Геометрія

В.О. Тадеєв

«ГЕОМЕТРІЯ»

Підручник для 7 класу

загальноосвітніх навчальних закладів

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 514 (075.3)
ББК 22.151я72
Т12

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Лапій

Тадеєв В.О.

Т12 Геометрія : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. / В.О Тадеєв. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 296 с : іл. + 1 електрон. опт. диск (CD). — Електрон. версія. — Режим доступу: http://www.bohdan-digital.com/edu.

ISBN 978-966-10-3446-3

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для загальноо світніх навчальних закладів. У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

ISBN 978-966-10-3446-3

Піктограмою у підручнику позначено ті його складові, які можна відкрити у pdf-файлі або скориставшись CD, що входить у комплект.

У зв'язку з великим обсягом електронної складової підручника, у pdf-файлі активною є тільки її частина. Для завантаження всіх матеріалів треба перейти за посиланням:
http://www.bohdan-digital.com/edu.

Переднє слово до учнів

Шановні друзі! Ви розгорнули підручник з геометрії, науки, яка споконвіку вражала людський розум своєю довершеністю. З давніх-давен геометрія вважалася неперевершеною школою мудрості, вивчення якої розвивало й шліфувало мислення. Переказують, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, було вирізьблено напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!».

За що ж так цінувалася ця наука? — За те, що розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед сімох своїх легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали своїми духовними учителями, на першому місці вони завжди називали ім'я Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим і, як стверджують легенди, довів лише декілька простих геометричних істин. Однак цим він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей постулат став основою західної цивілізації.

Отже, навчаючись геометрії, ви навчатиметеся мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю сучасного демократичного суспільства.

Переміщаючись «машиною часу» далі, потрапляємо у XVII ст. Виникло нове природознавство: Галілей, Кеплер, Декарт, Паскаль, Ньютон... Давня геометрія не тільки не стала осторонь нових тенденцій, а й перетворилася на теоретичну основу експериментальної науки, залишаючись водночас основою раціоналістичної філософії. Своєрідне відображення цієї нової тенденції знаходимо у мандрах казкового Гуллівера, героя роману Джонатана Свіфта. Прибувши на літаючий острів Лапуту, Гуллівер найбільше здивувався тому, що все життя його мешканців оберталося довкола геометрії. Навіть їхня буденна мова рясніла геометричними термінами. Та якби Гуллівер був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, у нього не було б. Геометричними термінами тепер пронизані не тільки природничі і технічні науки, а й гуманітарні, мистецтвознавство, мова щоденного спілкування. Ось лише найпоширеніші слова, які побутують у нашому мовленні й запозичені з геометрії: аксіома, паралелі, площина, вектор, сфера, координати, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетрія тощо. Певна річ, аби правильно розуміти і вживати ці слова, потрібно знати їхній первісний геометричний зміст. «Книга природи», — як влучно сказав Ґалілей, «написана мовою геометрії».

Отже, навчаючись геометрії, ви прилучатиметеся до надбань світової культури, ставатимете обізнаними й компетентними у тих питаннях, в яких без цього відчували б себе немовби прибульцями із варварських епох.

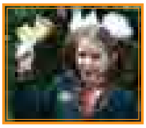
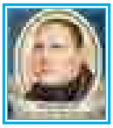
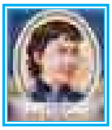
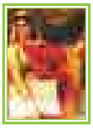
І ось ми... у XXI ст. Комп'ютерна графіка і дизайн, захмарні архітектурні споруди, мобільний зв'язок, GPS-навігація, проникнення у глибини космосу і матерії... Геометричні ідеї і принципи лежать в основі і цих надбань. Вивчаючи геометрію, ви в цьому не раз переконаєтеся.

Отже, і з практичної точки зору геометрія необхідна.

Навчання мистецтву аргументації, прилучення до надбань світової культури і практичні застосування геометрії — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Вони невіддільні одне від одного, як невіддільні, рівнозначні і взаємодоповнюючі Віра, Надія і Любов у християнській моралі.

Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із цих завдань відведено належне місце.

Крім цього, по всьому тексту ви помітите низку розпізнавальних знаків, кожен з яких має своє символічне значення:

На уроки вас запрошуватиме наш шкільний дзвоник, перев'язаний жовто-блакитною стрічкою.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афіна. Вибрано рельєфне зображення Афіни з геометричними атрибутами — кутником, циркулем, лінійкою і сферою, створене Філіппом-Роланом Роландом для західного фасаду паризького Лувра.

Задачі і вправи розміщені в кінці кожного параграфів за порядком наростання їхньої складності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а складніші — темним. У кінці кожного розділу подані типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах). Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем і ученицею, які разом вирішують задачу. На поданих у тексті прикладах демонструються застосування встановлених теоретичних фактів, а в окремих випадках — і корисні нові відомості та загальні підходи до розв'язування геометричних задач.

У підручнику є матеріал «Для тих, хто хоче знати більше». Він розрахований на учнів, які вже зараз, не чекаючи старших класів, хочуть дізнаватися про математику більше. Ці тексти супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Їхній життєвий шлях переконливо свідчить, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці.

Крім навчального матеріалу, підручник містить спеціальну рубрику «Сторінки історії». Її супроводжує муза історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас» (картина прикрашає завісу Львівського оперного театру). Муза тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні мотиви розвитку математики. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому розумінню науки.

У кінці кожного розділу подається зведений перелік усього вивченого теоретичного матеріалу, а в рубриці «Перевір себе» — питання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкса з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповів на її запитання.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!

Зірка геометрії.
Фрагмент композиції Ігоря Макаревича та Олени Єлагіної
«Геометрія космосу» (2008 р.)

Зображені у цій композиції креслярські прилади — лінійка, транспортир і косинець — допомагатимуть нам фіксувати ті основні фігури на площині та їхні властивості, які слугують основою геометрії.

Розділ I Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Вступ

Урок 1

«Мислю — отже, існую» — так коротко охарактеризував сутність людського буття знаменитий французький філософ і математик XVII ст. Рене Декарт. Цим він стверджував, що справжнє життя людини невід'ємне від мислення і неможливе без нього.

Мислення багатогранне, як багатогранний світ довкола нас. Зокрема, оскільки ми живемо у просторі, то повинні вміти мислити просторовими образами. Особливо, якщо прагнемо не тільки пристосовуватися до умов, а й пізнавати, удосконалювати світ.

Просторові образи інакше називають ще **формами** або **геометричними фігурами**. Наука про геометричні фігури називається **геометрією**.

Зародки геометрії виникли дуже давно, ще коли головними просторовими формами, з якими людині доводилося мати справу, були шляхи та ділянки землі. Звідси й назва «геометрія», що в перекладі з грецької якраз і означає «вимірювання землі». Проте з часом до цієї первісної геометрії долучалися нові форми. З удосконаленням будівництва геометричні форми здіймалися вгору, з

Рене Декарт.
Портрет голландського художника Франса Хальса.
Париж, Лувр.

успіхами астрономії — поширювалися на космічні простори, з розвитком фізики занурювалися углиб матерії.


Фрагмент архітектури готичного храму

Придивіться до будь-якої архітектурної споруди і ви побачите, як гармонійно поєднуються у ній численні лінії та інші деталі — відрізки, дуги, кути, трикутники, прямокутники, круги, паралелепіпеди, призми тощо. Отже, у вас уже є певний інструментарій для осмисленого сприйняття просторової конструкції. Але чи зможете ви пояснити, як вибрані та взаємопов'язані ці деталі, як розраховані їхні розміри? Те саме можна спитати стосовно плану вашого мікрорайону, парку, спортивного чи торговельного комплексу.


Ансамбль Маріїнського палацу в Києві

А як знаходять відстані до недоступних об'єктів, як визначили розміри Землі та інших планет, як створюють географічні та астрономічні карти?

Нарешті, як функціонує комп'ютерна графіка — цей невичерпний сучасний ресурс для проектування й зображення геометричних фігур?

Розуміння цих речей потребує значно глибшого вивчення геометрії. Мало закріпити в пам'яті назви


Архітектурний проект, побудований засобами 3D комп'ютерної графіки

геометричних фігур та навчитися їх розпізнавати, навіть, зображати. Потрібно ще й уявляти, як встановлюються зв'язки між різними їхніми складовими і як на основі цих зв'язків фігури конструюються. Це так само, як для вправного володіння мовою недостатньо лише певного словникового запасу, а потрібне знання граматики та синтаксису, або як для музичної творчості недостатньо лише нотної грамоти й набору «акордів», а необхідне знання основ композиції.

Для втілення цих ідей вивчення геометрії потрібно розпочати з детального вивчення найпростіших геометричних фігур, аби потім можна було крок за кроком переходити до складніших фігур і відкривати те, як ці складніші конструюються з найпростіших.

До найпростіших геометричних фігур належать точки, прямі і площини, а також відрізки, промені і кути. Ці фігури й будуть предметом вивчення у цьому розділі.

§1. Площина. Точки і прямі

Площину ми будемо уявляти у вигляді великого аркуша або класної дошки, які можна як завгодно продовжити у будь-якому напрямку. Вважатимемо, що всі геометричні фігури розміщені на площині. Площина — латинською «планум». Тому ту частину геометрії, в якій вивчаються фігури на площині, називають *планіметрією*. Стереометрія, тобто геометрія у просторі, вивчається у старшій школі.

Найелементарнішими фігурами вважаються **точки**. *Будь-яка інша фігура складена з точок.*

Уважається, що точка не має розмірів, хоч на рисунках точки зображуються невеликими кружечками. Знаменитий давньогрецький учений Евклід, який написав перший підручник з геометрії, називав точкою «те, що не має частин». Точки можна уявляти як сліди на аркуші від тонко загостреного олівця. *На площині існує безліч точок*.

Точки зазвичай позначаються великими літерами латинського алфавіту. На рис. 1.1 зображено деяку фігуру і позначено декілька її точок A, B, C, D, E, K, M.

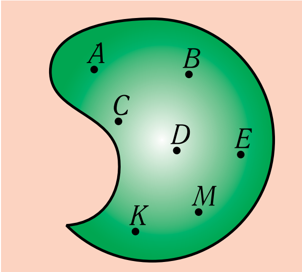


Рис. 1.1

Ще однією з найпростіших фігур є **пряма** лінія, або просто пряма. Уявлення про пряму дає лінія, проведена під лінійку (рис. 1.2). Однією з найголовніших властивостей прямої є те, що пряма цілком визначається двома своїми точками:

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

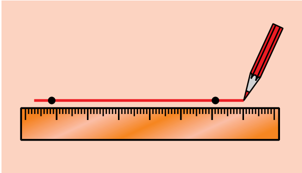


Рис. 1.2

Цю властивість називають *властивістю проведення або побудови прямої*.

На властивості проведення прямої засновується простий практичний спосіб для перевірки правильності лінійки. Якщо через дві точки провести під лінійку дві лінії, по-різному розміщуючи лінійку, як показано на рис. 1.3, і ці лінії не зіллються, то лінійка неправильна.

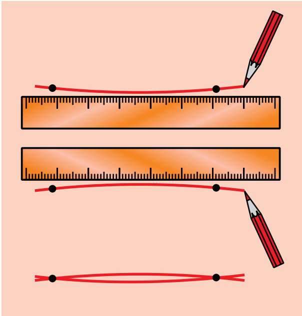


Рис. 1.3

Властивість проведення прямої передбачає, що пряма не має ніякої товщини, бо інакше кожна товщина визначала б свою лінію, яка проходить через ті самі точки. Тим часом така пряма має бути єдиною.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. На рис. 1.4 зображено дві прямі — пряму AB (її можна також позначити як BA) і пряму l.

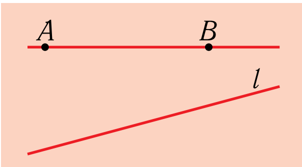


Рис. 1.4

Як і площина, пряма вважається необмеженою, хоча на рисунку, звісно, зображується лише певна обмежена частина прямої. Як і на площині, *на кожній прямій існує безліч точок*.

Якщо якась точка лежить на прямій, то кажуть також, що ця точка *належить* прямій, або що пряма проходить через цю точку. На рис. 1.5 зображено дві точки A і B, які належать прямій l, а також дві точки P і Q, які не належать їй.

Із властивості проведення прямої випливає, що дві різні прямі можуть мати щонайбільше одну спільну точку. Справді, якби вони мали дві спільні точки, то збігалися б, оскільки через дві точки можна провести лише одну пряму.

Про дві прямі, які мають одну спільну точку, кажуть, що вони *перетинаються* у цій точці. На рис. 1.6 зображено дві прямі m і n, які перетинаються у точці P.

Якщо прямі не мають жодної спільної точки, то вони називаються *паралельними* (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»). На рис. 1.7 зображено паралельні прямі a і b. Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.

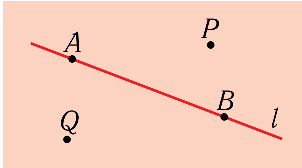


Рис. 1.5

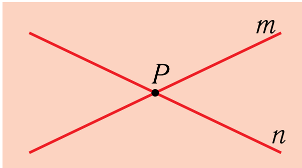


Рис. 1.6

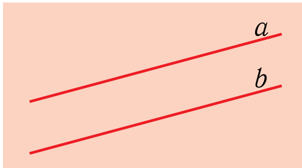


Рис. 1.7

Уявлення про площину дає не тільки аркуш паперу або класна дошка. Площину може представляти будь-яка інша рівна поверхня, наприклад, стола, стелі, стіни, підлоги, спортивного майданчика, навіть просто рівної відкритої місцевості.

Так само й точки можуть представлятися не тільки слідами від олівця, а й іншими реальними об'єктами, розмірами яких можна знехтувати. Звісно, тоді проведення прямих виглядатиме по-іншому. На цьому ґрунтуються практичні застосування геометрії.

Наприклад, під час розбивки газонів, доріжок, фундаменту під забудову тощо точки фіксують кілками, а прямі проводять за допомогою мотузок (шнура) (рис. 1.8). Аналогічно чинять малярі (рис. 1.9), напинаючи шнур, змащений смолою або крейдою, між точками, через які потрібно провести пряму, а потім відпускаючи його. У кожному із таких застосувань виходить така собі «мотузяна» геометрія.

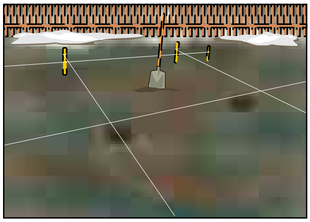


Рис. 1.8

Принципово інакше діють геодезисти. Вони фіксують точки довгими палицями — віхами, а прямі «провішують» за допомогою візуванням. А саме:

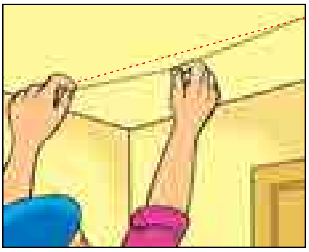
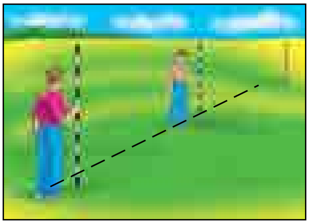
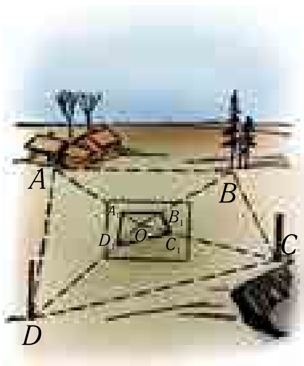


Рис. 1.9



а)



б)

Рис. 1.10

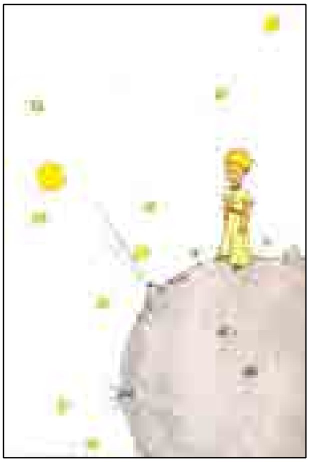


Рис. 1.11. Маленький принц на своїй планеті. Рисунок Сент-Екзюпері

Рис. 1.12

визначивши пряму двома віхами A і B, інші віхи C, D, ... ставлять між ними так, щоби при спостереженні із-за віхи A вони закривали віху B (рис. 1.10, а). За допомогою візування проводять і топографічні зйомки для складання планів місцевості або «прив'язки» до місцевості нового об'єкта для будівництва (рис. 1.10, б). Таку геометрію умовно можна назвати «променевою», оскільки роль прямих у ній відіграють зорові промені.

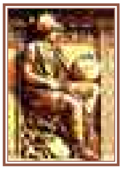
Те, що «мотузяна» геометрія збігається із «променевою» — радше щаслива випадковість, ніж необхідність. Неважко уявити собі такі фізичні умови, при яких цього не було б. Наприклад, такого не було б на планеті Маленького Принца з відомої повісті Антуана де Сент-Екзюпері (рис. 1.11). Ця планета була дуже маленькою, а тому шнур, напнутий між двома її точками, відхилявся б від зорового променя між ними. Те само стосується й нашої планети Земля, якщо брати її у великих масштабах.

Для великих земних масштабів існує інша геометрія — *сферична*, яка суттєво відрізняється від геометрії на площині, тобто від планіметрії. Відмінність проявляється уже у властивості проведення прямої: на сфері можливе таке розміщення двох точок, при якому через них можна провести безліч сферичних прямих. Ви легко збагнете це, подивившись на глобус і на його меридіани, які перетинаються на Північному і на Південному полюсах (рис. 1.12).

Вивчаючи геометрію на площині, ми й далі не раз проводитимемо порівняння її з геометрією на сфері. Сферичну геометрію започаткували античні астрономи. Для них зручно було вважати, що небесні світила розміщуються на небесній сфері. В астрономії ця модель зоряного неба застосовується й досі. В епоху Великих географічних відкриттів та Відродження, сферична геометрія давніх астрономів «спустилася» з небесної сфери на земний глобус і в такий спосіб стала поруч із прадавньою площинною геометрією. Яскравим відображенням цього нового світогляду стали геометричні та астрономічні атрибути у живописних та графічних творах тієї епохи.

Мартен де Вос. Геометрія. Гравюра. Бл. 1600 р.

Жан Леблон. Геометрія. Гравюра (1636 р.)



Вправи і задачі

1°. Побудуйте з допомогою лінійки пряму і позначте на ній три точки A, B, C. Випишіть усі можливі позначення для цієї прямої.

2°. На рис. 1.13 зображено дві прямі a і b та сім точок.

1) Як ще можна позначити ці прямі?

2) Назвіть точки, які належать прямій a, але не належать прямій b.

3) Назвіть точки, які належать прямій b, але не належать прямій a.

4) Назвіть точки, які належать кожній із прямих.

5) Назвіть точки, які не належать жодній із прямих.

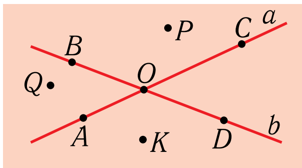


Рис. 1.13

3°. Позначте в зошиті дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте потім дві точки K, L, які належать цій прямій, і дві точки M, N, які не належать їй. Що можна стверджувати про взаємне розміщення прямих:
а) AB і KL; б) AB і KM; в) KN і BA?

4°. Проведіть дві прямі, що перетинаються. Позначте ці прямі і точку їхнього перетину. Скільки спільних точок можуть мати дві прямі?

5°. На рис. 1.14 зображено три прямі. Назвіть ці прямі. Які з них перетинаються?

6°. Побудуйте таке розміщення чотирьох точок A, B, C, D, щоб точки A, B, C належали одній прямій і точки B, C, D належали одній прямій.

7. Чи можуть три прямі перетинатися в одній точці? Як взагалі можуть розміщуватися три прямі, щоб кожні дві з них перетиналися? Зробіть відповідні рисунки.

8. Проведіть пряму, а потім ще три прямі, які її перетинають. Які можливі характерні випадки взаємного розміщення усіх цих прямих?

9. На рис. 1.15 відображено спосіб перевірки якості обробки рейки за допомогою візування. Як би ви його пояснили?

10. Прямі l і m перетинаються в точці O, M — якась точка прямої m. Чи може точка M належати прямій l?

11. Скільком прямим може належати одна взята точка; дві взяті точки; три взяті точки; п’ять узятих точок?

12. На рис. 1.16 відображений один із так званих обманів зору (зорову ілюзію): лінії AB і CD видаються вигнутими, хоча насправді вони прямі. Виконайте цей рисунок у зошиті і перевірте, чи викликатиме він такий самий обман зору.

13•. Позначте в зошиті дві точки A і B. Скільки прямих можна провести через точку A? Скільки — через точку B? Скільки — через обидві точки A і B? Чи можете ви обґрунтувати свої твердження?

14•. Позначте в зошиті чотири точки A, B, C, D так, як показано на рис. 1.17, а потім через кожні дві з них проведіть пряму. Скільки всього прямих буде проведено? Чи завжди чотири точки визначатимуть таку кількість прямих? Розгляньте можливі випадки.

15•. а) Проведіть такі чотири прямі a, b, c, d, щоби прямі a, b, c проходили через одну точку і прямі b, c, d проходили через одну точку.
б) Будь-які дві із чотирьох прямих перетинаються. Скільки може бути точок перетину? Зобразіть усі можливі випадки.

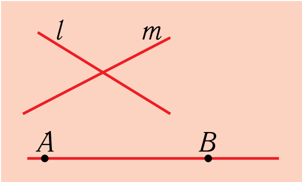


Рис. 1.14

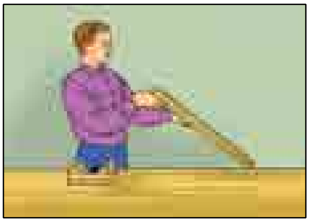


Рис. 1.15

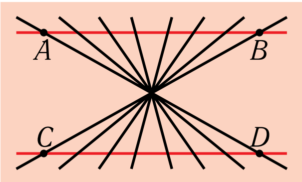


Рис. 1.16

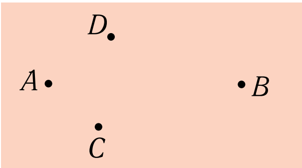


Рис. 1.17

§2. Відрізки, промені та півплощини

Уроки 2–3

Друга головна властивість прямої, поряд із властивістю побудови (проведення), стосується розміщення точок на ній.

Подивіться на рис. 1.18. На прямій l позначено три точки A, B, C, причому одна, і тільки одна з них, а саме, точка C, лежить між двома іншими — між точками A і B. Таке справджується для будь-яких трьох точок прямої:

із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Цю властивість називають *основною властивістю розміщення точок на прямій.*

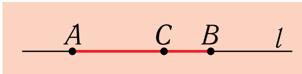


Рис. 1.18

Якщо точка C лежить між точками A і B (див. рис. 1.18), то кажуть також, що точки A і B лежать по різні боки від точки C, або що точки C і B лежать *з одного боку* від точки A, а точки A і C — *з одного боку* від точки B.

Як і властивість проведення прямої, властивість розміщення точок на прямій теж не виконувалася б у геометрії на планеті Маленького Принца (див. рис. 1.11). Справді, про кожну з трьох точок A, B, C, розміщених на лінії, яка на поверхні кулі відіграє роль прямої, наприклад, на екваторі (рис. 1.19), можна сказати, що вона лежить між двома іншими.

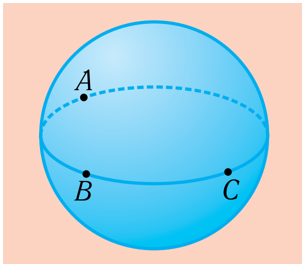


Рис. 1.19

Використовуючи властивість розміщення точок на прямій, можна означити перші фігури, які у цьому сенсі є похідними від основних фігур, тобто від точок і прямих. Це — відрізки і промені.

Означити або *дати означення* фігури — це описати властивості цієї фігури, які дають змогу (спосіб) вирізняти її з-поміж інших фігур або проводити побудову.

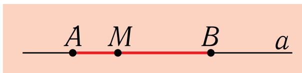


Рис. 1.20

Візьмемо на прямій a дві точки A і B (рис. 1.20). Ними визначається сукупність точок M цієї прямої, які лежать *між* точками A і B. Усі ці точки утворюють відрізок.

Означення.

***Відрізком* називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називаються *кінцями* відрізка, а всі решта точок називаються *внутрішніми точками* відрізка.**

Позначення відрізків утворюються з позначень їхніх кінців. Інколи відрізки позначають і однією малою літерою.

На рис. 1.20 зображено відрізок AB прямої a, A і B — його кінці, M — внутрішня точка.

Візьмемо тепер на прямій три точки A, O, B; нехай точка O лежить між точками A і B (рис. 1.21). Цими точками визначаться дві сукупності: 1) сукупність точок X прямої, які відносно точки O лежать з того самого боку, що й точка A; 2) сукупність точок Y прямої, які відносно точки O лежать з того самого боку, що й точка B. Такі сукупності точок називаються *променями* або *півпрямими*.

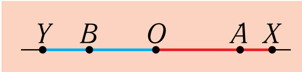


Рис. 1.21

Означення.

***Променем* (або *півпрямою*) називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать з одного боку від деякої її точки, разом із цією точкою. Ця точка називаються початком променя, а всі решта точок називаються внутрішніми точками променя.**

Позначають промені двома великими літерами, з яких перша вказує на початок променя, а друга — на яку-небудь внутрішню його точку. Часто промені позначають і однією малою літерою — так само, як прямі.

На рис. 1.21 точка O служить початком для двох променів: OA (його можна позначити і як OX) та OB (його можна позначити і як OY).

У назві «промінь» відображена цілком певна схожість між геометричним і світловим або зоровим променями: усі ці промені мають початок, але не мають кінця, і є прямолінійними.

На прямій існує два різні промені, що мають спільний початок, тобто цим початком пряма ніби розбивається на дві половини. Звідси й назва «*півпряма*» для кожної з них.

Означення.

Два різні промені однієї прямої зі спільним початком називаються *доповняльними* (або *взаємно доповняльними*).

Отже, будь-яка точка прямої розбиває її на два взаємно доповняльні промені.

Щось схоже відбувається з площиною, коли на ній провести пряму: пряма розбиває площину на дві півплощини.

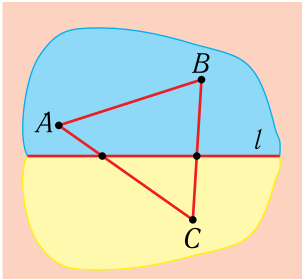


Рис. 1.22

Подивіться на рис. 1.22. На ньому точки A і B лежать з одного боку від прямої l, а точка C — з іншого. Відповідно, відрізок AB, що сполучає точки A і B, не перетинає прямої l, а відрізки CA і CB, що сполучають точку C з точками A і B, перетинають її.

Інакше це формулюють так: точки A і B лежать в одній півплощині з граничною прямою l, а точки A і C та B і C — у різних півплощинах.

Отже, маємо таку *основну властивість розміщення точок відносно прямої на площині*:

кожна пряма розбиває площину на дві півплощини, що мають спільну граничну пряму.

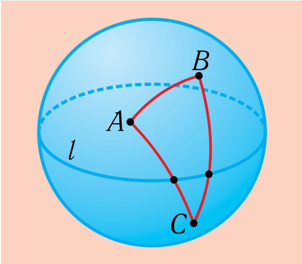


Рис. 1.23

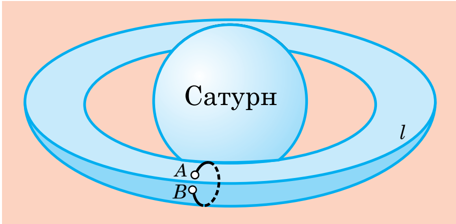


Рис. 1.24

Знову ж таки, незважаючи на «очевидність», ця властивість теж украй важлива для планіметрії. Щоправда, на підтвердження цього ми вже не можемо навести приклад геометрії на планеті Маленького Принца: як показує рис. 1.23 (порівняй його з рис. 1.22), на поверхні кулі ця властивість теж виконується. А от на кільцеподібній планеті, яку гіпотетично можна уявити утвореною, наприклад, унаслідок згущення кілець Сатурна (рис. 1.24), вона уже не виконувалася б. Справді, «пряма» l, яка проходить по зовнішньому обводу кільця, не розбиває його поверхню на дві частини: з точки A у точку B можна перейти через внутрішній бік.

Отже, якщо ми хочемо відмежуватися від геометрій таких світів, а розбудовувати геометрію свого світу, то неодмінно маємо зважати на зазначену основну властивість розміщення точок на площині.

Розв'язуємо разом

Задача.

Нехай A, B, C — довільні три точки на площині, що не лежать на одній прямій (рис. 1.25). Нехай пряма l перетинає відрізки AB і AC у внутрішніх точках. Обґрунтувати, що тоді пряма l не може перетинати відрізка BC.

Розв'язання. Звернімо увагу на півплощини, на які пряма l розбиває площину. Оскільки відрізок AB перетинає пряму l, то точки A і B лежать у різних півплощинах. Так само у різних півплощинах лежать точки A і C. Тоді виходить, що точки B і C лежать в одній півплощині — у тій, яка не містить точки A. Якщо ж кінці відрізка BC лежать в одній півплощині, то сам цей відрізок не перетинає граничної прямої l. Обґрунтування завершене.

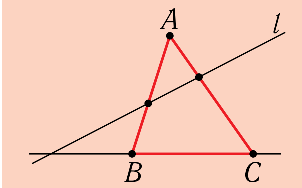


Рис. 1.25

Вправи і задачі

16. На прямій позначено точки M, P, N, Q (рис. 1.26). Які із цих точок лежать між точками:
а) M і Q; б) M і N; в) P і Q; г) N і Q?
Чи є серед цих чотирьох точок такі три, які лежать з одного боку від четвертої. Назвіть такі пари точок, які лежать по різні боки від точки P.

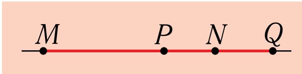


Рис. 1.26

17°. Проведіть пряму і позначте на ній дві точки A і B. Потім позначте кілька точок, які:
1) належать відрізку AB;
2) належать променю AB, але не належать відрізку AB;
3) належать променю BA, але не належать променю BA;
4) не належать ні променю AB, ні променю BA.

18°. На прямій l точки L і M лежать по різні боки від точки K. Чи може точка M лежати між точками K і L? Як розміщені точки K і M відносно точки L?

19°. Точки E і F лежать на прямій по один бік від точки D. Яка із цих точок, і чому, не може лежати між двома іншими?

20°. На прямій точка C лежить між точками A і B. Чи є взаємно доповняльними такі промені: а) AB і BA; б) AB і CB; в) BA і BC; г) CA і CB; ґ) BA і CB?

21. Які із зображених на рис. 1.27 променів a, b, c, d, e перетинають відрізок AB?

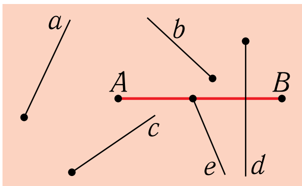


Рис. 1.27

22. На прямій позначено три точки X, Y і Z, причому точки X і Z лежать по один бік від точки Y, а точки

Y і Z — по один бік від точки X. Котра із цих трьох точок лежить між двома іншими?

23. Точка M лежить на промені LN, а точка L — на промені NM. Котра із трьох точок L, M, N лежить між двома іншими?
24. Чи можуть два промені однієї прямої не бути взаємно доповняльними?
25. Чи можуть два промені мати єдину спільну точку і при цьому не бути взаємно доповняльними?
26. Обґрунтуйте, що коли точка X належить відрізку AB, то вона належить і променю AB. Чи істинне обернене твердження: якщо точка X належить променю AB, то вона обов'язково належить і відрізку AB?
27. Дано пряму і три точки L, M, N, що не лежать на цій прямій. Відомо, що відрізок LM перетинає пряму, а відрізок LN не перетинає її. Чи перетинає пряму відрізок MN? Обґрунтуйте свою відповідь.
28. Проведіть пряму і позначте дві точки в одній півплощині відносно цієї прямої і три точки в іншій. Проведіть ті відрізки з кінцями у позначених точках, які перетинають проведену пряму. Скільки вийшло відрізків? Чи залежить ця відповідь від конкретного розміщення точок?
29. Проведено пряму і позначено чотири точки A, B, C, D, що не лежать на ній. Чи перетинатиме відрізок AD пряму, якщо:
а) AB, BC і CD перетинають пряму;
б) відрізки AC і BC перетинають пряму, а відрізок BD не перетинає;
в) відрізки AB і CD перетинають пряму, а відрізок BC не перетинає;
г) відрізки AB і CD не перетинають пряму, а відрізок BC перетинає;
ґ) відрізки AB, BC і CD не перетинають пряму;
д) відрізки AC, BC і BD перетинають пряму?
Кожний випадок проілюструйте рисунком.
30•. Перелічіть і зобразіть на рисунках усі можливі випадки взаємного розміщення двох променів на одній прямій.
31•. Скільки всього відрізків визначається чотирма точками, позначеними на одній прямій?
32•. На прямій позначено три точки A, B, C. Скільки різних позначень для променів можна утворити за допомогою літер A, B, C? Скільки серед відповідних їм променів буде різних? Як зміниться відповідь на друге запитання, якщо точки A, B, C не лежатимуть на одній прямій?
33•. Точки A, B, C, D не лежать на одній прямій. Відомо, що пряма AB перетинає відрізок CD, а пряма CD перетинає відрізок AB. Обґрунтуйте, що відрізки AB і CD перетинаються.
34•. Відомо, що відрізки AB і CD перетинаються. Обґрунтуйте, що тоді відрізки AC і BD за жодних умов не можуть перетинатись.

§3. Вимірювання і відкладання відрізків

Урок 4

Видатний учений-хімік і метролог Д.І. Менделєєв любив повторювати, що справжня наука починається тоді, коли починають вимірювати.

Вимірювання у геометрії розпочинається з вимірювання довжин відрізків.

Якщо розглядати цю проблему з вузькопрактичної точки зору, то її вирішення спряжене з двома неабиякими труднощами. Перша трудність полягає у запровадженні єдиного масштабу (еталона довжини), а друга — у забезпеченні належної точності самого вимірювання. Дещо про це можна довідатися з історичного нарису, вміщеного у кінці цього параграфа. Однак у теоретичній геометрії від цих суто практичних аспектів абстрагуються, вважаючи, що єдиний масштаб (наприклад, метр, дециметр, сантиметр тощо) уже запроваджений і що можливе абсолютно точне вимірювання, навіть якщо для цього потрібні не тільки десяті, а й соті, тисячні і так далі частини основного еталона.

Д.І. Менделєєв у мантії професора Единбурзького університету.
Портрет Іллі Рєпіна.

Одним із найпоширеніших інструментів для вимірювання довжин є лінійка з нанесеною на її край сантиметровою і міліметровою шкалою. Незважаючи на простоту, лінійка дає змогу наочно проілюструвати ті властивості вимірювання та відкладання відрізків, які для геометрії є основними.

На рис. 1.28, а) відображено вимірювання відрізків AB і AC, довжини яких менші від довжини лінійки: $AB = 5$ см; $AC = 7$ см 2 мм $=$ $= 7{,}2$ см.

На рис. 1.28, б) відображено вимірювання відрізка AB, довжина якого більша за довжину лінійки. Цей відрізок розбивається на два відрізки AM і MB, потім довжина кожної частини вимірюється окремо,

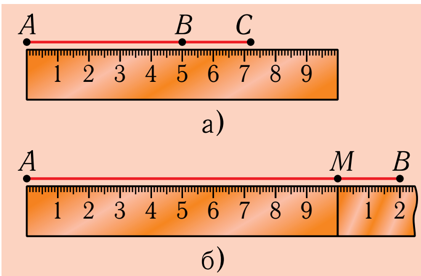


Рис. 1.28

а результати підсумовуються: $AB = AM + MB =$ $= 10$ см $+ 2$ см $= 12$ см.

Отже, маємо таку *основну властивість вимірювання відрізків*:

кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями. На рис. 1.28, а) відстань між точками A і C дорівнює 7,2 см, а на рис. 1.28, б) відстань між точками A і B дорівнює 12 см.

Означення.

Якщо відрізки мають однакову довжину, то вони називаються *рівними*.

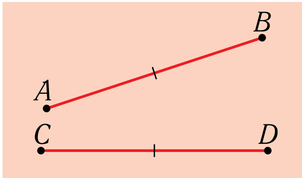


Рис. 1.29

На рис. 1.29 зображено два рівних відрізки AB і CD; кожен із них має довжину 3 см.

Рівність відрізків записується з допомогою звичайного знака рівності, наприклад: $AB = CD$.

На рисунках рівні відрізки прийнято позначати однаковою кількістю рисочок.

Означення.

Точка, яка ділить відрізок на дві рівні частини, називається *серединою відрізка*.

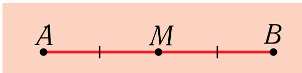


Рис. 1.30

На рис. 1.30 відрізки AM і MB рівні між собою, отже, точка M — середина відрізка AB.

У геометрії, а також і в практиці, часто доводиться відкладати відрізки, які мають певну довжину.

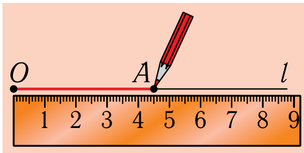


Рис. 1.31

На рис. 1.31 на промені l від його початку O за допомогою лінійки відкладено відрізок OA завдовжки 4,5 см.

Відрізки можна відкладати й за допомогою інших засобів, наприклад, використовуючи лінійку і циркуль: спочатку з використанням лінійки фіксується відповідний розхил циркуля (рис. 1.32, а), а потім цей розхил «переноситься» на промінь (рис. 1.32, б). Звісно, від способу відкладання результат не залежить.

Отже, справджується така основна властивість відкладання відрізків:

на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один.

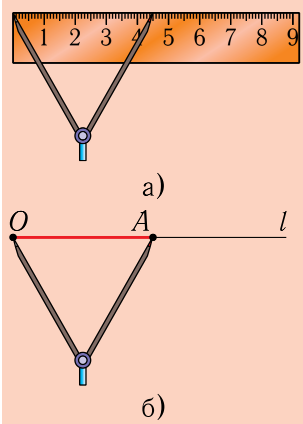


Рис. 1.32

Відзначимо два важливих наслідки з основних властивостей вимірювання і відкладання відрізків.

1. Нехай маємо два рівних відрізки AB і CD (рис. 1.33). Рівність цих відрізків означає, що встановлено їхні довжини і вони виявилися рівними. Візьмемо тоді промінь l з початком C, який містить відрізок CD. Відрізок CD буде відкладеним на цьому промені. Якщо ж ми відкладемо від точки C ще й відрізок AB, то дістанемо той самий відрізок CD, оскільки відрізок з такою довжиною можна відкласти лише один. У результаті відрізок AB немовби суміститься з відрізком CD.

