної Академії наук та Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського у Києві

Задача. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

Розв'язання. Нехай дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (див. рис. 1.25). Розглядаючи паралелограми $A_1 C_1 C A$ та $B_1 D_1 D B$ і застосовуючи відому властивість діагоналей паралелограма, послідовно дістанемо:

$$AC_1^2 + A_1 C^2 = 2AA_1^2 + 2AC^2;$$

$$B_1 D^2 + BD_1^2 = 2BB_1^2 + 2BD^2.$$

Додаючи ці рівності і враховуючи, що за тією ж властивістю діагоналей паралелограма:

$$2AC^2 + 2BD^2 = 4(AB^2 + AD^2),$$

матимемо:

$$AC_1^2 + A_1 C^2 + B_1 D^2 + BD_1^2 = 2(AA_1^2 + BB_1^2) + 4(AB^2 + AD^2).$$

Оскільки протилежні ребра кожної грані паралелепіпеда рівні між собою, то з останньої рівності просто випливає твердження задачі. ■



Задачі і вправи

- 16°. Площі трьох граней паралелепіпеда відповідно дорівнюють 3 дм², 4 дм² і 5 дм². Знайдіть площу його повної поверхні.
- 17°. Чи може існувати такий паралелепіпед, у якого: а) тільки одна грань є ромбом; б) усі кути кожної грані — гострі?
- 18°. Скільки діагональних перерізів можна провести у паралелепіпеді?
- 19°. Чи можна стверджувати, що два діагональні перерізи паралелепіпеда перетинаються по його діагоналі?
20. Доведіть, що два діагональні перерізи паралелепіпеда перетинаються по прямій, паралельній бічному ребру паралелепіпеда.
21. Доведіть, що відрізок, який сполучає центри основ паралелепіпеда, паралельний бічним ребрам і проходить через точку перетину діагоналей паралелепіпеда.
22. Доведіть, що всі плоскі перерізи паралелепіпеда, які містять по два його ребра, перетинаються в одній точці.
23. Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть, що $AC \parallel A_1 C_1$, а $BD \parallel B_1 D_1$.
24. Доведіть, що будь-який відрізок з кінцями на поверхні паралелепіпеда, який проходить через точку перетину його діагоналей, ділиться цією точкою навпіл (тобто, що точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії).
- 25*. Доведіть, що переріз паралелепіпеда площиною не може бути правильним п'ятикутником.
- 26*. Через кожне ребро тетраедра проведено площину, паралельну протилежному ребру. Доведіть, що цими площинами обмежується паралелепіпед.

1.5. Призми

Паралелепіпед є окремим видом призми. У дослівному перекладі з грецької мови слово «призма» означає «обпиляне тіло».

Означення (призми).

*Призмою називається многогранник, дві грані якого є рівними многокутниками, що лежать у паралельних площинах (вони називаються **основами** призми), а решта граней — паралелограми, які мають спільні сторони із кожною з основ (ці грані називаються **бічними гранями** призми). Ребра призми, які не належать її основам, називаються **бічними ребрами** призми. Всі бічні ребра призми рівні і паралельні. Вершини основ призми є вершинами її бічних граней, а також і вершинами самої призми. Сукупність бічних граней призми утворює її **бічну поверхню**, а разом з основами — **повну поверхню** призми.*

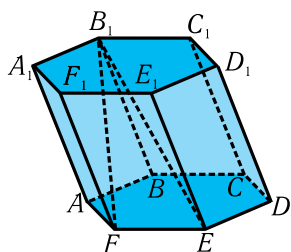
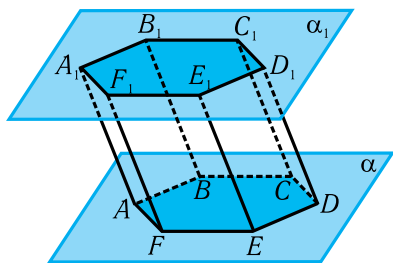


Рис. 1.26

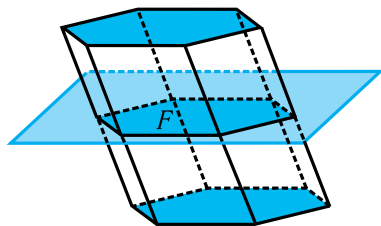


Рис. 1.27

Побудувати призму можна так само з допомогою паралельного проектування, як і паралелепіпед, узявши за одну з основ замість паралелограма деякий багатокутник (рис. 1.26) (порівняйте з рис. 1.24).

Позначають призми аналогічно до паралелепіпедів. Наприклад, призма з основами $ABCDEF$ та $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ позначається так: $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. При цьому, як і для паралелепіпеда, бічні ребра мають позначатися однаковими буквами, наприклад, AA_1 .

Залежно від кількості сторін основи, призма називається *трикутною*, *чотирикутною*, *п'ятикутною*, *n-кутною*. Застосовується також термін *багатокутна призма*. Якщо в основі призми лежить паралелограм, то така призма є паралелепіпедом.

Одну з основ призми для зручності часто називають нижньою, а іншу — верхньою. При зображенні призм їхні основи зазвичай уявляються горизонтальними, а бічні ребра зображаються рівними і паралельними. Ті з ребер призми, які уявляються невидимими, зображаються пунктирними лініями.

Бічні ребра призми, які проходять через суміжні вершини основи, називаються *суміжними*, а ті, що проходять через протилежні вершини основи, — *протилежними*. Бічні грані, які проходять через суміжні сторони основи, називаються *суміжними*, а ті, що проходять через протилежні сторони основи, — *протилежними*.

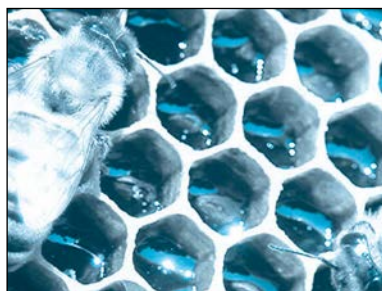
На рис. 1.26 суміжними з бічним ребром AA_1 шестикутної призми $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ є ребра BB_1 та FF_1 , а протилежним — ребро DD_1 . Суміжними з бічною гранню $AA_1 B_1 B$ є грані $BB_1 C_1 C$ і $AA_1 F_1 F$, а протилежною — грань $EE_1 D_1 D$.

Відрізок, який сполучає дві вершини призми, що лежать у різних основах, але не належить одній бічній грані, є *діагоналлю* призми. На рис. 1.26 зображено дві діагоналі FB_1 та $B_1 E$ шестикутної призми $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$.

Оскільки фігуру F , яка утворюється при перетині призми площиною, паралельною основам, можна розглядати як паралельну проекцію основи (рис. 1.27), то, за відповідною властивістю паралельного проектування, ця фігура рівна основам призми.

Якщо бічні грані призми є прямокутниками (тоді бічні ребра перпендикулярні до основ), то така призма називається *прямою*, а в інших випадках — *похилою*. Пряма призма, в основі якої лежить правильний багатокутник, називається *правильною*.

Форму правильних призм мають чимало відомих архітектурних споруд та їхніх композиційних частин.



Ліворуч. «Вежа вітрів», збудована у I ст. н. е. біля стін афінського Акрополя астрономом Андроніком.

Споруда має форму правильної восьмикутної призми, доповненої конусом. Фриз вежі прикрашають скульптурні зображення восьми напівбогів-вітрів. Колись вежу увінчував флюгер із скульптурою Тритона — сина бога Посейдона.

У центрі. Чарунки у бджолиних стільниках мають форму правильних шестикутних призм.

Праворуч. Правильні призми, поставлені поруч і одна на одну — основа композиції Софійського собору в Києві.



Можна запропонувати й інший, але еквівалентний описаному в означенні призми, спосіб геометричної побудови цих фігур. Якщо від кожної точки X плоского многокутника P по один бік від його площини α провести рівні і паралельні між собою відрізки XX_1 , то сукупність цих відрізків якраз і визначить призму (рис. 1.28). Многокутник P буде однією з основ цієї призми, а іншу основу P_1 визначить сукупність кінців X_1 проведених відрізків.

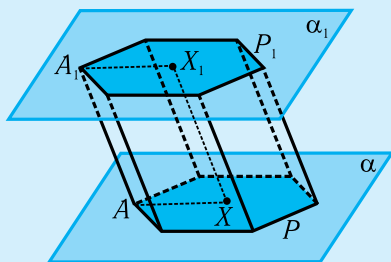


Рис. 1.28

$A_1X_1 \parallel AX$. За ознакою паралельності прямої і площини, звідси випливає, що $A_1X_1 \parallel \alpha$. А за відомою властивістю прямих, паралельних площині, сукупність усіх прямих A_1X_1 належить площині α_1 , яка паралельна площині α і проходить через точку A_1 , що й треба було довести.

Для доведення достатньо показати, що сукупність точок X_1 належить деякій площині α_1 , паралельній площині α фігури P . Тоді фігуру P можна буде вважати за паралельну проекцію фігури P_1 за напрямком XX_1 , тобто справді матимемо описаний в означенні спосіб утворення призми за допомогою паралельного проектування.

Нехай A — довільна фіксована точка фігури P , A_1 — відповідна їй точка фігури P_1 . Тоді у чотирикутнику AXX_1A_1 протилежні сторони AA_1 та XX_1 є рівними і паралельними. Отже, це — паралелограм. Тому



Задачі і вправи

- 27°. Доведіть, що кількість усіх ребер будь-якої призми ділиться на 3.
- 28°. Скільки вершин, скільки ребер і скільки граней має n -кутна призма?
29. Скільки діагоналей має n -кутна призма?
30. Перерізом призми площиною, яка перетинає усі її бічні ребра, є паралелограм. Доведіть, що ця призма — паралелепіпед.
- 31* Доведіть, що коли три діагоналі чотирикутної призми перетинаються в одній точці, то ця призма — паралелепіпед.

1.6. Побудова плоских перерізів многогранників



При розв'язуванні багатьох геометричних задач, у яких йдеться про многогранники, доводиться будувати фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Такі фігури називаються *плоскими перерізами*, або просто *перерізами* многогранника.

Вище було встановлено властивості перерізів призми і піраміди площинами, паралельними основам. Враховуючи ці властивості, такі перерізи будувати дуже просто.

Ще простіше будувати *діагональні перерізи* призми чи піраміди. Це — такі перерізи, площини яких проходять через два бічних ребра, що не належать одній грані даного многогранника (і, отже, містять по одній діагоналі його основи).

Справді, вказаними бічними ребрами визначається перетин січної площини з бічною поверхнею многогранника, а їхніми кінцями — перетин з основами. На рис. 1.29 побудовано діагональні перерізи призми, піраміди та зрізаної піраміди.

У загальному випадку для побудови плоского перерізу многогранника достатньо побудувати прямі перетину (ті, що існують) січної площини з площинами усіх граней — так звані *сліди* січної площини на площинах граней. Потім

буде легко визначити і відрізки цих прямих, що належать граням. Ці відрізки, власне, й будуть сторонами шуканого перерізу — деякого многокутника.

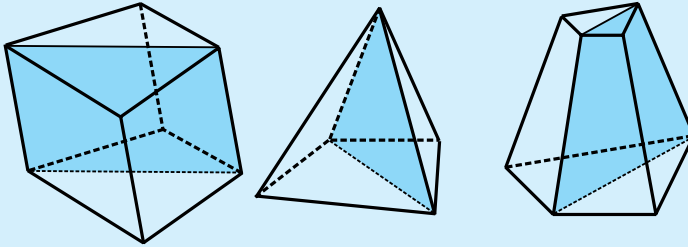
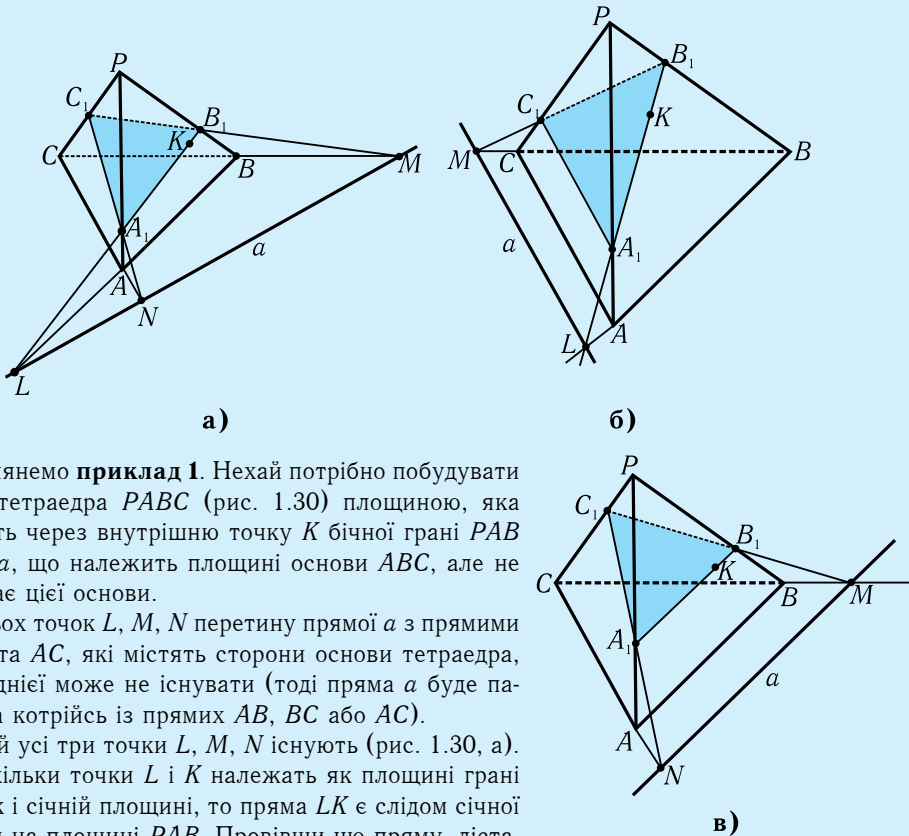


Рис. 1.29

У простіших випадках слід січної площини на площині якоїсь із граней многогранника є заданим, тобто входить до тих даних, якими визначається січна площина.



Розглянемо **приклад 1**. Нехай потрібно побудувати переріз тетраедра $PABC$ (рис. 1.30) площиною, яка проходить через внутрішню точку K бічної грані PAB і пряму a , що належить площині основи ABC , але не перетинає цієї основи.

Із трьох точок L, M, N перетину прямої a з прямими AB, BC та AC , які містять сторони основи тетраедра, тільки однієї може не існувати (тоді пряма a буде паралельна котрійсь із прямих AB, BC або AC).

Нехай усі три точки L, M, N існують (рис. 1.30, а). Тоді, оскільки точки L і K належать як площині грані PAB , так і січній площині, то пряма LK є слідом січної площини на площині PAB . Провівши цю пряму, дістанемо відповідно точки A_1, B_1 її перетину з ребрами PA

Рис. 1.30

і PB . Відрізок A_1B_1 , отже, є перетином січної площини з гранню PAB . Далі проводимо або пряму NA_1 , або пряму MB_1 і визначаємо точку C_1 перетину проведеної прямої з ребром PC . Трикутник $A_1B_1C_1$ є шуканим перерізом.

Якщо $a \parallel AC$ (рис. 1.30, б), то побудова перерізу нічим суттєво не відрізняється. Відсутню точку N просто не використовуємо. Зазначимо, проте, що у цьому разі $A_1C_1 \parallel a$. Аналогічно розглядається випадок, коли $a \parallel BC$.

Якщо ж $a \parallel AB$ (рис. 1.30, в), то слід січної площини на грані PAB повинен бути паралельним a . Провівши його через точку K , знову дістанемо точки A_1, B_1 на ребрах PA, PB . Подальші побудови ті самі, що й у перших двох випадках. Перерізом знову буде деякий трикутник $A_1B_1C_1$. ■

Складнішими є задачі на побудову плоских перерізів многогранників, коли не задано жодного сліду січної площини. Розв'язування таких задач, як правило, починають з побудови сліду на площині основи. **Для цього у січній площині вибирають дві які-небудь прямі і будують точки їхнього перетину з площиною основи. Пряма, що проходить через ці побудовані точки, і буде шуканим слідом.**

Розглянемо **приклад 2**. Нехай потрібно побудувати переріз паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною α , що проходить через точки P, Q, R , взяті на попарно мимобіжних ребрах: $P \in AB, Q \in CC_1, R \in A_1 D_1$ (рис. 1.31).

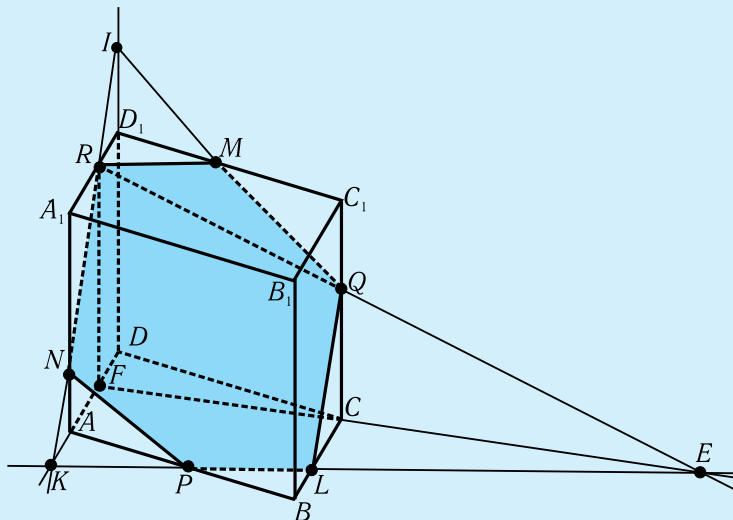


Рис. 1.31

Побудуємо спочатку слід січної площини на площині основи $ABCD$ паралелепіпеда. Одну точку цього сліду — точку P — ми вже маємо. Для побудови ще однієї точки ві-

зьмемо пряму RQ січної площини і побудуємо точку E її перетину з площиною ABC . Для цього проведемо через пряму RQ допоміжну площину RQC . Оскільки ця площина містить бічне ребро CC_1 паралелепіпеда, то площину бічної грані ADD_1A_1 вона перетне по прямій RF , паралельній CC_1 ($F \in AD$). Побудуємо RF . Тоді FC — пряма перетину допоміжної площини з площиною основи $ABCD$, а точка $E = RQ \cap FC$ буде шуканою точкою перетину прямої RQ з площиною ABC . Пряма PE — шуканий слід.

Подальші побудови очевидні й зводяться до послідовного визначення точок $L = PE \cap BC$, $K = PE \cap AD$, $N = KR \cap AA_1$, $I = KR \cap DD_1$, $M = IQ \cap D_1C_1$. Шестикутник $PLQMRN$ — шуканий переріз. Оскільки у кожній з шести граней паралелепіпеда лежить якась із заданих точок P, Q, R січної площини, то ця площина перетинає кожну грань. Отже, перерізом завжди буде шестикутник. Оскільки, крім того, протилежні грані паралелепіпеда є паралельними, то протилежні сторони побудованого перерізу — паралельні. Цим останнім фактом можна скористатися для додаткової перевірки точності виконаних побудов. ■

У процесі виконання останніх побудов фактично було описано **алгоритм побудови точки перетину прямої з площиною**. Оскільки до цієї побудови зводиться побудова будь-якого перерізу, то є сенс описати його окремо.

Отже, **нехай потрібно побудувати точку A перетину прямої a з площиною α** (рис. 1.32). Для цього проводимо через a яку-небудь допоміжну площину β і будуємо пряму b перетину площин α і β . Тоді шуканою буде точка A перетину прямих a і b .

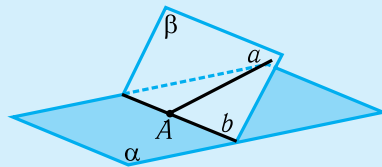


Рис. 1.32

Звичайно, у кожному конкретному застосуванні цього алгоритму допоміжну площину β вибирають найзручнішим способом — так, щоб пряму b було найлегше побудувати. Нижче це ілюструється ще одним прикладом конкретних побудов.

Приклад 3. Побудувати переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, що проходить через точки M, N, L , які належать відповідно грані AA_1C_1C , грані AA_1B_1B та ребру BC . Пряма MN не паралельна основам призми.

Розв'язання. Побудуємо слід січної площини на площині основи ABC призми (рис. 1.33). Для цього побудуємо точку K перетину прямої MN з площиною ABC . Проводимо через MN допоміжну площину, паралельну бічним ребрам призми, і будуємо точки G, Q перетину цієї площини з прямими AC та AB ($MG \parallel CC_1$, $NQ \parallel BB_1$). Тоді $K = GQ \cap MN$, і KL — шуканий слід.

Подальші побудови такі: $F = KL \cap AB$ (або $F = KL \cap AC$, якщо KL не перетинає відрізка AB); $E = FN \cap AA_1$, $D = EM \cap CC_1$. Залежно від того, належить чи не належить точка D ребру CC_1 , січна площина не перетне або перетне основу $A_1B_1C_1$ призми. У пер-

шому випадку шуканим перерізом буде чотирикутник $FLDE$ (рис. 1.33, а), а в другому — п'ятикутник $FLUVE$ ($U = DL \cap B_1C_1$, $V = DE \cap A_1C_1$), причому $UV \parallel LF$ (рис. 1.33, б). ■

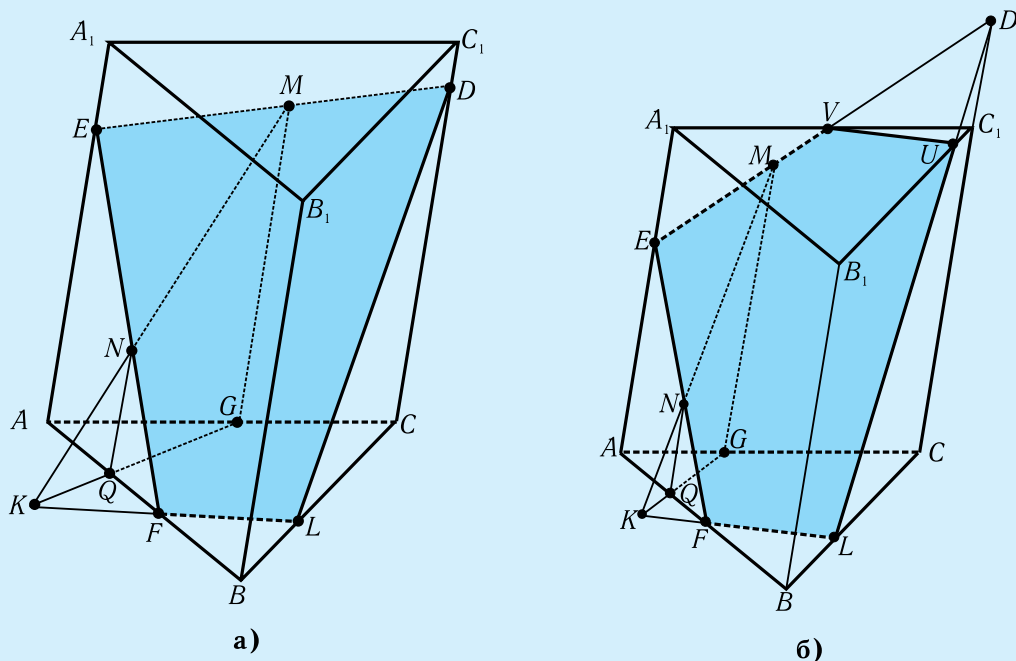


Рис. 1.33



Задачі і вправи

- 32°. Чи можна трикутну призму перерізати площиною так, щоб у перерізі утворився:
а) трикутник; б) чотирикутник; в) п'ятикутник; г) шестикутник?
- 33°. Яку найбільшу кількість сторін може мати плоский переріз n -кутної призми? Як побудувати такий переріз?
- 34°. Яку кількість сторін можуть мати многокутники, утворені в перерізі чотирикутної піраміди площиною? А — в перерізі зрізаної чотирикутної піраміди?
- 35°. Точки M , N належать відповідно ребрам CD і A_1B_1 паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки M , N і паралельна ребру AD .
- 36°. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через вершину піраміди і дві точки, задані на її основі.
- 37°. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через сторону основи і точку, задану на одному із бічних ребер.
- 38°. Точки P , Q — середини ребер CC_1 та A_1D_1 паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз цього паралелепіпеда площиною BPQ .

39. У тетраедрі $PABC$ точка F належить ребру AC . Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку F і паралельна ребрам PA та BC .
40. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через вершину верхньої основи та одну зі сторін нижньої основи.
41. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки, задані на бічних ребрах призми.
42. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки, задані на бічних гранях призми.
43. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через три точки, задані на бічних ребрах піраміди.
44. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через три точки, задані на бічних гранях піраміди.
45. Побудуйте переріз зрізаної чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через середини двох суміжних бічних ребер і середину одного з ребер нижньої основи.
46. Побудуйте переріз зрізаної трикутної піраміди площиною, заданою точкою, яка належить верхній основі, і прямою, яка належить площині нижньої основи і перетинає цю основу.
- 47*. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, заданою точкою, що належить одному з бічних ребер, і прямою, яка лежить у площині нижньої основи і не перетинає цієї основи.
- 48*. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, заданою точкою, що лежить у верхній основі, і прямою, яка лежить у площині нижньої основи і не перетинає цієї основи.
- 49*. Доведіть, що будь-який тетраедр можна перетнути площиною так, щоб у перерізі утворився ромб. Скількома способами це можна зробити?

1.7. Висота піраміди і висота призми

Якщо просторова фігура F хоча б з одного боку обмежується якою-небудь плоскою фігурою, наприклад, многокутником (рис. 1.34), то часто цю плоску фігуру беруть за *основу* даної фігури F , а саму фігуру F характеризують її *висотою* над площиною α основи. Саме в такому розумінні ведуть мову, наприклад, про висоту гірського масиву над уявною горизонтальною площиною його підніжжя або рівня моря.

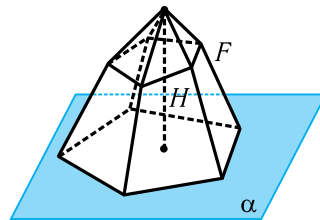


Рис. 1.34

Висотою H просторової фігури F називають найбільший із перпендикулярів (а також і його довжину), проведених з точок фігури F до площини α її основи.

Якщо основа фігури закладена в самому означенні фігури, то її висота визначається відносно цієї основи.

Відповідно до цього, *висотою піраміди* називається перпендикуляр (а також і його довжина), опущений з вершини піраміди на площину її основи. Таким чином, висота піраміди дорівнює відстані від її вершини до площини основи.

На рис. 1.35 SO — висота чотирикутної піраміди $SABCD$, а PQ — висота трикутної піраміди $PLMN$.

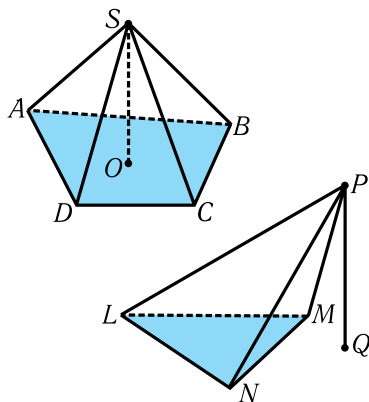


Рис. 1.35

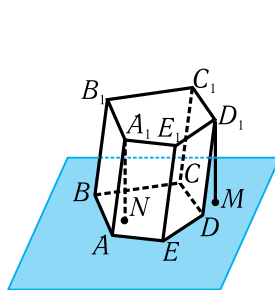


Рис. 1.36

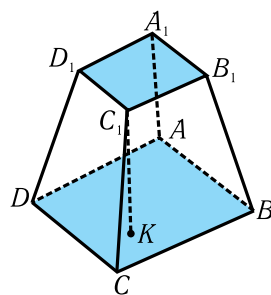


Рис. 1.37

На рис. 1.36 A_1N та D_1M — дві висоти п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, а на рис. 1.37 C_1K — одна з висот зрізаної чотирикутної піраміди $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

Усі висоти призми або зрізаної піраміди рівні між собою — як паралельні відрізки між паралельними площинами основ. Вони дорівнюють відстані між площинами основ цих фігур.