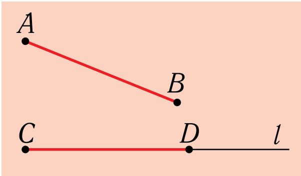


Рис. 1.33

Отже, ***якщо відрізки рівні, то їх можна сумістити***.

2. Нехай тепер маємо два нерівних відрізки AB і CD, причому довжина відрізка CD більша за довжину відрізка AB (рис. 1.34). Якщо ми так само, як у попередньому випадку, відкладемо на промені CD відрізок CB', рівний за довжиною відрізку AB, то точка B' неодмінно буде внутрішньою точкою відрізка CD. Справді, збігатися з точкою D вона не може, бо для цього відрізки AB і CD мають бути рівними. Якби ж вона розмістилася ззовні відрізка CD, то тоді відрізок CB' дорівнював би сумі відрізків CD і DB' і тому мав би довжину, більшу за довжину відрізка CD, а тому й за довжину відрізка AB, що неможливо.

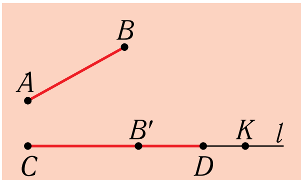


Рис. 1.34

Отже, ***якщо нерівні відрізки відкласти на одному й тому самому промені від його початку, то відрізок з меншою довжиною буде частиною відрізка з більшою довжиною***.

Відповідно до цього, якщо довжина відрізка CD більша за довжину відрізка AB, то кажуть, що й сам відрізок CD більший за відрізок AB, і записують: $CD > AB$. Тоді ж відрізок AB уважається меншим від відрізка CD, і це записується так: $AB < CD$.

Розв'язуємо разом

Задача.

Чи можуть точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см?

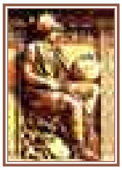
Розв'язання. Якщо три точки X, Y, Z лежать на одній прямій, то одна, і тільки одна, з них лежить між двома іншими. Нехай точка Y лежить між точками X і Z (рис. 1.35). Це означає, що точка Y належить відрізку XZ. Тоді, за властивістю вимірювання відрізків,

$$XZ = XY + YZ.$$

Отже, XZ — найдовший із трьох відрізків XY, YZ і XZ, які попарно сполучають три точки X, Y, Z, і він дорівнює сумі двох інших відрізків.

У нашому випадку найдовшим є відрізок $AC = 10$ см, однак він не дорівнює сумі двох інших відрізків, оскільки $AB + BC = 5 + 7 = 12$ (см). Отже, точки A, B, C не можуть лежати на одній прямій.

Рис. 1.35



Вправи і задачі

35°. Виміряйте і запишіть результати вимірювання для усіх відрізків, зображених на рис. 1.36.

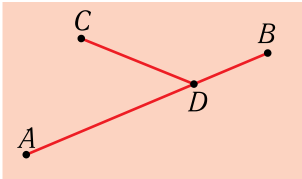


Рис. 1.36

36°. Проведіть у зошиті промінь з початком у точці O, а потім відкладіть на цьому промені відрізки OA = = 6 см і OB = 2,8 см. Чому дорівнює довжина відрізка BA? Визначте її двома способами.

37°. Проведіть промінь AX, відкладіть на ньому відрізок AB завдовжки 4 см і за допомогою лінійки знайдіть його середину C. Потім побудуйте такий відрізок AD, щоб точка B була його серединою. Чому дорівнюють довжини відрізків AC і AD?

38°. На прямій точка N лежить між точками L і M. Який з відрізків з кінцями у цих точках, має найбільшу довжину?

39°. Порівняйте на око довжини відрізків AB і CD на рис. 1.37 та AB і BC на рис. 1.38, а потім перевірте свої враження вимірюванням.

Рис. 1.37

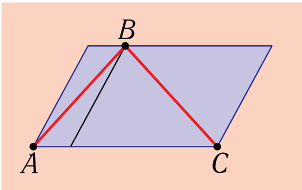


Рис. 1.38

Рис. 1.39

40°. Точка C належить відрізку AB (рис. 1.39). Визначте довжину відрізка:
а) AB, якщо AC = 4,5 см, CB = 2,7 см;
б) AC, якщо CB = 3,6 см, AB = 9,3 см;
в) CB, якщо AC = 5,1 см, AB = 8 см.

41°. На прямій по різні боки від точки O відкладені відрізки OA = 3 см і OB = 5 см. Чому дорівнює відстань між точками A і B?

42°. Точка O розміщена між точками A і B і віддалена від них на відстанях 2,4 см і 3,6 см. Чому дорівнює відстань між точками A і B?

43. Рівні відрізки AB і BC розміщені на одній прямій. Котра із точок A, B, C лежить між двома іншими?

44. Точки A, B, C лежать на одній прямій і відрізок BC більший за відрізок BA. Яка із цих трьох точок може лежати між двома іншими?

45. Чи можуть точки L, M, N лежати на одній прямій, якщо:
а) LM = 3 см, LN = 7 см, MN = 9 см;
б) LM = 3 см, LN = 6 см, MN = 9 см?
Якщо можуть, то зобразіть це на рисунку.

46. Точки C ділить відрізок AB завдовжки 28 см на частини, різниця яких дорівнює 6 см. Визначте довжини відрізків AC і CB.

47. Довжина відрізка дорівнює 28 см. На яких відстанях від кінців відрізка розміщені точки, які ділять його у відношенні 3 : 4?

48. Точка C — середина відрізка AB, а точка D — середина відрізка AC. Визначте довжину відрізка AB, якщо BD = 8 см.

49. Точки B і C належать відрізку AD, що має довжину 12 см. Відомо, що AB = 6 см, а CD = 8 см. Визначте довжину відрізка BC.

50•. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Визначте довжину відрізка BC, якщо AB = 3,3 см, AC = 4,7 см. Скільки розв'язків має ця задача?

51•. Точка B належить променю OA, причому OB = 10 см, AB = 4 см. Визначте довжину відрізка OA. Розгляньте два випадки.

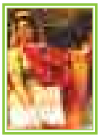
52•. На промені з початком O позначені точки A, B, C так, що OA = 5 см, AB = 6 см, BC = 3 см. Визначте можливу відстань між точками O і C.

53•. Точки A, B, C, D лежать на одній прямій, і при цьому AB = 13 см, BC = 8 см, CD = 6 см. Визначте найбільшу і найменшу з можливих відстаней між точками A і D.

54•. Точка ділить відрізок на дві частини, відстань між серединами яких дорівнює 5 см. Чому дорівнює довжина відрізка?

55•. Точка C належить відрізку AB. Обґрунтуйте, що відстань між серединами відрізків AC і CB не залежить від розміщення точки C. Чому вона дорівнює, якщо довжина відрізка AB дорівнює 16 см?

56•. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину. Обґрунтуйте, що тоді відрізки AC і BD — рівні. Чи можна стверджувати, навпаки, що коли відрізки AB і CD лежать на одній прямій, а відрізки AC і BD рівні, то відрізки AB і CD мають спільну середину?



С Т О Р І Н К И   І С Т О Р І Ї

Як вимірювали довжини у різні часи

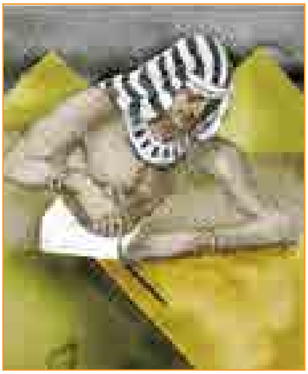
Сучасна людина зазвичай не задумується над тим, що ті численні блага цивілізації, якими вона користується, забезпечені невтомною працею всього людства упродовж віків. Характерним прикладом є вимірювання довжин і відстаней. Хто тепер не знає, що довжини, які сумірні з ростом людини, вимірюють у сантиметрах, більші — у дециметрах і метрах, великі відстані — у кілометрах, а маленькі проміжки — у міліметрах? Хто не знає, що між цими одиницями існують дуже прості співвідношення, які виражаються множенням чи діленням на степінь числа 10? Нарешті, хто не знає, що для проведення самих вимірювань використовуються прості прилади — лінійки, стрічки, складні метри, рулетки тощо? І кожна людина, в якій би частині світу не проживала, узявши один із таких приладів, може легко перевірити вказані будь-де розміри або закласти потрібні розміри у виріб, який збирається виготовляти. Але так було не завжди. Більшу частину своєї історії людство не мало загальноприйнятих мір.

1. Перші еталони — в людині

Першими мірами довжини, природно, служили частини людського тіла — найчастіше рук і ніг.

Ще давні єгиптяни, вавилоняни та інші народи застосовували таку міру, як *лікоть*, що дорівнювала відстані від ліктя до кінця розпрямленого середнього пальця руки. Ліктями, зокрема, дуже зручно вимірювати мотузки та відрізи тканини. Повний оберт тканини довкола ліктя називався *подвійним ліктем*. Ця міра теж застосовувалася у багатьох народів.

Лікоть не мав сталої величини. У різних державах і в різні часи застосовувалися різні лікті. Навіть в одній державі в один час могли існувати різні лікті.



Міра лікоть

Найдовшим зазвичай був царський лікоть, який застосовувався при зборі податі.

У руській державі міра, аналогічна ліктю, називалася *аршином*. Відомий російський історик і письменник М.М. Карамзін (1766–1826) уважав, що ця назва була запозичена внаслідок торгівлі зі східними народами. Зокрема, у персів лікоть називався «арші». Недобросовісні купці часто по-своєму тлумачили цю міру. Звідси бере свій початок відомий вислів «міряти на свій аршин», що означає «по-своєму підходити до справи, пильнувати свої інтереси».

Дрібнішими від ліктя та аршина мірами довжини були: *долоня* (наприклад, в юдеїв, британців), *кулак* (в арабів) і *п'ядь* (у давніх русичів).

Долоня — це ширина кисті руки. У класичній англійській літературі часто зустрічаються оповіді про вимірювання висоти коней саме долонями.

Мала п'ядь — це відстань від кінця великого пальця до кінця вказівного, а велика п'ядь — відстань від кінця великого пальця до кінця мізинця при найбільшому можливому їхньому розведенні. П'яді зустрічаються уже в актах XIV ст. Вважалося, що в аршині містяться 4 п'яді. Тому п'ядь часто називалася також чверткою. З п'яддю пов'язаний крилатий вислів: «Берегти кожну п'ядь рідної землі».

Ще дрібнішою мірою довжини був *палець* (наприклад, у вавилонян) і *дюйм* (в англо-саксонських народів). Цілком природно, що долоня дорівнювала 4 пальцям.

Дюйм початково вважався рівним довжині суглоба великого пальця. Про це говорить і сама назва: слово duim голландською мовою якраз і означає «великий палець».

На початку XVII ст. указом російського царя Петра I була встановлена відповідність між традиційними російськими і новими англійськими мірами — «заради кращої узгодженості з європейськими народами у трактатах і контрактах». Відповідно до цього указу, 1 аршин прирівнювався до 28 англійських дюймів.

Іще з часів Київської Русі на українських землях застосовувалася така міра довжини, як *сажень*. Про

Міра долоня

Міра палець

це, зокрема, свідчить і Нестор-літописець. Слово «сажень» мало первісну форму «сяжень». Тому ймовірно, що воно походило від дієслова «сягати».

Розрізняли *маховий сажень*, що дорівнював розмаху рук, і *косий сажень*, рівний відстані від п'яти правої ноги до кінців пальців витягнутої вгору лівої руки. Звичайно, косий сажень був більшим від махового. Тому про кремезних чоловіків (зокрема, про казкових героїв) казали, що вони мають «косий сажень у плечах». Інколи таке порівняння можна почути й нині.

У XVII ст. було узаконено, що міра 1 сажень становить 3 аршини, що на нинішній вимір дорівнює 2,13 м. Зокрема, в «Соборному укладі» 1649 року сказано: «А сажень, щоб міряти землю чи щось інше, — робити на три аршини, а більше або менше трьох аршинів сажнів не робити». На відміну від косого та махового сажнів, цей новий сажень називався *царським* або *казенним*.

Найпоширенішою з мір, пов'язаних з ногою людини, є *фут*. Він дорівнює середній довжині ступні дорослої людини (англійське foot якраз і означає «нога», «ступня»). Ця міра теж застосовувалася у різних народів. В Англії фут був узаконений разом із дюймом у XIV ст. королем Едвардом II: 1 фут вважався рівним 12 дюймам, що на нинішній вимір становить 30,48 см. Французький королівський фут (який теж ділився на 12 дюймів і був у Франції основною мірою довжини аж до введення метра), мав довжину 32,5 см.

Не менш цікаве походження основної міри довжини в англо-саксонських народів — *ярда*. Ця міра була узаконена англійським королем Генріхом I ще у 1101 році. Згідно з легендою, 1 ярд — це відстань від кінчика носа цього короля до кінця середнього пальця його витягнутої руки. Щоправда, за іншою версією прообразом ярда став меч Генріха I. 1 ярд уважається рівним 3 футам. На даний час — це приблизно 91 см.

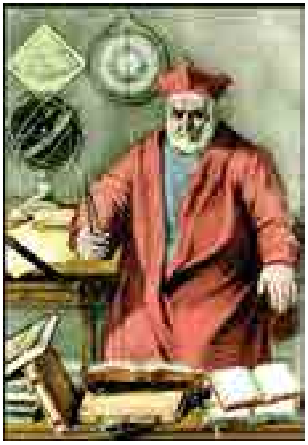
Міра фут

Міра ярд

2. Еталон — ячмінна зернина

У 1324 р. англійський король Едвард II уточнив величину дюйма. Згідно з королівським указом, 1 дюйм дорівнював «довжині трьох ячмінних зернин, узятих із середньої частини колоска і прикладених одне до одного своїми кінцями». А в англійському побуті ще й досі залишилася мірка «ячмінне зерня», що дорівнює третині дюйма. Цікаво згадати, що улюблена дітьми Дюймовочка — малесенька дівчинка з однойменної казки Андерсена, яка могла жити у квітці і мала зріст 1 дюйм, народилася саме з ячмінної зернини.

У XVI ст. відомий тогочасний учений Христоф Клавій (1537–1612) запропонував уточнити розміри фута за допомогою тих самих ячмінних зернин. Половину фута, за Клавієм, мали визначати 64 зернини, прикладені одна до одної упоперек. Це давало змогу дуже просто відтворювати довжину еталона у будь-якому місці, оскільки товщина ячмінних зернин дуже стабільна (значно стабільніша від їхньої довжини, яку застосовували для визначення дюйма), а велика кількість узятих зернин практично повністю згладжувала індивідуальні відхилення від середньої величини. До того ж, число 64 є степенем двійки. А це давало змогу простим діленням навпіл діставати менші долі фута.



Христоф Клавій (Клавій Шлюссель) (1537–1612) — італійський математик німецького походження. Найбільше відомий як керівник проекту з уведення Григоріанського календаря, яким увесь світ користується й понині.

3. Час як відстань

Принципово інші способи застосовувалися для встановлення одиниць вимірювання великих відстаней. Вони пов'язувалися з урахуванням часу на їхнє подолання. Наприклад, такою була міра довжини *стадій*. Уважається, що ця міра виникла у Давньому Вавилоні. Достеменно відомо, що стадіями вимірювали відстані давні греки. Зокрема, від цього слова утворилося сучасне слово «стадіон».

За переказами, стадій дорівнював відстані, яку доросла людина проходить розміреним кроком за проміжок часу від появи першого сонячного променя при сході сонця до того моменту, коли весь сонячний диск повністю зійде над горизонтом. Оскільки добре відомо, що схід сонця триває 2 хв, то, враховуючи середню швидкість пішохода, легко дійти висновку, що величина стадія перебувала в межах від 160 до 195 метрів.

Відомо, що вавилоняни ділили свій стадій на 360 ліктів. А оскільки лікоть у них приблизно дорівнював 54 см, то звідси неважко вивести, що довжина вавилонського стадія становила приблизно 194 м.

На основі аналогічних міркувань з'ясовано, що римський стадій мав довжину 185 м, а грецький олімпійський — 192 м.

Давньовавилонська лінійка (бл. 2000 р. до н. е.). Оскільки ця лінійка є фрагментом напівзруйнованої статуї царя Гудея, то можна вважати, що нею визначалася половина давньовавилонського царського ліктя. Лінійка поділена на 16 рівних частин, із яких друга у свою чергу поділена на 6, четверта — на 5 рівних частин, шоста — на 4, восьма — на 3, а дев'ята — на 2 рівні частини.

Ідея з використанням часових проміжків для встановлення міри довжини дістала несподіваний розвиток у XVII ст. У результаті фізичних експериментів з маятником (важливим елементом маятникового годинника, який якраз тоді був винайдений) з'ясувалося, що період коливання маятника залежить від його довжини. На основі цього самим винахідником маятникового годинника голландським математиком і механіком Християном Гюйгенсом (1629–1695) у 1664 році було запропоновано за одиницю вимірювання відстаней довжину такого маятника, період коливання якого становить 1 секунду. А польський природодослідник Тіт Бурратіні (1615–1682) у 1675 році запропонував і назву для цієї нової одиниці — метр, утворивши її від грецького слова «метрео», тобто «вимірюю».

Християн Гюйґенс

Проте невдовзі несподівано з'ясувалося, що період коливання маятника залежить не тільки від його довжини, а й від географічної широти місця, де проводиться вимірювання. Зокрема, поблизу екватора і в середніх широтах ці величини суттєво відрізняються одна від одної. Виявивши цей недолік, помітили й інший, а саме, що при реалізації цієї ідеї одиниця вимірювання довжини «прив'язувалася» до одиниці вимірювання часу. А це в теоретичному аспекті значно гірше, ніж аби ці величини визначалися незалежно одна від одної. Тому, незважаючи на оригінальність ідеї, від неї відмовилися, залишивши лише на майбутнє назву «метр» для одиниці вимірювання довжин.

4. Універсальним мірилом оголошено Землю

У 1670 році французький дослідник Мутон висунув ще більш захоплюючу ідею — пов'язати одиницю вимірювання довжин з розмірами всієї матінки-Землі, точніше, з довжиною її меридіана. Але для реалізації цієї сміливої, а по суті глибоко філософської та гуманістичної ідеї, потрібні були особливі суспільно-політичні умови. Вони з'явилися лише через сотню літ у зв'язку з революційними подіями у Франції наприкінці XVIII ст. Лише революційний рух, який охопив тоді цю країну, дав змогу організувати відповідні великомасштабні вимірювання, а найголовніше — стимулював перехід на нову систему мір. В усіх інших консервативніших країнах цей перехід затягнувся більше, як на століття, а в деяких не реалізований повною мірою й досі.

Характерним у цьому зв'язку є звернення французького уряду до населення 1790 р. В ньому, зокрема, мовилося:

«Як можуть друзі рівності миритися з розмаїттям і незручністю мір, які зберігають ще пам'ять про ганебне феодальне рабство..., у той час, як вони клялися знищити саму назву тиранії, якою б вона не була?.. Для створення істинно філософської системи мір, яка була б достойною віку просвітництва, не можна взяти нічого, що не ґрунтувалося б на твердих підвалинах, що не пов'язано найтіснішим чином з предметами незмінними, нічого, що в подальшому могло б залежати від людей і від подій. Потрібно звернутися до самої природи і взяти основу системи мір із її надр ...».

5. Як же зміряли Землю?

У березні 1791 року Національні збори Франції затвердили пропозицію Академії наук, що виходила від найвидатніших тогочасних учених Лапласа, Лагранжа, Монжа, Лавуазьє та ін., — про спорядження спеціальної експедиції для вимірювання земного меридіана. Було вирішено виміряти довжину паризького меридіана між двома містами, розміщеними на ньому, — Дюнкерком (приморським містом на півночі Франції) і Барселоною (іспанським містом на березі Середземного моря). Знаючи географічні широти цих міст, потім було легко обчислити й довжину всього меридіана. Винятково сприятливою обставиною було те, що обидва вибрані міста знаходилися на рівні моря, оскільки це суттєво спрощувало вимірювання й підвищувало їхню точність. Керівниками експедиції було призначено академіків Жана Батіста Деламбра (1749 – 1822) і П'єра Мешена (1744 – 1804).

Вимірювальні роботи експедиції та відповідні розрахунки тривали декілька років. На відстані близько 1 000 км між Дюнкерком і Барселоною за допомогою провішування було побудовано й виміряно 115 трикутників, розміщених уздовж меридіана. Шукана величина була знайдена обчисленням і сумуванням довжин відрізків меридіана, розміщених усередині кожного трикутника. Для цього застосовувалися співвідношення, які існують між кутами і сторонами трикутника (ви вивчатимете їх у 9 класі). З особливою точністю вимірювалася лише одна сторона крайнього трикутника — так звана база. А в усіх решті трикутниках за допомогою кутомірних приладів вимірювалися лише кути — що значно простіше, ніж вимірювання відстаней. За допомогою формул, які пов'язують сторони й кути трикутника, крок за кроком, починаючи від першого трикутника, обчислювалися сторони всіх інших трикутників, а потім і відрізки меридіана, розміщені всередині них.

Встановивши довжину паризького меридіана у старих французьких мірах (туазах і футах; 1 туаз дорівнював 6 футам), було вирішено за основу нової

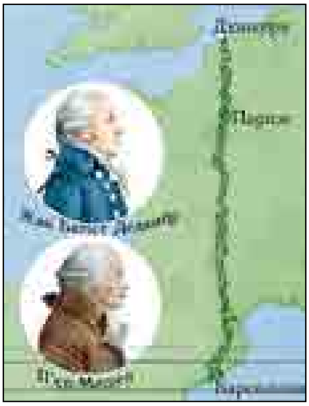


Схема вимірювання довжини паризького меридіана міри — метра — взяти $\frac{1}{40\ 000\ 000}$ від знайденої величини. У старих французьких мірах це становило 3 фути і 11,44 лінії (1 лінія = $\frac{1}{12}$ фута).

6. Еталон створено

Перший еталон метра було виготовлено у 1799 році. Але навіть у Франції повний перехід на нову систему вимірювання відбувся лише у 1840 р. А міжнародною мірою метр став у 1872 р. після відповідного рішення спеціально скликаної в Парижі міжнародної конференції. Тоді ж було затверджено міжнародний еталон метра, що був виготовлений зі сплаву платини (90%) та іридію (10%). Еталон має форму стержня завдовжки 102 см із двома мітками на відстанях 1 см від кінців. Відстань між цими мітками якраз і уособлює довжину 1 м. Поперечний переріз еталона нагадує літеру Х. Саме така форма забезпечує йому найбільшу міцність при найменшій вазі (останнє дуже важливо, оскільки платина, яка домінує в сплаві, дорожча навіть за золото).


Міжнародний талон метра

§4. Кути та їхнє вимірювання

Урок 5

Коли у побуті говорять про кут, наприклад, у кімнаті, на майданчику, на ділянці, між вулицями тощо, то мають на увазі фігуру, утворену двома відрізками-сторонами. На рис. 1.40 дужкою позначений один із кутів у парку. У геометрії теж використовується схоже поняття про кут, коли, наприклад, говорять про кути трикутника. Однак у застосування геометрії, наприклад, при складанні планів місцевості з допомогою візування, доводиться розглядати і кути з як завгодно продовженими сторонами, тобто утвореними променями. Промені містять у собі й відрізки, однак жоден відрізок не вмістить променя. Тому аби можна було користуватися як одним, так і іншим уявленням про кут, приймається таке його означення.

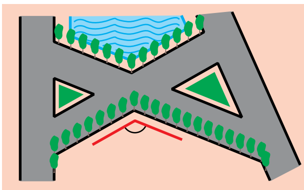


Рис. 1.40

Означення.

Кутом **називається фігура, що складається з двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається *стороною* кута, а їхній спільний початок — *вершиною* кута.**

На рис. 1.41 зображений кут з вершиною O і сторонами OA, OB, які також позначені як a і b. Позначити цей кут можна одним із таких способів: $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle ab$ *або* $\angle(ab)$. При цьому позначення у формі $\angle O$ застосовується лише у тому разі, коли при вершині O не розглядаються інші кути. Звернемо також увагу, що в позначенні $\angle AOB$ *вершина кута розміщується між точками, взятими на сторонах.*

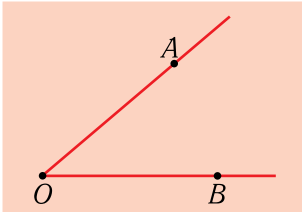


Рис. 1.41

Інколи для спрощення рисунків кути позначають цифрами. Наприклад, на рис. 1.42 при вершині O зображено три кути: $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

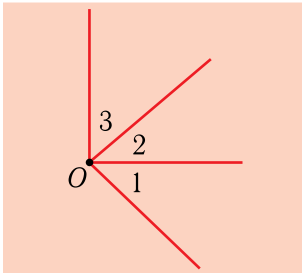


Рис. 1.42

Означення.

Якщо сторони кута є взаємно доповняльними променями, тобто утворюють пряму, то такий кут називається *розгорнутим*.

На рис. 1.43 зображено розгорнутий кут O зі сторонами a і b. Фактично — це пряма, з виокремленою на ній точкою, що вважається вершиною розгорнутого кута.

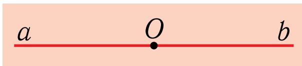


Рис. 1.43

Означення.

Кажуть, що **промінь з початком у вершині нерозгорнутого кута проходить між його *сторонами*, якщо він перетинає який-небудь відрізок з кінцями на сторонах кута.**

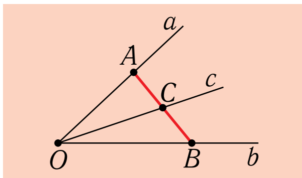


Рис. 1.44

На рис. 1.44 зображено промінь c, який лежить між сторонами a і b нерозгорнутого кута O: він перетинає відрізок AB з кінцями на сторонах кута у точці C.

Для розгорнутого кута вважається, що будь-який промінь c, який виходить з вершини кута O, лежить між його сторонами a і b (рис. 1.45).

Кажуть, що промінь, який проходить між сторонами кута, *розбиває його на два кути*. На рис. 1.44 і 1.45 промінь c розбиває кут $\angle ab$ на два кути: $\angle ac$ і $\angle cb$.

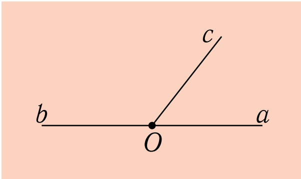


Рис. 1.45

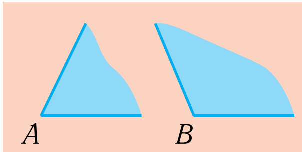


Рис. 1.46

Точки усіх променів, які проходять між сторонами нерозгорнутого кута, називаються внутрішніми точками цього кута. Усі інші точки площини називаються зовнішніми. На рис. 1.46 синім кольором позначені внутрішні точки нерозгорнутих кутів A і B, жовтим — зовнішні.

Для розгорнутого кута О внутрішніми вважаються всі точки однієї з півплощин, граничну пряму якої утворюють сторони кута, а зовнішніми — точки іншої півплощини (рис. 1.47).

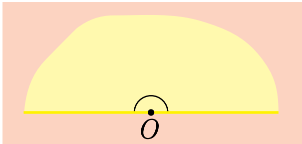


Рис. 1.47

Отже, будь-який кут розбиває площину на дві частини. Та частина, яка містить сторони кута і всі внутрішні точки кута, називається *опуклим плоским кутом*, а та, що містить сторони кута і всі зовнішні точки, — *увігнутим плоским кутом*.

У трикутниках, які вивчатимуться далі, усі плоскі кути опуклі (рис. 1.48), однак уже в чотирикутниках, які вивчатимуться у 8 класі, можуть бути й увігнуті кути (рис. 1.49).

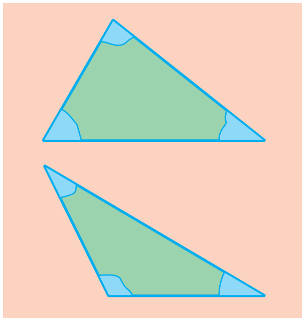


Рис. 1.48

У навчальній і креслярській практиці кути вимірюють за допомогою транспортира (рис. 1.50). У геодезичних та астрономічних вимірюваннях застосовуються інші інструменти — астролябії, октанти, секстанти, бусолі, теодоліти. Однак основою їхньої конструкції, як і в транспортирі, є круг або частина круга, з нанесеною на краю шкалою. Детальніше про це розповідається в історичному нарисі, вміщеному в кінці параграфа.

Основною одиницею для вимірювання кутів є градус (gradus — латинською мовою «крок»). Градуси позначаються з допомогою кружечка °, який записується зверху справа біля відповідного числа.

Кутом з градусною мірою 1° уважається $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута. Ця одиниця значно давніша від метричних одиниць, що зараз використовуються для вимірювання відрізків і відстаней: її застосовували ще античні астрономи, тимчасом, як метричні одиниці набули поширення лише з 2-ї половини XIX ст.

Дрібнішими одиницями для вимірювання кутів є мінута (minuta — дослівно «менша») і секунда (secunda — дослівно «друга», тобто друга менша одиниця). Одна мінута (позначається 1′) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині градуса, а одна секунда (позначається 1″) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині мінути, тобто $\frac{1}{3600}$ частині градуса. У надточних астрономічних вимірюваннях застосовуються навіть терції (tertia — означає «третя»). Одна терція (позначається 1‴) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині секунди. Вимірювання з такою величезною точністю здійснюється шляхом візування з використанням телескопів і дуже точних механізмів для їхнього наведення.

Величина кута в градусах та частинах градуса називається *градусною мірою* кута.

Якщо, наприклад, кут A має градусну міру 60°, то це записують так: $\angle A = 60°$.

Назва приладу «транспортир» походить від латинського слова transportare, що означає «переносити». Отже, спочатку цей прилад слугував не тільки

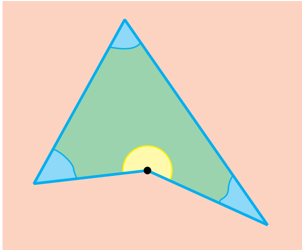


Рис. 1.49

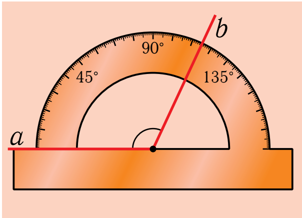


Рис. 1.50

для вимірювання, а й для перенесення (відкладання) кутів.

Відповідно до цього, основними властивостями вимірювання та відкладання кутів уважають такі:

кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами;

від будь-якого променя у дану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.

На рис. 1.50 показано спосіб вимірювання з допомогою транспортира кута $\angle ab$; його градусна міра дорівнює 115°. На рис. 1.51 цей кут відкладено від променя l у верхню півплощину: $\angle lm = 115°$.

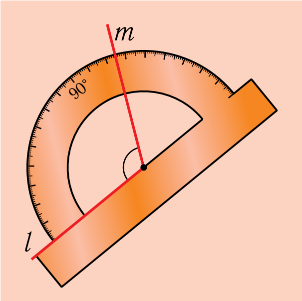


Рис. 1.51

Незважаючи на очевидну схожість між вимірюванням і відкладанням кутів та вимірюванням і відкладанням відрізків, між ними існують суттєві відмінності. По-перше, для кутів існує абсолютний і незмінний еталон — розгорнутий кут, тимчасом, як для відрізків еталон можна вибирати довільно: це може бути метр, фут, сажень, лікоть тощо. (Згадайте відомий анімаційний фільм «38 папуг», герої якого вимірювали довжину удава і папугами, і мавпами, і навіть слониками.) По-друге, для кутів існує найбільша можлива величина — 180°, а для відрізків найбільшої величини не існує.

Означення.

Кути, які мають однакові градусні міри, називаються *рівними*.

Рівність кутів записується за допомогою звичайного знака рівності. На рисунках рівні відрізки часто позначають однаковою кількістю дужок біля вершин.

Наприклад, на рис. 1.52 за допомогою двох дужок позначено, що $\angle O = \angle Q$.

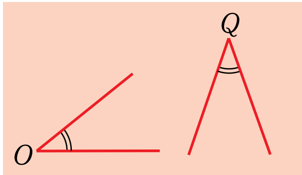


Рис. 1.52

Як і для відрізків, можливість відкладання кутів із заданою градусною мірою забезпечує можливість суміщення рівних кутів і порівняння кутів, які не є рівними. А саме, аналогічно як для відрізків, можна довести:

1. ***Якщо кути рівні, то їх можна сумістити.***

2. ***Якщо нерівні кути відкласти від одного й того самого променя в одну й ту саму півплощину,*** *то* ***кут з меншою градусною мірою буде частиною кута з більшою градусною мірою.***

Зважаючи на другу властивість, можна конкретизовувати нерівності між кутами. Ці нерівності позначають за допомогою тих самих знаків > та <, що й для відповідних градусних мір, записуючи, наприклад, $\angle A > \angle B$.

Означення.

Промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут на два рівних кути, називається *бісектрисою* **кута.**

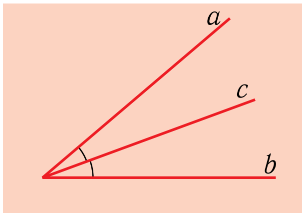


Рис. 1.53

Слово «бісектриса» походить від латинського bissectrix, що означає «розтинаюча навпіл».

На рис. 1.53 промінь c — бісектриса кута $\angle ab$. Вона ділить цей кут на два рівних кути $\angle ac$ і $\angle cb$, що мають спільну сторону c.

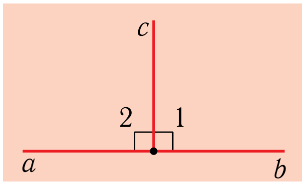


Рис. 1.54

На рис. 1.54 промінь c — бісектриса розгорнутого кута $\angle ab$. Оскільки розгорнутий кут має градусну міру 180°, то кути $\angle ac$ і $\angle cb$ дорівнюють по 90°.

Означення.

Кут, який дорівнює 90°, називається ***прямим.***

Прямі кути на рисунках часто відзначають значком ⌝.

Для креслення прямих кутів, окрім транспортира, використовується косинець (рис. 1.55). Професійні креслярі використовують рейсшину — інструмент, що складається із двох лінійок різної довжини, скріплених у формі літери Т (рис. 1.56).

Прямий кут використовується як засіб для порівняння усіх нерозгорнутих кутів.

Рис. 1.55

Рис. 1.56

Означення.

Кут, величина якого менша від 90°, називається *гострим*, а кут, величина якого більша за 90°, але менша від 180°, називається *тупим*.

На рис. 1.57 зображено усі три види нерозгорнутих кутів, залежно від їхньої величини — гострий, прямий і тупий.

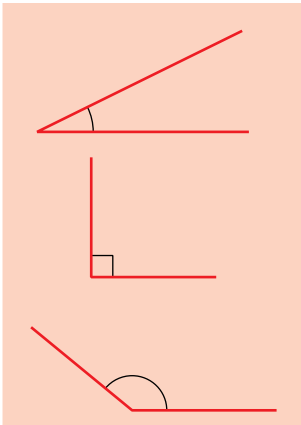


Рис. 1.57

Розв’язуємо разом

Задача.

Обґрунтувати, що прийняте означення променя, що проходить між сторонами кута, не залежить від вибору відрізка з кінцями на сторонах кута. Тобто, якщо промінь c, що виходить з вершини кута O, перетинає якийсь відрізок AB з кінцями на сторонах a, b кута, то він перетинає і будь-який інший такий відрізок LM (рис. 1.58).

Розв’язання. Проведемо відрізок BL і обґрунтуємо, що промінь c його перетинає. Точки A і L лежать з одного боку від прямої c, оскільки відрізок AL її не перетинає. Точки A і B лежать по різні боки від прямої c, оскільки відрізок AB її перетинає. Точка L лежить з того самого боку, що й точка A, отже, по різні боки з точкою B, а тому відрізок BL перетинає пряму c у деякій точці D.

Чи може точка D належати не променю c, а доповняльному до нього променю? Не може, оскільки доповняльний промінь міститься по інший бік від прямої b, ніж відрізок BL. Отже, відрізок BL перетинає саме промінь c.

Так само, як щойно розглянуто відрізки AB і BL, розглянемо відрізки BL і LM. Оскільки уже відомо, що промінь c перетинає відрізок BL, то так само виведемо, що він перетинає і відрізок LM. Обґрунтування завершено.

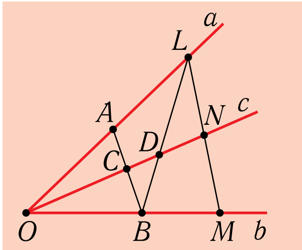


Рис. 1.58

Вправи і задачі

57°. Позначте три точки, що не лежать на одній прямій, і накресліть усі кути з вершинами у кожній із цих точок, сторони яких проходять через дві інші точки. Скільки всього кутів буде побудовано? Як зміниться відповідь, якщо точки лежатимуть на одній прямій?

58°. Виміряйте за допомогою транспортира кути A, B, C, D, зображені на рис. 1.59, і на цій підставі зробіть висновок, котрі з цих кутів гості, котрі — тупі, а котрі, можливо, — прямі.

59°. Проведіть промінь OA і за допомогою транспортира відкладіть від нього в різні півплощини кути $\angle AOB = 55^\circ$ і $\angle AOC = 75^\circ$. Визначте градусну міру кута BOC. Як зміниться результат, якщо кути AOB і AOC відкласти в одну півплощину? Обґрунтуйте свої відповіді.

60°. За допомогою транспортира накресліть кути з градусними мірами 30°, 60° і 120°, а потім проведіть їхні бісектриси. Утвориться ціла низка нових кутів. Чи будуть серед «старих» і нових кутів рівні?

61°. Скільки різних кутів утворюють чотири промені a, b, c, d, що виходять зі спільного початку (рис. 1.60). Запишіть позначення цих кутів.

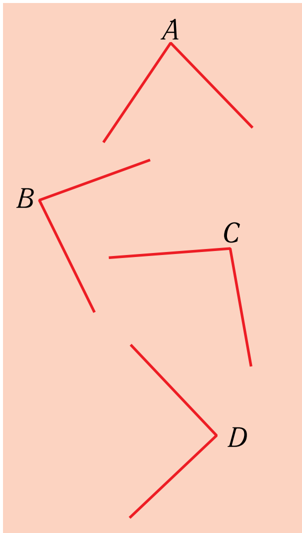


Рис. 1.59

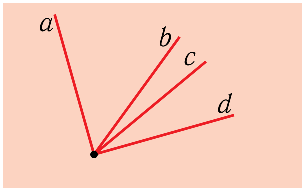


Рис. 1.60

62°. Чи є промінь a бісектрисою кута AOB у випадках, зображених на рис. 1.61, а)–в)?