1.8. Прямі і правильні призми

У §1.5 було прийняте описове означення прямих і правильних призм. А саме: *прямою* було названо призму, усі бічні грані якої — прямокутники, а *правильною* — пряму призму, основою якої є правильний многокутник. Тепер можемо з'ясувати коректність цих означень, тобто довести, що фігури з описаними властивостями справді існують.

Якщо у побудові призми, що здійснювалася на основі паралельного проектування (див. рис. 1.26), це проектування буде ортогональним (рис. 1.38), то утворена призма буде прямою.

Справді, тоді бічні ребра призми будуть перпендикулярними до площин основ, а отже, і до усіх прямих, що лежать у цих основах, зокрема, — й до тих, які містять ребра основ призми. Тому всі паралелограми бічних граней призми будуть прямокутниками.

Маючи спосіб побудови прямих призм, ми фактично маємо і спосіб побудови *правильних* призм. Достатньо лише взяти за основу прямої призми правильний многокутник.

Очевидно, що висота прямої і правильної призм дорівнює бічному ребру.

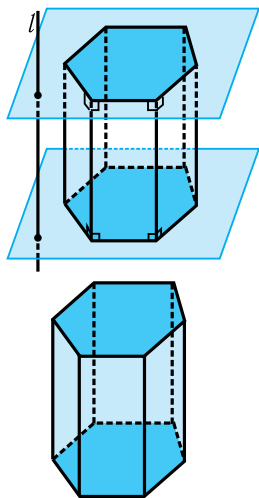


Рис. 1.38

Якщо за основу прямої призми взяти прямокутник, то дістанемо *прямокутний паралелепіпед*.

Якщо, нарешті, за основу прямої призми взяти квадрат, а бічні ребра — рівними сторонами цього квадрата, то матимемо *куб*.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називаються його *лінійними розмірами* або *вимірами*. Отже, у прямокутного паралелепіпеда три виміри. У куба всі виміри рівні між собою.



Сол Ле Вітт. «Два відкритих кубічних модулі» (1975 р.).

Незважаючи на простоту, ця абстрактна скульптура вражає своєю монументальністю і містичністю. Твори такого гатунку притягують до себе у більшій мірі розум глядача, ніж його відчуття.

Теорема 1.3 (про діагональ прямокутного паралелепіпеда).

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його вимірів.

Доведення. Нехай маємо прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.39). Визначимо для прикладу довжину його діагоналі AC_1 . Для цього проведемо відрізок AC . Оскільки бічне ребро CC_1 перпендикулярне до площини ABC основи, то у трикутнику ACC_1 $\angle C = 90^\circ$. Тому, за теоремою Піфагора, $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Але AC — діагональ прямокутника $ABCD$. Тому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Отже, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + CC_1^2$. Оскільки ребра AB , AD , CC_1 дорівнюють вимірам даного паралелепіпеда, то теорему доведено.

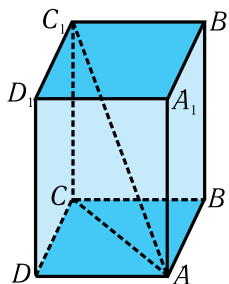


Рис. 1.39

Наслідок 1.

Усі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні між собою.

Справді, квадрат кожної з діагоналей прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів. Отже, усі ці квадрати рівні між собою, а тому рівні й самі діагоналі.

Наслідок 2.

Квадрат діагоналі куба дорівнює потроєному квадрату його ребра.

Це випливає з того, що усі виміри куба дорівнюють довжині його ребра.

Теорему про діагональ прямокутного паралелепіпеда інколи називають *просторовою теоремою Піфагора*. Підставою для цього є те, що саму теорему Піфагора можна сформулювати так: *квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів його вимірів*. Прямокутний паралелепіпед є просторовим аналогом прямокутника, а для його діагоналі справджується аналогічна властивість.

Задача 1. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 1 : 7, а довжини діагоналей його бічних граней дорівнюють 13 см і 37 см. Визначити висоту цього паралелепіпеда.

Розв'язання. Оскільки протилежні грані прямокутного паралелепіпеда — рівні прямокутники, то заданими в задачі є довжини діагоналей суміжних бічних граней паралелепіпеда.

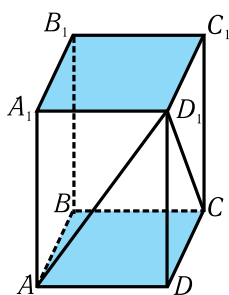


Рис. 1.40

Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.40) $D_1 A = 13$ см, $D_1 C = 37$ см — діагоналі суміжних бічних граней. Сторони DA та DC основи є ортогональними проекціями на площину основи діагоналей $D_1 A$ та $D_1 C$. Оскільки більшому похилому відрізку відповідає і більша проекція, то $AD < CD$, і відповідно до умови, $AD : CD = 1 : 7$. Нехай $AD = k$ см, $CD = 7k$ см, $D_1 D = H$ см. Тоді з $\triangle D_1 DA$ ($\angle D = 90^\circ$) і з $\triangle D_1 DC$ ($\angle D = 90^\circ$), за теоремою Піфагора, дістанемо:

$$\begin{cases} 13^2 = H^2 + k^2, \\ 37^2 = H^2 + 49k^2. \end{cases}$$

Підставляючи значення k^2 з першого рівняння цієї системи у друге і розв'язуючи рівняння, яке утвориться, дістанемо: $H^2 = 144$. Звідси $H = 12$ см. Це і є шукана висота.

Відповідь. 12 см. ■

Задача 2. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α . Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут γ . Визначити висоту призми.

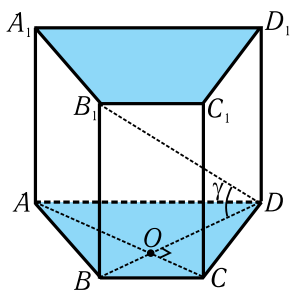


Рис. 1.41

Розв'язання. Нехай маємо пряму призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.41), в основі якої лежить рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, $AB = DC = c$, $\angle A = \angle D = \alpha$. Крім цього, $AC \perp BD$, $\angle B_1 DB = \gamma$.

Оскільки $\triangle ABD = \triangle DCA$ ($AB = CD$, AD — спільна сторона, $\angle BAD = \angle CDA$), то $\angle BDA = \angle CAD$. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції. Тоді AOD — рівнобедрений прямокутний трикутник і, отже, $\angle BDA = 45^\circ$. Застосуємо теорему синусів до $\triangle BDA$: $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha}$. Звідси $BD = \sqrt{2}c \sin \alpha$. Нарешті,

з $\triangle B_1 BD$ ($\angle B = 90^\circ$): $H = BB_1 = BD \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{2}c \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$.

Відповідь. $\sqrt{2}c \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$. ■



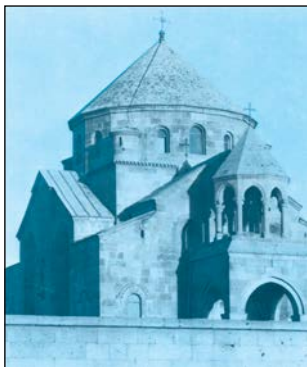
Задачі і вправи

- 50°. Чи існує призма, в якій тільки одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи?
 - 51°. У якому паралелепіпеді ортогональною проекцією його діагоналі на площину основи є діагональ цієї основи?
 - 52°. Чи можна стверджувати, що паралелепіпед є прямим, якщо дві його діагоналі рівні між собою?
 - 53°. Чи можна стверджувати, що паралелепіпед є прямим, якщо обидва його діагональні перерізи, проведені через діагоналі основ, — прямокутники?
 - 54°. Чи може діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда бути квадратом?
 - 55°. Чи можна стверджувати, що паралелепіпед, всі ребра якого рівні між собою, є кубом?
 - 56°. Побудуйте призму, всі бічні грані якої є квадратами. Чи може така призма бути похилою?
 - 57°. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см, 24 см і 8 см. Визначте площу його діагонального перерізу, проведеного через бічне ребро завдовжки 8 см.
 - 58°. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 6 м і 8 м, бічне ребро дорівнює 5 м, а одна з діагоналей основи — 12 м. Визначте довжини діагоналей паралелепіпеда.
 - 59°. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює половині суми квадратів діагоналей трьох його граней, що сходяться в одній вершині.
 60. Доведіть, що паралелепіпед є прямокутним тоді і тільки тоді, коли усі його діагоналі рівні між собою.
 61. Доведіть, що коли пряма перетину діагональних перерізів чотирикутної призми перпендикулярна до площини основи, то ця призма — пряма.
 62. Визначте кут між діагоналями куба.
 63. Ребро куба дорівнює a . Визначте відстань від вершини куба до його діагоналі, що не проходить через цю вершину.
 64. Довжина бічного ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см, довжина діагоналі паралелепіпеда удвічі менша від периметра основи. Визначте площу основи паралелепіпеда.
 65. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 , 28 см^2 і 35 см^2 . Визначте виміри паралелепіпеда.
 66. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані — кут β . Визначте площу основи цього паралелепіпеда.
 - 67*. Як провести січну площину, щоб у перерізі куба цією площиною дістати правильний трикутник з найбільшою площею?
 - 68*. В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб з гострим кутом γ . Діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом α , а площа цієї грані дорівнює Q . Визначте площу повної поверхні цього паралелепіпеда.
69. Основою прямої призми є трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 39 см. Три бічні грані призми — квадрати. Визначте площу повної поверхні цієї призми.
 70. Чи може переріз куба площиною бути правильним шестикутником?
 - 71*. Яку форму може мати переріз куба площиною?
 - 72*. Через діагональ куба з ребром a паралельно одній з діагоналей основи проведено площину. Побудуйте переріз куба цією площиною і визначте його площу.

73*. Довжини діагоналей правильної шестикутної призми дорівнюють 7 см і 8 см. Визначте висоту призми.

74*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з трьома гранями, що сходяться в одній вершині, кути α , β , γ . Доведіть, що $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma \geq \frac{3}{2}$.

1.9. Правильні піраміди і піраміди з рівними бічними ребрами



Правильні багатокутні пірамідали — далі форми у храмі святого Ріпсіме в Ечміадзині (Вірменія, початок VII ст.)

Займемося побудовою *правильних* пірамід, тобто пірамід з рівними бічними ребрами, в основах яких лежать правильні многокутники. Для цього попередньо проведемо *аналіз* цієї задачі на побудову.

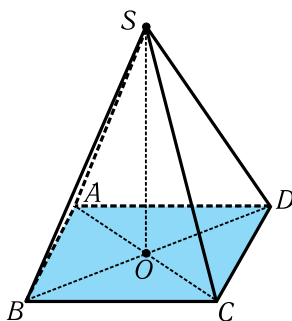


Рис. 1.42

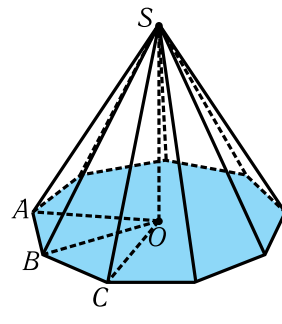


Рис. 1.43

Припустимо, що правильну піраміду побудовано. Нехай, для прикладу, — це чотирикутна піраміда $SABCD$ (рис. 1.42).

Проведемо висоту SO цієї піраміди і сполучимо відрізками точку O з вершинами її основи. Оскільки відрізки OA , OB , OC , OD є проєкціями рівних похилих відрізків SA , SB , SC , SD , то вони рівні між собою. З рівності цих відрізків випливає, що точка O є центром кола, описаного навколо основи $ABCD$, тобто є центром цієї основи.

Звідси випливає такий спосіб побудови правильної піраміди. Беремо правильний многокутник $ABC\dots$ (рис. 1.43) і з центра O цього многокутника до його площини ставимо перпендикуляр OS якої-небудь довжини. Сполучивши точку S з вершинами многокутника $ABC\dots$, дістанемо правильну піраміду $SABC\dots$.

Справді, оскільки бічні ребра SA , SB , SC , ... цієї піраміди мають рівні проєкції, що є радіусами OA , OB , OC , ... кола, описаного навколо основи, то вони — рівні між собою. Отже, за означенням, побудована піраміда — правильна.

Результатом проведених міркувань є така теорема.

Теорема 5.4 (про висоту правильної піраміди).

Основа висоти правильної піраміди збігається з центром основи піраміди. Навпаки, якщо основою піраміди є правильний многокутник, а основа висоти

піраміди збігається із центром цього многокутника, то така піраміда — правильна.

Зокрема, якщо в описаних вище побудовах за основу піраміди взяти рівносторонній трикутник ABC , то дістанемо правильну трикутну піраміду $SABC$ (рис. 1.44). Неважко збагнути, що при належному виборі точки S на промені OS ця піраміда буде правильним тетраедром, тобто матиме рівними усі ребра.

До цього останнього висновку приводять такі міркування. Якщо уявимо собі, що вершина S правильної трикутної піраміди $SABC$ неперервно змінює своє положення на промені OS , то так само неперервно змінюватиметься й довжина бічного ребра SA піраміди, набуваючи при цьому усіх дійсних значень, більших від $R = OA$. Оскільки радіус R кола, описаного навколо правильного трикутника ABC , менший від сторони $a = AB$ цього трикутника (як відомо, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$), то при певному положенні точки S на промені OS бічне ребро SA набуде і значення, що дорівнює a .

Можна вказати й конкретне значення довжини відрізка SO , при якому це відбудеться. З прямокутного трикутника SOA ($\angle SOA = 90^\circ$) знаходимо:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2.$$

Отже, шукане значення $SO = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Це — висота правильного тетраедра, що має ребро a .

З проведеного вище аналізу задачі на побудову правильної піраміди можна здогадатися, що рівні бічні ребра може мати й неправильна піраміда.

Теорема 5.5 (про піраміди з рівними бічними ребрами).

Якщо всі бічні ребра піраміди рівні між собою, то навколо основи цієї піраміди можна описати коло, центр якого збігається з основою висоти піраміди. Навпаки, якщо навколо основи піраміди можна описати коло, центр якого збігається з основою висоти піраміди, то усі бічні ребра такої піраміди є рівними між собою.

Доведення. Нехай, наприклад, у чотирикутній піраміді $SABCD$ бічні ребра SA, SB, SC, SD — рівні між собою (рис. 1.45). Проведемо висоту SO піраміди, а також відрізки OA, OB, OC, OD . Оскільки ці відрізки є проекціями рівних по-

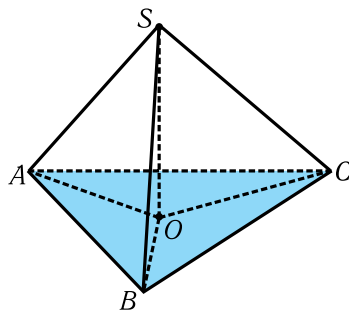


Рис. 1.44

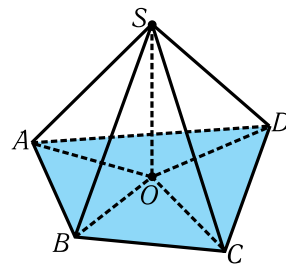


Рис. 1.45

хилих відрізків SA, SB, SC, SD , то вони рівні між собою. Отже, точка O є центром кола, описаного навколо основи $ABCD$ піраміди.

Навпаки, якщо основа O висоти SO піраміди збігається з центром кола, описаного навколо основи $ABCD$, то бічні ребра SA, SB, SC, SD піраміди будуть рівними між собою як похилі відрізки, що проведені з однієї точки і мають рівні проекції — радіуси OA, OB, OC, OD описаного кола. Теорему доведено.

Зауваження. З останньої теореми випливає, що в піраміді, навколо основи якої не можна описати кола, усі бічні ребра не можуть бути рівними між собою. Це, зокрема, стосується пірамід, в основі яких лежать паралелограми, що не є прямокутниками.

Задача 1. У правильній чотирикутній піраміді висота нахилена до площини бічної грані під кутом β . Відстань від середини висоти піраміди до бічної грані дорівнює m . Визначити площу діагонального перерізу піраміди.

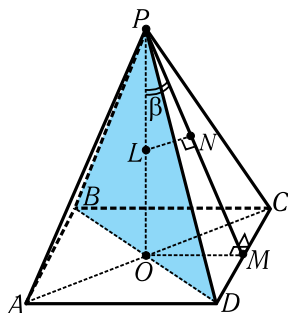


Рис. 1.46

Розв'язання. Нехай $PABCD$ — задана піраміда (рис. 1.46), PO — її висота, точка L — середина висоти. Проведемо $PM \perp CD$ ($M \in CD$), $LN \perp PM$ ($N \in PM$). За теоремою про три перпендикуляри, $OM \perp CD$. З перпендикулярності прямої CD до прямих PM і OM маємо: $CD \perp POM$. Звідси $CD \perp LN$. Оскільки пряма LN перпендикулярна до двох прямих CD і PM площини PCD , то $LN \perp PCD$. За умовою: $LN = m$, $\angle LPN = \beta$.

$$\text{З } \triangle PNL (\angle N = 90^\circ): PL = \frac{m}{\sin \beta}. \text{ Тому: } PO = 2PL = \frac{2m}{\sin \beta}.$$

$$\text{З } \triangle POM (\angle O = 90^\circ): OM = PO \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{2m}{\sin \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{2m}{\cos \beta}.$$

$$\begin{aligned} OM \text{ є медіаною у рівнобедреному прямокутному трикутнику } COD. \text{ Тому } OD = \\ = OM \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}m}{\cos \beta}. \text{ Тепер знаходимо: } S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} PO \cdot BD = PO \cdot OD = \frac{4\sqrt{2}m^2}{\sin \beta \cdot \cos \beta} = \\ = \frac{8\sqrt{2}m^2}{\sin 2\beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \frac{8\sqrt{2}m^2}{\sin 2\beta}. \blacksquare$$



Задача 2. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди відносяться, як 1 : 2. Висота піраміди дорівнює 3 см, а бічне ребро нахилене до більшої основи під кутом 45° . Визначити площі основ піраміди.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — задана правильна трикутна зрізана піраміда (рис. 1.47), $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, O і O_1 — центри основ піраміди. Тоді O_1O — висота піраміди, $O_1O = 3$ см. Площина AOO_1 проходить через вершину відповідної повної піраміди, а тому містить бічне ребро A_1A зрізаної піраміди, тому AA_1O_1O — плоский чотирикутник. Крім цього, вказана площина перетинає паралельні площини основ піраміди

по прямих A_1O_1 та AO і містить висоту піраміди, а тому $A_1O_1 \parallel AO$ і $AO \perp O_1O$. Таким чином, AA_1O_1O — прямокутна трапеція. Проведемо висоту A_1M цієї трапеції. Оскільки $A_1M \parallel O_1O$, то $A_1M \perp ABC$. Тоді відрізок MA є ортогональною проекцією бічного ребра A_1A на площину ABC . За умовою: $\angle A_1AM = 45^\circ$.

З ΔA_1MA ($\angle M = 90^\circ$): $AM = A_1M \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = O_1O \cdot 1 = 3$ см. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC — подібні, а тому відношення радіусів O_1A_1 і OA кіл, описаних навколо цих трикутників, дорівнює відношенню сторін: $O_1A_1 : OA = 1 : 2$; $OA = 2O_1A_1$. З останньої рівності, врахувавши, що $O_1A_1 = OM$, маємо: $OA = 2OM$. Отже, точка M — середина відрізка OA . Тому $OA = 2AM = 6$ см. Знаходимо площу більшої основи через

радіус OA описаного кола: $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 27\sqrt{3}$ (см²). Оскільки $A_1C_1 : AC =$

$$= 1 : 2, \text{ to } S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Відповідь. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см² і $27\sqrt{3}$ см². ■

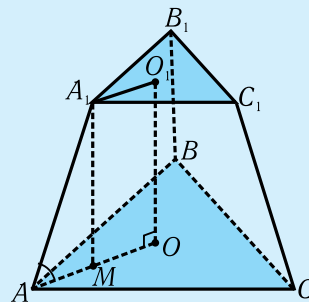


Рис. 1.47



Задачі і вправи

- 75°. Чи може висота піраміди дорівнювати бічному ребру? А — двом бічним ребрам?
- 76°. Чи може висота піраміди належати одній з її бічних граней? А — бути висотою бічної грані?
- 77°. Чи обов'язково основою чотирикутної піраміди з рівними бічними ребрами має бути квадрат?
- 78°. Доведіть, що бічні ребра правильної піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами.
- 79°. Доведіть, що якщо бічні ребра піраміди рівні, то вони нахилені до площини основи під рівними кутами.
- 80°. За даною стороною a основи і бічним ребром b визначте висоту правильної чотирикутної піраміди.
- 81°. Ребро правильного тетраедра дорівнює a . Визначте висоту тетраедра.
82. За даною стороною a основи і бічним ребром b визначте висоту правильної трикутної піраміди.
83. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 14 см, а бічне ребро — 10 см. Визначте площу діагонального перерізу піраміди.
84. Висота правильної шестикутної піраміди дорівнює h , а сторона основи — a . Визначте площі діагональних перерізів цієї піраміди.
- 85*. У правильній чотирикутній піраміді висота бічної грані, проведена з вершини піраміди, нахилена до площини основи під кутом β . Визначте площу повної поверхні піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічної грані дорівнює d .

- 86*. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α . Визначте площу основи піраміди, якщо відстань від середини висоти до бічного ребра дорівнює a .
- 87*. У правильній трикутній піраміді висота нахилена до площини бічної грані під кутом β . Відстань від середини висоти до бічної грані дорівнює b . Визначте площу основи піраміди.
88. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Визначте висоту піраміди.
89. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і висотою 9 см. Бічні ребра піраміди дорівнюють по 13 см. Визначте висоту піраміди.
90. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α . Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Визначте висоту піраміди.
91. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і бічною стороною b . Визначте висоту піраміди, якщо усі її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β .
92. Визначте висоту правильної зрізаної чотирикутної піраміди, якщо сторони її основ дорівнюють 5 см і 17 см, а бічне ребро дорівнює 11 см.
93. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см, висота піраміди дорівнює $\sqrt{13}$ см. Визначте довжину бічного ребра цієї піраміди.
- 94*. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 4 см і 2 см, а гострий кут бічної грані дорівнює 60° . Визначте висоту цієї піраміди.
- 95*. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро завдовжки b нахилене до площини основи під кутом α . Побудуйте переріз цієї піраміди площиною, що проходить через діагональ основи паралельно бічному ребру, і визначте площу цього перерізу.
- 96*. Назвемо правильну піраміду *рівносторонньою*, якщо усі її ребра рівні між собою. Доведіть, що рівносторонніми можуть бути лише трикутні, чотирикутні і п'ятикутні правильні піраміди.

1.10. Площі поверхонь призм і пірамід

1. Площа поверхні призми

Повна поверхня призми складається з обох (рівних) основ та усіх бічних граней. Сукупність усіх бічних граней призми, як ми вже знаємо, називається її *бічною поверхнею*. Отже, для площі повної поверхні $S_{\text{п}}$ призми маємо формулу:

$$S_{\text{п}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{б}},$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми, $S_{\text{б}}$ — площа її бічної поверхні.

Для площі бічної поверхні призми існує просте вираження через бічне ребро і так званий перпендикулярний переріз.

Означення (*перпендикулярного перерізу призми*).

Перпендикулярним або ортогональним перерізом призми називається многокутник, вершинами якого є точки перетину площини, перпендикулярної до бічних ребер призми, з прямими, які містять ці ребра.

На рис. 1.48 зображено два перпендикулярні перерізи $A_0B_0C_0D_0E_0$ та $A'B'C'D'E'$ п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Перший з них справді є перерізом призми,

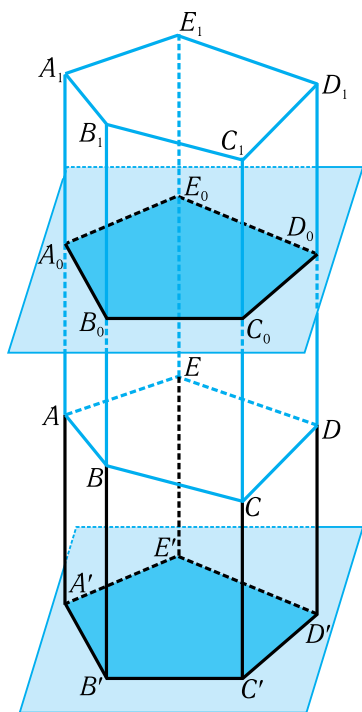


Рис. 1.48

тобто спільною частиною призми і січної площини; його площина перетинає усі бічні ребра призми. Другий же власне перерізом призми не є, оскільки його площина перетинає лише продовження бічних ребер.

Таке розширення поняття ортогонального перерізу, тобто — і на перерізі вигляду $A'B'C'D'E'$, — виправдане хоча б тим, що власне ортогонального перерізу виду $A_0B_0C_0D_0E_0$ призма може і не мати. Це може бути тоді, коли висота призми доволі мала у порівнянні з її бічним ребром, а бічні ребра нахилені до площини основи під доволі гострими кутами (рис. 1.49).

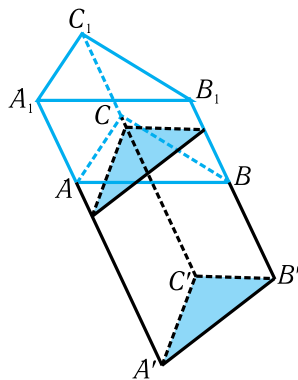


Рис. 1.49

Зрозуміло, що всі сторони перпендикулярного перерізу перпендикулярні до бічних ребер призми.

Оскільки площини всіх перпендикулярних перерізів призми паралельні, то самі ці перерізи рівні між собою: їх можна розглядати як ортогональні проекції основи призми на ці січні площини.

Теорема 1.6 (про площу бічної поверхні призми).

Площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро.

Доведення. Розглянемо для прикладу п'ятикутну призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (див. рис. 1.48). Нехай $A_0B_0C_0D_0E_0$ — перпендикулярний переріз цієї призми. Візьмемо за основи паралелограмів, що є бічними гранями призми, бічні ребра. Тоді висотами цих паралелограмів будуть відповідні сторони перпендикулярного перерізу. Отже,

$$S_6 = AA_1 \cdot A_0B_0 + BB_1 \cdot B_0C_0 + CC_1 \cdot C_0D_0 + DD_1 \cdot D_0C_0 + EE_1 \cdot E_0A_0.$$

А оскільки бічні ребра призми рівні між собою, то

$$S_6 = AA_1 \cdot (A_0B_0 + B_0C_0 + C_0D_0 + D_0C_0 + E_0A_0) = AA_1 \cdot P_0,$$

де P_0 — периметр перпендикулярного перерізу $A_0B_0C_0D_0E_0$. Теорему доведено.

Наслідок.

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро.

Доведення. Це випливає з того, що основа прямої призми є також і її перпендикулярним перерізом.

Задача. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a . Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H . Знайти бічну поверхню паралелепіпеда.