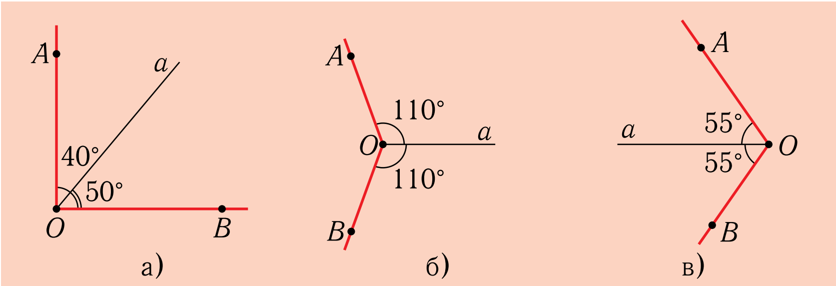


Рис. 1.61

63°. Визначте кути, які утворюють хвилинна і годинна стрілки годинника у кожний момент, коли годинник показує цілу кількість годин. Чи є серед цих кутів рівні?

64°. Чи може сума градусних мір двох гострих кутів бути: а) більшою; б) меншою; в) рівною градусній мірі прямого кута?

65°. Чи може кут між бісектрисою і стороною кута бути: а) тупим; б) прямим?

66. Чи істинні такі твердження:

а) кут, який менший від прямого, — гострий, а який більший за прямий — тупий;
б) будь-який кут, який менший від тупого, — гострий;
в) будь-який кут, який менший від розгорнутого, — тупий
г) різниця двох тупих кутів менша від прямого?

67. Промінь с проходить між сторонами кута $\angle ab$. Визначте:

а) $\angle ab$, якщо $\angle ac = 32°$, $\angle bc = 74°$;
б) $\angle ac$, якщо $\angle ab = 138°$, $\angle bc = 61°$;
в) $\angle bc$, якщо $\angle ab = 90°$, $\angle ac = 39°$.

68. Чи може промінь c проходити між сторонами кута $\angle ab$, якщо: $\angle ac = 30°$, $\angle bc = 70°$, $\angle ab = 40°$; б) $\angle ac = 105°$, $\angle cb = 80°$, $\angle ab = 40°$; $\angle ac > \angle ab$?

69. Між сторонами кута $\angle ab$, градусна міра якого дорівнює 60°, проведено промінь c. Визначте кути $\angle ac$ і $\angle bc$, якщо:

а) кут $\angle ac$ на 20° більший за кут $\angle bc$;
б) кут $\angle ac$ утричі менший від кута $\angle bc$;
в) градусні міри кутів $\angle ac$ і $\angle bc$ відносяться, як 3 : 7.

70. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB і при цьому $\angle AOC = 45°$, $\angle COB = 60°$. Проведено також промінь OD — такий, що $\angle BOD = 15°$. Визначте градусну міру кута AOD. Скільки розв'язків має ця задача?

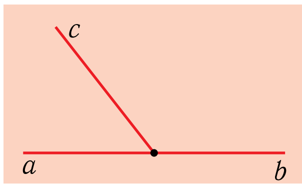


Рис. 1.62

71. На рис. 1.62 промені a і b — доповняльні, c — довільний інший промінь з тим самим початком, що й у променів a і b. Накресліть такий рисунок у зошиті і проведіть за допомогою транспортира бісектриси кутів $\angle ac$ і $\angle cb$. Потім виміряйте кут між цими бісектрисами. Можливо, результат, який ви одержите, наштовхне вас на певний загальний висновок?

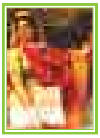
72. У прямому куті між його сторонами проведено довільний промінь, а потім бісектриси обох кутів, на які цей промінь ділить прямий кут. Чому дорівнює кут між бісектрисами? Як зміниться відповідь, якщо кут буде не прямим, а дорівнюватиме, наприклад, 70° чи 120°? Чи не наштовхують вас ці запитання на певний загальний висновок?

73•. Розгляньте обернену ситуацію до тієї, що описана у попередній задачі. Тобто нехай у якомусь куті O з невідомою градусною мірою проведено промінь між його сторонами, а потім бісектриси кутів, на які цей промінь ділить кут O. Нехай кут між бісектрисами має градусну міру $n°$. Чи можна знайти градусну міру кута O?

74•. З деякої точки проведено три промені так, що всі кути, які утворюють будь-які два з них, рівні між собою. Визначте ці кути.

75•. Чи можна з деякої точки провести чотири або п'ять променів так, щоб кути, які утворюють будь-які два з них, були рівними між собою? Якщо можна, то якими будуть ці кути?

76•. У вас є шаблон кута, який дорівнює 75°. Які кути можна побудувати, використовуючи лише цей шаблон?



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як вимірювали кути у різні часи

Прилади для вимірювання кутів

Транспортир і астролябія. Найдавнішим прообразом транспортира був кутомірний прилад, який використовували астрономи, — астролябія. Транспортир — це половина астролябії.

Вважається, що астролябію винайшов у II ст. до н. е. знаменитий грецький астроном Гіппарх (180–125 до н.е.), а вдосконалив середньовічний німецький астроном та математик Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476). Цей прилад слугував для визначення положення небесних світил на небесній сфері. Для прикладу, на гравюрі XVI ст., відтвореній на рис. 1.63, відображено один зі способів для

Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476). Автор першого в Європі підручника з тригонометрії. Склав знамениті астрономічні таблиці.

Рис. 1.63

визначення горизонтального напрямку на світило, який застосовувався мореплавцями.

Початково астролябію використовували здебільшого для визначення висоти світил над горизонтом. Із цією метою її виготовляли у вигляді важкого мідного диска — лімба, який підвішували за кільце у вертикальному положенні (рис. 1.64). По краю лімба наносилася шкала від 0° до 360°. Пряма $ГГ_1$, що сполучала поділки 0° і 180°, займала горизонтальне положення. У центрі лімба кріпилася рухома стрілка AA_1 — алідада. На її кінцях розміщувалися перпендикулярні до лімба пластинки з отворами — діоптри.

Для визначення висоти світила над горизонтом спостерігач прикладав око до нижнього діоптра A і повертав алідаду доти, поки світило не було видно одразу через обидва діоптри. Поділка на шкалі, на якій зупинявся край алідади (A чи A_1), вказувала на висоту світила над горизонтом у градусах.

Квадранти, секстанти та октанти. Бурхливий розвиток астрономії, який розпочався в Європі із початком епохи Відродження, вимагав значно більшої точності від астрономічних вимірювань, ніж її могли забезпечити давні астролябії. Цього можна було

Астролябія Регіомонтана

Рис. 1.64

досягти лише за рахунок збільшення лімба. Адже чим більша кругова шкала на його краю, тим більшою буде відстань між сусідніми поділками, а це давало змогу визначати не тільки кількість цілих градусів у куті, а й кількість їхніх частин — мінут і навіть секунд.

Водночас було помічено, що в більшості астрономічних вимірювань фактично використовується не вся кругова шкала астролябії, а лише певна її частина. Тому замість усієї астролябії у збільшеному вигляді виготовляли лише квадранти, секстанти і октанти, тобто відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$ частини астролябії. Спосіб використання квадранта відображено на старовинній гравюрі, відтвореній на рис. 1.65. А на рис. 1.66 зображено поєднання в одному приладі квадранта й астролябії, запропоноване видатним данським астрономом Тихо Браге (1546–1601).

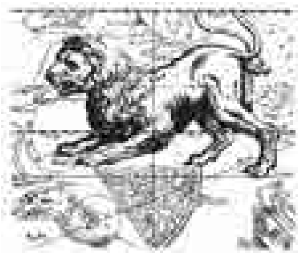
Окрім численних гравюр із зображенням кутомірних інструментів, створених художниками, астрономи ще й у свій спосіб засвідчили свою любов і повагу до цих приладів, назвавши Секстантом одне із сузір'їв у південній частині неба. Відповідну пропозицію подав видатний польський астроном Ян Гевелій (1611–1687), автор всесвітньовідомого атласу зоряного неба. Історія символічна й повчальна. Для проведення досліджень Гевелій збудував обсерваторію й величезний секстант у своєму місті Ґданську. Але затуркані й настрашені городяни спалили прилад. Тоді Гевелій вирішив «перенести його на небо» й увічнити в назві сузір'я, аби вже ніколи нічия зла рука не могла до нього дотягнутися. Однак на той час якраз не було ще не названого сузір'я, яке б своєю формою нагадувало секстант (принцип, що його дотримувалися при утворенні назв більшості сузір'їв). Тому Гевелій вибрав сузір'я, яке хоч і не нагадувало за своїми контурами секстант, проте знаходилося між сузір'ям Лева (якраз під його лапами) та Гідри і тому мало їхній символічний захист.

Телескоп і теодоліт. Наступне суттєве удосконалення в конструкцію астролябії вніс французький астроном

Ян Гевелій веде спостереження за допомогою квадранта

Рис. 1.65

Рис. 1.66



Сузір'я Секстант. Рисунок з атласу Гевелія

Жан Пікар (1620–1682) в середині XVII ст. Він замінив діоптри підзорною трубою, винайденою незадовго до цього Ґалілеєм, а для плавного переміщення алідади використав мікрометричний гвинт. Усе це значно підвищувало точність вимірювань і не потребувало використання великих шкал.

Подальші удосконалення астролябії продовжилися у напрямку використання замість підзорної труби найрізноманітніших телескопів. А для проведення наземних (геодезичних) вимірювань було сконструйовано теодоліт (рис. 1.67) (назва утворена від грецьких слів «теомай» — дивитися і «доліхос» — довгий).

Теодоліт має два лімби, розміщені у вертикальній і горизонтальній площинах. Це дає змогу застосовувати цей прилад як для складання планів, так і для проведення нівелювання, тобто визначення відносних висот.

Бусоль. Кути, які застосовуються у морській та повітряній навігації, вимірюють у горизонтальній площині від напрямку на північ проти руху годинникової стрілки від 0° до 360°. Кожен такий кут називається курсом. Прилад, що дає змогу вимірювати курс, поєднує в собі античну астролябію і компас. Він називається бусоллю (рис. 1.68) («бусоль» — дослівно з французької «компас»). На принципі бусолі конструюється сучасне навігаційне обладнання для морських та повітряних суден.

Як бачимо, звичний нам транспортир має дуже давню історію й водночас утілюється в найсучасніших приладах.

Одиниці для вимірювання кутів

Градуси. Найпоширенішою одиницею для вимірювання кутів є градус. Латинське слово gradus, від якого утворено цю назву, означає «крок», «ступінь». Величина кута 1 градус визначається так. Візьмемо за вершину кута центр якого-небудь півкола, а саме: півколо поділимо на 180 рівних частин (рис. 1.69). Тоді кут, сторони якого проходять через сусідні поділки, і є кутом завбільшки 1 градус (пишуть 1°).

Секстант Тихо Браге

Рис. 1.67

Рис. 1.68

Але чому для визначення кута 1° півколо ділять саме на 180 частин?

Ще давньовавилонські жерці помітили, що під час рівнодення (тобто коли день і ніч мають однакову тривалість) сонячний диск упродовж свого руху небосхилом (рис. 1.70) вкладається у пройденому шляху рівно 2 × 180 разів. А оскільки цей шлях — півколо, то цілком природно було розбивати його на 180 таких подвійних кроків Сонця. Саме ці кроки пізніше й були названі градусами.

Спостереження за рухом Сонця впродовж дня підтверджувалися і відповідними спостереженнями за його річним рухом. У ті часи вважалося, що рік триває 360 діб. Тому весь річний шлях Сонця небосхилом — так зване зодіакальне коло — теж ділився на 360 подвійних кроків, тобто градусів, а його половина, відповідно, — на 180 градусів.

Нарешті, свій вплив на вибір основи для визначення градуса могло мати й те, що у Давньому Вавилоні застосовувалася шістдесяткова система числення, а число 180 ділиться без остачі на основу 60 цієї системи. Із цим самим пов'язано і ділення градуса на 60 мінут, а мінути — на 60 секунд.

В античну епоху старовинну вавилонську систему перейняли грецькі астрономи, зокрема, найвидатніший із них Клавдій Птолемей (I–II ст. н. е.). Авторитет Птолемея сприяв тому, що ця система набула повсюдного поширення в епоху Відродження, а потім і в пізніші часи. У результаті ми й тепер, як і давні вавилоняни, давні греки та середньовічні європейці вимірюємо кути у градусах, вважаючи, що розгорнутий кут має 180°.

Цікаве походження самого позначення для градусної міри. Кути величиною 1° Птолемей називав мойрами, що в перекладі з грецької мови означає «частини». Слово μοιρα він скорочував двома першими літерами, причому другу літеру писав меншою від першої вгорі — μ^{o}. Пізніше залишилася лише маленька літера °. Це скорочення застосовується й досі.

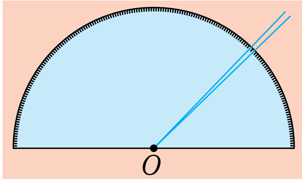


Рис. 1.69

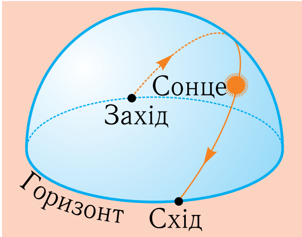


Рис. 1.70


Клавдій Птолемей. Старовинна гравюра

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі I

Що вивчається у геометрії

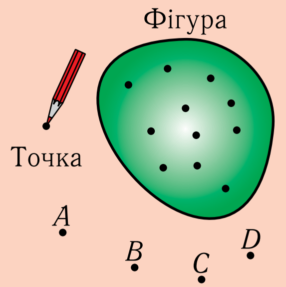
Геометрія — наука про геометричні фігури.

Геометричні фігури — систематизовані у свідомості уявлення про реальні або уявні просторові форми.

Планіметрія — частина геометрії, в якій вивчаються геометричні фігури, розміщені на площині.

Основні геометричні фігури у планіметрії — точки і прямі. На їхній основі означаються (конструюються) усі інші плоскі фігури.

Точки і прямі. Проведення прямої

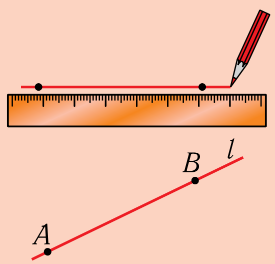


Уявлення про точку дає слід на аркуші від тонко загостреного олівця. Вважається, що точка не має розмірів і що на площині існує безліч точок.

У застосуваннях геометрії точками можуть уважатися будь-які реальні об'єкти, розмірами яких за даних умов можна знехтувати.

Будь-яка геометрична фігура — це певна множина точок.

Точки позначаються великими літерами латинського алфавіту. Наприклад: A, B, C, D.



Уявлення про пряму дає лінія, проведена під лінійку.

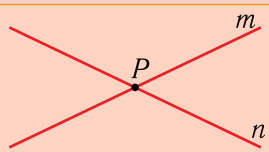
Інші реальні прообрази прямої — натягнуті мотузки, світлові і зорові промені.

На кожній прямій існує безліч точок, однак для проведення прямої достатньо лише двох точок.

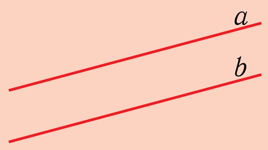
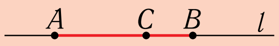
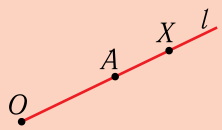
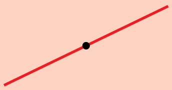
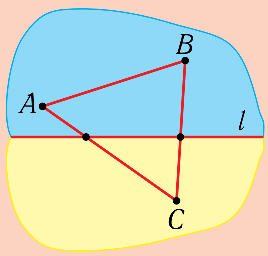
Основна властивість проведення (побудови) прямої:

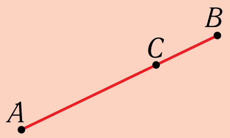
через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. Наприклад: AB, l.



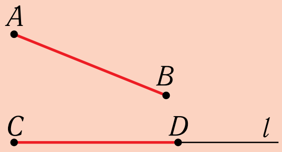
Про дві прямі m і n, які мають одну спільну точку P, кажуть, що вони ***перетинаються*** у цій точці.

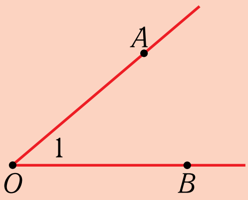
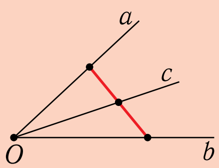
	Якщо прямі a і b не мають жодної спільної точки, то вони називаються ***паралельними*** (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»). Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.
Розміщення точок на прямій. Відрізки і промені	
	Основна *властивість розміщення точок на прямій*: ***із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.*** Якщо точка C лежить між точками A і B, то кажуть також, що точки A і B лежать по різні боки від точки C, або що точки C і B лежать з одного боку від точки A, а точки A і C — з одного боку від точки B.
	**Відрізок** — це частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називаються **кінцями** відрізка, а всі решта точок називаються **внутрішніми точками** відрізка. Позначають відрізки зазвичай їхніми кінцями. Наприклад: AB.
	**Промінь** (або *півпряма*) — це частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать з одного боку від деякої її точки, разом із цією точкою. Ця точка називаються **початком променя**, а всі решта точок називаються **внутрішніми точками** променя. Позначають промені двома способами: 1) двома великими літерами, з яких перша вказує на початок променя, а друга — на яку-небудь внутрішню точку; 2) однією малою літерою. Наприклад: OA, OX, l.
	Два промені однієї прямої зі спільним початком називаються ***доповняльними*** (або ***взаємно доповняльними***).
Розміщення точок на площині відносно прямої. Півплощини	
	Основна *властивість розміщення точок на площині відносно прямої*: ***кожна пряма розбиває площину на дві півплощини, що мають спільну граничну пряму.*** Це розбиття має таку властивість: кожен відрізок AB, що сполучає точки однієї півплощини, не перетинає граничної прямої l, а кожен відрізок AC, що сполучає точки різних півплощин, перетинає її.

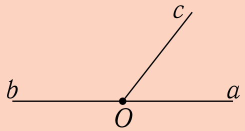
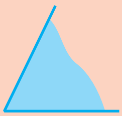
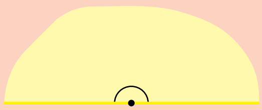
<table>
<tr><th colspan="2">Вимірювання і відкладання відрізків. Рівність відрізків</th></tr>
<tr><td>

AB=AC+CB

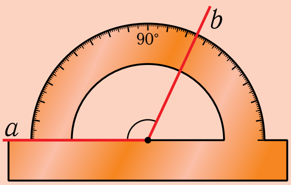
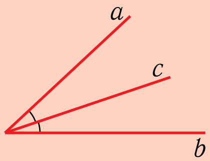
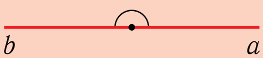

AM=MB</td><td>Основна властивість вимірювання відрізків.
Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

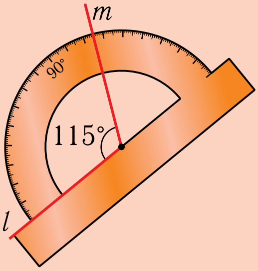
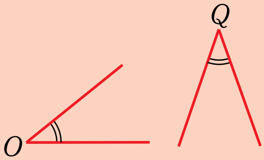
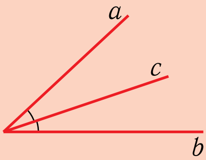
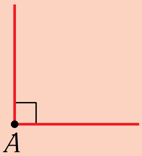
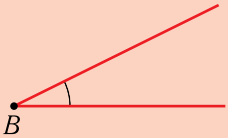
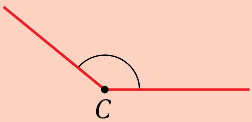
Відрізки, які мають однакову довжину, називаються рівними.
Точка, яка ділить відрізок на дві рівні частини, називається серединою відрізка.</td></tr>
<tr><td>

CD=AB</td><td>Основна властивість відкладання відрізків:
на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один
З основних властивостей вимірювання і відкладання відрізків випливає, що рівні відрізки можна сумістити.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Кути</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Кут — це фігура, що складається з двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається стороною кута, а їхній спільний початок — вершиною кута.
Якщо O — вершина кута, OA і OB — його сторони, то позначити цей кут можна так: $\angle O$ або $\angle AOB$.
Якщо сторони кута позначені через a і b, то кут позначають у формі $\angle ab$ або $\angle(ab)$.
Інколи кути позначають цифрами. Наприклад, $\angle 1$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Якщо сторони кута є взаємно доповняльними променями, то такий кут називається розгорнутим.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Промінь з початком у вершині нерозгорнутого кута проходить між його сторонами, якщо він перетинає який-небудь відрізок з кінцями на сторонах кута.
Можна обґрунтувати, що промінь, який лежить між сторонами нерозгорнутого кута, перетинає усі відрізки з кінцями на його сторонах.</td></tr>
</table>

	Для розгорнутого кута $\angle ab$ уважається, що будь-який промінь c, який виходить з вершини кута O, лежить між його сторонами а і b.
 	Точки усіх променів, які проходять між сторонами нерозгорнутого кута, називаються ***внутрішніми*** точками цього кута. Решта точок площини називаються ***зовнішніми*** точками кута. Для розгорнутого кута ***внутрішніми*** уважаються всі точки однієї з півплощин, граничну пряму якої утворюють сторони кута. Кожен кут розбиває площину на дві частини. Та частина, яка містить сторони кута і всі внутрішні точки кута, називається ***опуклим плоским*** кутом, а та, що містить сторони кута і всі зовнішні точки, — ***увігнутим плоским кутом***.

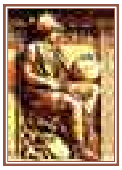
Вимірювання і відкладання кутів. Рівність кутів

	Кути вимірюють у градусах, зокрема, за допомогою транспортира. Кутом з градусною мірою 1° уважається $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута. На рисунку $\angle ab = 115°$. Дрібнішими одиницями для вимірювання кутів є мінута і секунда Одна ***мінута*** $1'$ дорівнює $\frac{1}{60}$ частині градуса, а одна ***секунда*** $1''$ дорівнює $\frac{1}{60}$ частині мінути.
 $\angle ab=\angle ac+\angle cb$  $\angle ab=180°$	Основна *властивість вимірювання кутів*: ***Кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.***

 	Основна *властивість відкладання кутів*: ***від будь-якого променя у дану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.*** На рисунку від променя відкладено кут 115°.
 $\angle O = \angle Q$	Кути, які мають однакові градусні міри, називаються ***рівними***. З основних властивостей вимірювання і відкладання кутів випливає, що ***рівні кути можна сумістити***.
 $\angle ac = \angle cb$	Промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут на два рівних кути, називається ***бісектрисою*** кута.
 $\angle A = 90°$  $\angle B < 90°$  $\angle C > 90°$	Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називається ***прямим***. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називається ***гострим***, а кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називається ***тупим***.

Перевір себе

1. Як можна охарактеризувати предмет вивчення у геометрії? Назвіть відомі вам приклади геометричних фігур.
2. Які геометричні фігури вважаються основними на площині? Як вони зображуються і позначаються?
3. Сформулюйте основну властивість проведення (побудови) прямої.
4. Яким може бути взаємне розміщення двох прямих на площині?
5. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на прямій.
6. Дайте означення відрізка. Як позначаються відрізки?
7. Що таке промінь (півпряма)? Як позначаються промені?
8. Які промені називаються доповняльними?
9. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на площині.
10. Що означає вислів: «Пряма розбиває площину на дві півплощини»?
11. Сформулюйте основну властивість вимірювання відрізків. Які відрізки називаються рівними? Як записується рівність відрізків?
12. Що таке відстань між двома точками?
13. Що таке середина відрізка?
14. Сформулюйте основну властивість відкладання відрізків.
15. Обґрунтуйте, що коли відрізки рівні, то їх можна сумістити.
16. Дайте означення кута. Як позначаються кути?
17. Який кут називається розгорнутим?
18. Поясніть, що означає вислів: «Промінь проходить між сторонами кута».
19. Що таке плоский кут? Які плоскі кути називаються опуклими, які — увігнутими?
20. В яких одиницях вимірюються кути?
21. Сформулюйте основні властивості вимірювання та відкладання кутів.
22. Які кути називаються рівними?
23. Як можна обґрунтувати, що коли кути рівні, то їх можна сумістити?
24. Що таке бісектриса кута?
25. Які кути називаються прямими, які — гострими, які — тупими?



Завдання для повторення та проведення контрольної роботи до розділу І

1°. а) На рис. 1.71 знайдіть усі прямі, які проходять через точку D, але не проходять через точку B. Випишіть усі можливі позначення для них.
б) На рис. 1.71 знайдіть усі прямі, які проходять через точку O, але не проходять через точку C. Випишіть усі можливі позначення для них.

2°. а) За рис. 1.72 випишіть усі промені, які перетинають відрізок AB, але не перетинають відрізок CD.
б) За рис. 1.72 випишіть усі промені, які перетинають відрізок CD, але не перетинають відрізок AB.

3°. а) За рис. 1.73 випишіть позначення трьома буквами усіх кутів з вершиною Q.
б) За рис. 1.73 випишіть позначення трьома буквами усіх кутів з вершиною P.

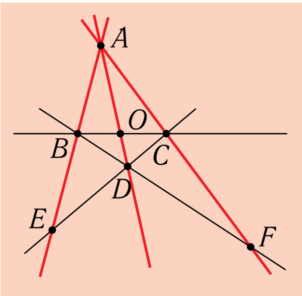


Рис. 1.71

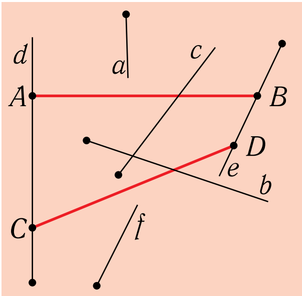


Рис. 1.72

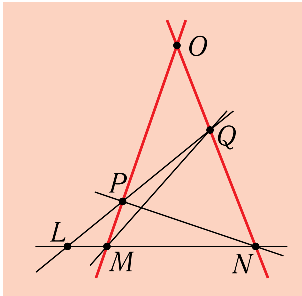


Рис. 1.73

4°. а) Які із тверджень стосовно співвідношення між довжинами відрізків на рис. 1.74, а) є істинними:
1) $MN = PQ$; 2) $MN > PQ$; 3) $NP > NQ$;
4) $NQ = NP + PQ$; 5) $MN + PN + PQ = MQ$?
б) Які із тверджень стосовно співвідношення між величинами кутів на рис. 1.74, б) є істинними:
1) $\angle bd > \angle ad$; 2) $\angle bd > \angle ac$; 3) $\angle ab < \angle ac + \angle bd$;
4) $\angle ab = \angle ad + \angle db$; 5) $\angle ab = 180°$?

5. а) На промені OA позначено точку C. Відомо, що $OA = 8$ см, а відрізок AC більший за відрізок OA на 3 см. З'ясуйте, котра із точок O, A, C лежить між двома іншими та знайдіть довжину відрізка OC.

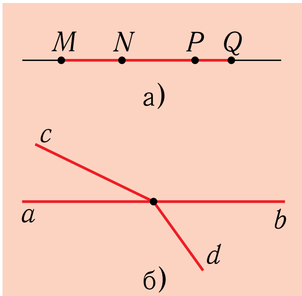


Рис. 1.74

б) На промені OK позначено точку P. Відомо, що OP = 3 см, а відрізок PK удвічі більший за OP. З'ясуйте, котра із точок O, K, P лежить між двома іншими та знайдіть довжину відрізка OK.

6. а) Точка A належить відрізку PQ. Відрізок PA утричі довший за відрізок AQ. Визначте довжини відрізків PA і PQ, якщо PQ = 12 см.
б) Точка P лежить на прямій AB так, що точка B розміщена між точками A і P. Відомо, що відрізок AB удвічі менший від відрізка BP. Визначте довжину відрізка BP, якщо AP = 15 см.

7. а) З вершини розгорнутого кута POQ проведені у різні боки від прямої PQ промені OA і OB так, що $\angle POA$ = 75°, $\angle\ QOB$ = 125°. Визначте кут AOB.
б) З вершини розгорнутого кута AOB проведені у різні боки від прямої AB промені OK і OM так, що $\angle KOB$ = 100°, $\angle\ MOA$ = 125°. Визначте кут KOM.

8. а) Промінь OA проходить між сторонами кута MON, що дорівнює 95°. Кут MOA на 25° більший за кут AON. Визначте кути MOA і AON.
б) Промінь OP проходить між сторонами кута AOB, що дорівнює 72°. Кут AOP утричі більший за кут BOP. Визначте кути AOP і BOP.

9. а) На відрізку AB завдовжки 12 см позначені точки P і Q так, що AP = 7 см, PQ = 3 см. Визначте довжину відрізка QB.
б) Всередині кута $\angle ab$, що дорівнює 130°, проведено промені c і d так, що $\angle ac$ = 60°, $\angle cd$ = 20°. Визначте величину кута $\angle bd$.

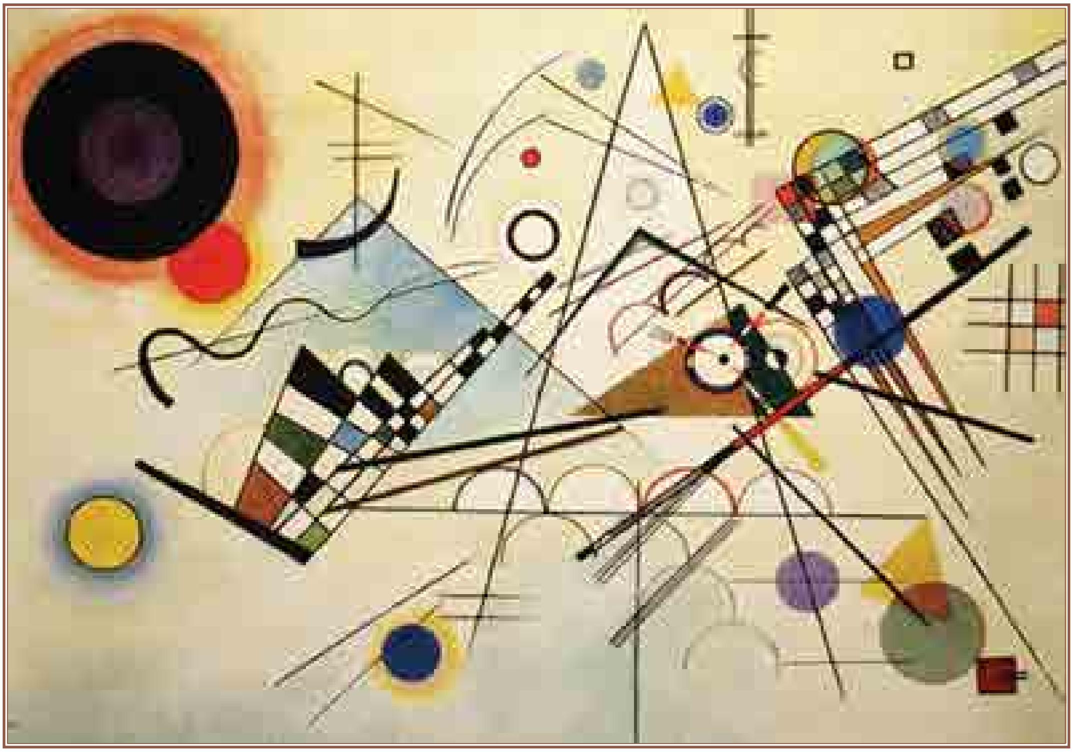
10. а) Промені OB і OC проходять усередині кута AOD і $\angle AOC = \angle DOB$. Обґрунтуйте, що тоді $\angle AOB = \angle DOC$.
б) Промені OB і OC не проходять усередині кута AOD і $\angle AOC = \angle DOB$. Обґрунтуйте, що тоді $\angle AOB = \angle DOC$.

11•. а) На прямій послідовно позначені точки O, P, A, B так, що OP = 2 см, PA = = 6 см, OB = 14 см. Визначте відстань між серединами відрізків OA і PB.
б) На прямій послідовно відкладені відрізки AB, BC і CD так, що $AB : BC$ = 2 : 3, AD = 15 см, CD = 5 см. Визначте відстань між серединами відрізків AB і CD.

12•. а) Точки A, B, C лежать на одній прямій і при цьому AB = 10 см, BC = 12 см. Яка із цих точок не може лежати між двома іншими?
б) Точки A, B, C лежать на одній прямій і при цьому AB = 8 см, BC = 3 см. Яка із цих точок не може лежати між двома іншими?

13•. а) OB — бісектриса кута AOC, промінь OD проходить між його сторонами. Відомо, що $\angle AOD$= 80°, $\angle COD$ = 20°. Визначте кут BOD.
б) OB — бісектриса кута AOC, промінь OD не проходить між його сторонами. Відомо, що $\angle AOD$= 140°, $\angle COD$ = 60°. Визначте кут BOD.

14•. а) Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить цей кут на два кути. Обґрунтуйте, що кут між бісектрисами цих кутів дорівнює 45°.
б) Промінь, проведений з вершини кута O, ділить цей кут на два кути. Кут між бісектрисами утворених менших кутів дорівнює 45°. Обґрунтуйте, що кут O — прямий.



Василь Кандинський.
Композиція номер VIII (1923 р.).

У цій всесвітньовідомій картині один із засновників живописного абстракціонізму відобразив своє сприйняття геометричних кодів Всесвіту. Приводом стало спостереження сонячного затемнення. Найважливішими формоутворюючими елементами у цих кодах є прямі лінії і кола. Прямі ми детально вивчатимемо у цьому розділі, кола — в останньому розділі.

Розділ II Взаємне розміщення прямих на площині

Вступ

Урок 6

«Той, хто добре вивчив пряму, не матиме труднощів з геометрією», — часто повторював своїм учням у знаменитій Політехнічній школі в Парижі відомий французький математик і громадський діяч Гаспар Монж (1746–1818).

На минулих уроках ми розпочали ґрунтовне вивчення прямої. Перші факти, з якими ви ознайомилися, стосувалися саме цієї фігури. То були основні властивості про проведення прямої, про розміщення точок на прямій і про розміщення точок на площині відносно прямої. Отже, йшлося про властивості окремо взятої прямої. Наступним кроком має бути дослідження взаємного розміщення двох прямих. Цьому й присвячуватиметься цей розділ.

Однак перш ніж безпосередньо перейти до розгляду цих питань, нам потрібно зробити декілька вкрай важливих для подальшого зауважень. При цьому ми будемо посилатися і на той невеликий досвід вивчення геометрії, який ви вже маєте.

Пам'ятник Гаспару Монжу у містечку Боні (Бургундія), в якому він народився. Відомий скульптор Франсуа Рюд увічнив великого ученого в образі професора під час його лекції з геометрії у Політехнічній школі.

Про аксіоми, теореми і доведення у геометрії

На минулих уроках ви не могли не помітити, що вже при виборі основних фактів для закладення фундаменту геометрії ми постійно вдавалися до певної логічної аргументації. Наприклад, важливість основних властивостей прямої аргументували тим, що ці властивості могли б і не виконуватися, якби геометрія будувалася не для земного, а для якогось іншого світу, наприклад, для невеличкої кулястої планети Маленького принца або для планети у формі бублика. Що ж до небагатьох інших фактів, то ми виводили їх з основних винятково логічними міркуваннями, навіть якщо вони й без того начебто не викликали сумнівів. Так, зокрема, у §1 аргументувалося, що дві прямі не можуть мати більше однієї спільної точки, а в §4 — що рівні відрізки можна сумістити.

Геометрія — теоретична наука. Це означає, що всі її положення виведені логічним шляхом, тобто за допомогою міркувань з наведенням відповідних аргументів.

Що ж є аргументами у цих міркуваннях? По-перше, — усі зазначені у попередньому розділі основні властивості найпростіших фігур. Їх ще називають *аксіомами* геометрії (ще дві аксіоми буде долучено пізніше). У дослівному перекладі з грецької слово «аксіома» означає «повага», «авторитет», а в математиці воно вживається у значенні незаперечної істини, підстави для логічних виведень.

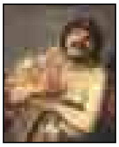
По-друге, аргументами в логічних міркуваннях у геометрії є раніше виведені факти і висновки (кожен з яких, у кінцевому підсумку, теж ґрунтується на аксіомах).

Будь-що інше, окрім аксіом і вже доведених теорем, наприклад, посилання на рисунки, для логічних міркувань не є вагомим. Рисунок може наштовхувати

Усі доказові науки застосовують аксіоми. Аксіоми мають найвищий ступінь загальності, а тому є початком усього.

Аристотель (кінець 4-го — початок 3-го ст. до н. е) — один із найвидатніших учених-природослідників і філософів усіх часів. Портрет-реконструкція з античного бюсту.

Для мене знайти доведення математичної теореми — дорожче, ніж завоювати усе перське царство.



Демокрит — видатний давньогрецький мислитель, засновник атомізму. Жив на межі 5-го і 4-го століть до н. е. Портрет «Демокрит, що сміється» створив з уяви нідерландський художник Хендрик Тербрюгген у 1628 р.

на певний логічний аргумент, однак у жодному разі не може його замінювати.

Обґрунтовані у такий спосіб і важливі для геометрії факти називаються *теоремами*, а сам процес обґрунтування теореми називається її *доведенням*.

За формою теорема складається із двох частин — умови та висновку. В умові вказуються обмеження, які накладаються на певну фігуру або фігури, а у висновку — наслідки із цих обмежень для властивостей фігур. Умову ще коротко характеризують як те, що дано, а висновок — як те, що потрібно довести.

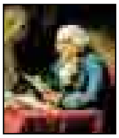
Наприклад, у теоремі «Якщо відрізки рівні, то їх можна сумістити» умовою (обмеженням) є те, що відрізки рівні, а висновком — те, що тоді їх можна сумістити.

Слово «теорема» грецьке. Воно походить від слова «теорео», що означає «уважно розглядаю», «придивляюся», і має той самий корінь, що й значно поширеніше тепер слово «теорія».

А ще слово «теорема» має значення «вистава», яке близьке до сучасного «шоу». В античні часи у Греції були поширені інтелектуальні розваги у формі публічних диспутів, під час яких їхні учасники обстоювали (доводили) свої твердження або навіть цілі теорії. Ці міні-вистави, які зараз назвали б інтелектуальними «шоу», теж називалися «теоремами».

Отже, стежачи за доведенням теореми на класній дошці або знайомлячись із ним за підручником, ви можете уявляти себе присутніми на інтелектуальному шоу і навіть брати у ньому участь. Сподіваємося, що такий погляд на теореми і їхнє доведення позбавить вас деякого остраху, який на початках можуть викликати ці слова.

Математичне доведення — це логіка, яка сприяє правильному формуванню розуму, розвиває його здібності, посилює їх настільки, що розум привчається мислити точно і завжди відрізняти істину від хибності, навіть у речах нематематичних. Саме тому єгиптяни, перси і лакедемоняни, як свідчать джерела, рідко вибирали собі правителя, який не був трохи обізнаним з математикою, вважаючи, що необізнаний з математикою зовсім не вміє мислити, а тому неспроможний правити й керувати.



Бенджамін Франклін (1706–1780) — видатний американський учений-фізик, просвітитель і державний діяч, один із засновників США.
Портрет Франкліна перед бюстом Ньютона створив з натури англійський художник Девід Мартін у 1767 р. Експонується в Білому Домі у Вашингтоні.

§5. Суміжні кути

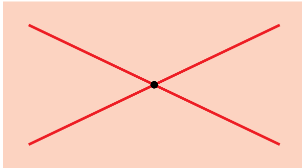


Рис. 2.1

При перетині двох прямих утворюється декілька різних кутів (рис. 2.1). Взаємне розміщення прямих характеризують за допомогою цих кутів. Яких саме? — Це ми зрозуміємо після того, як уважніше придивимося до них. Для цього розглядатимемо їх парами. Одні пари кутів називаються суміжними, інші — вертикальними. Суміжні кути ми вивчатимемо у цьому параграфі, вертикальні — в наступному.

Означення.

Два кути називаються *суміжними*, якщо вони мають одну спільну сторону, а дві інші їхні сторони є доповняльними променями.

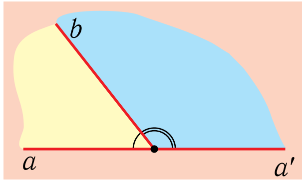


Рис. 2.2

Побудувати суміжні кути можна так. Візьмемо який-небудь кут $\angle ab$ (рис. 2.2) і проведемо промінь a', що є доповняльним до променя a. Кути $\angle ab$ і $\angle ba'$ — суміжні: у них сторона b спільна, а сторони a і a' є доповняльними променями.

Кут, суміжний з кутом $\angle ab$, дістанемо й тоді, якщо проведемо промінь b', доповняльний до променя b (рис. 2.3).

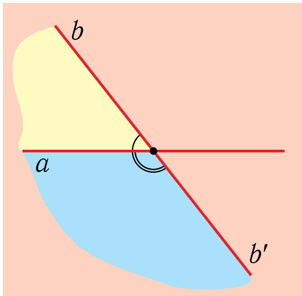


Рис. 2.3

Отже, для кожного кута $\angle ab$ можна побудувати два суміжних з ним кути $\angle ba'$ і $\angle ab'$.

Теорема
(про суму суміжних кутів).

***Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.**

Доведення. Нехай кути $\angle ab$ і $\angle ba'$ — суміжні, і в них сторона b спільна, а сторони a і a' є доповняльними променями (див. рис. 2.2). Тоді промінь b проходить між сторонами розгорнутого кута зі сторонами a, a'. Відповідно до аксіоми про вимірювання кутів, сума кутів $\angle ab$ і $\angle ba'$ дорівнює розгорнутому куту $\angle aa'$, тобто має градусну міру 180°. Теорему доведено.

Твердження, яке безпосередньо випливає з теореми, називається *наслідком*.

З теореми про суму суміжних кутів маємо такі наслідки.

Наслідок 1.

Кут, суміжний з прямим кутом, — прямий.

Наслідок 2.

Кут, суміжний з гострим кутом, — тупий, а кут, суміжний з тупим кутом, — гострий.

Справді, якщо кут $\angle ab$ — прямий (рис. 2.4), то він дорівнює 90°. Тому суміжний з ним кут $\angle ba'$, за теоремою, дорівнює $180° - 90°$, тобто теж 90°, отже, є прямим.

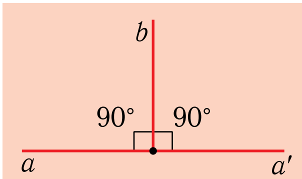


Рис. 2.4

Нехай тепер $\angle ab$ — гострий (див. рис. 2.2). Це означає, що його градусна міра менша від 90°. У сумі зі своїм суміжним кутом $\angle ab'$ він дає 180°. Отже, цей суміжний кут має градусну міру, яка більша за 90°, тобто є тупим.

Випадок, коли $\angle ab$ — тупий, розглядається аналогічно.

Розв'язуємо разом

Задача.

Один із суміжних кутів на 60° менший від іншого. Визначити градусні міри цих кутів і побудувати їх.

Розв'язання. Позначимо через x градусну міру більшого із кутів. Тоді градусна міра меншого кута дорівнюватиме $x - 60°$. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то звідси маємо рівняння:

$$x + x - 60° = 180°.$$

Звідси $2x = 240°$, а $x = 120°$. Отже, більший із кутів дорівнює 120°, а менший — $120° - 60°$, тобто 60°. На рис. 2.5 відображено побудову цих кутів за допомогою транспортира.

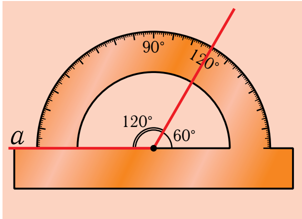
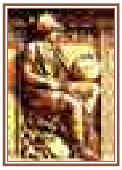


Рис. 2.5



Вправи і задачі

77°. На кожному з рис. 2.6, а)–в) укажіть пари суміжних кутів.

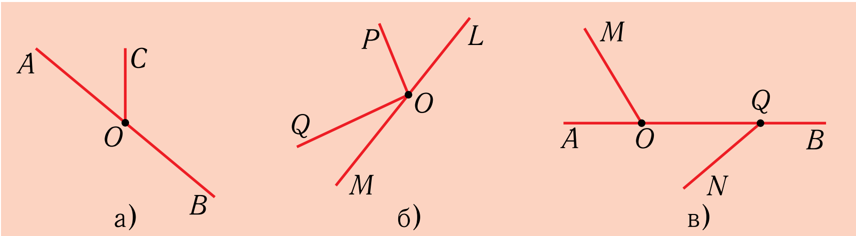


Рис. 2.6

78°. Чи є кути 1, 2, зображені на рис. 2. 7, а)–ґ), суміжними?

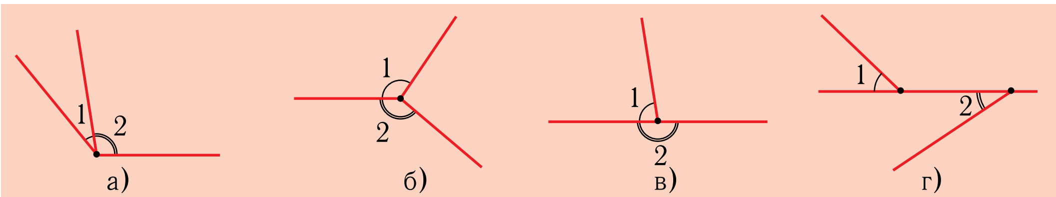


Рис. 2.7

79°. Назвіть усі пари суміжних кутів, що утворюються прямими AB і CD, які перетинаються в точці O (рис. 2.8).

80°. Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона проходила вздовж лінійки у вашому зошиті. Укажіть два принципово різні варіанти.

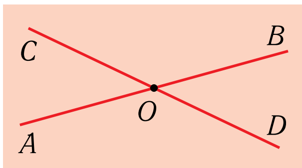


Рис. 2.8

81°. Знайдіть інший із суміжних кутів, якщо один із них дорівнює:
а) 67°; б) 138°; в) 90°; г) 45° 25′.

82°. Чи можуть у парі суміжних кутів бути:
а) обидва кути гострими;
б) обидва кути тупими;
в) обидва кути прямими;
г) один кут гострий, а інший — прямий;
ґ) один кут тупий, а інший — прямий;
д) один кут тупий, а інший — гострий?

83°. Чому при подвійному складанні аркуша паперу, коли суміщаються краї, одержуються прямі кути?

84. При перетині двох прямих утворилося чотири кути (рис. 2.9). Визначте кути 2, 3 і 4, якщо кут $\angle 3 = 36°$.

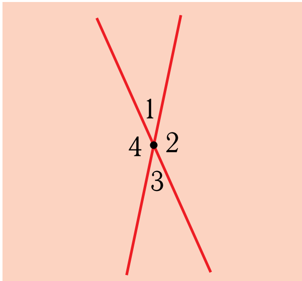


Рис. 2.9

85. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути дають у сумі 100°?

86. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них на 80° більший за інший.

87. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них на 40° менший від іншого.

88. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них у 5 разів менший від іншого.

89. Визначте величини суміжних кутів, якщо вони відносяться, як 2 : 3.

90. Доведіть, що коли суміжні кути рівні, то вони — прямі.

91. Доведіть, що коли два прямих кути мають спільну сторону, то вони або суміщаються, або суміжні.

92. Доведіть, що коли кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні.

93. Нехай $\angle A$ і $\angle B$ — одна пара суміжних кутів, а $\angle C$ і $\angle D$ — інша. Що можна стверджувати про величини кутів B і D, якщо $\angle A < \angle C$? Як це обґрунтувати?

94. Які з наведених нижче тверджень є істинними, а які — хибними:
1) для кожного кута можна побудувати не більше одного суміжного з ним кута;
2) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а інший — тупий;
3) якщо два кути суміжні, то один із них менший від іншого;
4) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони — суміжні;
5) якщо сума двох кутів дорівнює 180° і вони мають спільну сторону, то кути суміжні;
6) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони — не суміжні;
7) якщо два кути мають спільну сторону, то вони — суміжні;
8) якщо сторона одного з кутів є доповняльним променем до сторони іншого, то кути суміжні?

Проілюструйте ваші відповіді рисунками.

95•. Один із суміжних кутів утричі більший за їхню різницю. Визначте ці кути.

96•. Один із суміжних кутів удвічі менший від їхньої різниці. Визначте ці кути.

97•. Бісектриса кута A утворює з його стороною кут, який удвічі більший за кут, суміжний з кутом A. Визначте кут A.

98•. Величини двох кутів відносяться, як 1 : 3, а величини суміжних з ними кутів — як 4 : 3. Визначте ці кути.

99•. Визначте величину кута, який утворюють бісектриси двох суміжних кутів.

100•. Доведіть, що коли бісектриси двох кутів AOB і BOC утворюють прямий кут, то точки A, O, C лежать на одній прямій.

§6. Вертикальні кути

Урок 7

Означення.

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями до сторін іншого.

При перетині двох прямих утворюється дві пари вертикальних кутів.

Справді, кожна із прямих точкою перетину ділиться на два доповняльних промені. Нехай ці промені позначені a, a' та b, b' (рис. 2.10). Тоді кути $\angle ab$ і $\angle a'b'$, а також $\angle ab'$ і $\angle a'b$ — вертикальні.

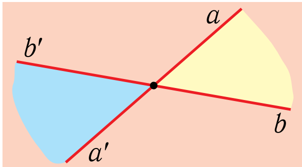


Рис. 2.10

Назва «вертикальні кути» утворена від латинського слова «vertex», одним зі значень якого є «вершина». Отже, у цій назві відображається те, що вертикальні кути мають спільну вершину, а не те, що вони займають вертикальне, тобто прямовисне, положення. Раніше застосовувалася більш влучна назва: «протилежні кути».

Теорема
(про вертикальні кути).

Вертикальні кути рівні між собою.

Доведення. Нехай маємо два вертикальних кути $\angle ab$ і $\angle a'b'$ (див. рис. 2.10). Кожен із них є суміжним з кутом $\angle ab'$, а тому в сумі з цим кутом дає 180°:

$\angle ab + \angle ab' = 180°$; $\angle a'b' + \angle ab' = 180°$.

Звідси

$\angle ab = 180° - \angle ab'$; $\angle a'b' = 180° - \angle ab'$.

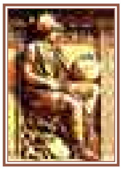
Виходить, що градусні міри кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ рівні, а тому рівні й самі ці кути. Теорему доведено.

Фалес. Фрагмент фрески на фасаді національного університету в Афінах

Перше доведення теореми про вертикальні кути давні історики приписують легендарному фундатору античної науки Фалесу Мілетському. Фалес жив у кінці VI – на початку V ст. до н. е. У ті часи вимірювання кутів у градусах ще не було. Тому найімовірніше, що Фалес доводив цю теорему тим, що обґрунтовував можливість суміщення одного із вертикальних кутів з іншим шляхом повороту.

Справді, якщо уявити, що півплощину з граничною прямою b, яка містить сторону a одного з вертикальних кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ (див. рис. 2.10), повернули відносно спільної вершини кутів так, щоб ця півплощина сумістилася з іншою півплощиною, то при цьому промінь b суміститься з променем b', а промінь a — з променем a'. Отже, кут $\angle ab$ суміститься з вертикальним кутом $\angle a'b'$. А тому, міг звідси робити висновок Фалес, вертикальні кути рівні між собою.

Цією давньою ідеєю з поворотом фігури для доведення теореми ми ще невдовзі скористаємося.



Вправи і задачі

101°. Назвіть пари вертикальних кутів, утворених при перетині прямих AB і CD на рис. 2.11.

102°. Назвіть усі пари вертикальних кутів, які утворюються при перетині трьох прямих в одній точці на рис. 2.12.

103°. Чи є вертикальними кути, зображені на рис. 2.13?

104°. Накресліть за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, а потім за допомогою лінійки проведіть прямі, які містять сторони цього кута. Скільки кутів

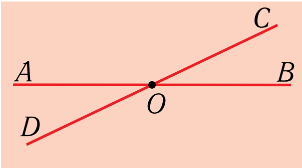


Рис. 2.11

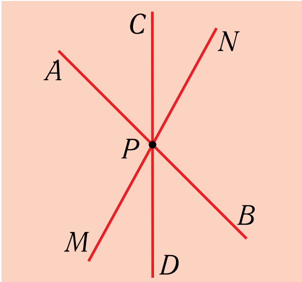


Рис. 2.12

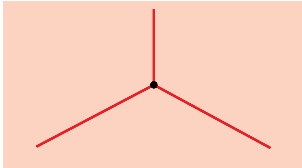


Рис. 2.13

утворилися при перетині цих прямих? Визначте їхні величини вимірюванням і за допомогою обчислення. Чи збігаються результати?

105°. Чи можуть вертикальні кути бути: а) прямими; б) тупими; в) один гострим, а інший — тупим?

106°. Чи істинне таке твердження: «Якщо два кути рівні, то вони вертикальні»? Проілюструйте відповідь рисунком.

107°. Сума величин двох вертикальних кутів дорівнює 120°. Визначте величину кожного з них.

108°. Якими (гострими, прямими чи тупими) є вертикальні кути, якщо їхня сума: а) менша від 180°; б) більша за 180°; в) дорівнює 180°?

109°. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші кути?

110. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих ліній, є прямим. Якими можуть бути інші кути? Відповідь обґрунтуйте.

111. Сума двох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 130°. Доведіть, що ці кути — вертикальні.

112. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, на 50° менший за інший. Визначте ці кути.

113. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, учетверо більший за інший. Визначте ці кути.

114. Визначте величини кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо: а) один із них на 20° більший за інший; б) один із кутів дорівнює половині іншого; в) сума величин двох кутів дорівнює 100°.

115. Відомі два із кутів, утворених при перетині трьох прямих в одній точці (рис. 2.14). Визначте кути 1, 2, 3, 4.

116. Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 2.15), Доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

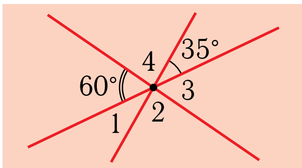


Рис. 2.14

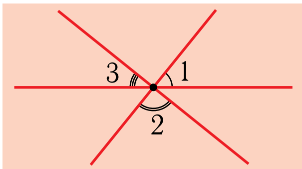


Рис. 2.15

117•. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на 60° менша від суми двох інших. Визначте ці кути.

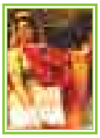
118•. Сума вертикальних кутів удвічі більша за кут, суміжний з ними обома. Визначте ці кути.

119•. Визначте кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 270°.

120•. Один із кутів, що утворилися при перетині двох прямих, удвічі менший від суми решти трьох кутів. Визначте усі ці кути.

121•. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій.

122•. Два рівні кути мають спільну вершину, а їхні бісектриси лежать на одній прямій. Доведіть, що ці кути вертикальні.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Геометрія і... математика

Навчальна дисципліна, на уроках з якої ви у попередніх класах ознайомлювалися з окремими геометричними фактами, називалася *математикою*. Окрім геометричних відомостей, на уроках з математики вивчалися ще різні числа та операції з ними, способи складання та розв'язування рівнянь, а також численні приклади застосування цих знань для розв'язування задач із практичним змістом.

Починаючи із 7 класу, математика розділяється на дві окремі математичні дисципліни — геометрію й алгебру (а в старшій школі з алгебри виокремляться ще початки математичного аналізу). Проте зв'язок між окремими математичними дисциплінами ніколи не буде перериватися. Для характеристики геометричних величин будуть застосовуватися алгебраїчні формули й рівняння, а для алгебраїчних формул і рівнянь будуватимуться геометричні моделі у вигляді графіків, схем, діаграм, і це суттєво допомагатиме при аналізі цих формул і при розв'язуванні рівнянь.

Піфагор. Символічний портрет. Гравюра невідомого художника XVI ст.

Слово «математика» виникло у Давній Греції приблизно у V ст. до н. е. в середовищі піфагорійців — послідовників легендарного Піфагора. Походить воно від слова «матема», що означає «вчення» або «знання». Давні греки визнавали чотири матема: про числа (арифметику), про фігури (геометрію), про пропорції у природі та мистецтві (гармонію) та про форми світу (астрономію). Неодмінною умовою приналежності певного знання до математики було виведення його шляхом логічного міркування, тобто за допомогою мислення. Характерно, що інші науки, наприклад, фізику, географію, історію у Давній Греції не тільки не відносили до «матема», а й узагалі не вважали вартими уваги справжніх учених (філософів). Вважалося, що тільки математика має тверді основи, оскільки вони здобуті розумом, тобто найвищою субстанцією, а не органами відчуття, які часто спонукають людину помилятися.

Перші піфагорійці тримали математичні знання у суворій таємниці від непосвячених і передавали їх «на віру», без належного обґрунтування. Через те їх називали *акусматиками* (від слова «акусма» — «звук», «священний вислів»). Для збереження таємниці передача знання від учителя до учнів відбувалась лише в усній формі. Проте згодом гору взяли *математики*, які вважали, що справжні знання можуть і повинні бути доступні всім і їх потрібно обґрунтовувати.

В епоху середньовіччя давньогрецьке слово *математика* вживалося рідко, а наука, яку ми зараз називаємо математикою, ділилася на арифметику (науку про числа) та геометрією (науку про фігури). Навчальні дисципліни з такими назвами вивчалися лише на

Франческо ді Стефано (бл. 1422 – 1457). Сім вільних мистецтв.
Зверху — фрагменти цієї картини із зображеннями музи Геометрії та Евкліда.

Мартен де Вос (1532 – 1603). Алегорія семи вільних мистецтв, 1590 р.
Муза Геометрії — на передньому плані ліворуч. У руках у неї циркуль, за допомогою якого вона проводить вимірювання на земному глобусі; біля ніг лежать лінійка й косинець. Поруч з Геометрією — Арифметика, зайнята обчисленнями на дощечці; біля неї книга з написом «ПІФАГОР».
У центрі біля небесного глобуса — муза Астрономії; біля її ніг — сонячний годинник.

другому ступені освіти —так званому *квадрівіумі*. На квадрівіум можна було перейти лише після успішного проходження початкового рівня, який називався *трівіумом* і включав три навчальні предмети: граматику, логіку і риторику (красномовство). Квадрівіум, як про це свідчить його назва, включав чотири предмети: окрім арифметики й геометрії — ще астрономію та музику (гармонію).

Усі сім предметів трівіума і квадрівіума шанобливо називали *вільними мистецтвами* — у тому сенсі, що вони звільняють людину від виснажливої фізичної праці. В епоху Відродження художники й графіки присвятили їм чимало творів, зображаючи їх прекрасними музами на зразок дев'ятьох античних муз, які вважалися покровительками образотворчих мистецтв.

Етьєн Делон
(1518 – бл. 1583)
«Геометрія». Гравюра.

У XVI–XVII ст., коли Європа ознайомилася із здобутками середньовічної арабської науки, з'явилася *алгебра*. Арабською була не лише назва цієї науки, а й зміст — розв'язування рівнянь. Цим античні математики майже не займалися. Певний час з арабським терміном «алгебра» конкурував латинський термін «аналіз», що мав той самий зміст. Однак пізніше аналізом назвали відгалуження алгебри, яке виникло у зв'язку поняття функції.

Термін «математика» для сукупної назви арифметики, геометрії, алгебри та аналізу почали систематично застосовувати у XVIII ст. Проте ще у першій половині XIX ст. кожного визначного математика шанобливо називали геометром, навіть якщо він проводив дослідження в іншій галузі математики.

Незважаючи на очевидні відмінності, різні математичні дисципліни мають одну суттєву спільну рису, яка споріднює їх між собою й вирізняє з-поміж інших наук. Усі поняття, які вивчаються у математичних науках, — числа, фігури, формули, функції тощо, є мисленнєвими образами і тому можуть розглядатися й аналізуватися окремо від будь-яких матеріальних носіїв. Після того, як установлені основні властивості цих мисленнєвих образів (у геометрії ці властивості називаються аксіомами, в алгебрі — правилами, законами, формулами), усі інші властивості виводяться із них уже суто логічним шляхом.

Корнеліс Корт
(1533 – 1578).
«Геометрія». Гравюра.
Із серії «Вільні мистецтва».

П'єр Леґросс молодший
(1666–1719). Геометрія.
Париж. Лувр.

§7. Кут між прямими. Перпендикулярні прямі

Уроки 8–9

Підведемо підсумок проведеного у попередніх двох параграфах вивчення властивостей кутів, що утворюються при перетині двох прямих. Усього при цьому утворюється чотири кути зі спільною вершиною, сторони яких належать різним прямим (рис. 2.16) (ми не беремо до уваги ще два розгорнуті кути, сторони яких належать кожній прямій). Ці чотири кути розпадаються на дві пари вертикальних кутів, які рівні між собою. Будь-які два кути з різних пар є суміжними, а тому їхня сума дорівнює 180°. Отже, якщо один із суміжних кутів гострий, то інший — тупий, а якщо один із них прямий, то інший теж прямий (і тоді прямими є всі чотири кути, утворені прямими).

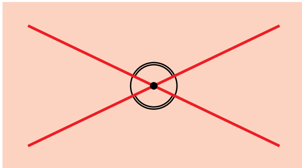


Рис. 2.16

На підставі цього приймається таке означення.

Означення.

Кутом між прямими, **що перетинаються, називається величина гострого або прямого кута, утвореного при перетині цих прямих.**

Зверніть увагу, що на відміну від кута, утвореного променями, який є фігурою і має свою величину (градусну міру) в межах від 0° до 180°, кут між прямими — це лише величина і вона не перевищує 90°.

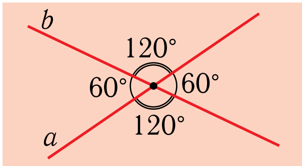


Рис. 2.17

Кут між прямими a і b позначається так: $\angle ab$. Наприклад, у випадку, зображеному на рис. 2.17, $\angle ab = 60°$, а у випадку, зображеному на рис. 2.18, $\angle ab = 90°$.

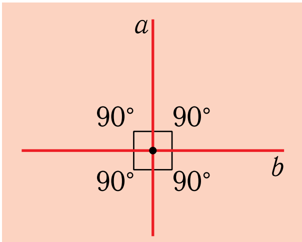


Рис. 2.18

Означення.

Якщо кут між прямими дорівнює 90°, то такі прямі називаються *перпендикулярними* **(або** *взаємно перпендикулярними***).**

Кажуть також, що перпендикулярні прямі перетинаються під прямим кутом.

На рис. 2.18 зображені перпендикулярні прямі a і b.

Перпендикулярність прямих позначають за допомогою знака $\perp$. Наприклад: $a \perp b$, $AB \perp CD$ тощо.

На рис. 2.19 і 2.20 відображені способи побудови перпендикулярних прямих за допомогою косинця. На першому з них пряма b, що перпендикулярна до даної прямої a, проведена через точку A цієї прямої. На другому рисунку пряма b, що перпендикулярна до даної прямої a, проведена через точку A, що лежить поза прямою a.

Чи може інша побудова, наприклад, за допомогою транспортира, дати інші перпендикулярні прямі? — Ні, не може, і це можна довести.

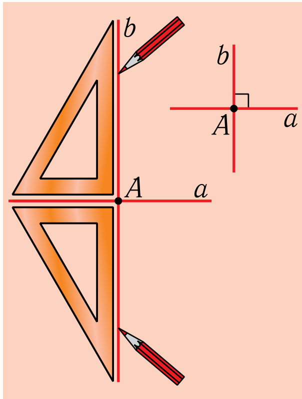


Рис. 2.19

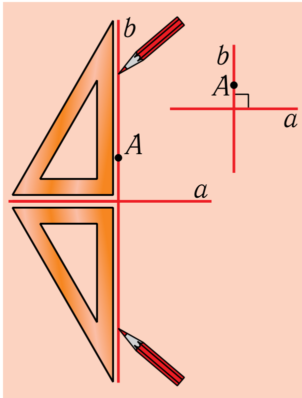


Рис. 2.20

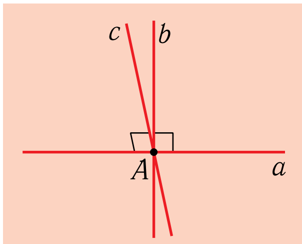


Рис. 2.21

Теорема

(про єдиність перпендикулярної прямої).

Через будь-яку точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Доведення. Припустимо, що через точку A, розміщену *на прямій* a, можна провести дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a (рис. 2.21). Нехай буквами b і c позначені і промені цих прямих, що лежать в одній із півплощин з граничною прямою a. Тоді у цій півплощині матимемо два рівних (прямих) кути $\angle ab$ і $\angle ac$, відкладених від однієї півпрямої Oa. Оскільки за аксіомою про відкладення кутів таке неможливо, то зроблене припущення хибне. Тому через точку A можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до прямої a.

Припустимо тепер, що через точку A, розміщену *поза прямою* a, можна провести дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a (рис. 2.22). Нехай B і C — точки перетину цих прямих із прямою a.

Повернемо подумки ту півплощину з граничною прямою a, в якій знаходиться точка A, відносно середини O відрізка BC до суміщення з іншою півплощиною з тією само граничною прямою a. При цьому точка B переміститься у точку C, точка C — у точку B, прямий кут ABC — у рівний йому прямий кут $A'CB$, а прямий кут ACB — у рівний йому прямий кут $A'BC$.

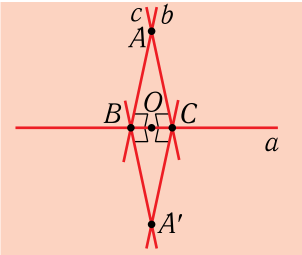


Рис. 2.22

Із того, що кути ABC і $A'BC$ — прямі, випливає, що кут ABA' — розгорнутий, тобто що точки A, B, A' лежать на одній прямій. Те ж саме стосується й точок A, C, A'. Виходить, що через точки A і A' проходять дві прямі. Ці прямі не можуть збігатися, оскільки пряма a перетинає їх у різних точках B і C. Дістали суперечність з аксіомою про проведення прямої, за якою через дві точки A і A' можна провести лише одну пряму. Із цього можна зробити лише один висновок, а саме той, що зроблене припущення про існування двох перпендикулярних прямих b і c до прямої a — хибне, а тому існує тільки одна така пряма. Теорему доведено.

Цікаво зауважити, що, на відміну від перпендикулярної прямої, через будь-яку точку A можна провести дві прямі b і c, які перетинають дану пряму a під заданим кутом, який не є прямим (рис. 2.23, а)–б)) (порівняй з рис. 2.19 і 2.20).

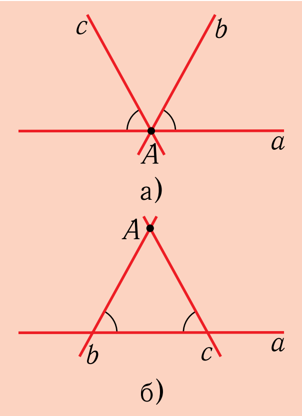


Рис. 2.23

Інколи доводиться вести мову про перпендикулярність не тільки прямих, а й частин прямих — відрізків і променів.

Означення.

Відрізки або промені називаються *перпендикулярними* (кажуть також *взаємно перпендикулярними*), якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. Відрізки або промені називаються перпендикулярними до прямої, якщо вони лежать на прямих, які перпендикулярні до цієї прямої.

Для короткого запису перпендикулярності відрізків і променів застосовується той самий знак $\perp$, що й для прямих.

На рис. 2.24 зображені характерні випадки взаємного розміщення перпендикулярних відрізків, а на рис. 2.25 — характерні випадки взаємного розміщення відрізків, перпендикулярних до прямої.

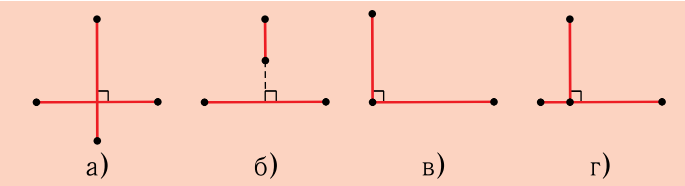


Рис. 2.24

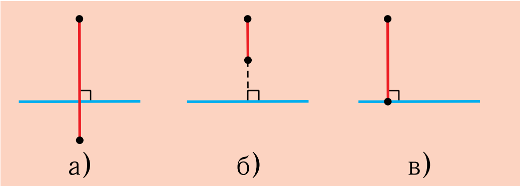


Рис. 2.25

Означення.

Відрізок, який перпендикулярний до прямої і при цьому один з його кінців належить прямій, називається *перпендикуляром* до цієї прямої. Спільна точка прямої і перпендикуляра до неї, називається *основою* перпендикуляра.

Аналогічно означається поняття перпендикуляра до променя та до іншого відрізка.

Перпендикуляри до відрізків зображені на рис. 2.24, в) і г), а перпендикуляр до прямої — на рис. 2.25, в).

Терміни «перпендикулярний», «перпендикуляр» утворені від латинського слова perpendicularis, що означає «прямовисний». Прямовисна лінія утворює прямі кути з будь-якою горизонтальною прямою (рис. 2.26). Це й стало підставою для того, аби будьякі прямі чи відрізки, які утворюють прямий кут, називати перпендикулярними. У зв'язку із цим часто замість виразу «*провести* перпендикуляр з точки до прямої» кажуть: «*опустити* перпендикуляр з точки на пряму» або «*поставити* перпендикуляр до прямої у заданій на ній точці», — навіть тоді, коли пряма не займає горизонтального положення (рис. 2.27).

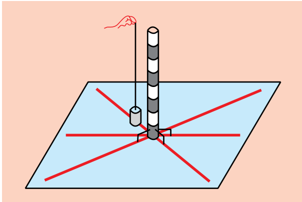


Рис. 2.26

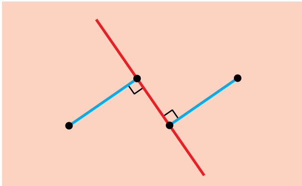


Рис. 2.27

З використанням поняття перпендикуляра уводиться поняття відстані від точки до прямої.

Означення.

***Відстанню від точки до прямої* називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму.**

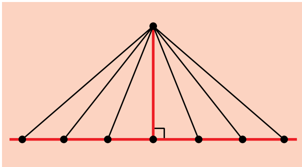


Рис. 2.28

Підставою для такого означення є те, що перпендикуляр до прямої є найкоротшим з усіх відрізків, які сполучають цю точку з точками прямої (рис. 2.28). Поки що у нас немає достатнього теоретичного фундаменту, аби довести це твердження. Ми доведемо його у наступному розділі.

Розв'язуємо разом

Задача.

Визначити кут між двома прямими, якщо сума трьох кутів, утворених при їхньому перетині, дорівнює 300°.

Розв'язання. Як би ми не вибирали три із чотирьох кутів, утворених двома прямими, що перетинаються (рис. 2.29), два з них завжди будуть суміжними, отже, в сумі дадуть 180°. Тоді на третій кут, за умовою цієї задачі, припаде

$$300° - 180° = 120°.$$

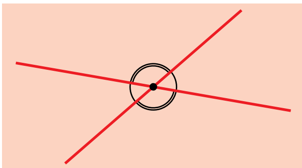
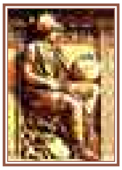


Рис. 2.29

Це — тупий кут, а кут між прямими дорівнює величині гострого або прямого кута. Тому в цьому разі шуканий кут між прямими дорівнює $180° - 120° = 60°$.

Відповідь. 60°.



Вправи і задачі

123°. Позначте точку і за допомогою лінійки проведіть через неї дві довільні прямі, а потім за допомогою транспортира визначте кут між цими прямими.

124°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира дві прямі, кут між якими дорівнює: а) 30°; б) 60°; в) 90°.

125°. Один із кутів, що утворюється при перетині двох прямих, дорівнює 140°. Чому дорівнює кут між цими прямими?

126°. Жоден із кутів, утворених при перетині двох прямих, не є гострим. Чому дорівнює кут між прямими?

127°. Перерисуйте в зошит зображення точки P і прямої m, подані на рис. 2.30. Проведіть у кожному випадку за допомогою косинця перпендикуляр із точки P на пряму m. За допомогою лінійки у кожному випадку визначте відстані від точки P до прямої a.

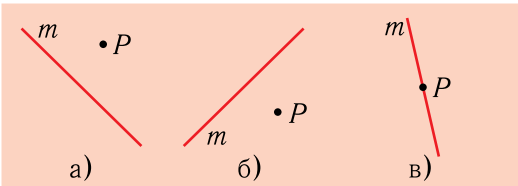


Рис. 2.30

128°. Проведіть пряму і за допомогою лінійки і косинця позначте дві які-небудь точки A і B, що знаходяться від прямої на відстанях відповідно 3 см і 2 см.

129°. Зобразіть за допомогою лінійки і косинця усі характерні випадки взаємного розміщення відрізка і променя, які є взаємно перпендикулярними.

130°. Зобразіть за допомогою лінійки і косинця усі характерні випадки взаємного розміщення двох променів, а також променя і прямої, які є взаємно перпендикулярними.

131. Визначте кут між двома прямими, якщо:

1) сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 100°;

2) сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 200°;

3) сума трьох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 250°;
4) сума трьох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 350°.

132. Визначте кут між двома прямими, якщо один із кутів, що утворилися при їхньому перетині, удвічі менший від іншого.

133. Визначте кут між двома прямими, якщо різниця двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 70°.

134. Визначте кут між двома прямими, якщо сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, учетверо менша від суми двох інших.

135. Визначте кут між двома прямими, якщо сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, більша за суму двох інших на 140°.

136. На рис. 2.31 відображений спосіб перевірки за допомогою лінійки, чи є прямим найбільший кут у косинця (пунктиром зображене попереднє положення косинця). На якій геометричній властивості ґрунтується цей спосіб?

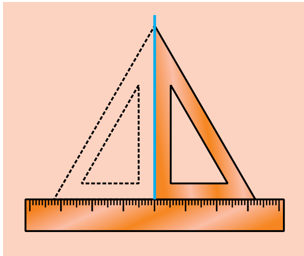


Рис. 2.31

137. На рис. 2.32 відображений спосіб перевірки за допомогою столярного кутника правильності обробки бруса. Як би ви пояснили цей спосіб? На якій геометричній властивості він ґрунтується?

Рис. 2.32

138. На рис. 2.33 відображений спосіб провішування перпендикулярних прямих на місцевості за допомогою екера (у перекладі з французької мови це слово (equerre) означає «кутник»). У найпростішому варіанті екер складається із хрестовини, що кріпиться на ніжці; на кінцях хрестовини вбиті штирки для візування. Як би ви пояснили спосіб використання екера?

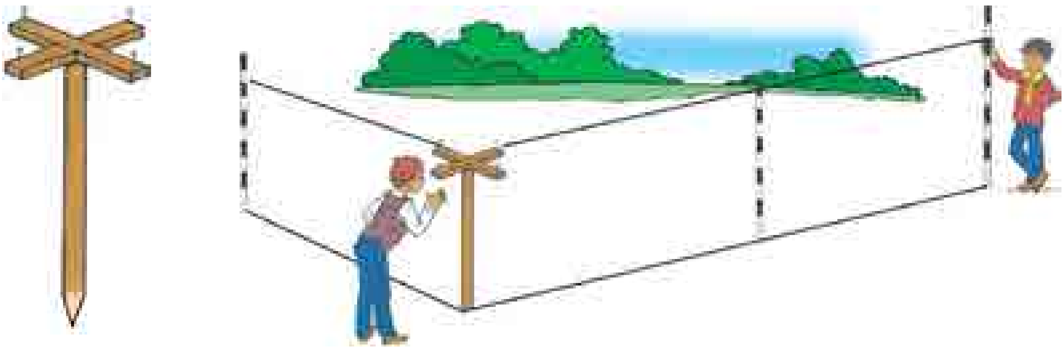


Рис. 2.33

139. Три прямі AB, CD і KM перетинаються в точці O і при цьому $AB \perp CD$, $\angle KOB = 30°$ (рис. 2.34). Визначте кути AOM і KOD.

140. На рис. 2.35 $CO \perp AB$, $DO \perp OF$. Доведіть, що тоді $\angle DOC = \angle FOB$.

141•. Визначте кут між прямими, якщо один із кутів, що утворився при їхньому перетині, у вісім разів менший від суми трьох решти.

142•. На рис. 2.35 □AOB = 180°, □DOC = □FOB, □AOD = = □COF. Доведіть, що тоді CO ^ AB, а DO ^ OF.

143•. Три прямі AB, CD, KM перетинаються в точці O (див. рис. 2.34) і при цьому □KOA = 125°, □COM = 145°. Доведіть, що тоді AB ^ CD.

144•. Якого найбільшого і найменшого значення може набувати сума трьох із чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих?