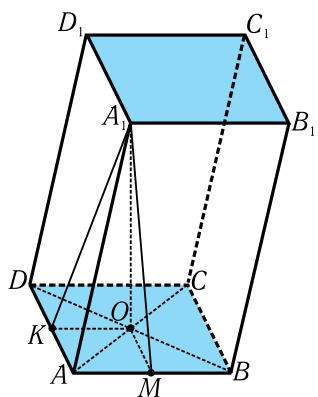


Рис. 1.50

Розв'язання. Нехай основою похилого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = a$, O — центр цього квадрата, $A_1 O = H$ — висота паралелепіпеда (рис. 1.50). Проведемо $OK \perp AD$, $OM \perp AB$. Тоді $A_1 K \perp AD$, $A_1 M \perp AB$, тобто $A_1 K$ і $A_1 M$ — висоти бічних граней $ADD_1 A_1$ та $ABB_1 A_1$ відповідно. Прямокутні трикутники $A_1 OK$ та $A_1 OM$ рівні ($A_1 O$ — спільний катет і $OK = OM = \frac{a}{2}$), звідки $A_1 K = A_1 M$. Оскільки, крім того, $AD = AB$, то $S_{ABB_1 A_1} = S_{ADD_1 A_1}$. Протилежні бічні грані будь-якого паралелепіпеда є рівними. Тому $S_6 = 4 \cdot S_{ABB_1 A_1}$.

$$\text{З } \triangle A_1 OM (\angle O = 90^\circ): A_1 M = \sqrt{A_1 O^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

$$\text{Отже, } S_{ABB_1 A_1} = a \cdot \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{і} \quad S_6 = 4 S_{ABB_1 A_1} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}.$$

Відповідь. $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. ■

2. Площа поверхні піраміди

Повна поверхня піраміди складається з основи та бічних граней. Сукупність усіх бічних граней піраміди, як нам уже відомо, називають її бічною поверхню. Отже, для площі повної поверхні $S_{\text{п}}$ піраміди маємо формулу:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{осн}} + S_6,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди, S_6 — площа її бічної поверхні.

За цією ж формулою обчислюється і повна поверхня зрізаної піраміди. Тільки під $S_{\text{осн}}$ у цьому разі слід розуміти суму площ обох її основ.

Для запису формули площі бічної поверхні правильної піраміди зручно використовувати поняття апофеми.

Означення (апофеми правильної піраміди).

Апофемою правильної піраміди (повної або зрізаної) називається висота її бічної грані, проведена до сторони основи піраміди.

На рис. 1.51 PM — апофема правильної чотирикутної піраміди $PABCD$, а на рис. 1.52 MN — апофема правильної зрізаної чотирикутної піраміди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

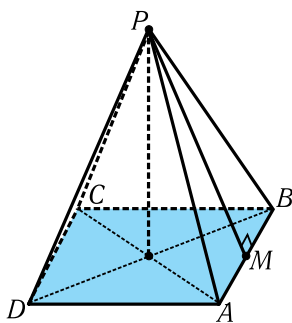


Рис. 1.51

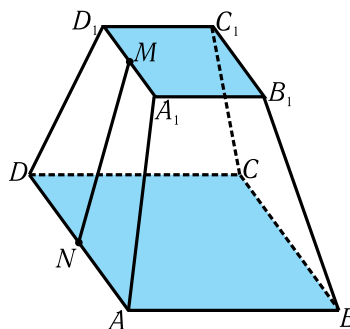


Рис. 1.52

Оскільки усі бічні грані правильної піраміди рівні між собою, то рівні і їхні висоти, проведені до сторін основи, тобто апофеми. Спільна довжина усіх цих відрізків також називається апофемою правильної піраміди.

Теорема 1.7 (про площу бічної поверхні правильної піраміди).

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра основи на апофему.

Доведення. Нехай $PM = h$ — апофема правильної n -кутної піраміди, $AB = a$ — сторона її основи (див. рис. 1.51 для випадку $n = 4$). Оскільки всі бічні грані правильної піраміди рівні між собою, то

$$S_6 = n \cdot S_{\triangle PAB},$$

де $S_{\triangle PAB}$ — площа бічної грані PAB . Але $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PM$. Тому:

$$S_6 = n \cdot S_{\triangle PAB} = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot PM = \frac{1}{2} na \cdot h.$$

А оскільки добуток na дорівнює периметру основи $P_{\text{осн}}$, то звідси

$$S_6 = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h.$$

Теорему доведено.

Теорема 1.8 (про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди).

Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.

Доведення. Нехай $MN = h$ — апофема правильної n -кутної зрізаної піраміди, $AD = a$ та $A_1D_1 = a_1$ — сторони її основ (див. рис. 1.52 для випадку $n = 4$). Площа бічної поверхні цієї піраміди

$$S_6 = n \cdot S_{A_1D_1DA},$$

де $S_{A_1D_1DA}$ — площа бічної грані (трапеції) A_1D_1DA . В свою чергу,

$$S_{A_1D_1DA} = \frac{1}{2} (AD + A_1D_1) \cdot MN = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h.$$

Тому $S_6 = n \cdot \frac{1}{2} (a + a_1) \cdot h = \frac{1}{2} (na + na_1) \cdot h$. А оскільки добутки na та na_1 дорівнюють периметрам P та P_1 основ піраміди, то звідси

$$S_6 = \frac{1}{2} (P + P_1) \cdot h.$$

Теорему доведено.

Задача. У правильній трикутній піраміді апофема нахилена до площини основи під кутом α . Відстань від основи висоти піраміди до бічної грані дорівнює a . Визначити бічну поверхню піраміди.

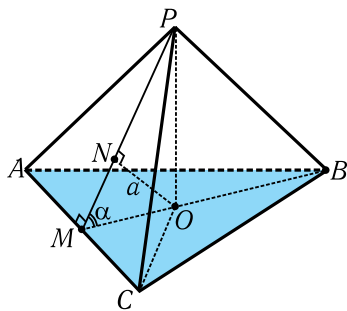


Рис. 1.53

Розв'язання. Нехай $PABC$ — задана правильна трикутна піраміда (рис. 1.53), PM — її апофема, PO — висота. За теоремою про три перпендикуляри: $OM \perp AC$, а за умовою: $\angle PMO = \alpha$. Проведемо $ON \perp PM$. Оскільки $AC \perp PM$ і $AC \perp OM$, то $AC \perp POM$, звідки $AC \perp ON$. Оскільки, таким чином, пряма ON перпендикулярна до двох прямих PM і AC площини PAC , то $ON \perp PAC$. За умовою: $ON = a$.

$$\text{З } \triangle ONM (\angle N = 90^\circ): OM = \frac{ON}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\text{З } \triangle POM (\angle O = 90^\circ): PM = \frac{OM}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} =$$

$$= \frac{2a}{\sin 2\alpha}. \text{ З } \triangle OMC (\angle M = 90^\circ, \angle C = 30^\circ): MC =$$

$$= OM \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{\sin \alpha}.$$

Сторона основи $AC = 2MC$. Тому периметр основи $P_{\text{осн}} = 3 \cdot 2MC = 3 \cdot 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{6a\sqrt{3}}{\sin \alpha}$. А площа бічної поверхні, отже, $S_6 = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot PM = \frac{6\sqrt{3}a^2}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$.

Відповідь. $\frac{6\sqrt{3}a^2}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}$. ■



Задачі і вправи

1. Площа поверхні призми

- 97°. Чому дорівнює площа повної поверхні куба з ребром a ?
- 98°. В основі прямої призми лежить правильний трикутник зі стороною 3 см. Висота призми дорівнює 12 см. Визначте бічну поверхню призми.
99. Сторони основи і бічне ребро прямої трикутної призми відносяться, як 15 : 26 : 37 : 12. Площа повної поверхні цієї призми дорівнює 4992 см². Визначте висоту призми.
100. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 15 см і 17 см. Визначте площу бічної поверхні цієї призми.
101. Відстані між прямими, які містять бічні ребра трикутної призми, дорівнюють 16 см, 25 см і 39 см, а бічне ребро дорівнює 25 см. Визначте площу бічної поверхні цієї призми.
- 102*. Основа прямої призми — трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 39 см. Три бічні грані призми — квадрати. Визначте площу повної поверхні призми.
- 103*. В основі призми лежить правильний трикутник зі стороною 16 см. Бічне ребро призми дорівнює 15 см, а його проекція на площину основи є однією з висот трикутника. Визначте бічну поверхню призми.
- 104*. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 3 см. Одна з бічних граней — квадрат, спільне ребро двох інших граней нахилене до площини основи під кутом 30°. Визначте повну поверхню призми.
- 105*. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами a і b . Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює c і утворює із суміжними сторонами основи рівні кути з величиною α . Визначте повну поверхню паралелепіпеда.
106. В основі призми лежить квадрат зі стороною a . Одна з вершин верхньої основи рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Бічне ребро призми дорівнює b . Визначте площу повної поверхні цієї призми.
- 107*. Основою призми є квадрат зі стороною $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$. Одна з бічних граней — також квадрат, а інша — ромб з кутом 60°. Визначте повну поверхню призми.

2. Площа поверхні піраміди

- 108°. Чому дорівнює площа повної поверхні правильного тетраедра з ребром a ?
- 109°. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди з ребром основи a та апофемою h ?
- 110°. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює h і нахилена до площини основи під кутом α . Визначте бічну поверхню піраміди.
111. Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює m , апофема піраміди нахилена до площини основи під кутом α . Визначте бічну поверхню піраміди.
112. У правильній трикутній піраміді висота нахилена до площини бічної грані під кутом β . Визначте повну поверхню піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює b .
- 113*. У правильній трикутній піраміді апофема утворює з її висотою кут α . Визначте повну поверхню піраміди, якщо відрізок, що сполучає основу висоти з серединою апофеми, дорівнює b .

- 114*.** Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Бічне ребро, яке лежить проти середньої за величиною сторони основи, перпендикулярне до площини основи і дорівнює 16 см. Визначте повну поверхню цієї піраміди.
- 115.** Основою піраміди є ромб з діагоналями 6 см і 8 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 1 см. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди.
- 116*.** Основою піраміди є паралелограм зі сторонами 20 см і 36 см та площею 360 см^2 . Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 12 см. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди.
- 117*.** У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторона верхньої основи дорівнює 3 см, а бічне ребро завдовжки 5 см нахилене до площини основи під кутом 45° . Визначте повну поверхню цієї піраміди.



Перевір себе

- Сформулюйте означення многогранника та основних його елементів — граней, ребер і вершин.
- Опишіть спосіб побудови тетраедра. Як зображають тетраедри?
- Опишіть спосіб побудови паралелепіпеда. Назвіть основні елементи паралелепіпеда. Як зображають паралелепіпеди?
- Сформулюйте означення піраміди та її основних елементів. Вкажіть, як можна побудувати n -кутну піраміду.
- Які піраміди називаються правильними?
- Доведіть, що площина, яка перетинає бічні ребра піраміди у внутрішніх точках і паралельна основі, перетинає піраміду по многокутнику, гомотетичному основі.
- Дайте означення зрізаної піраміди і її основних елементів.
- Сформулюйте означення призми та її основних елементів.
- Які призми називаються прямими, похилими, правильними?
- Доведіть, що всі перерізи призми площинами, паралельними основам, рівні основам.
- Що таке плоский переріз многогранника? Які перерізи призм і пірамід називаються діагональними?
- Опишіть загальну схему побудови плоского перерізу будь-якого многогранника і проілюструйте її прикладами.
- Опишіть алгоритм побудови точки перетину прямої з площиною, що є ключовим у побудові плоских перерізів многогранників.
- Що називається висотою просторової фігури над площиною її основи?
- Що таке висота піраміди? Що таке висота призми?
- Обґрунтуйте, що висота призми дорівнює відстані між площинами її основ.
- Опишіть, як можна побудувати: а) пряму призму; б) правильну призму; в) прямокутний паралелепіпед; г) куб.

18. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його вимірів.
19. Опишіть, як можна побудувати правильну піраміду, правильний тетраедр.
20. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди рівні між собою, то навколо основи цієї піраміди можна описати коло, центр якого збігається з основою висоти піраміди.
21. Доведіть, що коли навколо основи піраміди можна описати коло і його центр збігається з основою висоти піраміди, то усі бічні ребра піраміди рівні між собою.
22. Що таке бічна і повна поверхні призми, піраміди?
23. Сформулюйте означення перпендикулярного перерізу призми.
24. Доведіть, що площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро.
25. Доведіть, що площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро.
26. Що таке апофема правильної піраміди?
27. Доведіть, що площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра основи на апофему.
28. Доведіть, що площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.



Завдання для контрольної роботи № 1

- 1°. а) Довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює 57 см, а його виміри відносяться, як 6 : 10 : 15. Визначте ці виміри.
б) Довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда більша від його вимірів відповідно на 20 см, на 9 см і на 5 см. Визначте ці виміри.
- 2°. а) У прямокутному паралелепіпеді діагональ d нахилена до основи під кутом β . Кут між діагоналлю основи і стороною основи дорівнює α . Визначте площу повної поверхні паралелепіпеда.
б) У прямокутному паралелепіпеді діагональ d нахилена до площини основи під кутом α . Кут між діагоналями основи дорівнює β . Визначте площу повної поверхні паралелепіпеда.
3. а) Бічне ребро піраміди поділено на чотири рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основі. Площа основи дорівнює 16 дм². Визначте площі утворених перерізів.
б) Бічне ребро піраміди поділено на 5 рівних частин і через точки поділу проведено площини, паралельні основі. Площа основи дорівнює 25 дм². Визначте площі утворених перерізів.
- 4*. а) У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β . Визначте площу повної поверхні піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює l .
б) У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою піраміди кут α . Відстань від середини висоти піраміди до бічного ребра дорівнює d . Визначте площу повної поверхні піраміди.

5. а) У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка P — середина ребра AD , а точка Q належить ребру $C_1 D_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки P, Q паралельно ребру CD .
 б) У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка L — середина ребра BC , а точка M належить ребру AA_1 . Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки L, M паралельно ребру BB_1 .
6. а) У тетраедрі $PABC$ O — точка перетину медіан основи ABC . Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O і паралельна ребрам AB та PC .
 б) У тетраедрі $PABC$ M — точка перетину медіан бічної грані PBC . Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і паралельна ребрам BC та PA .
7. а) Точки P, Q, R належать відповідно основі і двом суміжним бічним граням паралелепіпеда. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною PQR .
 б) Точки L, M, N належать відповідно основі і двом протилежним бічним граням паралелепіпеда. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною LMN .
8. а) Точка A належить бічній грані, а точка B — бічному ребру чотирикутної призми (точка B не належить вибраній грані для точки A). Побудуйте точки перетину прямої AB з площинами основ даної призми.
 б) Точки A і B належать протилежним бічним граням чотирикутної призми. Побудуйте точки перетину прямої AB з площинами основ даної призми.
9. а) Точки E та F належать протилежним бічним граням чотирикутної піраміди, а точка G — її основі. Побудуйте переріз піраміди площиною EFG . Дослідіть форму цього перерізу.
 б) Точка M належить ребру PA чотирикутної піраміди $PABCD$, а точки L, N — граням PBC та PCD відповідно. Побудуйте переріз піраміди площиною LMN . Дослідіть форму цього перерізу.
10. а) У правильній чотирикутній піраміді висота нахилена до бічної грані під кутом β . Серединний перпендикуляр до апофеми піраміди перетинає висоту піраміди у точці, яка знаходиться на відстані l від вершини піраміди. Визначте площу діагонального перерізу піраміди.
 б) У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут α . Відрізок, що сполучає основу висоти піраміди із серединою її апофеми, дорівнює b . Визначте площу діагонального перерізу піраміди.
11. а) В основі паралелепіпеда лежить квадрат. Одна з вершин верхньої основи ортогонально проектується у центр нижньої основи. Доведіть, що бічне ребро, яке виходить з цієї вершини, утворює зі сторонами основи рівні кути.
 б) Основою призми $ABCA_1 B_1 C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Висота призми, проведена з вершини A_1 , падає на середину ребра BC . Доведіть, що бічне ребро AA_1 утворює рівні кути з бічними сторонами основи призми.
- 12*. а) У трикутній призмі всі ребра дорівнюють по a . Одна з вершин верхньої основи ортогонально проектується у центр нижньої основи. Визначте площу бічної поверхні призми.
 б) Кожне ребро похилої трикутної призми дорівнює 2 см. Одне з бічних ребер утворює з суміжними сторонами основи кути по 60° . Визначте площу бічної поверхні призми.
- 13*. а) Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 см і 6 см. Висота піраміди нахилена до площини бічної грані під кутом 30° . Визначте довжину цієї висоти.
 б) Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 1 см, а бічне ребро дорівнює 2 см. Визначте висоту піраміди.

§2. Двогранні кути

Нагадаємо, що кутом у планіметрії називається сукупність двох променів зі спільним початком. Промені називаються *сторонами* кута, а їхній спільний початок — *вершиною* кута. Просторовим аналогом променя можна вважати півплощину. Тоді просторовим аналогом кута буде фігура, яку називають *двогранним кутом*. Двогранні кути є важливими елементами многогранників.

2.1. Означення і вимірювання двогранних кутів

Означення (двогранного кута).

*Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною граничною прямою (рис. 2.1). Півплощини називаються **гранями** двогранного кута, а їхня спільна гранична пряма — **ребром** двогранного кута.*

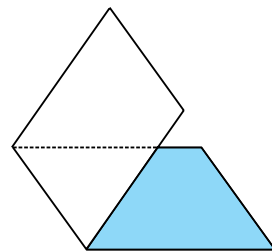


Рис. 2.1

Оскільки двогранний кут має дві грані, то звідси й походить його назва.

Уявлення про двогранні кути дають, наприклад, двосхили дахи будинків, напіврозгорнута книга, суміжні грані різноманітних деталей тощо.

Оскільки до аксіоматики стереометрії не входять аксіоми вимірювання двогранних кутів, то таке вимірювання потрібно звести до планіметричних побудов. Здійснюється це на основі поняття лінійного кута.

Означення (лінійного кута двогранного кута).

*Лінійним кутом двогранного кута називається звичайний кут, утворений при перетині двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра. Величина лінійного кута називається **величиною** даного двогранного кута.*

На рис. 2.2 $\angle ab$ — лінійний кут двогранного кута з гранями α , β і ребром l . Його утворено проведенням площини $\gamma \perp l$.

Величина лінійного кута не залежить від вибору січної площини. Справді, якщо замість січної площини γ провести яку-небудь іншу площину γ' , також перпендикулярну до ребра кута, то утворений при цьому новий лінійний кут $\angle a'b'$ дорівнюватиме $\angle ab$ (див. рис. 2.2). Це впливає з того, що оскільки $\gamma' \parallel \gamma$, то сторони кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ є співнапрямленими. Наприклад, промені a , a' лежать у

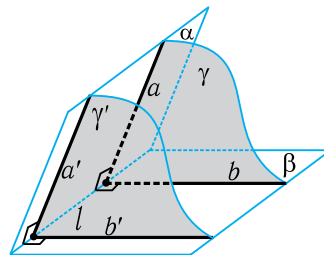


Рис. 2.2

площині α на паралельних прямих і по один бік від прямої l , що проходить через їхні початки, тому $a' \uparrow\uparrow a$.

Із двограними кутами природним чином пов'язується чимало понять, аналогічних відповідним поняттям для звичайних кутів. Наведемо найуживаніші з них.

З означення величини двогранного кута випливає, що ці кути теж вимірюються в градусах. Двогранний кут, величина якого дорівнює 90° , називається *прямим* двограним кутом, або ще *квадрантом* (рис. 2.3, а). Якщо величина двогранного кута менша від 90° , то він називається *гострим* (рис. 2.3, б), а якщо більша 90° — то *тупим* (рис. 2.3, в).

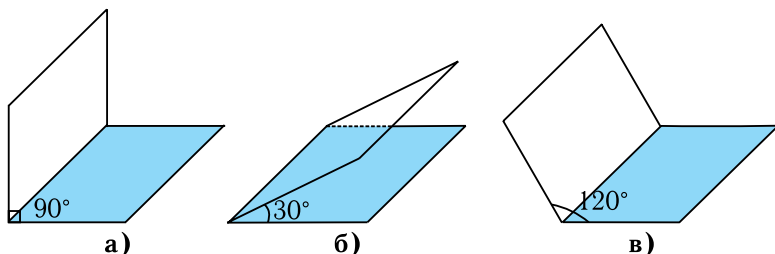


Рис. 2.3

Два двогранні кути зі спільним ребром називаються *суміжними*, якщо вони мають одну грань спільною, а дві інші грані утворюють площину (рис. 2.4). Сума величин суміжних двограних кутів дорівнює, очевидно, 180° .

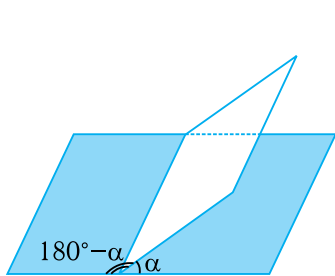


Рис. 2.4

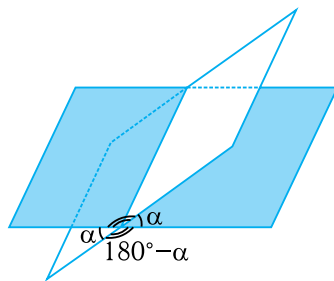


Рис. 2.5

Два двогранні кути зі спільним ребром називаються *вертикальними*, якщо кожна грань одного з них утворює площину з гранню іншого (рис. 2.5). Величини вертикальних двограних кутів рівні між собою.



Поняття, аналогічне до бісектриси звичайного кута, для двограних кутів уводиться так. Нехай маємо двогранний кут з гранями α і β та ребром l (рис. 2.6). Побудуємо лінійний кут $\angle ab$ цього двогранного кута і проведемо його бісектрису s . Потім через бісектрису s проведемо півплощину γ з граничною прямою l . Півплощина γ називається *бісекторною півплощиною*, або *бісектором* даного

двогранного кута, оскільки вона ділить двогранний кут на дві рівні частини.

Просторовий аналог відомої властивості бісектриси звичайного плоского кута виражається такою теоремою.

Теорема 2.1 (про властивість бісектора двогранного кута).

Кожна точка бісектора двогранного кута рівновіддалена від граней цього кута. Навпаки, якщо точка лежить усередині двогранного кута і рівновіддалена від його граней, то вона належить бісектору цього кута.

Інакше цю теорему можна сформулювати так: *геометричним місцем точок, розміщених усередині двогранного кута і рівновіддалених від його граней, є бісектором цього кута.*

Доведення. Нехай M — довільна точка бісектора γ двогранного кута з гранями α , β і ребром l (див. рис. 2.6). Проведемо через цю точку площину δ , перпендикулярну до прямої l . У перетині площини δ з півплощинами α , β , γ дістанемо промені a , b , c , причому промінь c буде бісектрисою $\angle ab$. Проведемо, далі, з точки M перпендикуляри MM_1 до a та MM_2 до b . За властивістю бісектриси звичайного кута, $MM_1 = MM_2$. Оскільки проведені відрізки MM_1 , MM_2 перпендикулярні і до прямої l (бо $l \perp \delta$), то $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$, причому точка M_1 належить грані α , точка M_2 — грані β . Враховуючи рівність $MM_1 = MM_2$, з цього й випливає, що точка M рівновіддалена від граней α і β .

Нехай тепер, навпаки, точка M розміщена всередині двогранного кута і рівновіддалена від його граней: $MM_1 = MM_2$, за умови, що $MM_1 \perp \alpha$, а $MM_2 \perp \beta$. Проведемо через цю точку площину δ , перпендикулярну до l (нехай $\delta \cap \alpha = a$, $\delta \cap \beta = b$), а у площині δ проведемо $MN_1 \perp a$ та $MN_2 \perp b$. За доведеним вище: $MN_1 \perp \alpha$, $MN_2 \perp \beta$. Але з точки M до площин α і β можна провести лише по одному перпендикуляру. Тому точка N_1 збігається з точкою M_1 , а точка N_2 — з точкою M_2 . Виходить, що точка M лежить усередині $\angle ab$ і рівновіддалена від його сторін, тобто належить бісектрисі c цього кута. Бісектриса ж c належить бісектору γ даного двогранного кута. Отже, $M \in \gamma$. Теорему доведено повністю.

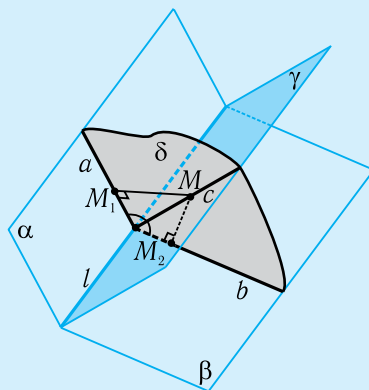


Рис. 2.6

Задача. На одній з граней гострого двогранного кута взято дві точки, віддалені від ребра кута на 54 см і 36 см. Перша з точок віддалена від другої грані на 24 см. Визначити відстань від другої точки до цієї ж грані.

Розв'язання. Нехай α і β — грані даного двогранного кута, l — його ребро, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ — задані точки (рис. 2.7). Проведемо: $AD \perp l$, $BC \perp l$, $AA_1 \perp \beta$, $BB_1 \perp \beta$ ($D \in l$, $C \in l$, $A_1 \in \beta$, $B_1 \in \beta$). Нехай $AD = 54$ см, $BC = 36$ см, тоді $AA_1 = 24$ см. Потрібно знайти BB_1 .

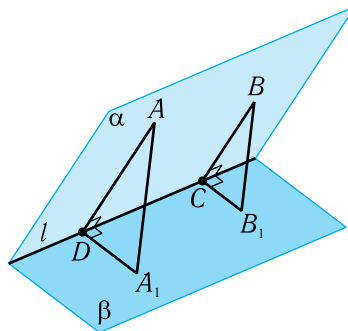


Рис. 2.7

За теоремою про три перпендикуляри: $AA_1D \perp l$, $BB_1C \perp l$. Тому $\angle ADA_1 = \angle BCB_1$ — як лінійні кути заданого двогранного кута.

Оскільки $AA_1 \perp \beta$ і $BB_1 \perp \beta$, то $\angle AA_1D = \angle BB_1C = 90^\circ$. Тому з $\triangle AA_1D$: $\sin \angle ADA_1 = \frac{AA_1}{AD} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$, а з $\triangle BB_1C$: $\sin \angle BCB_1 = \frac{BB_1}{BC} = \frac{BB_1}{36}$. Таким чином, $\frac{BB_1}{36} = \frac{4}{9}$. Звідси $BB_1 = 16$ (см).

Відповідь. 16 см. ■



Цікаво поміркувати над мотивами для прийнятого способу вимірювання двогранних кутів.

Оскільки, як було зазначено, вимірювання двогранних кутів потрібно звести до вимірювання звичайних кутів, то зрозуміло, що сторони a , b цих звичайних кутів потрібно пов'язати з гранями α , β даного двогранного кута. Найпростіше, звичайно, — проводити сторони у цих гранях.

Зрозуміло й те, що оскільки грані α і β «рівноправні», то промені a , b в них повинні проводитися під одним і тим самим кутом (позначимо його через ω) до ребра l двогранного кута (рис. 2.8). Але при фіксованому розміщенні променя a в грані α у випадку $\omega \neq 90^\circ$ існує два відмінних один від одного розміщення b і b' променя b у грані β , при яких $\angle bl = \omega$ і $\angle b'l = \omega$. При цьому кут $\varphi = \angle ab$ не дорівнює куту $\varphi' = \angle ab'$. Промінь b характеризується тим, що лежить із променем a по один бік від площини δ , проведеної через початок Q променя a перпендикулярно до прямої l , а промінь b' — по інший бік від площини δ (рис. 2.9). Виявляється, що кут φ завжди менший від запровадженої міри двогранного кута, а кут φ' — завжди більший від неї. Таким чином, запроваджена міра для величини двогранного кута є спільним граничним значенням для величин кутів φ і φ' . І це виправдовує її введення.