145•. Через одну точку проведено чотири прямі. Скільки серед них може бути взаємно перпендикулярних?

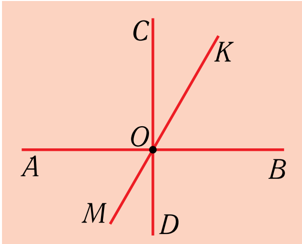


Рис. 2.34

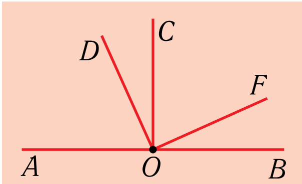
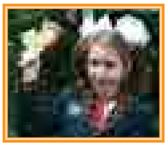


Рис. 2.35

§8. Паралельні прямі. Ознаки паралельності прямих

Уроки 10–11



Ви вже знаєте, що прямі на площині можуть перетинатися, а можуть і не перетинатися (цим площина суттєво відрізняється від сфери, де будь-які прямі завжди перетинаються). Прямі, які не перетинаються, називаються паралельними.

Для запису паралельності прямих застосовується знак ||. Наприклад, запис а || b читається так: «пряма a паралельна прямій b».

Дуже легко накреслити прямі, що перетинаються у заданій точці A: одну пряму (позначимо її через a) проводимо довільно, потім беремо поза нею яку-небудь точку B і через точки A і B проводимо шукану пряму b (рис. 2.36). Використовуючи транспортир, пряму b можна провести навіть під заданим кутом до прямої a (рис. 2.37): тоді точку B потрібно брати на промені AB, який утворює цей кут з одним із променів прямої a.

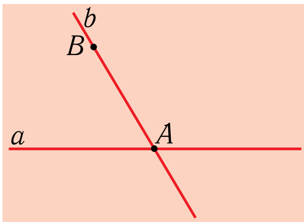


Рис. 2.36

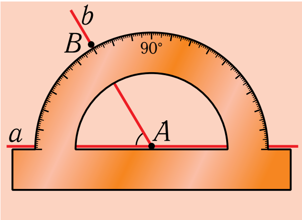


Рис. 2.37

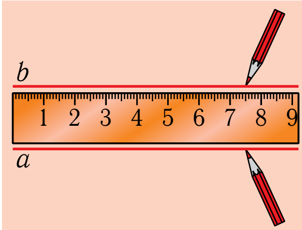


Рис. 2.38

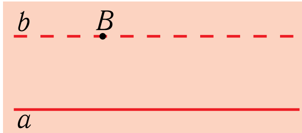


Рис. 2.39

Накреслити паралельні прямі можна за допомогою лінійки, використовуючи обидва її краї. Так, на рис. 2.38 проведені паралельні прямі a і b. Однак якщо хоч трохи конкретизувати вимогу, наприклад, аби пряма b була паралельна заданій прямій a і проходила через задану точку B (рис. 2.39), то завдання суттєво ускладнюється. Креслярі вирішують його за допомогою лінійки і косинця або навіть двох однакових косинців, як показано на рис. 2.40 і 2.41.

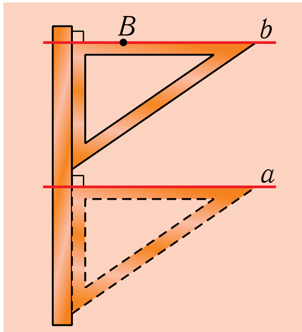


Рис. 2.40

Неважко зауважити, що у першому із цих способів побудовані паралельні прямі фактично проведені перпендикулярно до деякої прямої (до лінійки), а в другому утворюють рівні кути з деякою прямою (перемичкою косинця). Якщо зважити, що прямі кути теж рівні, то обидва способи зводяться до одного: паралельні прямі проводяться так, щоб утворювалися рівні кути з деякою січною прямою.

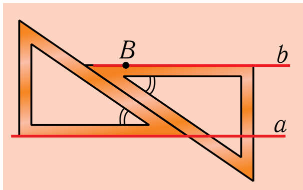


Рис. 2.41

Однак прямі a і b, які утворюють рівні кути із січною прямою c, можуть бути й не паралельними (рис. 2.42). Тому для паралельності прямих лише рівності цих кутів недостатньо. Потрібні уточнення щодо їхнього розміщення.

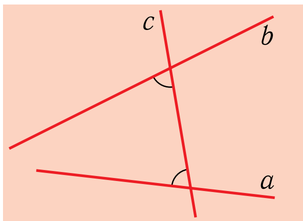


Рис. 2.42

Подивіться на рис. 2.43. На ньому дві прямі a і b перетнуті третьою прямою c. Для спрощення мови пряму c, яка перетинає прямі a і b у різних точках, називають *січною* цих прямих. При цьому утворюється вісім нерозгорнутих кутів з вершинами у точках перетину A і B.

Для окремих пар цих кутів, які якраз і дають змогу провести згадане уточнення, яке необхідне для паралельності прямих, уведені спеціальні назви. А саме:

$\angle 3$ і $\angle 5$, а також $\angle 4$ і $\angle 6$ називаються внутрішніми різносторонніми кутами;

$\angle 3$ і $\angle 6$, а також $\angle 4$ і $\angle 5$ називаються внутрішніми односторонніми кутами;

$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$ називаються відповідними кутами.

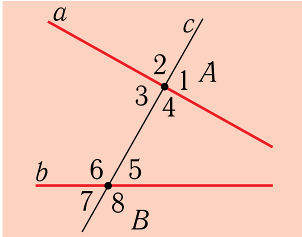


Рис. 2.43

З рисунка видно, що внутрішні різносторонні кути розміщені так, що одна пара їхніх сторін має спільну внутрішню частину AB січної (відрізок), а інші сторони лежать з різних боків від січної c. Внутрішні односторонні кути розміщені так, що одна пара їхніх сторін так само має спільну внутрішню частину AB січної, однак інші сторони лежать уже з одного боку від січної c.

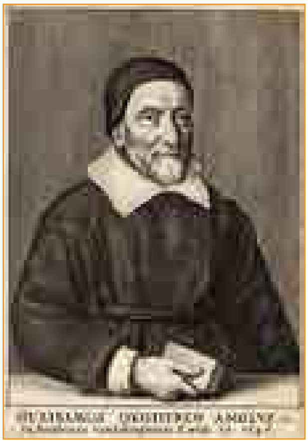
Відповідні кути лежать з одного боку від січної c, а також і з одного боку від однієї з прямих a чи b.

Інколи виокремлюють ще зовнішні різносторонні (1 і 7 та 2 і 8) та зовнішні односторонні кути (1 і 8 та 2 і 7).

Якщо ви тепер повернетеся до рис. 2.41, то легко збагнете, що паралельність побудованих на ньому прямих a і b забезпечується рівністю саме внутрішніх різносторонніх кутів, які утворюються при перетині цих прямих із перемичками косинців.

Це спостереження приводить нас до ознаки паралельності прямих. Залишається лише сформулювати її та довести за всіма правилами геометрії як теорему.

Ознаками у геометрії називають теореми про такі умови щодо фігур, виконання яких є достатніми для виконання певних фундаментальних геометричних властивостей, наприклад, паралельності, перпендикулярності, рівності тощо.



Англійський математик Вільям Отред (1575–1660). Увів знак $\parallel$ для позначення паралельності прямих і знак $\angle$ для позначення кутів

Теорема
(ознака паралельності прямих).

Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення. Ми доведемо цю теорему способом, який у своїх головних рисах споріднений з тим, яким у попередньому параграфі доведено теорему про єдиність перпендикулярної прямої. Спорідненість полягає у тому, що, по-перше, «йтимемо від супротивного», по-друге — застосовуватимемо уявне суміщення двох півплощин шляхом повороту.

Нехай при перетині двох прямих a і b січною c утворюються рівні внутрішні різносторонні кути з вершинами A і B, які для спрощення позначимо цифрами 1 і 2 (рис. 2.44). Зрозуміло, що тоді суміжні з ними внутрішні різносторонні кути 3, 4 теж рівні. Потрібно довести, що за цієї умови прямі a і b паралельні.

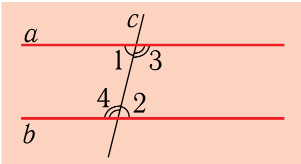


Рис. 2.44

Припустимо супротивне, тобто, що прямі a і b перетинаються в деякій точці C (рис. 2.45).

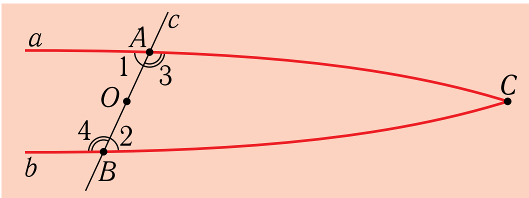


Рис. 2.45

Зауваження. Незважаючи на те, що таке припущення з першого погляду може здатися абсолютно абсурдним, насправді воно має цілком реальні підстави. Прямі лінії безмежні, і те, що видається неможливим на певному невеликому проміжку, цілком може здійснюватися у великих масштабах. Якби на земній поверхні прокласти широку алею між двома меридіанами від екватора до полюса (рис. 2.46), то, рухаючись нею на автомобілі, ви почали б помічати звуження лише через декілька діб. З літака його можна помітити через декілька годин, тимчасом як з орбіти навколоземної космічної станції це було б очевидно одразу.

Отже, реальні підстави для зробленого припущення існують. Проте логічний аналіз такої можливості приведе нас до суперечності з прийнятими аксіомами. Це свідчитиме про те, що в геометрії на площині, яку ми розвиваємо, таке неможливо.

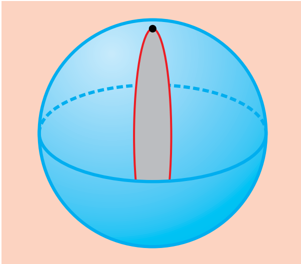


Рис. 2.46

Повернемо подумки ту півплощину з граничною прямою c, у якій знаходиться точка C, відносно середини O відрізка AB до суміщення з протилежною півплощиною (рис. 2.47). При цьому точка A переміститься у точку B, точка B — у точку A, кут 2 накладеться на рівний йому кут 1, а кут 3 — на рівний йому кут 4. Позначимо через C' точку, в яку переміститься точка C.

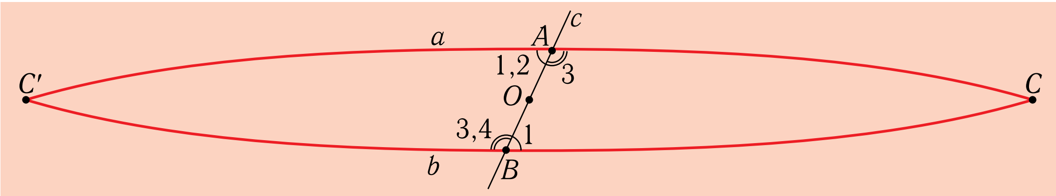


Рис. 2.47

Із того, що кути 1 і 3 — суміжні, випливає, що кут $C'AC$ — розгорнутий, тобто що точки C', A, C лежать на одній прямій. Те ж само стосується й точок C', B, C. Виходить, що через точки C і C' проходить дві прямі. Ці прямі не можуть збігатися, оскільки пряма c перетинає їх у різних точках A і B. Дістали суперечність з аксіомою про проведення прямої, за якою через дві точки C і C' можна провести лише одну пряму. Це свідчить про те, що зроблене припущення про перетин прямих a і b — хибне, а тому ці прямі — паралельні. Теорему доведено.

З доведеної теореми можна вивести декілька очевидних наслідків, кожен з яких теж є окремою ознакою паралельності прямих.

Наслідок 1.

Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Доведення. Якщо прямі a і b перпендикулярні до січної c (рис. 2.48), то внутрішні різносторонні кути 1 і 2 — прямі, а тому рівні. Отже, відповідно до доведеної теореми, прямі a і b — паралельні.

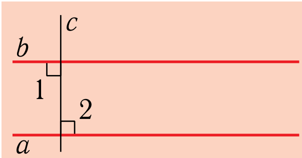


Рис. 2.48

Варто зазначити, що саме внаслідок того, що довгі краї лінійки перпендикулярні до її бічних країв, проведені уздовж них прямі паралельні (див. рис. 2.38).

Наслідок 2.

Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c відповідні кути рівні, наприклад, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2.49). Кут 1 рівний куту 3, оскільки ці кути вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$. Але ці кути є внутрішніми різносторонніми, а тому, за доведеною теоремою, прямі a і b — паралельні.

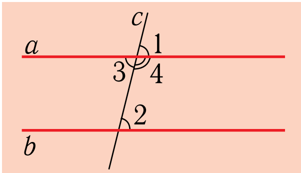


Рис. 2.49

Наслідок 3.

Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад, $\angle 4 + \angle 2 = 180°$ (див.

рис. 2.49). Оскільки сума суміжних кутів 4 і 3 теж дорівнює $180°$, то $\angle 2 = \angle 3$. Знову прийшли до рівності внутрішніх різносторонніх кутів. Отже, прямі a і b — паралельні.

Поняття паралельності прямих природним чином поширюється на відрізки та промені. Наприклад, два відрізки називаються паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Для позначення паралельності відрізків і променів застосовується той самий знак ||, що й для прямих. Наприклад: $AB \parallel CD$, $m \parallel n$, $MN \parallel a$ (рис. 2.50).

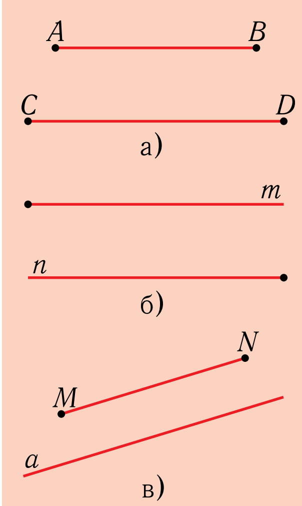


Рис. 2.50

Про доведення методом «від супротивного»

При доведенні ознаки паралельності прямих був застосований особливий вид міркувань, який називають доведенням «від супротивного» (у попередньому параграфі так само було доведено теорему про єдиність перпендикулярної прямої). Цей спосіб доведення надзвичайно поширений у математиці. Тому розглянемо його детальніше.

Доведенням «від супротивного» полягає у тому, що на його початку робиться припущення, супротивне тому, яке потрібно довести, а потім на цій підставі шляхом міркувань виводиться наслідок, який суперечить або самому зробленому припущенню, або певній аксіомі, або вже доведеній раніше теоремі. Через цю суперечність зроблене припущення відкидається як хибне і цим установлюється істинність твердження, яке потрібно було довести.

Погляньмо ще раз, як це було втілено при доведенні ознаки паралельності прямих. Потрібно було довести, що дві прямі a і b, які утворюють із січною c рівні внутрішні різносторонні кути, паралельні. Спочатку ми припустили, що прямі a і b не паралельні, тобто перетинаються. Потім звідси вивели, що вони мусять мати ще одну точку перетину. А оскільки такий висновок уже суперечить аксіомі про проведення прямої, то звідси було зроблено єдиний логічно можливий висновок про те, що зроблене припущення неправомірне.

Отже, прямі a і b насправді не можуть перетинатися, тобто є паралельними, що й треба було довести.

Що є логічною підставою для такого способу міркувань? — Те, що із двох взаємно супротивних тверджень істинним є тільки одне. Тому якщо одне з них веде до якоїсь суперечності, то істинним є інше, оскільки істинне твердження до суперечності вести не може.

Інколи, коли ще тільки-но починають застосовувати спосіб доведення «від супротивного», на початку доведення неправильно роблять припущення про істинність того твердження, яке доводять (а не супротивного, як потрібно). Потім на підставі цього приходять до висновку про істинність якогось іншого, уже доведеного твердження і, вважають, що доведення завершене. Однак цим самим потрібного твердження так і не буде доведено. Буде доведено тільки те, що його істинність не суперечить раніше доведеному твердженню. А не суперечити — не означає бути *необхідним*. Наприклад, мати високий зріст — не суперечить тому, щоб добре грати у баскетбол. Однак це не є необхідним: відомі баскетболісти навіть світового рівня, які мали невисокий зріст.

І вже зовсім хибним є спосіб міркувань, коли робиться припущення про істинність твердження, яке потрібно довести, а через кілька логічних кроків одержується висновок про... істинність того самого твердження, і на підставі цього теорема вважається доведеною. Насправді тут уже не буде доведено навіть того, що істинність потрібного твердження не суперечить істинності іншого твердження: вона не суперечить істинності... того самого твердження. Такий помилковий спосіб міркувань називається *хибним логічним колом*.

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести методом «від супротивного», що дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні.

Розв'язання. Один із можливих способів для доведення цього твердження абсолютно аналогічний тому, яким вище доведена ознака паралельності.

Дуже радимо читачеві провести це доведення самостійно.

Інший спосіб ґрунтується на теоремі про єдиність перпендикулярної прямої. Припустимо, що дві прямі a і b, які перпендикулярні до якоїсь прямої c (рис. 2.51), перетинаються у деякій точці C. Тоді через точку C проходитиме дві прямі a і b, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої c. Це суперечить теоремі про єдиність перпендикулярної прямої. Отже, зроблене припущення хибне, а тому прямі a і b — паралельні, що й треба було довести.

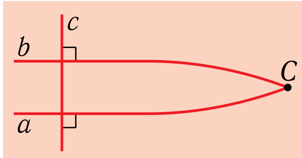


Рис. 2.51

Вправи і задачі

146°. Назвіть і запишіть усі пари паралельних прямих, зображених на рис. 2.52.

147°. Назвіть і запишіть усі пари паралельних фігур, зображених на рис. 2.53.

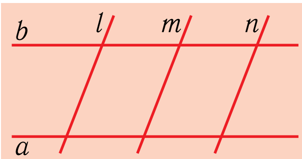


Рис. 2.52

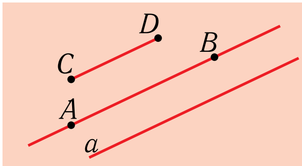


Рис. 2.53

148°. На рисунках 2.54, а)–в) прямі a і b перетинає січна c. У кожному випадку назвіть кути 1 і 2.

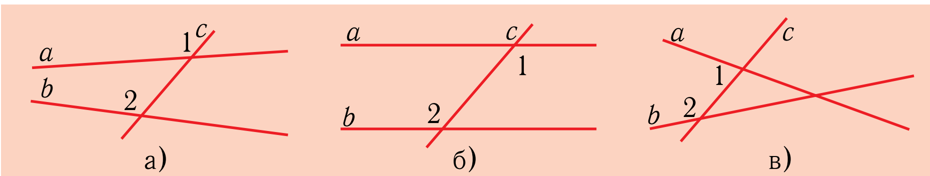


Рис. 2.54

149°. На рисунках 2.55, а)–в) прямі a і b перетинає січна c. У кожному випадку визначте величини відповідних кутів. У якому випадку про прямі a і b можна стверджувати, що вони паралельні?

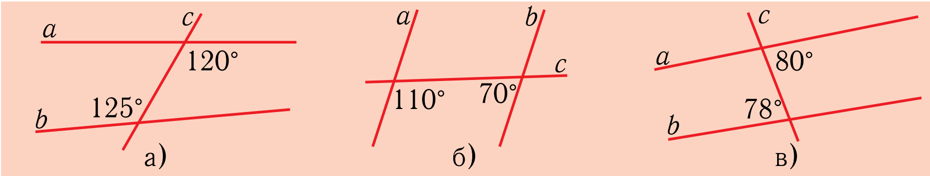


Рис. 2.55

150°. На рис. 2.56, а)–в) позначені величини двох кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c. Чи можемо ми на підставі цих даних стверджувати, що прямі a і b паралельні?

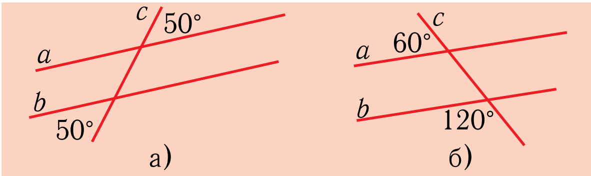


Рис. 2.56

151°. На рис. 2.57, а)–б) прямі a і b перетинає січна c. Перерисуйте ці рисунки у зошит і на кожному з них позначте на прямій b такі точки M, N, L, щоб кути PAB і MBA були внутрішніми різносторонніми, кути PAB і NBA — внутрішніми односторонніми, а кути PAB і LBQ — відповідними. По який бік від січної c у кожному випадку розміщуватимуться точки M, N і L — по той самий, що й точка P, чи по інший?

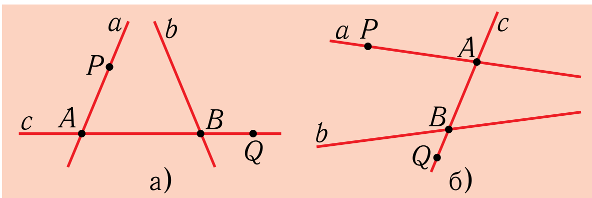


Рис. 2.57

152. На рис. 2.58 відображений спосіб проведення за допомогою транспортира прямої b, що проходить через задану точку B і паралельна заданій прямій a. Як би ви пояснили цей спосіб?

153. На рис. 2.59 відображені два способи проведення за допомогою лінійки і косинця прямої b, що проходить через задану точку B і паралельна заданій прямій a. Як би ви пояснили ці способи?

154. На рис. 2.60 відображені два способи проведення за допомогою двох однакових косинців прямої b, що проходить через задану точку B і паралельна заданій прямій a. Як би ви пояснили ці способи? Чи обов'язково косинці мають бути однаковими?

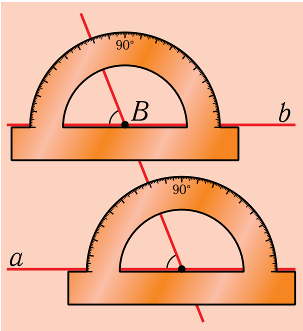


Рис. 2.58

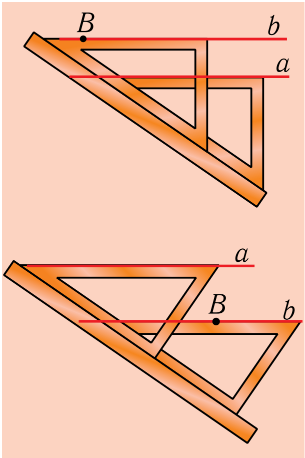


Рис. 2.59

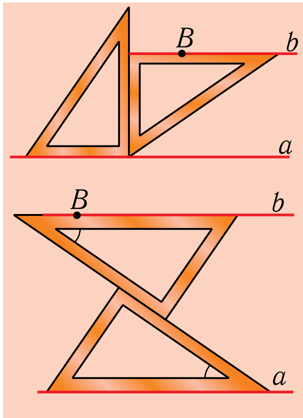


Рис. 2.60

155. На рис. 2.61 відображений спосіб побудови паралельних прямих на креслярській дошці. Довга креслярська лінійка кріпиться одним кінцем на шарнірі до короткої рейки, яка може ковзати вздовж одного з країв креслярської дошки. Кут взаємного нахилу довгої лінійки і короткої рейки можна фіксувати за допомогою гвинта. Тоді при різних положеннях рейки на краю креслярської дошки довга лінійка визначатиме паралельні прямі. Як ви це можете пояснити?

156. На рис. 2.62 відображений спосіб побудови паралельних прямих за допомогою малки, якою користуються у столярній справі. Як ви можете пояснити цей спосіб? *Малка* складається із двох планок, кінці яких скріплені на шарнірі за допомогою гвинта; планки можна фіксувати під будь-яким кутом одна до одної.

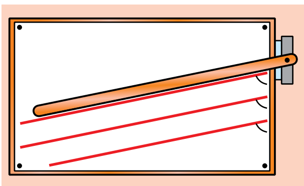


Рис. 2.61

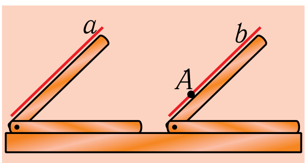


Рис. 2.62

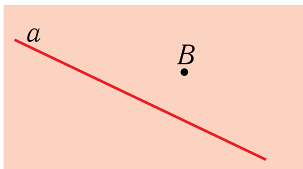


Рис. 2.63

157. Нарисуйте в зошиті таке розміщення точки B і прямої a, яке показано на рис. 2.63, а потім за допомогою наявних у вас інструментів проведіть через точку B пряму b, паралельну прямій a. Скільки різних способів побудови ви можете запропонувати? Поясніть їх.

158. Доведіть, що коли при перетині двох прямих січною утворені внутрішні різносторонні кути рівні, то рівні й відповідні кути, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

159. На рис. 2.64 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

160. На рис. 2.64 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

161°. На рис. 2.65 □1 = □2, □2 + □3 = 180°. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

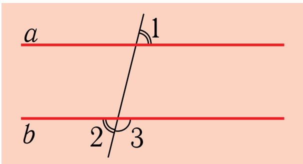


Рис. 2.64

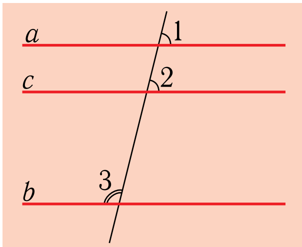
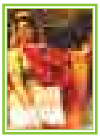


Рис. 2.65

162°. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

163°. Чотири кути, утворені при перетині двох прямих a і b січною, дорівнюють по 50°, решта чотири — по 150°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

«Начала» Евкліда — перший підручник з геометрії (бл. 365 – бл. 300 рр. до н.е.)

Історія знає чимало прикладів, коли видатні твори цілковито затьмарювали славу своїх творців. Одним із найвидатніших таких творів став підручник з геометрії під назвою «Начала» (грецькою «Стохея», латинською «Елементос») давньогрецького математика Евкліда (бл. 365 – бл. 300 рр. до н.е.). Ця дивовижна книга нарівні зі священними письменами пройшла крізь випробування багатьох століть. Водночас про самого Евкліда достеменно відомо лише декілька фактів.

Відомо, зокрема, що Евклід був родом з Афін і що там він ще юнаком навчався у самого Платона — одного з найславетніших античних філософів. Можливо, що саме Платон заронив у нього ідею про систематизацію всього запасу геометричних знань та послідовного виведення їх з небагатьох основних істин. Пізніше ці істини учень Платона Аристотель назвав аксіомами.

Останню третину свого життя Евклід прожив у єгипетській Александрії. Тому його називали ще Евклідом Александрійським. Це місто було столицею династії Птолемеїв. Родоначальник цієї династії Птолемей I Сотер був одним із сподвижників Александра Македонського, а коли той помер, то на його честь заснував місто, а в місті створив науковий центр — Мусейон (Будинок Муз). Сюди скликали найславетніших учених з усіх світів і за рахунок царської казни давали їм повне утримання та створювали умови для наукової роботи. Серед запрошених був і Евклід. Тут він започаткував математичну школу, гучна слава якої згодом поширилася на весь елліністичний світ. Можливо, що саме для слухачів цієї школи в першу чергу й призначалися Евклідові «Начала».

Як засвідчує александрійський математик Папп, який жив через шість століть після Евкліда, сам Евклід був людиною добросердечною і скромною, але водночас принциповою і дуже незалежною. Побутувала легенда, яка яскраво засвідчує це. Нібито якось сам цар Птолемей, тільки-но ознайомившись з «Началами», прикликав до себе Евкліда й запитав: «Чи не має більш коротшого шляху до опанування геометрії, ніж той, що передбачають його «Начала»? — На це Евклід без жодного страху відповів: «У геометрії немає царських доріг».

Аби до кінця зрозуміти цю мудру відповідь, потрібно знати, що в давнину в Єгипті, а також і в деяких інших країнах, справді існували окремі дороги, їздити якими мав право лише цар і його кур'єри. Отже, Евклід

Евклід.
Гравюра невідомого художника XVI ст.

Евклід презентує Птолемею I Сотеру свої «Начала» геометрії.

недвозначно натякав володарю на те, що у науку шлях лише один: як для царів, так і для простолюду.

В іншій легенді розкривається ставлення античного ученого до мирських розкошів. Якось один з юнаків, опанувавши декілька теорем з «Начал», запитав у Евкліда: «А що я зароблю, якщо усе вивчу?». На що Евклід покликав раба й зневажливо сказав: «Дай йому три оболи (тобто три найдрібніші тогочасні грецькі монети), бідолаха хоче заробити на навчанні».

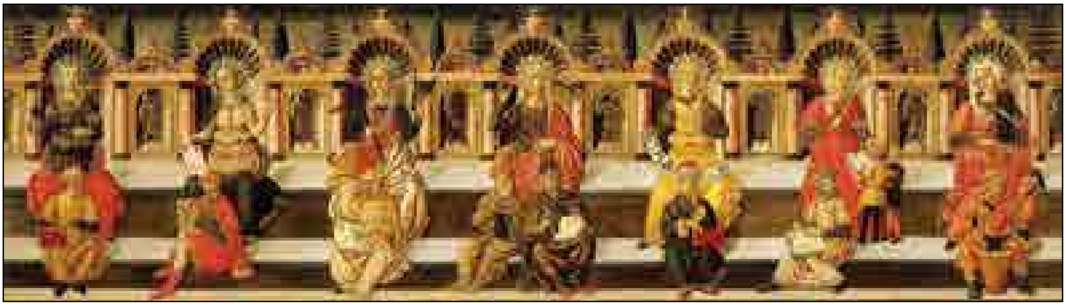
Ось це й усе, що відомо про Евкліда. Один із найобізнаніших коментаторів його «Начал» Прокл Діодох, який жив у V ст. н.е., тобто через вісім століть після Евкліда, і тривалий час провів в Александрії, вже навіть не знав, де й коли народився славетний учитель.

Неможливо переоцінити талант і звитягу автора «Начал». У нас час існують сотні й тисячі підручників, десятки тисяч журнальних публікацій, а учені-теоретики до дрібниць проаналізували обґрунтованість кожної умови і висновку. І все ж, незважаючи на це, по-справжньому хороші навчальні книги з'являються нечасто. А що вже казати про епоху Евкліда, коли користуватися можна було лише декількома рукописами! Майже весь зміст потрібно було продумувати самому — аксіоми, послідовність викладу, логічну канву кожної теми, доведення кожної теореми й обґрунтування кожної побудови. З усім цим Евклід упорався настільки успішно, що його праця служила основним підручником з геометрії понад 2000 років. Вона й досі залишається в арсеналі освітніх книг і є класичним взірцем для викладу наукової теорії на аксіоматичній основі. Більшість теорем цього підручника теж свого часу були продумані й записані Евклідом у його «Началах».

«Начала» Евкліда видавалися дуже багато разів, у різні часи, у різних країнах, різними мовами й різними способами (від прадавнього ручного переписування на папірусі та пергаменті до сучасного офсетного і лазерного друку). Проте лише окремі видання були повними. Найчастіше ж вони пристосовувалися до викладання на елементарному рівні, а тому суттєво

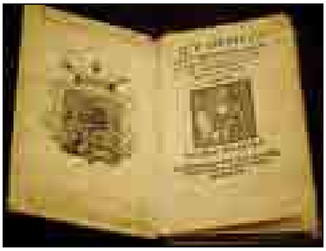
Фронтиспис рукописного латинського перекладу «Начал» Евкліда, виконаного орієнтовно з 1309 по 1316 рр. з арабського рукопису. Тут ми бачимо прообраз численних пізніших зображень музи Геометрії. Примітно, що вона навчає геометрії ченців. Для свого часу це був доволі сміливий перехід через канони і забобони.

Перша сторінка 1-го друкованого латинського перекладу (з грецької) «Начал» Евкліда (Венеція, 1482 р.). На цій сторінці даються означення основних геометричних фігур, зображених на рисунках.

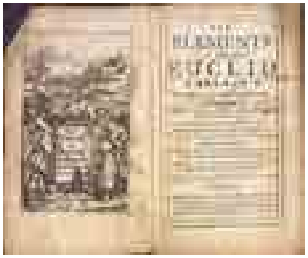


Вгорі: репродукції двох з найвідоміших живописних творів на тему «Сім вільних мистецтв» — Джованні дель Понте (1435 р.) і Ло Шеггія (Джованні ді Сер Джованні) (1460 р.). Як правило, у центрі таких композицій завжди була Астрономія, а поруч із нею — Геометрія зі своїми неодмінними атрибутами — циркулем і кутником.

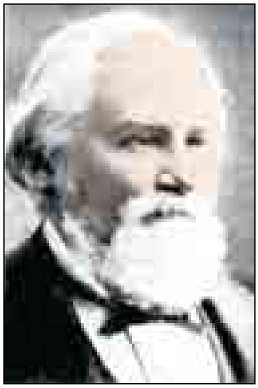
Внизу: фрагменти цих картин за участю Геометрії. І в першому, і в другому випадках геометрію супроводжує або сидить біля її ніг герой цього історичного нарису — Піфагор.



Видання «Начал» Евкліда італійською (1545 р.) і французькою (1573 р.) мовами.



Видання «Начал» Евкліда англійською мовою 1661 і 1726 рр.



М.Є. Ващенко-Захарченко

Титульна сторінка з перекладу Евклідових «Начал» М.Є. Ващенка-Захарченка

скорочувалися, інколи доповнювалися коментарями та додатками, не включеними Евклідом або розробленими уже після нього. Однією з найкращих таких переробок Евклідових «Начал» свого часу були «Начала усіх математичних наук» німецького математика та філософа Кристіана Вольфа (1679 –1754). Ця книга вийшла у 1710 р. Для нас вона цікава тим, що послужила за основу для курсу математики Феофана Прокоповича (1681–1736), який читався у Києво-Могилянської академії.

У 2-й половині XIX ст. в Україні було здійснено ґрунтовне видання «Начал» Евкліда з численними додатками й коментарями Михайла Єгоровича Ващенка-Захарченка (1825 –1912), професора Київського університету св. Володимира. Книга була видрукувана видавництвом університету у 1880 р. і мала значний вплив на вітчизняну науку й освіту. Вона й досі залишається одним із кращих досліджень та коментарів Евклідових «Начал», спрямованим на потреби практичного викладання та вивчення геометрії.

§9. Аксіома про паралельні прямі. Властивості паралельних прямих

Уроки 12–13

Як з'ясувалося у попередньому параграфі, існують різні способи для побудови паралельних прямих. У зв'язку з цим виникає природне запитання: а чи не залежить результат побудови від вибраного способу?

Припустимо, що через задану точку B ви проводите пряму b, паралельну прямій a. Нехай перший раз ви провели пряму b' так, щоб вона утворювала рівні гострі внутрішні різносторонні кути з деякою січною c (рис. 2.66, а), а другий раз — пряму b'', яка утворює прямі кути з прямою c, перпендикулярною до прямої a (рис. 2.66, б). Чи збігатимуться проведені паралельні прямі b' і b''?

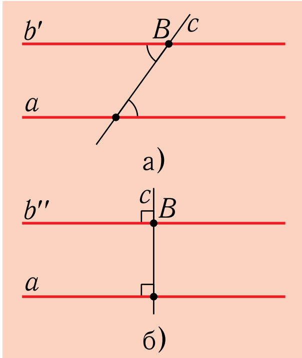


Рис. 2.66

Можливо, ви скажете, що тут і доводити нічого, мовляв, і так очевидно, що збігатимуться. — Тоді зауважте, що і єдиність перпендикулярної прямої b, проведеної через точку B до прямої a (рис. 2.67, а), може здаватися «очевидною», допоки не зауважити, що на сфері може існувати не одна така пряма (рис. 2.67, б). Тому потрібне було доведення, яке незаперечно виключає таку можливість на площині.

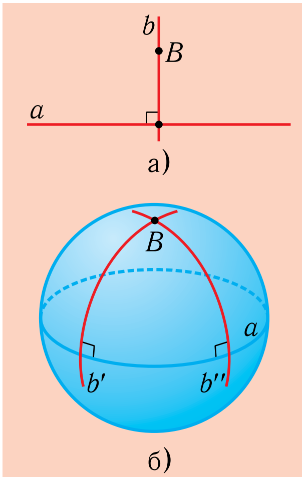
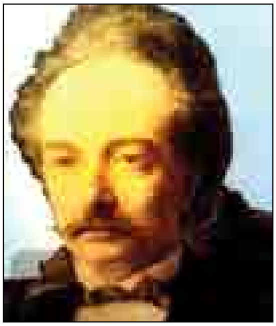


Рис. 2.67

Скористатися сферою для аналогічного прикладу з паралельними прямими ми не можемо, оскільки на сфері взагалі відсутні паралельні прямі. Однак існує поверхня, яка дає змогу це зробити. Вона називається псевдосферою (тобто, несправжньою сферою), а за формою нагадує розтруб духових інструментів (рис. 2.68). Її відкрив у 2-й половині XIX ст. італійський математик Евженіо Бельтрамі (1835–1900). На псевдосфері через задану точку B можна провести скільки завгодно ліній, що відіграють роль прямих, які не перетинають даної лінії a (рис. 2.69). Цим була поставлена крапка у давній історії з доведенням теореми про єдиність паралельної прямої.



Е. Бельтрамі

Рис. 2.68

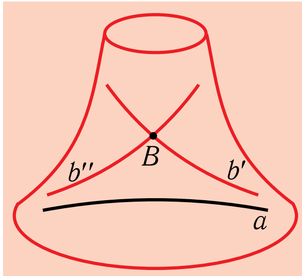


Рис. 2.69

Ще античні математики, за аналогією з теоремою про єдиність перпендикулярної прямої, намагалися довести й теорему про єдиність паралельної прямої. Однак попри усі зусилля їм цього зробити не вдавалося. І тому у III ст. до н. е. Евклід у своєму підручнику з геометрії включив її до переліку аксіом.

Проте сумніви залишалися, і ще понад дві тисячі років ця проблема продовжувала непокоїти вчених. У першій половині XIX ст. троє видатних учених — німецький математик Карл Фрідріх Ґаусс (1777–1855), угорський математик Янош Больяї (1802–1860) і російський математик Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) незалежно один від одного

К.Ф. Ґаусс

Я. Больяї

М.І. Лобачевський

і різними способами довели, що припущення «від супротивного» не веде до логічної суперечності, а тому можлива така геометрія, в якій аксіома про єдиність паралельної не виконується. Однак лише Бельтрамі вказав поверхню, на якій здійснюється така геометрія. Це вже незаперечно доводило, що довести єдиність паралельної прямої як теорему неможливо: Евклід був правий, зарахувавши її до аксіом.

Отже, у геометрії на площині приймається така аксіома.

Аксіома про паралельні прямі.

Через точку поза прямою можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

На рис. 2.70 пряма b — єдина, що проходить через точку B і паралельна прямій a.