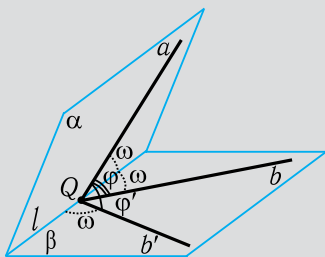


Рис. 2.8

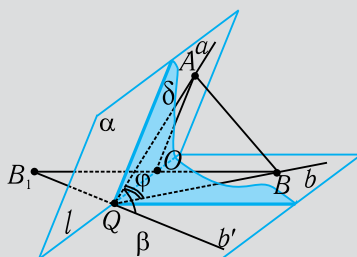


Рис. 2.9

Справді, візьмемо на прямій l з того боку від площини δ , де лежить кут φ , яку-небудь точку O і проведемо через неї площину γ , перпендикулярну до l (її визначають промені $OA \perp l$ та $OB \perp l$; вважаємо, що точка A належить променю a , а точка B — променю b). Сполучимо точку A з точкою B . Прямокутні трикутники AOQ і BOQ — рівні за спільним катетом QO і гострим кутом ω . Тому рівними є їхні катети OA , OB і гіпотенузи QA , QB . Отже, бічні сторони рівнобедреного трикутника OAB менші від бічних сторін рівнобедреного трикутника QAB . Тоді для кутів при вершинах цих трикутників справджується обернена нерівність: $\angle AOB > \varphi$.

Для порівняння кутів AOB і φ' побудуємо у площині β точку B_1 , симетричну точці B відносно точки O . Точка B розміститься на доповняльному промені QB_1 до променя b' . При цьому промені a і QB_1 розміщуватимуться з одного боку від площини β і, за вже доведеним, $\angle AOB_1 > \angle AQB_1$. Отже, для суміжних з ними кутів матимемо обернену нерівність: $\angle AOB < \varphi'$.

Отже, справді лінійний кут двогранного кута за своєю величиною займає середнє положення між величинами усіх плоских кутів, сторони яких належать граням і однаково нахилені до ребра двогранного кута.



Задачі і вправи

- 118°. Яким є взаємне розміщення сторони лінійного кута двогранного кута і його ребра?
- 119°. Який кут утворює ребро двогранного кута з прямою, що лежить у площині його лінійного кута?
- 120°. Який кут утворює ребро двогранного кута з прямою, перпендикулярною до площини його лінійного кута?
- 121°. Всередині двогранного кута взято точку. Доведіть, що відстань від цієї точки до ребра двогранного кута не може дорівнювати відстані від неї до якої-небудь із граней двогранного кута.
- 122°. З точки, взятої всередині двогранного кута, проведено промені, перпендикулярні до його граней. Доведіть, що кут, утворений цими променями, у сумі з лінійним кутом даного двогранного кута дає 180° .
- 123°. Двогранний кут дорівнює 45° . В одній з його граней дано точку, яка знаходиться на відстані a від іншої грані. Визначте відстань від цієї точки до ребра кута.
- 124°. Точка A лежить усередині прямого двогранного кута і віддалена від його граней на відстанях 3 см і 4 см. Визначте відстань від точки A до ребра кута.
- 125°. Довжини перпендикулярів, опущених з точки A на грані двогранного кута, дорівнюють по 28 см. Визначте відстань від точки A до ребра двогранного кута, якщо величина цього кута дорівнює 120° .
- 126°. Визначте величину гострого двогранного кута, якщо відстань від точки, взятої на одній з його граней, до іншої грані удвічі менша за відстань від цієї точки до ребра.
- 127°. Кінці відрізка AB лежать у різних гранях двогранного кута, а відстані AM і BN від цих точок до ребра кута — рівні між собою. Доведіть, що $\angle ABM = \angle BAN$.
- 128°. В одній із граней двогранного кута взято дві точки, віддалені від іншої грані на 32 см і 24 см. Відстань від першої точки до ребра кута дорівнює 48 см. Визначте відстань від другої точки до ребра кута.
- 129°. Пряма лежить в одній з граней двогранного кута з величиною 30° , паралельна ребру кута і віддалена від ребра на 24 см. Визначте відстань від даної прямої до іншої грані двогранного кута.
- 130*. Точки A і B лежать на ребрі прямого двогранного кута, AC і BD — перпендикуляри до ребра кута, проведені у різних його гранях. Визначте відстань CD , якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см, $BD = 2$ см.

- 131*.** Точки A і B лежать на ребрі двогранного кута з величиною 120° , AC і BD — перпендикуляри до ребра кута, проведені у різних його гранях. Визначте відстань CD , якщо $AB = AC = BD = 5$ см.
- 132*.** Відрізок завдовжки $6\sqrt{2}$ см лежить на ребрі двогранного кута, величина якого дорівнює 120° . З кінців цього відрізка у кожній грані проведено перпендикуляри до ребра кута — завдовжки 3 см і 5 см. Визначте довжину відрізка, який сполучає інші кінці цих перпендикулярів.
- 133*.** Точка, що лежить усередині двогранного кута з величиною 30° , віддалена від граней кута на відстанях 2 см і $3\sqrt{3}$ см. Визначте відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

2.2. Двогранні кути у многогранниках

Поняття двогранного кута може використовуватися для введення поняття кута між площинами — за аналогією з тим, як у планіметрії означається кут між прямими. Однак головні застосування цього поняття пов'язані з описом многогранників.

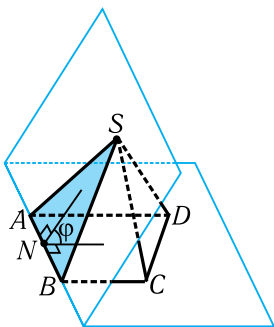


Рис. 2.10

Означення (двогранного кута многогранника).

Двогранним кутом многогранника при даному його ребрі називається двогранний кут, ребро якого містить дане ребро многогранника, а грані містять грані многогранника, які перетинаються по цьому ребру.

Нехай, наприклад, маємо чотирикутну піраміду $SABCD$ (рис. 2.10). Двогранний кут при ребрі AB основи піраміди визначається так: пряма AB береться за ребро двогранного кута, а півплощини з граничною прямою AB , які містять грані SAB та $ABCD$, беруться за грані двогранного кута. Величина φ цього двогранного кута називається *двогранним кутом піраміди при ребрі AB* .

Теорема 2.2 (про двогранні кути при ребрах основи правильної піраміди).

Двогранні кути при ребрах основи правильної піраміди рівні між собою. Навпаки, якщо в основі піраміди лежить правильний многокутник і всі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні між собою, то така піраміда — правильна.

Доведення. Нехай $PABCD\dots$ — правильна піраміда, PO — її висота, PK , PL , PM , ... — висоти бічних граней (апофеми) (рис. 2.11). Проведемо відрізки OK , OL , OM , Оскільки $PO \perp ABC$, $PK \perp AB$, то, за теоремою про три перпендикуляри, $OK \perp AB$. Аналогічно $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, Отже, $\angle PKO$, $\angle PLO$, $\angle PMO$, ... — лінійні кути двогранних кутів піраміди при ребрах AB , BC , CD , ... основи. Оскільки ці кути утворені з площиною основи піраміди рівними похилими PK , PL , PM , ..., то вони — рівні між собою. Тому рівними є й відповідні їм двогранні кути.

Нехай тепер $PABCD\dots$ — піраміда, в основі якої лежить правильний многокутник $ABCD\dots$, PO — її висота, $\angle PKO$, $\angle PLO$, $\angle PMO$, ... — лінійні кути рівних між собою двогранних кутів при ребрах AB , BC , CD , ... основи. З рівності цих кутів випливає рівність трикутників POK , POL , POM , ... (вони прямокутні, мають спільний катет PO і рівні протилежні гострі кути). Отже, $OK = OL = OM = \dots$. Точка O , таким чином, рівновіддалена від усіх прямих AB , BC , CD , ..., які містять сторони основи піраміди. А оскільки ця точка лежить усередині правильного многокутника $ABCD\dots$, то вона є центром кола, вписаного у цей многокутник, тобто є його центром. Якщо ж в основі піраміди лежить правильний многокутник і основа висоти піраміди збігається із центром цього многокутника, то, за теоремою 1.4, така піраміда — правильна. Теорему доведено.

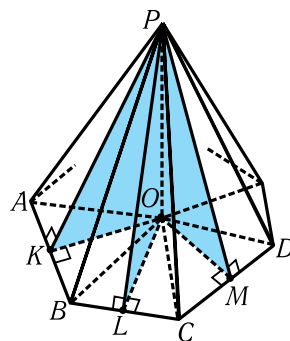


Рис. 2.11



Зауваження. Для цілковитої повноти поданого доведення належить обґрунтувати, що точка O справді може розміщуватися лише всередині многокутника $ABCD\dots$.

Якби точка O розміщувалася ззовні цього многокутника, то тоді можна було б указати такі дві його сторони XU та UV , що весь многокутник і точка O лежали б по різні боки від прямої XU і з одного боку від прямої UV (рис. 2.12). Тоді двогранний кут φ при ребрі XU був би тупим, а двогранний кут γ при ребрі UV — гострим. Тому рівність цих кутів була б неможливою. Ця рівність була б неможливою і тоді, якби точка O належала якійсь зі сторін XU основи піраміди, бо тоді двогранний кут при цій стороні був би прямим, а при стороні UV — гострим. Отже, точка O справді може розміщуватися лише всередині многокутника $ABCD\dots$.

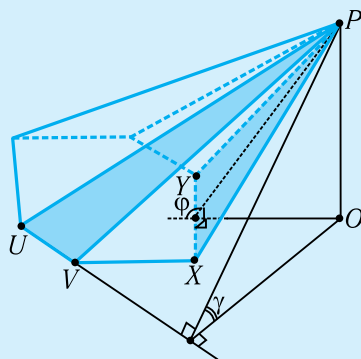


Рис. 2.12

З поданого доведення теореми 6.2 неважко помітити, що цю теорему можна суттєво узагальнити.

Теорема 2.3 (про піраміди з рівними двогранними кутами при ребрах основи).

Якщо основою піраміди є опуклий многокутник і всі двогранні кути при ребрах її основи — рівні між собою, то в основу піраміди можна вписати коло, центр якого збігається з основою висоти піраміди. Навпаки, якщо в основу піраміди можна вписати коло, центр якого збігається з основою висоти піраміди, то всі двогранні кути при ребрах основи піраміди — рівні між собою.

Доведення. Нехай, наприклад, у чотирикутній піраміді $PABCD$ (рис. 2.13) усі двогранні кути при ребрах основи AB , BC , CD , DA — рівні між собою. Це означає, що коли

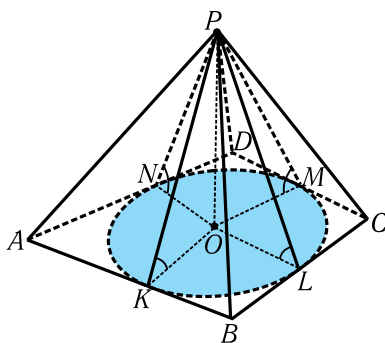


Рис. 2.13

проведемо висоту PO піраміди, а також висоти PK , PL , PM , PN бічних граней, то кути PKO , PLO , PMO , PNO будуть рівними між собою, а точка O розміститься всередині основи $ABCD$ (стосовно останнього висновку див. зауваження до доведення попередньої теореми 6.2). У зв'язку з цим будуть рівними похилі відрізки PK , PL , PM , PN , а отже, — і їхні проєкції. Звідси $OK = OL = OM = ON$. Оскільки, крім цього, за теоремою про три перпендикуляри, $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$, а, за умовою теореми, многокутник $ABCD$ — опуклий, то точка O є центром кола, вписаного в основу $ABCD$ піраміди.

Навпаки, якщо точка O є центром кола, вписаного в основу $ABCD$ піраміди, а через K , L , M , N позначимо точки дотику сторін основи до цього кола, то з рівності проєкцій OK , OL , OM , ON похилих відрізків PK , PL , PM , PN випливатиме рівність самих цих відрізків, а отже, — і кутів PKO , PLO , PMO , PNO , утворених ними з площиною основи піраміди. Але ці кути є лінійними для відповідних двогранних кутів при ребрах AB , BC , CD , DA основи піраміди. Наприклад, оскільки K — точка дотику вписаного кола до сторони AB , то $OK \perp AB$. Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $PK \perp AB$. Отже, вказані двогранні кути є рівними між собою. Теорему доведено.



У свою чергу, теорему 6.3 можна також узагальнити. А саме, замість рівності двогранних кутів при ребрах основи вимагати лише рівності кутів між площинами бічних граней і площиною основи. Тоді відповідні двогранні кути при ребрах основи можуть бути або рівними між собою, або доповнювати один одного до 180° . Відповідно до цього, основа висоти піраміди як точка, рівновіддалена від прямих, що містять сторони основи піраміди, зможе розміщуватися і ззовні цієї основи.

Якщо, наприклад, основою піраміди буде трикутник, то, крім центра O вписаного кола, існуватиме ще три точки O_1 , O_2 , O_3 , рівновіддалених від прямих, що містять сторони цього трикутника. Це — центри так званих ззовнівписаних кіл (рис. 2.14). Кожне з таких кіл дотикається до однієї зі сторін трикутника та ще до продовжень двох інших його сторін. На рис. 2.15 зображено дві трикутні піраміди $PABC$ та $SLMN$, площини бічних граней яких нахилені до площини основи під рівними кутами. Двогранні кути при основі першої піраміди — рівні між собою, а другої — не рівні.

Саме ж формулювання узагальненої теореми таке.

Теорема 2.4 (про піраміди, площини бічних граней яких нахилені до площини основи під рівними кутами).

Якщо площини усіх бічних граней піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основа висоти піраміди рівновіддалена від усіх прямих, які містять сторони основи. Навпаки, якщо основа висоти піраміди рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони основи, то площини усіх бічних граней піраміди утворюють з площиною основи рівні кути.

Доведення теореми 2.4 проводиться аналогічно до доведення теореми 2.3.