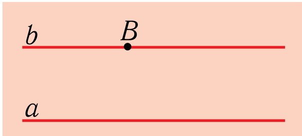


Рис. 2.70

Розглянемо два важливі безпосередні наслідки з аксіоми про паралельні прямі.

Перший з них часто використовують як ще одну ознаку паралельності. Його називають також теоремою про перехід (або транзитивність) паралельності (латинське transitus — дослівно «перехід»). У цій теоремі йдеться про своєрідний «перехід» властивості паралельності з двох пар прямих на третю пару.

Теорема

(про перехід паралельності).

Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Доведення. Нехай у площині маємо три прямі a, b, c і при цьому $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (рис. 2.71). Потрібно довести, що тоді $a \parallel b$.

Рис. 2.71

Припустимо, що прямі a і b не паралельні, тобто перетинаються в деякій точці C. Тоді через точку C проходитиме дві прямі a і b, кожна з яких паралельна прямій c. А це суперечитиме аксіомі про паралельні прямі. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, $a \parallel b$, що й треба було довести.

Друга властивість паралельності пов'язана з кутами, які утворюються при перетині паралельних прямих січною.

Ви вже знаєте, що, за ознакою паралельності, коли дві прямі a і b утворюють рівні внутрішні різносторонні кути з деякою січною c, то вони паралельні (рис. 2.72). У зв'язку з цим виникає питання: а якщо для цих паралельних прямих a і b провести іншу січну m, то чи будуть утворені при цьому внутрішні різносторонні кути теж рівними між собою?

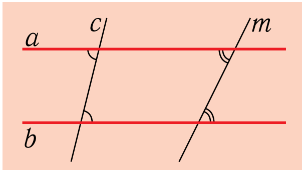


Рис. 2.72

Аналогічні запитання можна поставити й стосовно відповідних та внутрішніх односторонніх кутів.

На всі ці запитання відповідь ствердна, але, на відміну від ознак паралельності, доведення цих властивостей неможливо провести без посилання на аксіому про паралельні прямі.

Теорема

(про кути, утворені паралельними прямими із січною).

Внутрішні різносторонні та відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Доведення. Нехай прямі a і b — паралельні, m — довільна січна, M — точка перетину січної m з прямою a (рис. 2.73). Доведемо спочатку, що рівними є внутрішні різносторонні кути 1 і 2.

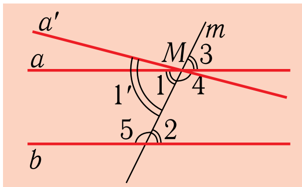


Рис. 2.73

Припустимо, що ці кути не рівні. Проведемо тоді через точку M пряму a' так, щоб кут $1'$, який разом з кутом 2 утворюватиме пару внутрішніх різносторонніх кутів, дорівнював куту 2. Тоді, за ознакою паралельності, прямі a, a' будуть паралельними. Виходить, що через точку M проходитиме дві прямі

a і a', паралельні прямій b. Прийшли до суперечності з аксіомою про паралельні прямі. Отже, зроблене припущення неправомірне. Тому внутрішні різносторонні кути 1 і 2 рівні між собою. Перше твердження теореми доведено.

Доведемо, далі, що рівними є, наприклад, відповідні кути 2 і 3. Оскільки $\angle 3 = \angle 1$ (ці кути вертикальні), а за щойно доведеним, $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 2$, що й треба було довести.

Розглянемо, нарешті, внутрішні односторонні кути, наприклад, 4 і 2. Оскільки кути 1 і 4 — суміжні, то їхня сума $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Як уже доведено, $\angle 1 = \angle 2$. Отже, сума $\angle 4 + \angle 2$ теж дорівнює 180°. Теорему доведено повністю.

Наслідок 1.

Якщо одна з паралельних прямих перпендикулярна до січної, то й інша пряма теж перпендикулярна до цієї січної.

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні, а січна c перпендикулярна до прямої a (рис. 2.74). Тоді $\angle 1 = 90°$. При перетині паралельних прямих січною утворені внутрішні різносторонні кути рівні. Тому $\angle 2 = \angle 1 = 90°$. Отже, $c \perp b$, що й треба було довести.

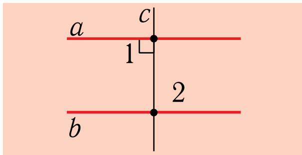


Рис. 2.74

Наслідок 2.

Якщо одна з прямих перпендикулярна до січної, а інша — не перпендикулярна до неї (похила), то ці прямі перетинаються.

Справді, нехай пряма a перпендикулярна до січної c, а пряма b не перпендикулярна до неї (рис. 2.75). Якби прямі a і b не перетиналися, тобто були паралельними, то, за наслідком 1, пряма b теж була б перпендикулярною до m. Оскільки це не так, то прямі a і b перетинаються, що й треба було довести.

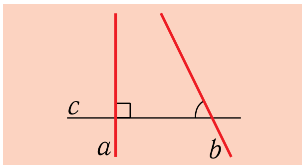


Рис. 2.75

Прямі та обернені теореми

Теорема про кути, утворені паралельними прямими із січною, дає нам привід поговорити про прямі й обернені теореми.

Як ви вже знаєте, у формулюванні кожної теореми виокремлюються дві частини. У першій частині йдеться про те, що дано, тобто які фігури і відношення між ними розглядаються. У другій частині вказується на те, що потрібно довести, тобто які властивості виводяться з того, що дано. Першу частину теореми називають її умовою, другу — висновком.

Відповідно до цього кожну теорему можна символічно записати у формі: «якщо A, то B» або «з A випливає B», де через A коротко позначена умова теореми, а через B — висновок.

У математиці кожен факт досліджується максимально всебічно. Тому після доведення кожної теореми, яка має форму «з A випливає B», як правило ставиться питання про те, чи справджується висновок B лише за умови A, а чи він може справджуватись й за інших умов. Якщо висновок B справджується лише за умови A, то це означає, що з B випливає A. Аби це показати, потрібно довести обернену теорему, в якій умовою є висновок B, а висновком — умова A початкової (прямої) теореми.

Відповідно до цього, якщо пряма теорема має форму «якщо A, то B» або «з A випливає B», то обернена теорема має форму: «якщо B, то A» або «з B випливає A».

Наприклад, оберненою до ознаки паралельності прямих: «Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні» є властивість паралельних: «Якщо прямі паралельні, то при перетині їх січною внутрішні різносторонні кути рівні».

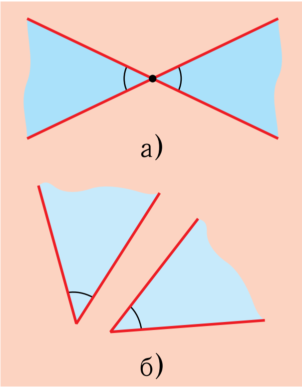


Рис. 2.76

Найчастіше у шкільному курсі геометрії істинними є одночасно і пряма, і обернена теореми. Однак є й винятки. Візьмемо, наприклад, теорему про вертикальні кути: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні» (рис. 2.76, а). Оберненою до неї була б теорема: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні». Звісно, вона хибна, оскільки рівні кути навіть не обов'язково мають спільну вершину (рис. 2.76, б).

Цей приклад показує, що з істинності прямої теореми ще не можна автоматично вивести висновок про істинність оберненої.

Пряма й обернена теорема можуть навіть ґрунтуватися на різному арсеналі фактів. Наприклад, доведені у попередньому параграфі ознаки паралельності прямих не потребували посилання на аксіому про паралельні прямі, тимчасом як доведення обернених до них властивостей паралельних прямих уже неможливе без цієї аксіоми.

Отже, обернена теорема потребує окремого доведення!

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу.

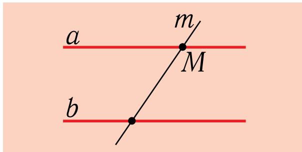
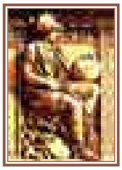


Рис. 2.77

Розв'язання. Нехай прямі a і b — паралельні, а пряма m перетинає пряму a у деякій точці M (рис. 2.77). Якби пряма m не перетинала прямої b, тобто була паралельною їй, то через точку M проходило б дві прямі a і m, які паралельні прямій b, що суперечить аксіомі про паралельні прямі. Отже, пряма m перетинає пряму b, що й треба було довести.



Вправи і задачі

164°. Використовуючи обидві сторони лінійки, проведіть дві паралельні прямі, а потім — деяку січну. За допомогою вимірювання транспортиром переконайтесь, що утворені при цьому відповідні та внутрішні різносторонні кути рівні.

165°. Використовуючи обидві сторони лінійки, проведіть дві паралельні прямі, а потім за допомогою косинця — січну, перпендикулярну до однієї з них. За допомогою транспортира переконайтесь, що проведена січна перпендикулярна й до іншої з паралельних прямих.

166°. На рис. 2.78 прямі a і b паралельні, c — січна. Чи рівні кути:
а) $\angle 1$ і $\angle 5$; б) $\angle 4$ і $\angle 6$; в) $\angle 1$ і $\angle 7$; г) $\angle 2$ і $\angle 8$?

167°. На рис. 2.79 прямі a і b паралельні, c — січна, $\angle 1 = 50°$. Визначте величини кутів 2 – 8.

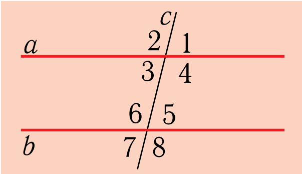


Рис. 2.78

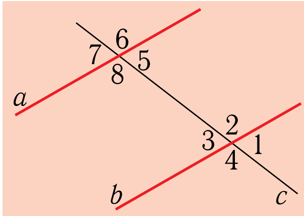


Рис. 2.79

168°. Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 130°. Визначте ці кути.

169°. Сума двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 130°. Визначте ці кути.

170°. Січна перетинає дві паралельні прямі. Чи можуть обидва утворені внутрішні односторонні кути бути гострими? А — тупими? А — негострими й не тупими?

171°. За даними рис. 2.80, а) – б) визначте величини кутів x і y.

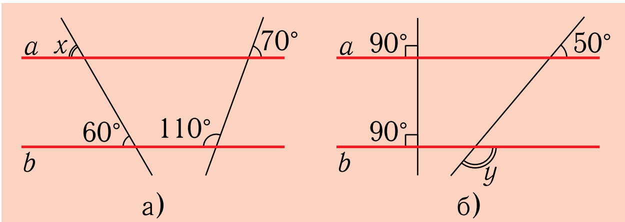


Рис. 2.80

172. На рис. 2.81 $a \perp c$, $b \perp c$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

173. На рис. 2.82 $a \perp c$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $b \perp c$.

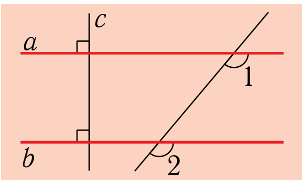


Рис. 2.81

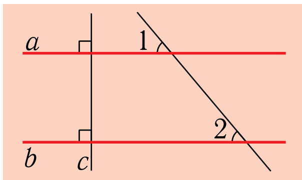


Рис. 2.82

174. На рис. 2.83, а) – б) $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Сформулюйте обернене твердження. Чи істинне воно?

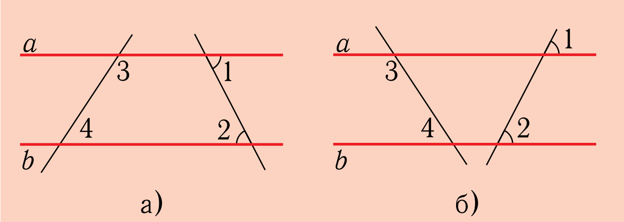


Рис. 2.83

175. За рис. 2.84, а) – б) визначте кути x, y.

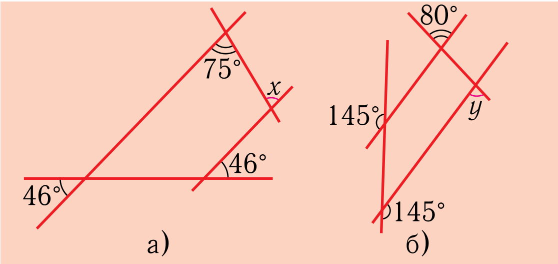


Рис. 2.84

176. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 36° більший за інший. Визначте ці кути.

177. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у п’ять разів менший від іншого. Визначте ці кути.

178. Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться, як 5 : 7. Визначте ці кути.

179. Прямі a і b перпендикулярні до прямої c, а пряма l перетинає пряму a. Чи перетинає пряма l прямі b *і* c?

180. Прямі a і b перетинаються, а прямі a і c — паралельні. Чи можуть бути паралельними прямі b і c?

181. Дано чотири прямі a, b, c, m. Відомо, що $a \parallel b$, $b \parallel c$, а пряма m перетинає пряму a. Доведіть, що пряма m перетинає пряму c.

182. Прямі a і b не паралельні прямій с. Чи можна стверджувати, що прямі a і b не паралельні між собою?

183. Прямі a і b перетинає січна. Чи можна стверджувати, що коли утворені при цьому відповідні кути не рівні, то прямі a і b не паралельні?

184•. На рис. 2.85, а) – б) $AB \parallel DE$. Визначте кут BCD.

185•. Сума трьох нерозгорнутих кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 240°. Визначте усі кути. Розгляньте усі можливі випадки.

186•. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

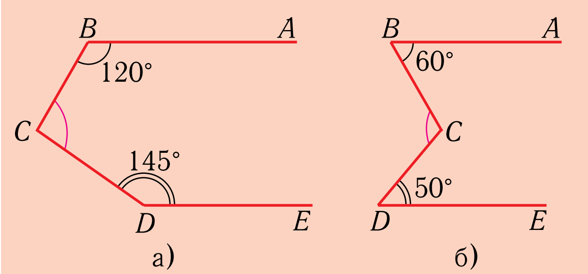
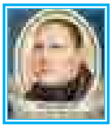


Рис. 2.85

187•. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

188•. Доведіть, що коли бісектриси двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні, то й прямі паралельні.



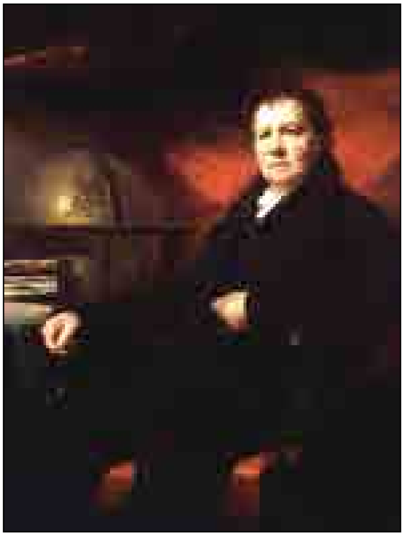
ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§10. Альтернативні форми аксіоми про паралельні прямі

1. V постулат Евкліда

Може здатися неймовірним, що в підручниках з геометрії аксіома про паралельні прямі з'явилася відносно недавно. Вважається, що вперше — у 1795 р. у виданні «Начал» Евкліда для школи, підготовленому шотландським математиком Джоном Плейфером (1748–1819). Правда, у Плейфера вона формулювалася трошки інакше, а саме: «Дві прямі, які перетинають одна одну, не можуть бути паралельними одній і тій самій прямій». Та все одно її часто називають навіть аксіомою Плейфера. А до того упродовж 2000 років замість аксіоми Плейфера подавалася аксіома Евкліда, яка в його «Началах» була одним із постулатів геометрії.

Твердження, які приймаються без доведення, Евклід поділяв на два види. Одні з них називав аксіомами, інші — постулатами. Аксіоми стосувалися кількісних відношень між довільними величинами. Наприклад,




ELEMENTS OF GEOMETRY;

THE FIRST SIX BOOKS OF EUCLID,

WITH A SUPPLEMENT

Джон Плейфер і титульна сторінка 9-го видання його адаптації для школи планіметричної частини «Начал» Евкліда (1836 р.).

до аксіом Евклід відносив такі твердження: «Рівні одному й тому ж, рівні між собою»; «Якщо до рівних додати рівні, то дістанемо рівні», «Ціле більше за свою частину» тощо. На противагу цьому, до постулатів відносилися твердження стосовно геометричних фігур. У дослівному перекладі з грецької мови слово «постулат» означає «вимога»; латинською — «петиція». Отже, постулати вимагалося прийняти без доведення.

Евклід сформулював п'ять постулатів-вимог. Першими чотирма були такі:

I. Будь-які дві точки можна сполучити відрізком;

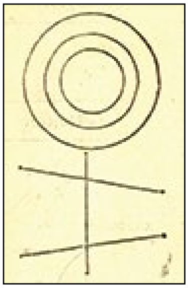
II. Будь-який відрізок можна як завгодно продовжити за кожен з його кінців;

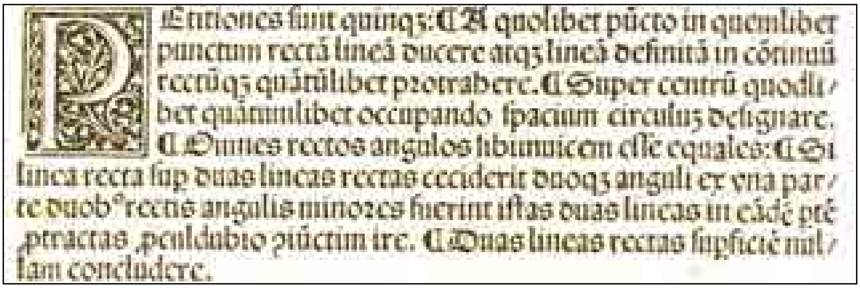
III. Навколо будь-якого центра і будь-яким радіусом можна описати коло;

IV. Будь-які прямі кути можна сумістити.

Виняткову роль в історії геометрії відіграв п'ятий постулат:

V. Якщо при перетині двох прямих січною утворюються внутрішні односторонні кути, які в сумі не дорівнюють двом прямим кутам, то прямі перетинаються.




Petitiones sunt quinque: A quolibet pũcto in quemlibet punctum rectã lineã ducere atq3 lineã definitã in cõtinuũ rectũq3 quãtũlibet protrahere. Super centrũ quodlibet quãtumlibet occupando spaciũ circulũ designare. Omnes rectos angulos sibiinvicem esse equales. Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoq3 anguli ex una parte duob9 rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eãdẽ ptẽ ptractas pculdubio cõiũctim ire. Duas lineas rectas supficiẽ nullam concludere.

Фрагмент 2-ї сторінки 1-го друкованого видання «Начал» Евкліда (Венеція, 1482 р.) з формулюванням усіх постулатів і рисунками до III і V з них.

Неважко довести, що коли прийняти V постулат Евкліда, то з нього можна вивести аксіому Плейфера про паралельні прямі (при цьому буде правомірним посилатися на ознаку паралельності, оскільки та була доведена без аксіоми про паралельні прямі).

Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею (рис. 2.86). Проведемо через точку A довільну січну c, а потім — пряму b так, щоб сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 дорівнювала 180°. Тоді, за ознакою паралельності, $b \parallel a$. Якщо ж через A провести довільну іншу пряму b', то сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2′ уже не буде дорівнювати 180°, а тому, за V постулатом Евкліда, пряма b' перетне пряму a. Отже, пряма b буде єдиною, яка проходить через точку A і паралельна прямій a, тобто справджуватиметься аксіома Плейфера про паралельні прямі.

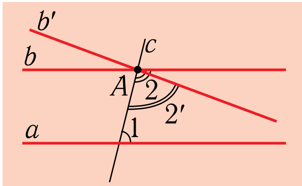


Рис. 2.86

Навпаки, з аксіоми Плейфера про паралельні прямі можна вивести твердження V постулату Евкліда.

Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею, а пряма b' проходить через точку A і при цьому сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2′ не дорівнює 180° (див. рис. 2.86). Проведемо через точку A таку пряму b, для якої сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 дорівнює 180°. Тоді, відповідно до ознаки паралельності, прямі a і b — паралельні. Але, за аксіомою Плейфера, пряма b — єдина, яка проходить через точку A і не перетинає прямої a. Тому пряма b' неодмінно перетне пряму a. Отже, й виходить, що коли сума внутрішніх односторонніх кутів (1 і 2′) не дорівнює двом прямим кутам, то прямі (a і b') перетинаються, тобто справджується V постулат Евкліда.

Якщо два твердження мають таку властивість, що з першого випливає друге, а з другого — перше, то такі твердження називаються рівносильними або еквівалентними.

Оскільки із V постулату Евкліда випливає аксіома Плейфера, а з аксіоми Плейфера — V постулат Евкліда, то ці твердження — рівносильні.

2. Аксіома Остроградського

Серед діячів, чиї імена назавжди закарбовані в історії математичної освіти, на чільному місці, маємо згадати й нашого славетного математика Михайла Васильовича Остроградськогор (1801–1862).

Михайло Остроградський народився на Полтавщині у давній козацькій родині. За легендою, рід Остроградських був одним з відгалужень родоводу знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких, звідки й прізвище — Остроградські.

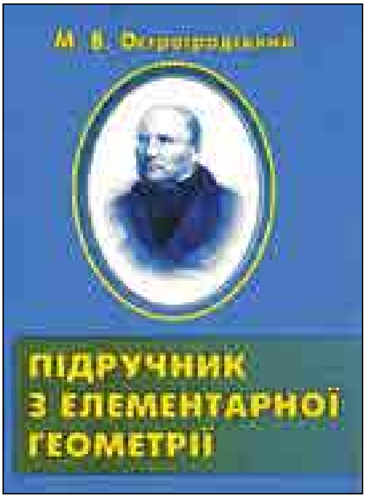
У 1821 р. Михайло Остроградський закінчив Харківський університет, а після цього впродовж 5 років навчався у Парижі, де слухав лекції видатних тогочасних французьких учених — Лапласа, Пуассона, Коші, Ампера, Фур'є. Повернувшись із-за кордону, Остроградський упродовж усього життя активно пропагував і втілював традиції французьких учених поєднувати наукову роботу з викладацькою. Він викладав математику в елітних тогочасних військових навчальних закладах і саме для їхніх слухачів написав унікальний «Підручник з елементарної геометрії». Цей підручник був виданий трьома окремими випусками у 1855–1860 рр. і на десятиліття установив такий високий рівень викладання математики, який ще й досі вирізняє вітчизняну математичну освіту.

У своєму підручнику Остроградський замість аксіоми Плейфера про паралельні прямі уводить положення, яке, як він уважав, досконаліше характеризує геомет-

Михайло Остроградський. Маловідомий портрет невідомого художника. Ймовірно написаний у той період, коли учений починав працювати над своїм «Підручником з елементарної геометрії».


НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Титульна сторінка оригінального видання 2-ї частини «Підручника з елементарної геометрії» М.В. Остроградського



Обкладинка українського перекладу, виданого тернопільським видавництвом «Підручники і посібники» до 200-ліття з дня народження М.В. Остроградського у 2001 р.

ричні особливості реального простору. Однією з ключових просторових характеристик, які активно використовуються у найрізноманітніших застосуваннях, є напрямок. При цьому напрямок визначається прямою, а будь-яка інша паралельна їй пряма визначає той самий напрямок. Цей факт Остроградський і фіксує у своїй аксіомі про паралельні.

Аксіома Остроградського про паралельні прямі. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

У попередньому параграфі ця властивість виведена з аксіоми Плейфера про паралельні прямі. Неважко показати, що й, навпаки, з аксіоми Остроградського випливає аксіома Плейфера. Отже, ці аксіоми еквівалентні.

Справді, нехай маємо точку A, розміщену поза прямою b (рис. 2.87). На підставі ознаки паралельності, через точку A легко провести пряму a, паралельну прямій b. Тому доведення потребує лише єдиність цієї

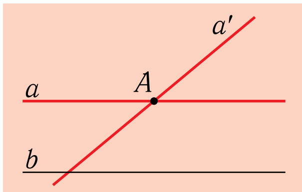
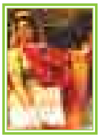


Рис. 2.87

прямої a. Припустимо, що існує ще інша пряма a', яка теж проходить через точку A і паралельна прямій b. Тоді, оскільки обидві прямі a і a' паралельні прямій b, то, за аксіомою Остроградського, вони паралельні між собою. Але ж ці прямі мають спільну точку A. Дістали суперечність. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, пряма a — єдина, яка проходить через точку A і паралельна прямій l, що й треба було довести.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як з’явилася неевклідова геометрія

Одразу після свого створення «Начала» геометрії Евкліда набули загального визнання серед учених. Єдиним слабким місцем у них уважався V постулат. Саме його формулювання, яке було значно довшим, ніж в інших постулатів, спонукало до думки, що насправді це — теорема, яку можна довести на підставі решти аксіом і постулатів. Якщо ж знайти це доведення, то можна буде обійтися і без цього дивного постулата. Так розпочалася найтриваліша в історії науки «кампанія», що розтяглася майже на 2,5 тис. років. Її метою було доведення V постулату Евкліда.

Як ми вже мали змогу переконатися, V постулат Евкліда рівносильний аксіомі про паралельні прямі, а також і аксіомі Остроградського. Отже, якщо прийняти будь-яку із цих аксіом, наприклад, вважати її самоочевидною, то V постулат Евкліда можна легко довести. Абсолютна більшість дослідників, які повідомляли про знайдене ними доведення, так і чинили, тільки щоразу непомітно для себе використовували інші «самоочевидні» факти. Тільки при ретельнішому аналізі виявлялося, що кожен із таких фактів еквівалентний V постулату. Тому насправді ніякого доведення не було, а створювалося хибне логічне коло: доведення проводилося на підставі того, що насправді потрібно було довести.

А.М. Лежандр

Наприклад, німецький математик Христофор Клавій (1537–1612), про якого уже згадувалося на сторінках історії у першому розділі, у своєму доведенні V постулату Евкліда використав як «очевидність» те, що три точки *A*, *B*, *C*, які лежать з одного боку від прямої l і рівновіддалені від неї, належать іншій прямій (рис. 2.88).

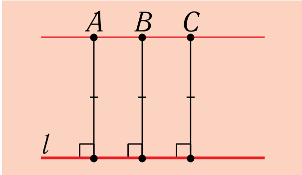


Рис. 2.88

Ще замаскованішою була логічна помилка видатного французького математика Адрієна Марі Лежандра (1752–1833), який в одному зі своїх доведень використовував як «очевидність» те, що через будь-яку точку *P*, узяту всередині гострого кута *A* (рис. 2.89), завжди можна провести пряму, яка перетне обидві його сторони.

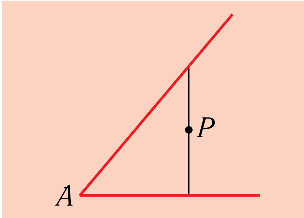


Рис. 2.89

Як перше, так і друге із цих «очевидних» тверджень виявилися еквівалентними V постулату. Тому ні Клавій, ні Лежандр насправді доведення V постулату Евкліда не дали.

Узявши до уваги численні невдалі спроби, а також і свої власні невдачі на цьому шляху, російський геометр Микола Лобачевський (1792–1856) в середині 20 рр. XIX ст. дійшов висновку, що Евклід таки був правий, включивши V постулат до фундаменту геометрії, тобто, що насправді це твердження довести неможливо.

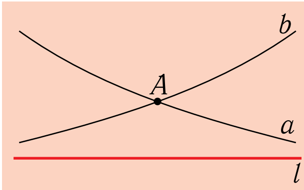


Рис. 2.90

Але як підтвердити цю здогадку? — Спосіб був тільки один: узяти замість V постулату або якого-небудь рівносильного йому твердження, наприклад, замість аксіоми про паралельні прямі, протилежне твердження і спробувати збудувати на цій підставі нову логічно несуперечливу геометрію. Це й було зроблено. Однією з аксіом нової геометрії стала така аксіома.

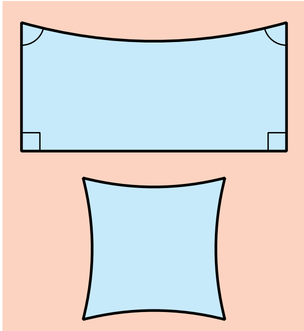


Рис. 2.91

Аксіома Лобачевського.

***Через точку** A **поза прямою** l **у площині можна провести принаймні дві прямі** a **і** b**, які не перетинають прямої** l* (рис. 2.90).

Прийняття такого «дивного» положення на той час було справжнім науковим і громадянським подвигом, бо навіть визначні математики не сприйняли його.

Абсолютна більшість фактів з нової геометрії разюче контрастувала з фактами звичайної геометрії. Зокрема, у новій геометрії немає ні прямокутників, ні квадратів, а можливі тільки гострокутні аналоги (рис. 2.91)

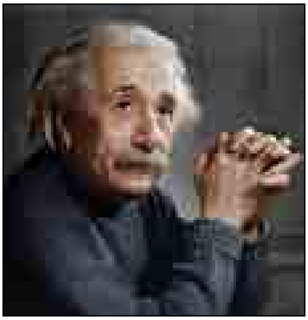
Сам Лобачевський відкриту ним нову геометрію називав уявною, хоча й твердо вірив, що рано чи пізно вона теж матиме практичні застосування. Так воно й сталося. У §9 вже згадувалося, що у 2-й половині XIX ст. італійський математик Евженіо Бельтрамі (1835 –1900) відкрив поверхню — псевдосферу (див. рис. 2.68), на якій виконується геометрія Лобачевського, так само як звичайна геометрія виконується на площині. А на початку XX ст. німецький фізик і математик Герман Мінковський (1864 –1909) обґрунтував, що геометрією Лобачевського описуються рухи у так званій спеціальній теорії відносності Ейнштейна.

Англійський математик Джеймс Сильвестр (1814–1897) назвав Лобачевського «Коперником геометрії», наголошуючи цим на тому, що відкриття Лобачевського мало такий самий революційний вплив на науку, як у свій час відкриття Коперником руху Землі і планет навколо Сонця. Саме завдяки цьому в науці утвердилась ідея про те, що на ґрунтовне вивчення заслуговує кожна теорія, яка засновується на логічно несуперечливій системі аксіом. Практичні ж науки можуть вибирати для своїх цілей ті теорії, які найбільш повно описують явища й процеси, що в них вивчаються.

Геометрія Лобачевського стала першою геометрією, відмінною від класичної евклідової геометрії, основи якої були закладені Евклідом ще в античну епоху. Тому цю нову геометрію назвали неевклідовою геометрією. Тепер неевклідових геометрій існує багато. Кожна з них базується на своїй системі аксіом.

М.І. Лобачевський

Г. Мінковський



А. Ейнштейн

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі II

Аксіоми, теореми, ознаки

Аксіома (дослівно з грецької «повага», «авторитет», «незаперечна істина») — математичне твердження, істинність якого приймається без доведення.

Аксіома про паралельні прямі. *Через точку поза прямою можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.*

Теорема (від грецького слова «теорео» — «уважно розглядаю», «придивляюся», а також «демонстрація», «вистава») — математичне твердження, істинність якого встановлюється шляхом логічного міркування (доведення).

Будь-яку теорему символічно можна записати у формі: «*Якщо виконується A, то виконується B*», або, що те саме: «*З A випливає B*». Тут A — ***умова*** теореми (те, що дано), B — ***висновок*** теореми (те, що потрібно довести).

Якщо поміняти місцями умову й висновок теореми, то дістанемо ***обернену*** теорему. Тоді початкова теорема називається прямою.

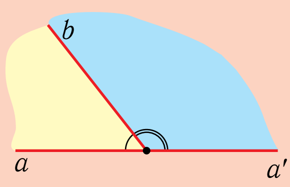
Отже, якщо пряма теорема: «*З A випливає B*», то обернена — «*З B випливає A*».

Істинність оберненої теореми автоматично не випливає з істинності прямої, а потребує окремого доведення. Обернена теорема може бути й хибною.

Ознака — теорема, *умова* якої є достатньою для висновку про певні фундаментальні геометричні властивості, наприклад, паралельність, перпендикулярність, рівність фігур тощо.

Доведення методом «від супротивного» полягає у припущенні про істинність за даної умови іншого висновку — супротивного тому, який потрібно довести, і логічного виведення звідси протиріччя з умовою або з аксіомою чи раніше доведеною теоремою.

Суміжні і вертикальні кути



Означення. Два кути називаються ***суміжними***, якщо вони мають одну спільну сторону, а дві інші їхні сторони є доповняльними променями.

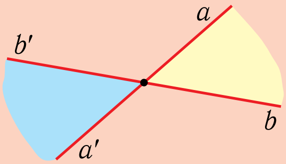
Теорема (про суму суміжних кутів). ***Сума суміжних кутів дорівнює 180°.***

Доведення. Різні сторони a і a' суміжних кутів утворюють розгорнутий кут $\angle aa'$, а спільна сторона b проходить між сторонами цього кута. Тому, за аксіомою при вимірюванні кутів, $\angle ab + \angle ba' = \angle aa' = 180°$.

Наслідок 1. Кут, суміжний з прямим кутом, — прямий.

Наслідок 2. Кут, суміжний з гострим кутом, — тупий, а кут, суміжний з тупим кутом, — гострий.

Означення. Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного з них є доповняльними променями до сторін іншого.



Теорема (про вертикальні кути). ***Вертикальні кути рівні між собою***.

Доведення. Кожен з вертикальних кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ є суміжним з кутом $\angle ab'$. Тому

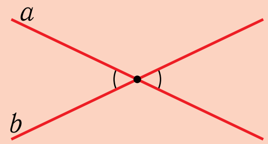
$$\angle ab + \angle ab' = 180°; \quad \angle a'b' + \angle ab' = 180°.$$

Звідси

$$\angle ab = 180° - \angle ab'; \quad \angle a'b' = 180° - \angle ab'.$$

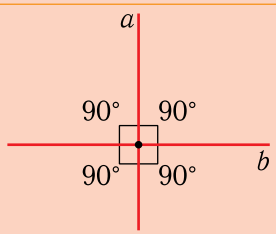
Отже, $\angle ab = \angle a'b'$.

Кут між прямими. Перпендикулярні прямі



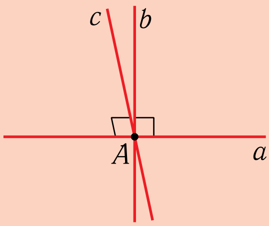
Означення. ***Кутом між прямими***, що перетинаються, називається величина гострого або прямого кута, утвореного при перетині цих прямих.

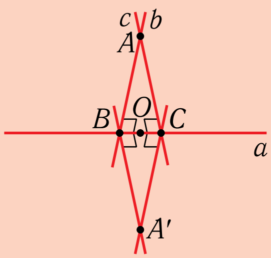
Кут між прямими a і b позначається так: $\angle ab$. Величина кута між прямими знаходиться в межах від 0° до 90°.



Означення. Якщо кут між прямими дорівнює 90°, то такі прямі називаються ***перпендикулярними*** (або ***взаємно перпендикулярними***).

Перпендикулярність прямих позначають за допомогою знака $\perp$. Наприклад: $a \perp b$.

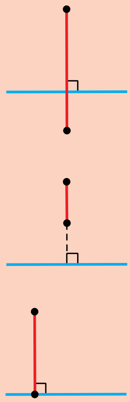




Теорема (про єдиність перпендикулярної прямої). ***Через будь-яку точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої***.

Доведення. Якби через точку A прямої a проходило дві прямі $b \perp a$ і $c \perp a$, то два рівних прямих кути $\angle ab$ і $\angle ac$ були б відкладені в одну півплощину від однієї півпрямої Oa, що суперечить аксіомі про відкладання кутів.

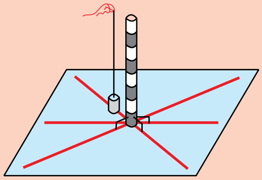
Якби через точку A поза прямою a проходило дві прямі $b \perp a$ і $c \perp a$, то, повернувши ту півплощину з граничною прямою a, яка містить точку A відносно середини O відрізка BC до суміщення з протилежною півплощиною, ми дістали б, що ті самі прямі b і c мають іншу точку перетину A', що суперечить аксіомі про проведення прямої.



Означення. Відрізки або промені називаються ***перпендикулярними*** до прямої, якщо прямі, на яких вони лежать, перпендикулярні до цієї прямої.

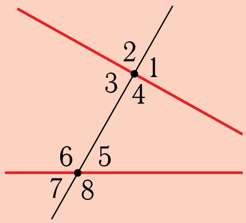
Означення. Відрізок, який перпендикулярний до прямої і один з його кінців належить прямій, називається ***перпендикуляром*** до цієї прямої. Спільна точка прямої і перпендикуляра до неї називається основою перпендикуляра.

Означення. ***Відстанню від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму.



Терміни «перпендикулярний», «перпендикуляр», утворені від латинського слова perpendicularis, що означає «прямовисний». Прямовисна лінія утворює прямі кути з будь-якою горизонтальною прямою.

Ознаки паралельних прямих



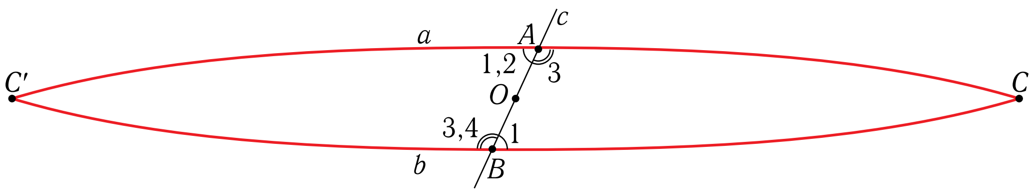
Назви кутів, утворених при перетині двох прямих третьою прямою (*січною*):

$\angle 3$ і $\angle 5$, а також $\angle 4$ і $\angle 6$ називаються ***внутрішніми різносторонніми***;

$\angle 3$ і $\angle 6$, а також $\angle 4$ і $\angle 5$ називаються ***внутрішніми односторонніми***;

$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$ називаються ***відповідними***.

Теорема (*ознака паралельності прямих*). ***Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.***

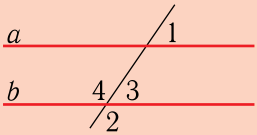


Доведення. Якщо припустити, що за умови $\angle 1 = \angle 2$ прямі a і b перетинаються у деякій точці C, а потім повернути ту півплощину з граничною прямою c, яка містить цю точку, відносно середини O відрізка AB до суміщення з протилежною півплощиною, то дістанемо, що прямі a, b мають ще одну спільну точку C'. Це протиріччя й доводить теорему.

Наслідок 1. ***Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.***

Доведення. Якщо $a \perp c$ і $b \perp c$, то внутрішні різносторонні кути 1 і 2 — прямі. Отже, вони рівні, а тому $a \parallel b$.

Наслідок 2. ***Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.***



Доведення. Нехай $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 1 = \angle 3$, оскільки ці кути вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$, а тому прямі a і b паралельні.

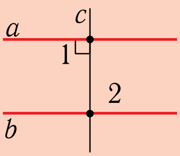
Наслідок 3. ***Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

Доведення. Нехай $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Сума суміжних кутів $\angle 1 + \angle 3$ теж дорівнює 180°. Звідси $\angle 2 = \angle 3$, тому прямі a і b паралельні.

Властивості паралельних прямих

Теорема (*про перехід паралельності*). ***Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

Доведення. Якби прямі a і b, що паралельні прямій c, перетиналися, то через точку перетину C проходило б дві прямі, паралельні прямій c. Дістали суперечність з аксіомою про паралельні прямі.

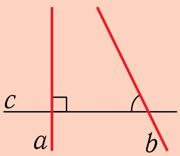


Теорема (*про кути, утворені паралельними прямими із січною*). ***Внутрішні різносторонні та відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.***

Доведення. Якби внутрішні різносторонні кути 1 і 2 були не рівними, то, провівши пряму a' так, щоб рівність виконувалася, ми мали б дві прямі a і a', що проходять через точку M і паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі про паралельні прямі. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

Оскільки $\angle 1 = \angle 3$ (ці кути вертикальні), то, з попереднього, $\angle 3 = \angle 3$.

Оскільки $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (ці кути суміжні), то, з попереднього, $\angle 2 + \angle 4 = 180°$.



Наслідок 1. ***Якщо одна з паралельних прямих перпендикулярна до січної, то й інша пряма теж перпендикулярна до цієї січної.***

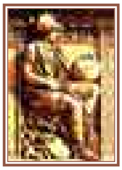
Доведення. Нехай $\angle 1 = 90°$. Унаслідок паралельності прямих a і b $\angle 2 = \angle 1$. Отже, $\angle 2 = 90°$, тобто $c \perp b$.

Наслідок 2. ***Якщо одна з прямих перпендикулярна до січної, а інша — не перпендикулярна до неї (похила), то ці прямі перетинаються.***

Доведення. Якби прямі a і b були паралельними, то, за наслідком 1, пряма b теж була б перпендикулярною до c.

Перевір себе

1. Що таке аксіома і що таке теорема? Яке походження цих термінів?
2. Перелічіть усі відомі вам геометричні аксіоми.
3. Які кути називаються суміжними? Доведіть, що сума суміжних кутів дорівнює 180°.
4. Доведіть, що коли суміжні кути рівні, то вони прямі.
5. Які кути називаються вертикальними? Яке походження цього терміна? Доведіть, що вертикальні кути рівні.
6. Що таке кут між двома прямими? Яких значень може набувати цей кут?
7. Які прямі називаються перпендикулярними? Яке походження цього терміна?
8. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність перпендикулярної прямої.
9. Що таке перпендикуляр до прямої і що таке відстань від точки до прямої?
10. Назвіть усі пари кутів, що утворюються при перетині двох прямих січною. Чи є серед них пари рівних кутів?
11. Що таке паралельні прямі? Сформулюйте ознаки паралельності прямих. Як вони доводяться?
12. У чому полягає метод доведення «від супротивного»? Наведіть відомі вам приклади його застосування.
13. Опишіть усі відомі вам способи побудови паралельних прямих за допомогою креслярських інструментів. На яких геометричних властивостях вони ґрунтуються?
14. Як формулюється аксіома про паралельні прямі?
15. Сформулюйте і доведіть теорему про перехід (транзитивність) паралельності.
16. Які залежності існують між відповідними, внутрішніми різносторонніми та внутрішніми односторонніми кутами, що утворюються при перетині паралельних прямих січною?
17. Дві прямі паралельні, а третя (січна) перпендикулярна до однієї з них. Чи можна стверджувати, що січна перпендикулярна й до іншої прямої?
18. Дві прямі a і b перетинають третю. Одна — під прямим кутом, інша — під гострим. Як довести, що прямі a і b перетинаються?
19. Що таке обернена теорема? Наведіть відомі вам приклади взаємно обернених теорем, які одночасно є істинними.



Завдання для повторення та проведення контрольної роботи до розділу II

1°. а) На якому з рис. 2.92, а – г) зображено суміжні кути?

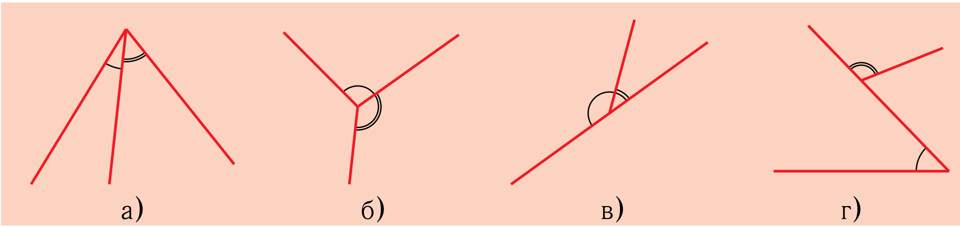


Рис. 2.92

б) На якому з рис. 2.93, а – г) зображено суміжні кути?

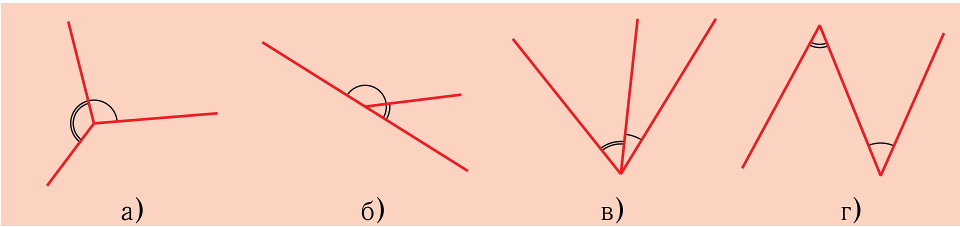


Рис. 2.93

2°. а) Накресліть два суміжні кути, один з яких має градусну міру 125°. Визначте за допомогою вимірювання та обчислення величину іншого кута.
б) Накресліть два суміжні кути, один з яких має градусну міру 95°. Визначте за допомогою вимірювання та обчислення величину іншого кута.

3°. а) Накресліть два вертикальні кути, сума градусних мір яких дорівнює 80°.
б) Накресліть два вертикальні кути, рівні зі своїми суміжними.

4°. а) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 135°. Визначте решту кутів і кут між прямими.
б) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 150°. Визначте решту кутів і кут між прямими.

5. а) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, на 30° менший від іншого. Визначте усі кути і кут між прямими.

б) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, на 70° більший за інший. Визначте усі кути і кут між прямими.

6. а) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, в чотири рази менший від іншого. Визначте ці кути і кут між прямими.
б) Величин двох кутів, утворених при перетині двох прямих, відносяться, як 2 : 7. Визначте ці кути і кут між прямими.

7•. а) Визначте кути, утворені при перетині двох прямих, якщо один із них на 30° більший за різницю двох інших. Чому дорівнює кут між прямими?
б) Визначте кути, утворені при перетині двох прямих, якщо один з них утричі більший за різницю двох інших. Чому дорівнює кут між прямими?

8°. а) Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 148°. Визначте ці кути.
б) Сума двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Визначте ці кути.

9. а) Якими мають бути кути x, y на рис. 2.94, а) – б), аби прямі m, n були паралельними?
б) Якими мають бути кути x, y на рис. 2.95, а) – б), аби прямі m, n були паралельними?

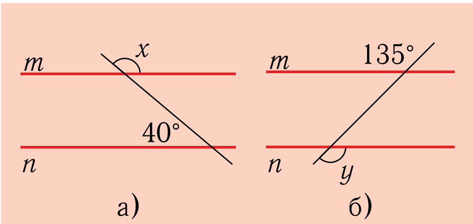


Рис. 2.94

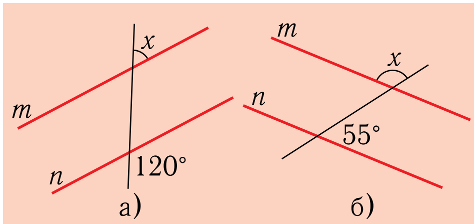


Рис. 2.95

10. а) Прямі a і b паралельні, $\angle 2$ у п’ять разів більший за $\angle 1$ (рис. 2.96). Визначте $\angle 3$ і $\angle 4$.
б) Прямі a і b паралельні, $\angle 1$ на 70° менший від $\angle 2$ (рис. 2.97). Визначте $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

11. а) Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться, як 2 : 3. Визначте ці кути.

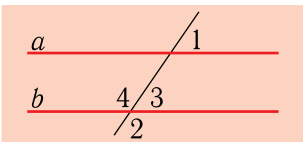


Рис. 2.96

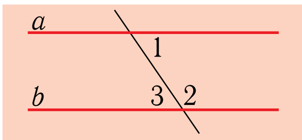


Рис. 2.97

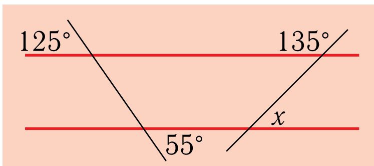


Рис. 2.98

б) Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 72° більший за інший. Визначте ці кути.

12•. а) За рис. 2.98 визначте кут x.
б) За рис. 2.99 визначте кут x.

13•. а) На рис. 2.100 $PQ \parallel EF$. Визначте кут QME.
б) На рис. 2.101 $PQ \parallel EF$. Визначте кут MEF.

14•. а) Нехай прямі a і b перетинаються. Доведіть, що яка б не була пряма c, вона буде не паралельною принаймні одній з прямих a і b.
б) Прямі a і b паралельні, а прямі a і m — перетинаються. Пряма c паралельна прямій a. Доведіть, що пряма c перетинає пряму m і паралельна прямій b.

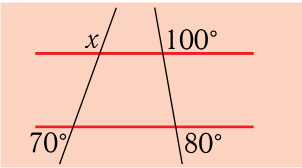


Рис. 2.99

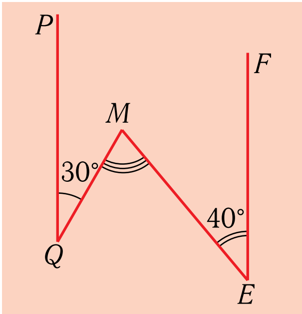


Рис. 2.100

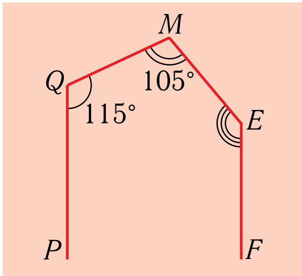


Рис. 2.101

Василь Кандинський. Піки на вигині (Spitzen im Bogen) (1927 р.).
Вірогідно, що у такий спосіб художник втілив близьку йому ідею космічності людського шляху, який проходить довкола Землі під вітрилами-піками, що наповнюються Сонцем.

Трикутник був одним з основних виражальних засобів у творах В. Кандинського. Цим художник немовби переносив виняткову роль цієї фігури з геометрії на абстрактний живопис.

Розділ III Трикутники. Ознаки рівності трикутників

Вступ

Урок 14

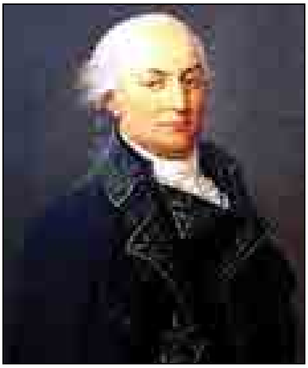
У 1806 р. в Парижі вийшов з друку перший том тритомного звіту французьких астрономів та геодезистів П’єра Франсуа Андре Мешена (1744–1804) і Жана-Батіста Жозефа Деламбра (1749–1822) про підсумки діяльності очолюваної ними багаторічної експедиції з визначення довжини земного меридіана. На основі проведених вимірювань була встановлена довжина еталона метра — як однієї сорокамільйонної частинки меридіана (детальніше про це вже йшлося на сторінках історії у першому розділі). У передмові до свого звіту автори писали: «З усіх чудових надбань, які залишаться від французької революції, це — те, за що ми заплатили найменшу ціну».

П’єр Мешен

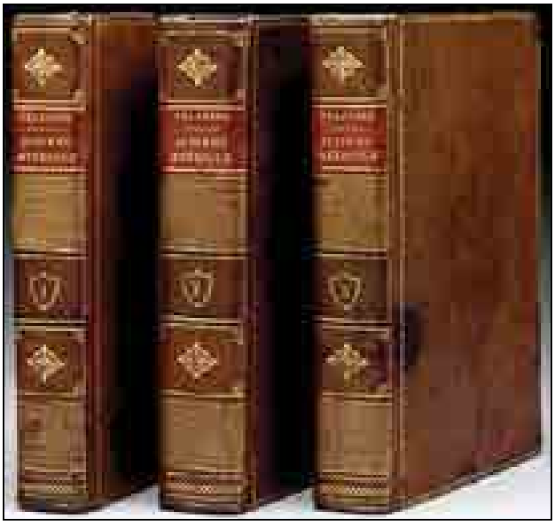
Як свідчить заголовок згаданого звіту, експедиція провела точні вимірювання довжини земного меридіана від містечка Дюнкерк, що на півночі Франції, до іспанської Барселони, загалом — близько 1300 км.

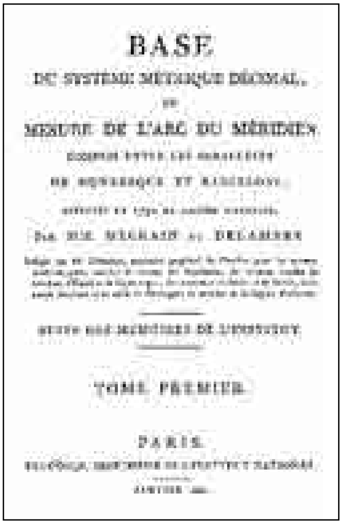
Як же це можна було здійснити, коли меридіан — то не битий шлях і він не оминає ні високих гір, ані непролазних лісових хащ, ані повноводних рік, ані хаотичних людських поселень?

Для цього був застосований так званий метод тріангуляції (покриття трикутниками), винайдений ще за сто років до того голландським математиком, фізиком та астрономом Віллебрордом Снелліусом (1580–1626). Уздовж усієї вимірюваної ділянки меридіана було визначено понад сотню гігантських трикутників з вершинами на високих скелях, дзвіницях, баштах замків, а то й на спеціально зведених для цього вежах (з кожної такої вершини потрібно було бачити крізь підзорну трубу хоча б дві інші). Потім з допомогою геодезичних вимірювань та обчислень визначені їхні кути і сторони. Маючи усі ці дані, вже неважко було знайти й шукану довжину меридіана.



Жан Деламбр



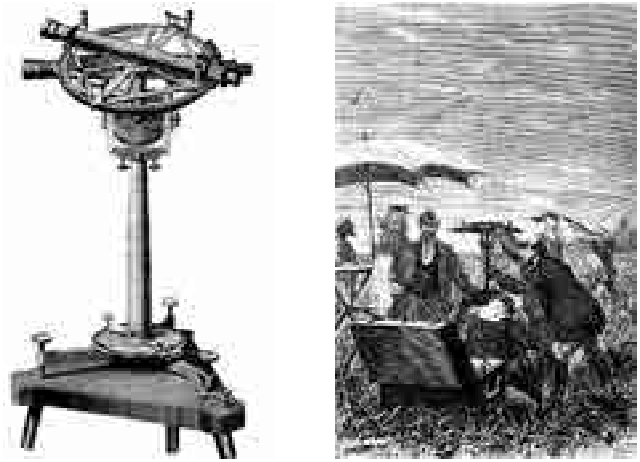


BASE

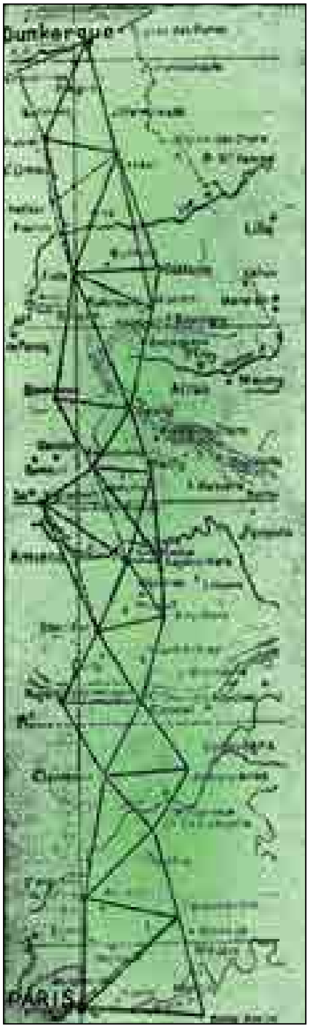
TOME PREMIER

PARIS.

Загальний вигляд трьох томів і титульна сторінка 1-го тому тритомного звіту «Основи метричної десяткової системи, або Вимірювання дуги меридіана між паралелями Дюнкерка і Барселони, виконані у 1792 році і в наступні роки месьє Мешеном і Деламбром» (Париж, 1806, 1807 і 1810 рр.).



Геодезичний кутомірний прилад (так званий повторювальний круг Борда) та робота з ним під час експедиції Мешена і Деламбра. Ілюстрації з книги абата Ж. Лорідана «Експедиції французьких астрономів для визначення фігури Землі та її розмірів», виданій у Парижі в 1890 р.



Підфарбована схема тріангуляції для визначення довжини меридіана між Дюнкерком і Парижем зі звіту Мешена і Деламбра.

Аби ясніше зрозуміти цю ідею, нам не потрібно сотні трикутників, достатньо декількох з них.

Нехай уздовж прямої AB, відстань між точками A і B якої потрібно визначити, побудовано трикутники ACD, CDE, ..., BGH (рис. 3.1). Припустимо, що за допомогою оптичних кутомірних приладів визначені усі кути цих трикутників, а за допомогою безпосереднього вимірювання — сторона EF якого-небудь одного з них. Ця сторона називається базою тріангуляції. Для можливості точного вимірювання база має розмішуватися на ідеально рівній відкритій місцевості без жодних перепон.

За допомогою формул, які пов'язують сторони й кути трикутника (ви теж будете вивчати такі формули, але пізніше), з трикутника DEF за відомою стороною EF і відомими прилеглими до неї кутами 1 і 2 можна обчислити сторону ED. Так само з трикутника EFG за відомою стороною EF і відомими прилеглими до неї кутами 3 і 4 можна обчислити сторони EG і FG.

На наступному етапі за відомими вже сторонами ED і FG і відповідними кутами можна обчислити сторони CE і GH. Продовжуючи ці обчислення далі, ми врешті-решт визначимо всі ланки ламаної $ACEGB$, що сполучає точки A і B. Після цього залишиться обчислити проекції AC_1, C_1E_1, E_1G_1, G_1B цих ланок на пряму AB (що теж здійснюється за відомими формулами) та додати їх.

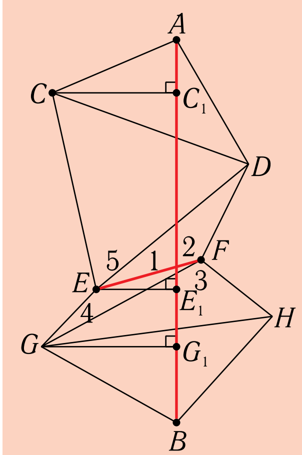


Рис. 3.1

За допомогою тріангуляції визначаються не тільки окремі відстані, а й складаються цілі карти місцевості.

Застосовується тріангуляція і в просторі. Особливо красномовний приклад — так звана GPS-навігація (GPS — абревіатура від Global Positioning System, що означає «Глобальна позиційна система»).

Віллеброрд Снелліус

GPS-навігація здійснюється за допомогою значної кількості штучних супутників, виведених на навколоземні орбіти з таким розрахунком, щоб у кожний пункт земної поверхні долинав сигнал принаймні від чотирьох із них. Приймальний засіб користувача, кожна пара супутників і наземна станція утворюють низку трикутників. Сторони цих трикутників визначаються за часом проходження сигналів між їхніми вершинами. За цими даними і за допомогою автоматизованих обрахунків точно визначається місцезнаходження користувача.

Супутники для GPS-навігації

Окрім практичних застосувань, тріангуляція є одним з основних засобів і в самій геометрії. Вивчаючи геометрію далі, ви не раз помічатимете, як при дослідженні складніших фігур їх розбивають на трикутники або ж добудовують трикутники.

Нарешті, трикутник сам по собі є надзвичайно цікавою фігурою: він має цілу низку прихованих унікальних властивостей. З деякими з них ви вже невдовзі ознайомитеся, інші чекатимуть на вас у наступних класах.

Схема тріангуляції у GPS-навігації

§11. Трикутник і його елементи

Означення.

***Трикутником* називається фігура, що складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки — його *сторонами*.**

Трикутником називають і частину площини, обмежену сторонами трикутника. У цьому разі інколи додають уточнення: плоский трикутник; тоді для трикутника без обмеженої ним внутрішньої частини застосовується назва лінійний трикутник.

У записах трикутник часто позначається значком Δ (читається «трикутник»), біля якого записуються вершини. Це позначення застосовував ще Папп Александрійський — грецький математик, що жив у III ст. н. е.

На рис. 3.2 зображено трикутник ABC з вершинами A, B, C і сторонами AB, BC та AC. Його можна позначити так: ΔABC, ΔACB, ΔCAB тощо.

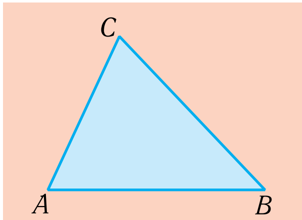


Рис. 3.2

Означення.

***Кутом* трикутника ABC при вершині A називається кут BAC, утворений променями AB і AC, що виходять з вершини A трикутника і містять його сторони AB і AC** (рис. 3.3).

Аналогічно означаються кути трикутника ABC при інших вершинах.

Часто кути трикутника позначають однією літерою, якою позначена відповідна вершина,


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
A FEDERICO
VENETIIS
M. D. LXXXIX.

Титульна сторінка латинського перекладу праці Паппа Александрійського «Математична колекція», яку вважають підсумком усієї античної математики (видано у Венеції в 1589 р.). У цій книзі вперше вживалося позначення Δ для трикутника.

записуючи, наприклад: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. На рис. 3.3 дужкою відзначений $\angle A$ трикутника ABC.

Якщо кути трикутника розглядати разом з обмеженими ними частинами площини, тобто як плоскі кути, то плоский трикутник ABC можна охарактеризувати як перетин (спільну частину) трьох плоских кутів $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ (рис. 3.4).

Про кути A і B трикутника ABC, сторони яких містять сторону AB, часто кажуть, що вони прилягають до цієї сторони (або є прилеглими до неї). Так само і сторону AB вважають прилеглою до кутів A і B. Натомість сторона AB вважається протилежною до кута C (а кут C — протилежним до сторони AB). Зауважте, що вершина кута С, який є протилежним до сторони AB, не належить прямій AB.

Як і для кутів, для сторін трикутника теж застосовують скорочені позначення. Сторони позначають малими латинськими літерами. При цьому дотримуються такого правила: літери беруть однойменні з тими, якими позначені протилежні вершини. Наприклад, сторони BC, AC і AB трикутника ABC, які є протилежними відповідно до кутів A, B і C, позначають через a, b і c (рис. 3.5).

Відповідно до прийнятих означень, кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути. Вершини, сторони й кути трикутника називаються його елементами (в перекладі з латини це означає — «найпростішими складниками»).

Залежно від величини кутів, розрізняють три види трикутників — гострокутні, прямокутні і тупокутні.

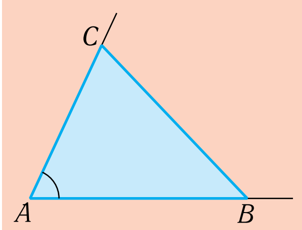


Рис. 3.3

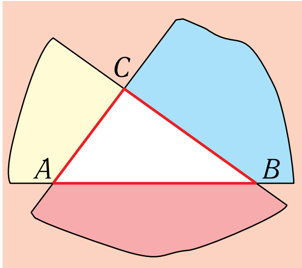


Рис. 3.4

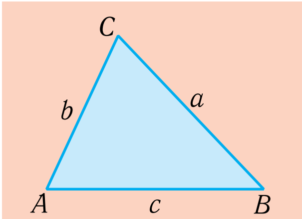


Рис. 3.5

Означення.

Якщо всі кути трикутника гострі, то трикутник називається *гострокутним*. Якщо у трикутнику є прямий кут, то трикутник називається *прямокутним*, а якщо є тупий кут — то *тупокутним* (рис. 3.6)**.**

Означення.

Сума довжин усіх сторін трикутника називається його *периметром*.

Слово «периметр» утворено від грецьких слів «пері» — «навколо» і «метрео» — «вимірюю», отже, буквально означає «міра обводу».

Периметр позначають літерою P, записуючи, наприклад, для периметра трикутника ABC: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$.

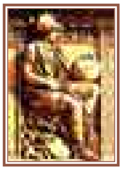


Рис. 3.6

Вправи і задачі

189°. На прямій позначено три точки E, F, G (рис. 3.7). Чи можуть вони бути вершинами трикутника? Точка M розміщена поза прямою. Скільки трикутників з вершинами у точках M, E, F, G можна накреслити? Виконайте ці побудови.

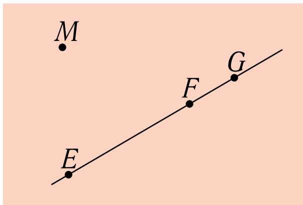


Рис. 3.7

190°. Дано трикутник PQS (рис. 3.8). Запишіть його вершини, сторони і кути. Які кути є прилеглими до сторони PQ, який кут є протилежним до неї? Яка сторона є протилежною до кута P, які сторони є прилеглими до неї? Чому дорівнює периметр трикутника PQS?

191°. Накресліть який-небудь трикутник і позначте його вершини буквами L, M, N. Запишіть та виміряйте з допомогою лінійки і транспортира сторони та кути цього трикутника. Чому дорівнює його периметр?

192°. За допомогою косинця накресліть прямокутний трикутник, сторони якого, що прилягають до прямого кута, дорівнюють 3 см і 4 см. За допомогою лінійки і транспортира визначте третю сторону і гострі кути цього трикутника.

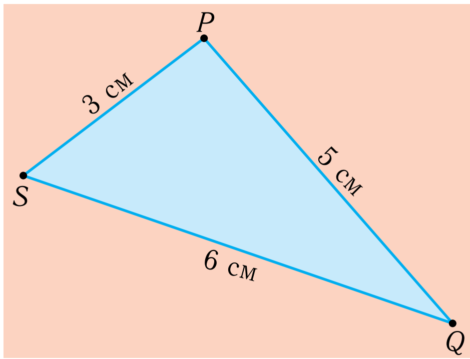


Рис. 3.8

193°. За допомогою лінійки і транспортира побудуйте трикутник із кутом 120°, сторони якого, що прилягають до цього кута, дорівнюють 4 см і 6 см. За допомогою вимірювання визначте третю сторону і гострі кути цього трикутника.

194°. За допомогою лінійки і косинця з гострими кутами по 45° накресліть трикутник зі стороною 5 см і прилеглими до неї кутами по 45°. Визначте за допомогою вимірювання інші дві сторони і третій кут трикутника.

195. За допомогою лінійки і транспортира побудуйте три трикутники зі стороною 5,5 см і рівними прилеглими кутами, які дорівнюють: у першому трикутнику — по 30°, у другому — по 60°, у третьому — по 70°. Виміряйте у кожному трикутнику сторони, протилежні до побудованих кутів, потім кути, що лежать проти даної сторони 5,5 см, а також визначте суму усіх кутів. Можливо, одержані результати наштовхнуть вас на певні загальні висновки?

196. Визначте сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 3 і 6, а периметр трикутника дорівнює 40 см.

197. Сторони трикутника відносяться, як 2 : 3 : 5. Визначте:
а) периметр трикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 3 см;
б) найменшу сторону, якщо периметр дорівнює 50 см:
в) найбільшу сторону і периметр, якщо сума двох інших сторін дорівнює 20 см.

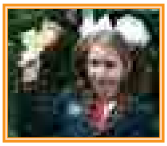
198. Перша сторона трикутника в чотири рази менша від другої і на 10 см менша від третьої. Периметр трикутника дорівнює 34 см. Визначте сторони трикутника.

199. У трикутнику ABC сторона AB = 8 см, сторона BC утричі більша за AC, а периметр трикутника дорівнює 32 см. Який із кутів трикутника лежить проти найменшої сторони?

200•. Визначте периметр трикутника, якщо він більший за першу сторону на 8 см, за другу — на 9 см, а за третю — на 11 см.

§12. Сума кутів трикутника

Уроки 15–16



Виконуючи вправи 192–196 з попереднього параграфа, в яких потрібно було виміряти кути різних трикутників, ви, можливо, зауважили, що у кожному з побудованих трикутників сума усіх кутів дорівнює 180°. Чи випадковість це? — Виявляється, ні, а є наслідком однієї з фундаментальних властивостей трикутника. Ця властивість зовсім неочевидна, але ми вже можемо абсолютно строго довести її логічними міркуваннями, тобто як теорему.

Теорема

(про суму кутів трикутника).

***Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює* 180°.**

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 3.9). Проведемо через вершину C пряму MN, паралельну прямій AB. Утворені при цьому кути MCA і NCB позначимо цифрами 1 і 2, а кут C трикутника — цифрою 3.

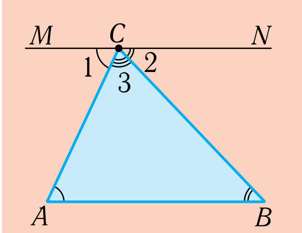


Рис. 3.9

$\angle A = \angle 1$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих MN і січній CA. З аналогічних причин $\angle B = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$. Кути 1, 3 і 2 в сумі дорівнюють розгорнутому куту, тобто 180°. Тому $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, що й треба було довести.

Мартен де Вос. Астрономія. Гравюра (бл. 1630 р.). На небесному глобусі видно сферичний трикутник.

Наслідки

(про величини кутів трикутника).

***Трикутник не може мати двох негострих кутів — прямих або тупих. У кожному трикутнику принаймні два кути — гострі. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює* 90°.**

Доведення. Якби трикутник мав два негострі кути (прямі або тупі), то їхня сума дорівнювала б 180° або була би більшою за 180°. Тоді яким би не був третій кут, сума всіх кутів трикутника була би більшою за 180°, що суперечить доведеній теоремі.

Оскільки у прямокутному трикутнику один із кутів прямий, то сума двох інших кутів, які є гострими, дорівнює 180° – 90°, тобто 90°. Наслідки доведені.

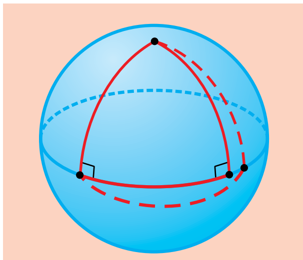


Рис. 3.10

При доведенні теореми про суму кутів трикутника ми спиралися на властивості паралельних прямих, а саме — на рівність внутрішніх різносторонніх кутів, що утворюються при перетині двох паралельних прямих січною. У свою чергу, ця властивість доводиться на підставі аксіоми про паралельні прямі. Отже, виходить, що теорема про суму кутів трикутника є наслідком аксіоми про паралельні прямі. У геометрія на поверхнях, де не виконується така аксіома, неістинна й доведена на підставі неї теорема. Наприклад, на сфері сума кутів будь-якого трикутника більша за 180° (рис. 3.10), а на псевдосфері, про яку згадувалося у §9, вона менша від 180° (рис. 3.11). На сфері навіть можна накреслити трикутники з двома й трьома прямими чи тупими кутами.

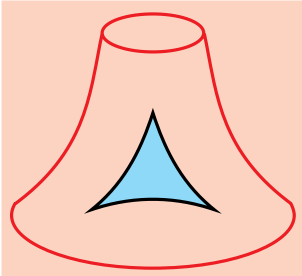


Рис. 3.11

Розв'язуємо разом

Задача 1.

Довести, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, перпендикулярні.

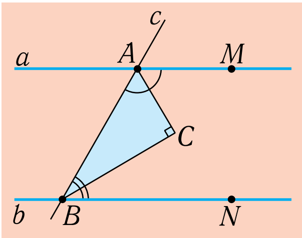


Рис. 3.12

Розв'язання. Нехай прямі a і b — паралельні, AC і BC — бісектриси внутрішніх односторонніх кутів MAB і NBA, утворених з прямими a і b січною c (рис. 3.12). За властивістю паралельних прямих:

$$\angle MAB + \angle NBA = 180°.$$

З іншого боку, з означення бісектриси кута випливає, що

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MAB, \text{ а } \angle ABC = \frac{1}{2}\angle NBA.$$

Нарешті, оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то $\angle C = 180° - (\angle BAC + \angle ABC) = 180° - \frac{1}{2}(\angle MAB + \angle NBA) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Отже, $AC \perp BC$. Твердження задачі доведено.

Задача 2.

У трикутнику ABC проведено відрізок KM так, що $\angle 2 = \angle 1$ (рис. 3.13). Довести, що тоді $\angle 4 = \angle 3$.

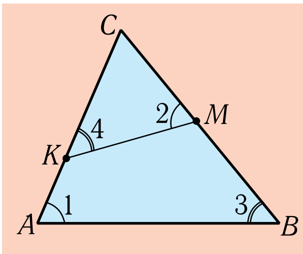


Рис. 3.13

Розв'язання. З ΔCKM: $\angle 4 = 180° - \angle 2 - \angle C$.

З ΔABC: $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle C$.

Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 4 = 180° - \angle 1 - \angle C$. Отже, $\angle 4 = \angle 3$. Твердження задачі доведено.

Зауваження. Твердження цієї задачі часто застосовується для прямокутного трикутника, коли відрізок KM проведений з вершини прямого кута під прямим кутом до протилежної сторони (рис. 3.14). Відповідно до доведеного, кут 4 між цим відрізком і однією зі сторін трикутника, яка прилягає до прямого кута, дорівнює гострому куту 3 трикутника, який прилягає до іншої сторони.

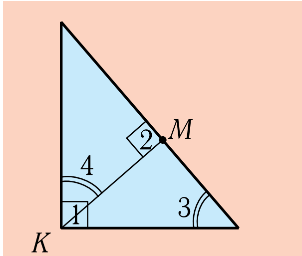
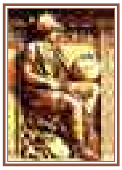


Рис. 3.14



Вправи і задачі

201°. Накресліть який-небудь трикутник, виміряйте за допомогою транспортира його кути і знайдіть їхню суму. Чи підтверджують ваші вимірювання теорему про суму кутів трикутника?

202°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира трикутник із кутами 30° і 110°. Визначте за допомогою вимірювання, а потім обчисленням третій кут. Чи збігаються результати?

203°. Чи існує трикутник із кутами: а) 20°, 70° і 80°; б) 90°, 45° і 90°; в) 10°, 100° і 110°; г) 65°, 55° і 75°?

204°. Чи існує трикутник із кутами 30°, 50° і 100°? Чи можете ви довести правильність своєї відповіді?

205°. Чи може трикутник не мати жодного: а) гострого кута; б) прямого кута; в) тупого кута? Як ви обґрунтовуєте свої відповіді?

206°. Визначте третій кут трикутника, якщо два його кути мають величини: а) 60° і 90°; б) 30° і 100°; в) 45° і 80°.

207°. Визначте третій кут трикутника, якщо сума двох його кутів дорівнює: а) 65°; б) 130°; в) 90°.

208°. Чи може прямокутний трикутник бути і тупокутнім, тобто мати ще й тупий кут?

209°. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші його кути?

210. Визначте невідомі кути трикутників, зображених на рис. 3.15, а)–в).

211. Чи можуть усі кути трикутника бути більшими за 60°? А — меншими від 60°? Відповіді обґрунтуйте.

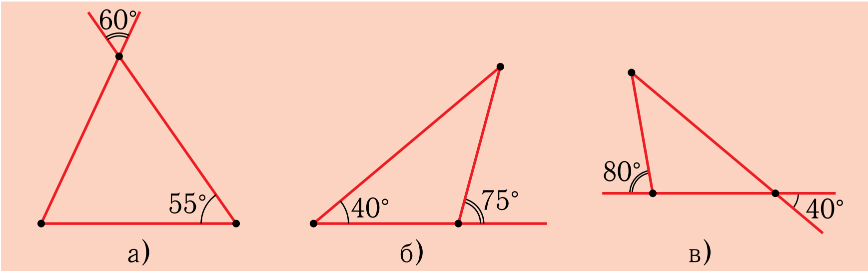


Рис. 3.15

212. Чи може найбільший кут трикутника дорівнювати 55°? А —найменший 65°?

213. Чи може сума будь-яких двох кутів трикутника бути меншою від 120°?

214. Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам іншого трикутника, то й треті їхні кути рівні.

215. Визначте кути трикутника, якщо вони пропорційні числам: а) 1, 2 і 3; б) 2, 3 і 4; в) 3, 5 і 7; г) 2, 3 і 10.

216. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться, як 4 : 5. Визначте ці кути.

217. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 42° більший за інший. Визначте ці кути.

218. У трикутнику один із кутів удвічі більший за інший, а третій кут дорівнює 60°. Визначте ці кути.

219. У трикутнику один із кутів дорівнює 50°, а два інших відносяться, як 5 : 8. Визначте ці кути.

220. Визначте кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 110°$, а $\angle B + \angle C = 130°$.

221. Доведіть, що коли один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших, то трикутник — прямокутний.

222•. Доведіть, що коли сума будь-яких двох кутів трикутника більша за 90°, то трикутник — гострокутний.

223•. Доведіть, що коли сума двох кутів трикутника менша від 90°, то трикутник — тупокутний.

224•. На рис. 3.16 відображені побудови, які виконував Евклід для доведення теореми про суму кутів трикутника. Чи можете ви за цими побудовами відтворити доведення Евкліда?

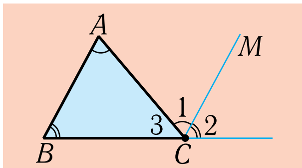


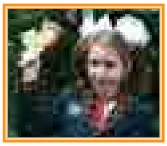
Рис. 3.16

225•. Чому дорівнюють кути, які утворюються при перетині бісектрис двох кутів трикутника, якщо третій кут цього трикутника дорівнює: а) 50°; б) 120°?

226•. У трикутнику ABC проведені бісектриси кутів B і C, які перетинаються в точці D. Доведіть, що □BDC дорівнює половині кута A.