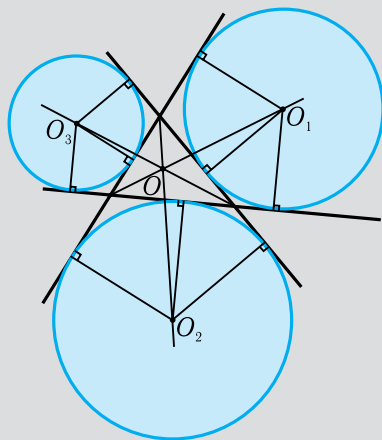


Рис. 2.14

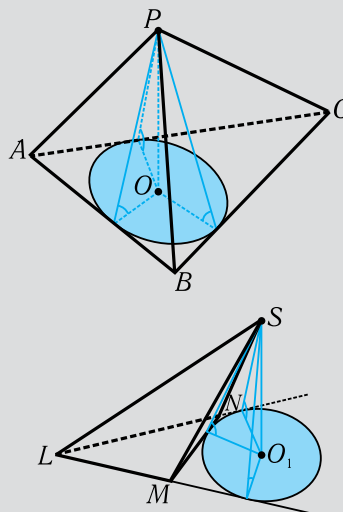


Рис. 2.15

Задача 1. Довести, що площу S_6 бічної поверхні піраміди з рівними двогранними кутами при ребрах основи (зокрема, площу бічної поверхні правильної піраміди) можна обчислити за формулою:

$$S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi},$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди, φ — величина двогранного кута при ребрі основи.

Розв'язання. Нехай маємо, наприклад, чотирикутну піраміду $PABCD$, двогранні кути при ребрах основи якої дорівнюють φ (див. рис. 2.13). Відповідно до з'ясованої в теоремі 2.3 властивості таких пірамід, основа висоти PO даної піраміди лежить усередині основи $ABCD$ і є центром кола, вписаного в цю основу.

Проведемо відрізки OA, OB, OC, OD (на рис. 2.13 вони не проведені), потім радіуси OK, OL, OM, ON вписаного кола у точки дотику зі сторонами основи, нарешті — відрізки PK, PL, PM, PN . Оскільки $OK \perp AB$, то, за теоремою про три перпендикуляри, $PK \perp AB$. Отже, OK є висотою трикутника OAB , PK — висотою бічної грані PAB , а $\angle PKO = \varphi$ — як лінійний кут двогранного кута при ребрі AB основи.

За теоремою про площу ортогональної проекції плоскої фігури, площа $S_{\Delta PAB}$ бічної грані PAB дорівнює $\frac{S_{\Delta OAB}}{\cos \varphi}$. Аналогічно знайдемо: $S_{\Delta PBC} = \frac{S_{\Delta OBC}}{\cos \varphi}$; $S_{\Delta PCD} = \frac{S_{\Delta OCD}}{\cos \varphi}$;

$S_{\Delta PAD} = \frac{S_{\Delta OAD}}{\cos \varphi}$. Тому

$$S_6 = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PAD} = \frac{S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OAD}}{\cos \varphi} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi},$$

що й треба було довести. ■

Задача 2. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють γ . Висота піраміди дорівнює H . Визначити площу бічної поверхні піраміди.

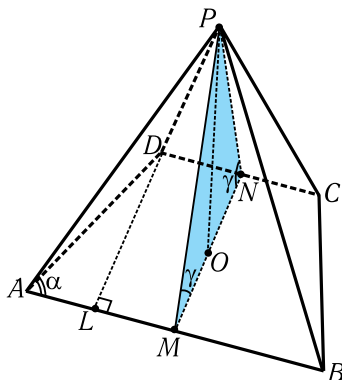


Рис. 2.16

Розв'язання. Нехай $PABCD$ — задана піраміда (рис. 2.16), а в трапеції $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD = BC$, $\angle DAB = \alpha$. Оскільки усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ , то основа висоти PO піраміди є центром кола, вписаного в трапецію $ABCD$. Проведемо радіуси OM ($M \in AB$) та ON ($N \in DC$) цього кола. Оскільки $OM \perp AB$, $ON \perp DC$, а $AB \parallel DC$, то проведені радіуси утворюють висоту трапеції. За теоремою про три перпендикуляри: $PM \perp AB$. Тому, за умовою задачі, $\angle PMO = \gamma$.

З $\triangle POM$ ($\angle O = 90^\circ$): $OM = PO \cdot \operatorname{ctg} \angle M = H \cdot \operatorname{ctg} \gamma$.
Отже, висота трапеції $MN = 2OM = 2H \cdot \operatorname{ctg} \gamma$.

Проведемо $DL \perp AB$. $DL = MN = 2H \cdot \operatorname{ctg} \gamma$.

З $\triangle DLA$ ($\angle L = 90^\circ$): $AD = \frac{DL}{\sin \angle A} = \frac{2H \cdot \operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha}$.

Відомо, що коли в чотирикутник можна вписати коло, то суми його протилежних сторін є рівними між собою. У даному разі $AB + DC = 2AD$. На основі цього

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot MN = AD \cdot MN = \frac{4H^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Тоді, за результатом задачі 1, } S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \gamma} = \frac{4H^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{\sin \alpha \cdot \cos \gamma} = \frac{4H^2 \operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}.$$

Відповідь. $\frac{4H^2 \operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}$. ■

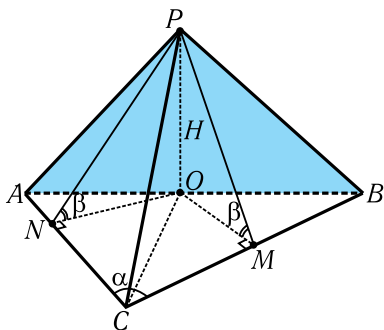


Рис. 2.17

Задача 3. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Бічна грань, що містить бічну сторону цього трикутника, перпендикулярна до основи піраміди, а двогранні кути, утворені з цією основою двома іншими бічними гранями, дорівнюють по β . Висота піраміди дорівнює H . Визначити площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. Нехай $PABC$ — задана піраміда (рис. 2.17), PO — її висота, $PO = H$, $AB = BC$, $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$, $PAB \perp ABC$. Проведемо висоти PM і PN граней PBC і PAC . Тоді OM і ON — ортогональні проєкції цих висот на площину основи піраміди, а тому

кути $\angle PMO$ і $\angle PNO$ є лінійними кутами двограних кутів при ребрах BC і AC . За умовою задачі, $\angle PMO = \angle PNO = \beta$.

Оскільки грань PAB — перпендикулярна до площини основи піраміди, то основа O її висоти належить прямій AB . З рівності прямокутних трикутників POM і PON (PO — спільний катет, $\angle M = \angle N$) випливає, що $OM = ON$. З рівності прямокутних трикутників OMC і ONC (OC — спільна гіпотенуза, $OM = ON$) маємо: $\angle OCM = \angle OCN$. Отже, CO — бісектриса трикутника ACB .

$$\text{З } \triangle PON (\angle O = 90^\circ): ON = H \cdot \operatorname{ctg} \beta. \text{ З } \triangle ONA (\angle N = 90^\circ): AO = \frac{ON}{\sin \alpha} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha}.$$

$$\text{З } \triangle OMB (\angle M = 90^\circ, \angle B = 180^\circ - 2\alpha): OB = \frac{OM}{\sin (180^\circ - 2\alpha)} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Тоді } AB = AO + OB = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} + \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin 2\alpha} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)}{\sin 2\alpha}.$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin (180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} AB^2 \sin 2\alpha = \frac{H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta (2 \cos \alpha + 1)^2}{2 \sin 2\alpha}.$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PO = \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)}{2 \sin 2\alpha}.$$

Трикутник OAC є ортогональною проекцією на площину ABC трикутника PAC . Тому, за теоремою про площу ортогональної проекції плоскої фігури, $S_{\triangle PAC} = \frac{S_{\triangle OAC}}{\cos \beta}$. Аналогічно

$$S_{\triangle PCB} = \frac{S_{\triangle OCB}}{\cos \beta}. \text{ Тому } S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PCB} = \frac{S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OCB}}{\cos \beta} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta} = \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)^2}{2 \sin 2\alpha \sin \beta}.$$

$$\text{Отже, } S_6 = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PCB} = \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)}{2 \sin 2\alpha} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)^2}{2 \sin 2\alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)}{2 \sin 2\alpha} \left(1 + \frac{2 \cos \alpha + 1}{\sin \beta} \right).$$

$$\text{Відповідь. } \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta (2 \cos \alpha + 1)}{2 \sin 2\alpha} \left(1 + \frac{2 \cos \alpha + 1}{\sin \beta} \right). \blacksquare$$



Перевір себе

1. Що таке двограний кут, його ребро, грані?
2. Що таке лінійний кут двогранного кута?
3. Доведіть, що усі лінійні кути двогранного кута рівні між собою.
4. Доведіть, що величина лінійного кута двогранного кута набуває проміжного значення між величинами усіх плоских кутів, сторони яких належать граням двогранного кута і однаково нахилені до його ребра.

5. Що таке двогранний кут многогранника при даному його ребрі?
6. Доведіть, що усі двогранні кути при ребрах основи правильної піраміди — рівні між собою. Сформулюйте й доведіть обернене твердження.
7. Сформулюйте і доведіть теорему про піраміди з рівними двогранними кутами при ребрах основи.



Задачі і вправи

134. У правильній трикутній піраміді бічна грань утворює з площиною основи кут α . Визначте площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо її основи, дорівнює R .
135. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює β , а висота піраміди — H . Визначте площу повної поверхні піраміди.
136. Доведіть, що двогранні кути при бічних ребрах правильної піраміди — рівні між собою.
- 137*. Основа піраміди — правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основи, а двогранні кути, утворені з основою двома іншими бічними гранями, дорівнюють по β . Висота піраміди дорівнює H . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
- 138*. Основою піраміди є правильний трикутник. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом α . Висота піраміди дорівнює H . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
139. Основою піраміди є прямокутний трикутник з радіусом описаного кола R і гострим кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють по γ . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
140. Основою піраміди є ромб з меншою діагоналлю l і тупим кутом β . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють α . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
141. Основою піраміди є трикутник зі стороною c і прилеглими до неї кутами α і β . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють γ . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
142. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з тупим кутом β і висотою h . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють α . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
143. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом β . Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до основи, а двогранні кути, утворені з основою двома іншими бічними гранями, дорівнюють по α . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
144. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α . Бічна грань, що містить інший катет цього трикутника, перпендикулярна до основи, а двогранні кути, утворені з основою двома іншими бічними гранями, дорівнюють по β . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
145. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині, протилежній основі. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи піраміди, а двогранні кути, утворені з основою двома іншими бічними гранями, дорівнюють по β . Визначте площу бічної поверхні піраміди.

- 146.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при основі. Бічна грань, що містить бічну сторону цього трикутника, перпендикулярна до основи піраміди, а двогранні кути, утворені з основою двома іншими бічними гранями, дорівнюють по α . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
- 147.** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом b і прилеглим до нього гострим кутом β . Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до основи піраміди, а третя бічна грань нахилена до основи під кутом α . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
- 148*.** Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи піраміди, а третя бічна грань нахилена до основи під кутом β . Визначте площу бічної поверхні піраміди.
- 149*.** В основі піраміди лежить ромб зі стороною a і гострим кутом α . Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а дві інші бічні грані нахилені до основи під кутом β . Визначте площу бічної поверхні піраміди.

§3. Тригранні і многогранні кути

Двогранний кут є лише одним із можливих просторових аналогів звичайного плоского кута. Іншими аналогами є *многогранні кути*. Подібно на те, як звичайні кути застосовуються для опису многокутників, многогранні кути, разом із двогранними, застосовуються для опису многогранників.

3.1. Означення і побудова многогранних кутів

Як відомо, з кожною вершиною многокутника пов'язують звичайний кут, сторони якого містять сторони многокутника, що сходяться в цій вершині. Аналогічно до цього з кожною вершиною многогранника пов'язують многогранний кут, грані якого містять грані многогранника, що сходяться в цій вершині. Саме ж означення многогранного кута таке.

Означення (многогранного кута).

Нехай $A_1A_2A_3\dots A_n$ — довільний плоский многокутник, P — точка, що не належить площині цього многокутника (рис. 3.1). Множина усіх променів, які виходять з точки P і перетинають даний многокутник, називається **многогранним** (а точніше — **n -гранним**) **кутом**. Точка P називається **вершиною**, промені $a_1 = PA_1$, $a_2 = PA_2$, $a_3 = PA_3$, ..., $a_n = PA_n$ — **ребрами**, а плоскі кути A_1PA_2 , A_2PA_3 , ..., A_nPA_1 — **гранями** даного многогранного кута. Величини плоских кутів A_1PA_2 , A_2PA_3 , ..., A_nPA_1 називаються просто **плоскими кутами** многогранного кута.

Многогранний кут можна утворити, продовживши ребра і грані якого-небудь многогранника, що сходяться в одній його вершині. Наприклад, якщо продовжити за основу бічні ребра і грані трикутної піраміди (рис. 3.2), то дістанемо найпростіший з многогранних кутів — тригранний кут. Тригранний кут дістанемо також, продовживши

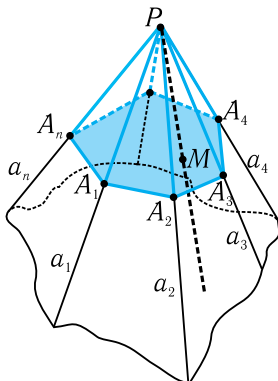


Рис. 3.1

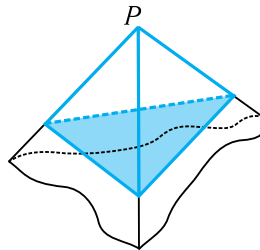


Рис. 3.2

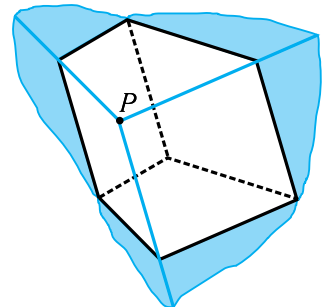


Рис. 3.3