§13. Зовнішній кут трикутника

Уроки 17–18



Якщо розглядати трикутник і його кути як частини площини, що обмежуються сторонами цих фігур, то певна частина кожного кута трикутника розміщується всередині трикутника (рис. 3.17). У зв'язку з цим кути трикутника називаються ще внутрішніми кутами.

Розрізняють також зовнішні кути трикутника.

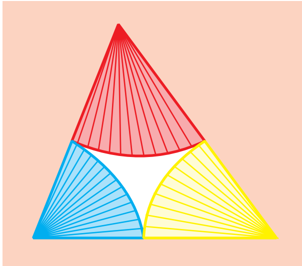


Рис. 3.17

Означення.

Зовнішнім кутом **трикутника називаються кут, суміжний із внутрішнім кутом цього трикутника.**

На рис. 3.18 дужками відзначено зовнішній кут ACN трикутника ABC при вершині C.

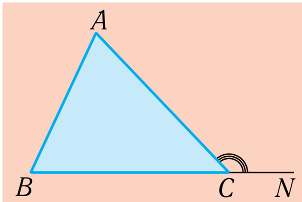


Рис. 3.18

Очевидно, що при кожній вершині трикутника можна розглядати два зовнішні кути, які один до одного є вертикальними (рис. 3.19).

Дуже важливе значення у геометрії, як ми в цьому не раз переконаємося, має наступна властивість зовнішнього кута трикутника.

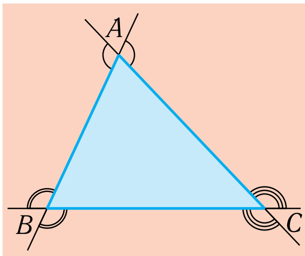


Рис. 3.19

Теорема
(про зовнішній кут трикутника).

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

Доведення. Нехай ABM — зовнішній кут трикутник ABC при вершині B (рис. 3.20). Оскільки він є суміжним із внутрішнім кутом B трикутника, то, за властивістю суміжних кутів,

$$\angle ABM = 180° - \angle B.$$

З іншого боку, з теореми про суму кутів трикутника випливає, що

$$\angle A + \angle C = 180° - \angle B.$$

Тому $\angle ABM = \angle A + \angle C$, що й треба було довести.

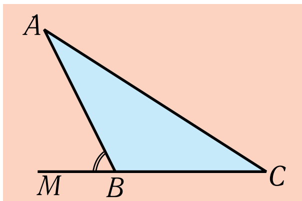


Рис. 3.20

Наслідок.

Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний із ним.

Справді, оскільки зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним, то зрозуміло, що ця сума більша за кожний із доданків.

Наприклад, зовнішній кут ABM трикутника ABC при вершині B (див. рис. 3.20) більший за кожний із внутрішніх кутів A і B, не суміжних з ним.

Розв'язуємо разом

Задача.

Відома градусна міра кута A трикутника ABC. Проведено бісектриси BB_1 та CC_1 внутрішніх кутів B і C трикутника (рис. 3.21). Визначити кути, які вони утворюють при перетині.

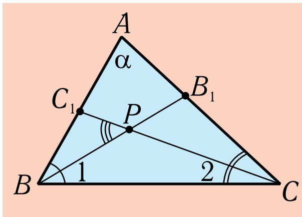


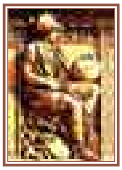
Рис. 3.21

Розв'язання. Нехай P — точка перетину проведених бісектрис. Шуканий кут BPC_1 є зовнішнім для ΔPBC. Тому, за наслідком з теореми про зовнішній кут, $\angle BPC_1 = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$. З іншого боку, з теореми про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$.

Отже, $\angle BPC_1 = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{\angle A}{2}$.

Інший шуканий кут BPC є суміжним з кутом BPC_1. Тому $\angle BPC = 180° - \angle BPC_1 = 180° - \left(90° - \frac{\angle A}{2}\right) = 90° + \frac{\angle A}{2}$.

Відповідь. $90° - \frac{\angle A}{2}$; $90° + \frac{\angle A}{2}$.



Вправи і задачі

227°. Які із дев'яти кутів, позначених на рис. 3.22 цифрами, є зовнішніми для зображеного там трикутника?

228°. Сума кутів A і C трикутника ABC, зображеного на рис. 3.23, дорівнює 130°. Чому дорівнює зовнішній кут при вершині B?

229°. Зовнішній кут трикутника дорівнює 115°. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів, не суміжних з ним?

230°. Визначте величини зовнішніх кутів трикутника ABC, зображеного на рис. 3.24.

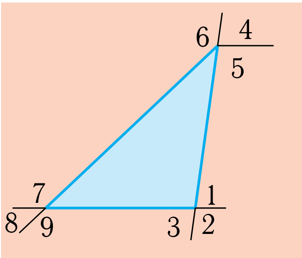


Рис. 3.22

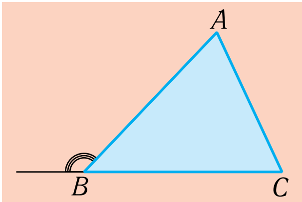


Рис. 3.23

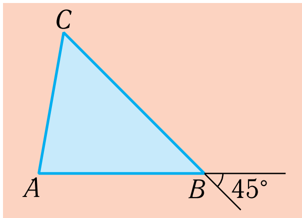


Рис. 3.24

231°. Чому дорівнює сума внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, взятих при одній вершині?

232°. Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від внутрішнього кута цього трикутника?

233°. Чи може у трикутнику бути два гострих зовнішніх кути; два прямих зовнішніх кути; два тупих зовнішніх кути?

234°. Скільки всього гострих, прямих і тупих зовнішніх кутів може мати трикутник, якщо при кожній вершині лічити лише один зовнішній кут?

235°. До якого виду належить трикутник, якщо: а) всі його зовнішні кути тупі; б) один із його зовнішніх кутів прямий; в) один із його зовнішніх кутів гострий?

236. Визначте кути трикутника, в якому зовнішні кути при двох вершинах дорівнюють 120° і 150°.

237. Два зовнішніх кути трикутника дорівнюють 100° і 150°. Визначте третій зовнішній кут.

238. У трикутнику один із внутрішніх кутів дорівнює 30°, а один із зовнішніх кутів — 40°. Визначте решту внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника.

239. Зовнішній кут трикутника дорівнює 160°. Визначте внутрішні кути трикутника, не суміжні з ним, якщо: а) вони відносяться, як 3 : 5; б) один із них становить 3/5 іншого; в) один із них більший за іншого на 20°; г) їхня різниця дорівнює 40°.

240. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 128°. Визначте внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо один із них: а) дорівнює 50°; б) на 38° менший від іншого; в) у 7 разів більший за іншого; г) їхні величини відносяться, як 3 : 5.

241. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130°, а один із внутрішніх — 55°. Визначте інші внутрішні й зовнішні кути трикутника.

242. Визначте кут A трикутника ABC, якщо сума зовнішніх кутів, суміжних із кутами B і C, утричі більша за кут A.

243. Визначте внутрішні кути трикутника, якщо сума двох із них дорівнює 140°, а один із зовнішніх кутів дорівнює 85°.

244. Доведіть, що коли в трикутнику зовнішні кути при двох вершинах рівні, то вони — тупі.

245•. Визначте суму зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній з вершин.

246•. Внутрішні кути трикутника відносяться, як 5 : 6 : 9. Не знаходячи величин цих кутів, визначте відношення зовнішніх кутів цього трикутника.

247•. Визначте внутрішні кути трикутника, якщо його зовнішні кути відносяться, як 2 : 3 : 4.

248•. Доведіть, що бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні.

249•. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних із ним. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.

§14. Рівність трикутників. Перша ознака рівності трикутників

Уроки 19–20

Як і будь-які інші фігури, трикутники називаються рівними, якщо їх можна сумістити шляхом переміщення.

При цьому під переміщенням розуміють не так реальну, як мисленнєву дію. Наприклад, неможливо реально сумістити два однакові трикутники на вежах-близнюках у канадському місті Реджайна (рис. 3.25), однак архітектори, мабуть, сотні разів подумки суміщали їх під час проектування.

Зрозуміло, що в рівних трикутників попарно рівні всі сторони і попарно рівні всі кути, причому проти рівних кутів лежать рівні сторони, а проти рівних сторін — рівні кути. На рис. 3.26 зображені рівні трикутники ABC і LMN, у яких рівні сторони позначені однаковою кількістю рисок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок.

Для позначення рівності трикутників користуються звичайним значком рівності = . Наприклад, запис $\Delta ABC = \Delta LMN$ значає, що трикутник ABC рівний трикутнику LMN. При цьому вершини рівних кутів записуються на однакових місцях. Зокрема, запис $\Delta ABC = \Delta LMN$ (див. рис. 3.26) означає, що $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle M$, а $\angle C = N$. Якщо ж буде написано, що $\Delta ABC = \Delta NML$, то це означатиме вже зовсім інше, а саме, що $\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle M$, а $\angle C = \angle L$.

Чи можна стверджувати, навпаки, що коли в трикутниках попарно рівні всі сторони і всі кути, то такі трикутники рівні, тобто їх можна сумістити?

Простий експеримент продемонструє нам, що відповідь на це питання не така очевидна, як може здатися на перший погляд.

Виріжте із цупкого паперу шаблон трикутника ABC з різними довжинами сторін. Потім на чистому аркуші за допомогою цього шаблону обведіть рівний йому трикутник LMN і переверніть шаблон іншим боком (рис. 3.27). Тепер спробуйте сумістити шаблон ABC з трикутником LMN, не відриваючи його від площини рисунка. Незважаючи на попарну рівність усіх сторін і всіх кутів обох трикутників, вам це не вдасться. Однак якщо ви знову перевернете шаблон, то суміщення легко здійснюється.

Два різні способи фізичної реалізації переміщення — з виходом за межі площини (і з перевертанням) та без виходу (без перевертання), дають різні відповіді на питання про можливість суміщення трикутників з попарно рівними елементами.

У геометрії вважається, що можливі обидва ці переміщення. Це закріплюється у такій аксіомі.

Рис. 3.25

20-поверхові (80 м заввишки) хмарочоси-близнюки у столиці канадської провінції Саскачеван — місті Реджайна (зведені у 1992 р.). Унікальною особливістю цих споруд є похилі стіни у вигляді двох рівних трикутників, кут відхилення яких від вертикалі становить 11°.

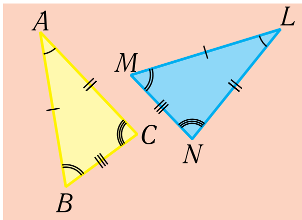


Рис. 3.26

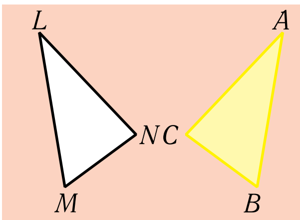


Рис. 3.27

Аксіома рухомості трикутника.

Який би не був трикутник, його можна перемістити у задане положення відносно даної півпрямої.

На рис. 3.28 зображено трикутник ABC і два рівних йому трикутники $A'B'C'$ та $A''B''C''$, сторони $B'C'$, $B''C''$ яких відкладені на півпрямих m, n від їхніх початків, а протилежні вершини A', A'' розміщені у заданій півплощині відносно цих півпрямих. При цьому ми можемо говорити, що трикутник $A'B'C'$ одержується з трикутника ABC «без перевертання», а трикутник $A''B''C''$ — «з перевертанням».

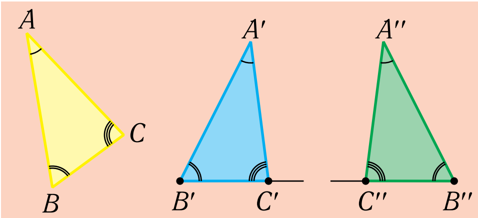


Рис. 3.28

На підставі аксіоми рухомості трикутника вже можна довести, що трикутники з попарно рівними елементами є рівними, тобто, що їх можна сумістити. При цьому навіть не обов'язково вимагати рівності усіх шести пар відповідних елементів — трьох пар сторін і трьох пар кутів. Достатньо лише рівності трьох пар. По-різному комбінуючи пари рівних сторін і пари рівних кутів, можна сформувати і довести три ознаки рівності трикутників. У цьому параграфі ми доведемо першу ознаку.

Теорема

(перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами і кутом між ними).

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам

і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 3.29). Потрібно довести, що тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

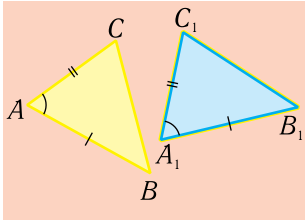


Рис. 3.29

Перемістимо трикутник ABC так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Згідно з аксіомою рухомості трикутника, цього можна досягти.

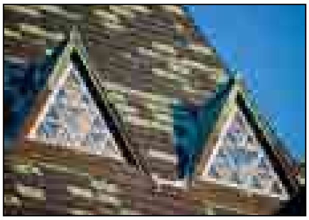
Оскільки $AB = A_1B_1$, то, за аксіомою про відкладання відрізків, точка B суміститься з точкою B_1.

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то, за аксіомою про відкладання кутів, кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1.

Міркуючи далі так само, як стосовно точок B і B_1, дійдемо висновку, що точка C суміститься з точкою C_1.

Оскільки сумістилися кінці відрізків BC і B_1C_1, то сумістилися й самі ці відрізки.

Виходить, що сумістилися всі три пари сторін трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Отже, сумістилися й самі трикутники. Тому вони рівні. Теорему доведено.


Рівні трикутники на даху

Зауваження для скептиків. Декому з учнів, які тільки-но приступають до вивчення геометрії і вперше стикаються зі строгими математичними обґрунтуваннями, доведення окремих теорем видаються абсолютно зайвими. «Хіба й без доведення не очевидно, — інколи запитують вони, — що будь-які два трикутники, які мають дві пари рівних сторін і рівні кути між ними, є рівними?».

Вище ми попереджали такі сумніви тим, що демонстрували поверхні, на яких відповідні «очевидні» властивості все-таки не виконуються,. А це вже беззаперечно свідчило про те, що для цілковитої надійності в застосуванні для площини вони потребують доведення.

Приклад, який ми зараз наведемо, здається, розвіє такі сумніви.

Дуже схожим на першу ознаку рівності трикутників є таке твердження: якщо дві сторони й кут, *що прилягає до однієї з них,* одного трикутника, відповідно рівні двом сторонам і куту, *що прилягає до однієї з них,* іншого трикутника, то такі трикутники рівні. (Відмінності цього твердження від першої ознаки виділені курсивом).

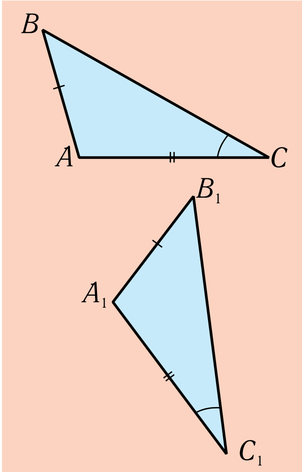


Рис. 3.30

На рис. 3.30 зображені два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, які повністю задовольняють умови цього твердження: у них $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. І тут справді доволі очевидно, що зображені трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні між собою. Але чи можемо ми лише на підставі цього рисунка зробити висновок, що сформульоване твердження є ще однією ознакою рівності трикутників?

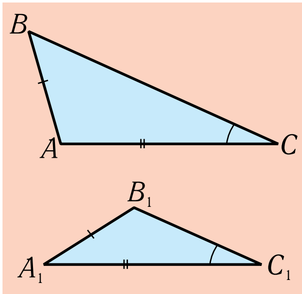


Рис. 3.31

Погляньте на трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, які зображені на рис. 3.31. Вони теж задовольняють зазначені умови: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, однак тепер уже абсолютно очевидно, що ці трикутники не рівні. Тому сформульоване твердження неправильне. Виявляється, що рис. 3.30, з якого можна було зробити загальний висновок, не відображає усіх можливих ситуацій. Отже, лише на підставі «очевидності», яка випливає з рисунка чи з якогось іншого відчуття (інтуїції тощо), без логічного обґрунтування, жодне математичне твердження не може вважатися істинним. Скільки б не нарисувати рисунків, їх усе одно буде скінченна кількість. Тому завжди залишатиметься небезпека, що якась важлива деталь ними не буде врахована.

Розв’язуємо разом

Ознаки рівності трикутників застосовуються у геометрії дуже часто. Одне з найпоширеніших застосувань — для відшукання відстаней і кутів. Для цього невідомі відрізки або кути включають у певні трикутники і визначають з того, що ці трикутники рівні іншим трикутникам, в яких відповідні елементи є відомими.

Розглянемо один приклад втілення цієї ідеї.

Припустимо, що для реалізації певного проекту необхідно визначити протяжність озера у напрямку AB (рис. 3.32). Візьмемо на березі точку C, щоб відстань CB можна було визначити безпосереднім вимірюванням, і побудуємо кут ACE, рівний куту ACB. Потім уздовж променя CE відкладемо відрізок CD, що дорівнює відстані CB. Тоді відстань AD дорівнюватиме шуканій ширині озера AB.

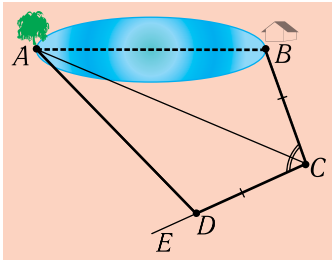


Рис. 3.32

Справді, у трикутниках ACB та ACD сторона AC спільна. Сторони CB і CD та кути ACB і ACD рівні за побудовою. Тому, за першою ознакою, ці трикутники рівні. А з рівності трикутників випливає рівність сторін, що лежать проти рівних кутів. Сторони AB та AD якраз і лежать проти рівних кутів, тому вони й рівні між собою. Отже, якщо безпосередньо виміряємо одну з них, сторону AD, в одному трикутнику, то знатимемо й довжину іншої, сторони AB, в іншому.

Вправи і задачі

250°. Накресліть у різних положеннях два трикутники зі сторонами 3 см і 6 см та кутом між ними 70°. Виміряйте за допомогою лінійки треті сторони накреслених трикутників, а за допомогою транспортира — інші їхні кути. Чи рівні ці елементи в обох трикутниках?

251°. На рис. 3.33 зображені два рівні трикутники ABC і LMN. Доповніть записи: ΔCAB = …; BC = …; NL = …; $\angle C$ = …; $\angle L$ = …; $\angle BCA$ = …; $\angle MLN$ = … .

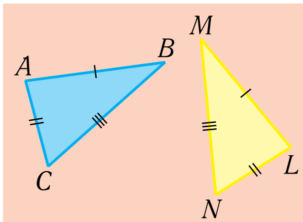


Рис. 3.33

252°. Дано два рівних трикутники ABC і DEM. Які кути трикутника ABC дорівнюють кутам D, E, M? Які сторони трикутника DEM дорівнюють сторонам AC і BC?

253°. Дано два рівних трикутники ABC і LMN.

1) $AB = 5$ см, $\angle A = 90°$. Чому дорівнюють сторона ML і кут MLN?

2) $\angle L = 75°$, $LM = 10$ см, $NL = 5$ см. Чому дорівнюють кут BAC і сторони AB та AC.

254°. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta EFG = \Delta LMN$ і при цьому $\angle F = 30°$, $\angle N = 80°$. Визначте невідомі кути усіх трьох трикутників.

255°. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta EFG = \Delta LMN$ і при цьому $EG = 6$ см, $LM = 8$ см, $P_{\Delta ABC} = 25$ см. Визначте невідомі сторони усіх трьох трикутників.

256°. У трикутнику ABC всі сторони мають різні довжини. Чи рівні трикутники ABC і BAC?

257°. Чи можна стверджувати, що коли трикутник ABC рівний трикутнику $A_1B_1C_1$, а трикутник $A_1B_1C_1$ — рівний трикутнику $A_2B_2C_2$, то трикутники ABC і $A_2B_2C_2$ рівні між собою? Обґрунтуйте свою відповідь.

258°. Відомо, що трикутники ABC і CAB рівні. Обґрунтуйте, що в трикутнику ABC всі сторони рівні.

259. Периметр одного трикутника більший за периметр іншого. Чи можуть бути рівними ці трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

260. Виконайте за допомогою креслярських інструментів такі побудови. Спочатку накресліть дві прямі, що перетинаються в точці O. Потім на одній з них відкладіть рівні відрізки OA і OB, а на іншій — рівні відрізки OC і OD. Сполучіть, нарешті, відрізками послідовно точки A, C, B і D. Чи утворилися в результаті цих побудов рівні трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

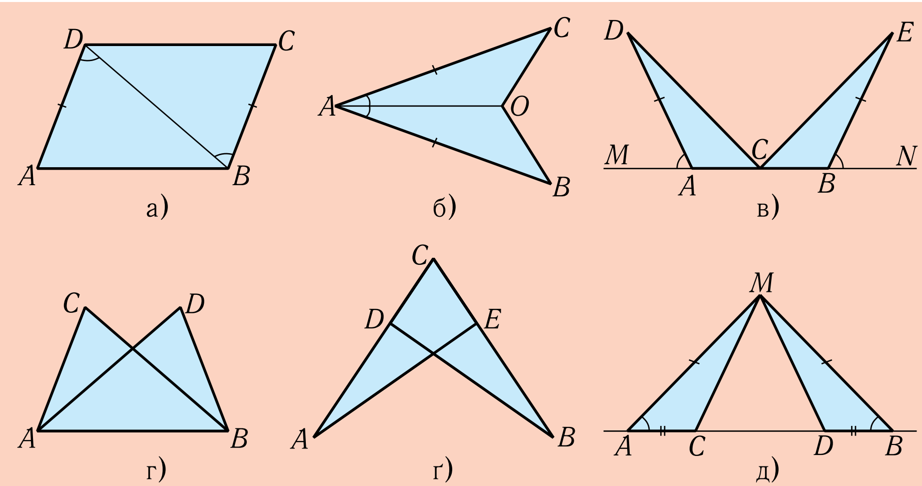


Рис. 3.34

261. Дано: $AD = BC$, $\angle ADB = \angle DBC$ (рис. 3.34, а). Доведіть, що $AB = DC$, $\angle A = \angle C$.

262. Дано: $AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$ (рис. 3.34, б). Доведіть, що $BO = CO$.

263. Дано: $\angle MAD = \angle NBE$, $AD = BE$, $AC = CB$ (рис. 3.34, в). Доведіть, що $CD = CE$, $\angle ACD = \angle BCE$.

264. Дано: $AC = BD$, $\angle CAB = \angle DBA$ (рис. 3.34, г). Доведіть, що $\angle DAB = \angle CBA$, $AD = CB$.

265. Дано: $AC = BC$; $CD = CE$ (рис. 3.34, ґ). Доведіть, що $\Delta ACE = \Delta BCD$.

266. Дано: $MA = MB$, $AC = BD$, $\angle MAC = \angle MBD$ (рис. 3.34, д). Доведіть, що $\angle MCD = \angle MDC$.

267. У рівних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ точки M і M_1 — відповідно середини сторін BC і B_1C_1. Доведіть, що відрізок AM рівний відрізку A_1M_1.

268. На сторонах кута A відкладено рівні відрізки AC і AD, а потім на цих відрізках узято такі точки E і F, що $AE = AF$. Доведіть, що $\angle CED = \angle DFC$.

269. На рис. 3.35 $BO = OC$, $AO \perp BC$. Доведіть, що $AB = AC$, $DB = DC$.

270. На рис. 3.36 зображено спосіб визначення відстані між точками A і B, розділених водоймою. Опишіть деталі цих побудов та обґрунтуйте їх.

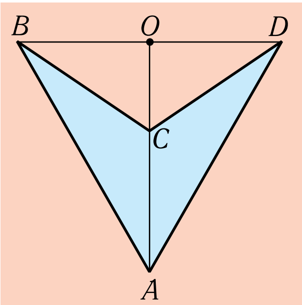


Рис. 3.35

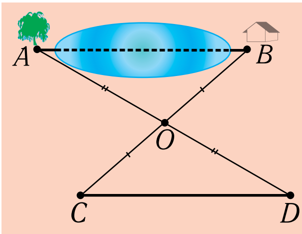


Рис. 3.36

271•. На рис. 3.37 зображено спосіб визначення протяжності озера у напрямку AB з використанням екера для побудови прямих кутів ACB та ACD. Опишіть деталі цих побудов та обґрунтуйте їх.

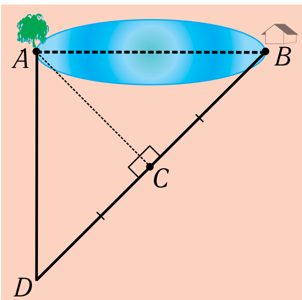


Рис. 3.37

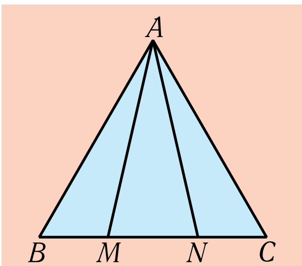


Рис. 3.38

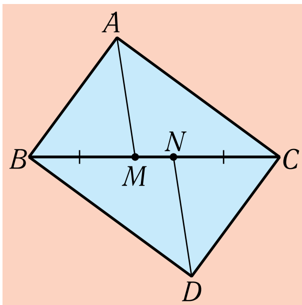


Рис. 3.39

272•. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть, що $AD \parallel BC$, а $AC \parallel BD$.

273•. На рис. 3.38 $\Delta ABM = \Delta ACN$. Доведіть, що $\Delta ABN = \Delta ACM$.

274•. На рис. 3.39 $\Delta ABC = \Delta DCB$, $BM = CN$. Доведіть, що $AM \parallel DN$.

275•. У трикутнику ABC $AB = AC$. Бісектриса кута BAC перетинає сторону BC у точці D. Доведіть, що AD □ BC.

§15. Друга ознака рівності трикутників

Уроки 21–22

Аналогічно до першої ознаки рівності трикутників доводиться друга ознака.

Теорема

(друга ознака рівності трикутників — за стороною і двома прилеглими кутами).

Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

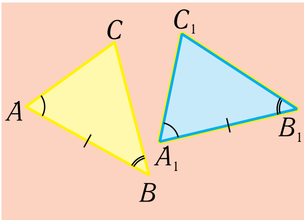


Рис. 3.40

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 3.40). Потрібно довести, що тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Перемістимо трикутник ABC так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Згідно з аксіомою рухомості трикутника, цього можна досягти.

Оскільки $AB = A_1B_1$, то, за аксіомою про відкладання відрізків, точка B суміститься з точкою B_1.

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то, за аксіомою про відкладання кутів, кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1.

Міркуючи так само стосовно кутів B і B_1, дійдемо висновку, що півпряма BC суміститься з півпрямою B_1C_1. При цьому точка C суміститься з точкою C_1, оскільки дві півпрямі можуть мати не більше однієї спільної точки.

Виходить, що сумістилися всі три пари вершин трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Отже, сумістилися і їхні сторони, а тому й самі трикутники. Отже, вони рівні. Теорему доведено.

Розв'язуємо разом

Задача.

На сторонах кута A відкладені рівні відрізки AB і AC, а потім інші рівні відрізки BK і CM, як показано на рис. 3.41. Нехай O — точка перетину відрізків BM і CK. Довести, що промінь AO ділить кут A навпіл, тобто є бісектрисою цього кута.

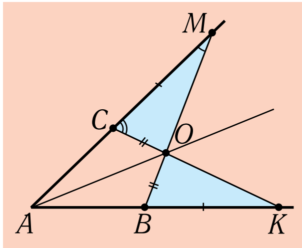


Рис. 3.41

Розв'язання. Оскільки відрізки AK і AM дорівнюють сумам $AB + BK$ та $AC + CM$ відповідно рівних відрізків, то вони рівні між собою.

Розглянемо трикутники AKC та AMB. Вони мають спільний кут MAK і рівні відповідні сторони, що утворюють цей кут: $AK = AM$, $AC = AB$. Тому, за першою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси $\angle K = \angle M$.

Розглянемо тоді трикутники BOK і COM. У них рівні сторони BK і CM, рівні прилеглі до них кути K і M, а також рівні кути BOK та COM (як вертикальні). Тому рівними є й прилеглі кути OBK та OCM, оскільки сума всіх кутів трикутника дорівнює 180°. Тому, за другою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси $BO = CO$.

Розглянемо, нарешті, трикутники AOB та AOC. У них рівні відповідні сторони AB і AC (за побудовою) та BO і CO (як щойно з'ясовано), а також кути ABO та ACO між ними (вони є суміжними до рівних кутів OBK і OCM). Тому, за першою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси $\angle OAB = \angle OAC$, що й треба було довести.

Зауваження. Результатом розв'язаної задачі можна скористатися для ділення кута навпіл, тобто для побудови його бісектриси. Відкладемо на сторонах кута A рівні відрізки AB і AC, а потім інші рівні відрізки BK і CM. Найпростіше це зробити за допомогою циркуля, як показано на рис. 3.42 (ніжка циркуля ставиться у точку A). Далі визначимо точку O перетину відрізків BM та CK. Тоді AO — шукана бісектриса.

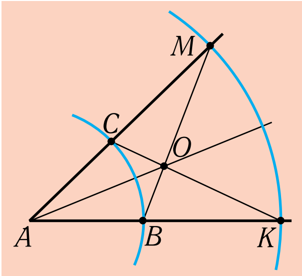
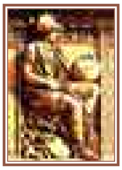


Рис. 3.42



Вправи і задачі

276°. Накресліть у різних положеннях два трикутники зі стороною 6 см і прилеглими до неї кутами 45° і 70°. Виміряйте за допомогою лінійки інші сторони накреслених трикутників, а за допомогою транспортира — треті кути. Чи рівні ці елементи в обох трикутниках?

277°. На рис. 3.43 пряма AC містить бісектриси кутів A і C. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

278°. Накресліть який-небудь нерозгорнутий кут A та проведіть його бісектрису. На бісектрисі візьміть довільну точку M і за допомогою косинця проведіть через неї пряму, перпендикулярну до бісектриси. Позначте літерами B і C точки перетину цієї прямої зі сторонами кута. Переконайтесь за допомогою вимірювання, а потім обґрунтуйте логічно, що відрізки AB і AC рівні.

279°. На рис. 3.44 $BC = CF$, $AC = CD$, $AD \perp BF$. Доведіть рівність трикутників ABC і DFC, а також рівність відрізків AB і DF.

280°. На рис. 3.45 $AO = CO$, $\angle A = \angle C$. Доведіть рівність трикутників AOB і COD, а також рівність відрізків AB і CD.

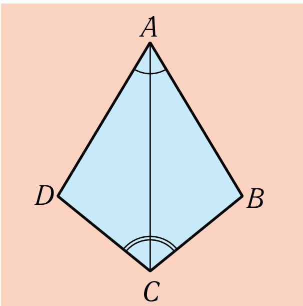


Рис. 3.43

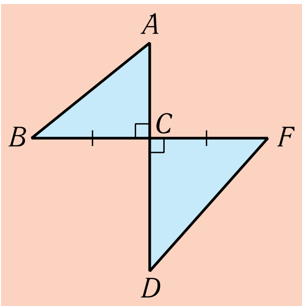


Рис. 3.44

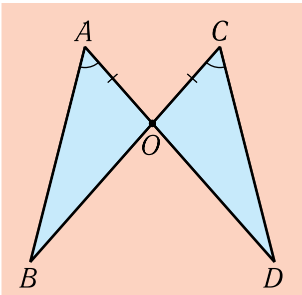


Рис. 3.45

281. На рис. 3.46 $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle DCB$. Доведіть рівність відрізків AB і DC.

282. На рис. 3.47 $\angle B = \angle F$, $\angle ACF = \angle BED$, $BE = CF$. Доведіть рівність трикутників ABC і DFE.

283. На рис. 3.48 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Доведіть рівність трикутників ABD і CDB.

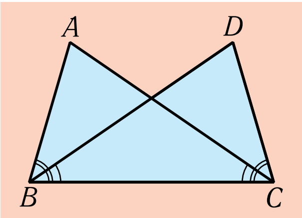


Рис. 3.46

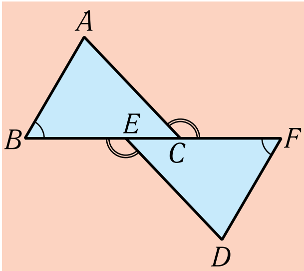


Рис. 3.47

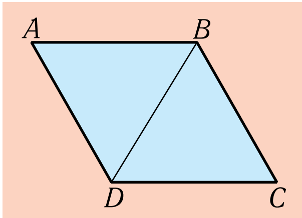


Рис. 3.48

284. У трикутнику ABC $AB = AC$. На сторонах AB і AC позначені відповідно точки M і N так, що $\angle ACM = \angle ABN$. Доведіть, що відрізки BN і CN рівні.

285. Накресліть відрізок AB завдовжки 6 см та проведіть через його середину O яку-небудь пряму m, яка не є перпендикулярною до відрізка AB. Далі з допомогою косинця проведіть з точок A і B перпендикуляри AD та BF до прямої m. Переконайтесь за допомогою вимірювання, а потім обґрунтуйте логічно, що ці перпендикуляри рівні.

286. На рис. 3.49 $\Delta ABC = \Delta DBC$. Доведіть, що тоді $\Delta ACE = \Delta DCE$.

287. На рис. 3.50 прямі AC і DB паралельні, а точка O є серединою відрізка AB. Доведіть, що ця точка є також серединою відрізка CD.

288. Точки M і N розміщені по різні боки від прямої AB і при цьому $MA = NB$, $\angle MAB = \angle NBA$ (рис. 3.51). Доведіть, що відрізки MN і AB діляться точкою O перетину навпіл.

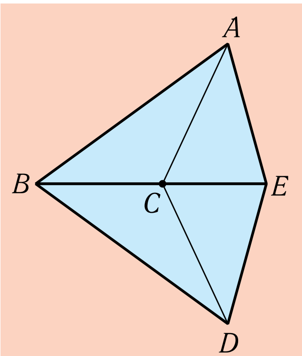


Рис. 3.49

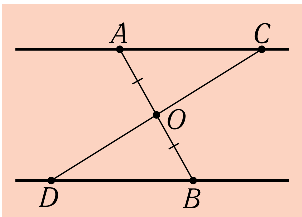


Рис. 3.50

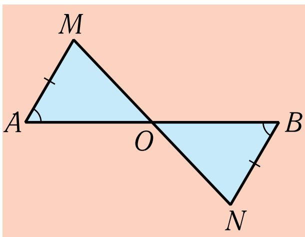


Рис. 3.51

289. На рис. 3.52 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $AB = DC$, $AD = BC$.

290. На рис. 3.53 $\Delta AOM = \Delta COL$. Доведіть, що тоді $\Delta ABL = \Delta CMB$.

291•. На рис. 3.54 $\Delta ABC = \Delta DBC$. Доведіть, що тоді $\Delta AOB = \Delta DOC$.

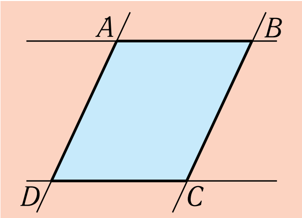


Рис. 3.52

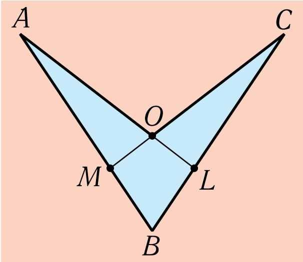


Рис. 3.53

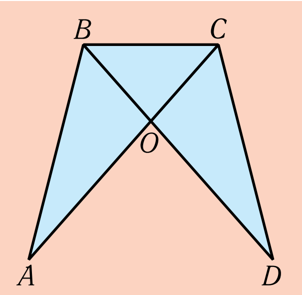


Рис. 3.54

292•. Доведіть, навівши відповідний приклад, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні і двом кутам іншого трикутника, то трикутники можуть бути й не рівними.

293•. Сторона і три кути одного трикутника дорівнюють стороні і трьом кутам іншого трикутника. Чи обов'язково рівні такі трикутники?

294•. Доведіть, що існують нерівні трикутники з відповідно рівними кутами.

295•. На бісектрисі кута A взято деяку точку K, а на сторонах кута — такі точки M і N, щоб кут AKM дорівнював куту AKN. Доведіть, що тоді пряма MN буде перпендикулярною до AK.

296•. Дано: $OA = OB$, $OC = OD$ (рис. 3.55). Доведіть, що $OE = OF$.

297•. На рис. 3.56 відображений спосіб побудови на місцевості для визначення відстані між точками A і B, розділених перешкодою для безпосереднього вимірювання. Спочатку на прямій BA в доступній її частині ставиться віха C. Потім ставиться віха в деякій точці O, і з допомогою візування та вимірювання знаходяться такі положення віх M, N на прямих OB та OC, для яких $OM = OB$, $ON = OC$. Нарешті, йдучи по прямій MN, за допомогою візування

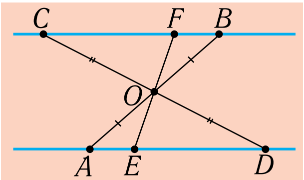


Рис. 3.55

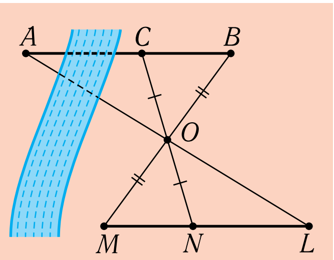


Рис. 3.56

знаходять на ній таку точка L, яка розміщена і на прямій AO. Тоді відстань ML, яку вже можна знайти безпосереднім вимірюванням, дорівнюватиме шуканій відстані BA. Обґрунтуйте правильність цього способу.

§16. Рівнобедрений трикутник і його властивості

Уроки 23–24

Трикутних є однією з найпоширеніших архітектурних форм, що застосовується як у проектуванні каркасів споруд, так і в декоруванні. При цьому як правило застосовуються трикутники, що мають рівні сторони. Такі трикутники називаються *рівнобедреними* і *рівносторонніми*.

Означення.

Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються *бічними сторонами*, а третя сторона — *основою*. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається *рівностороннім* або *правильним*.

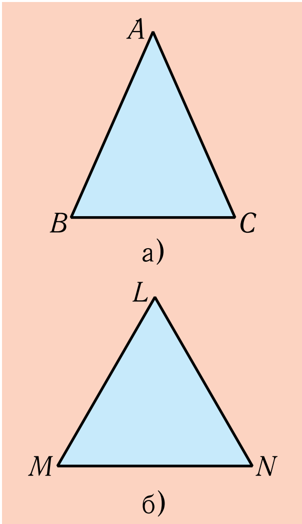


Рис. 3.57

Зазначимо також, що трикутник, у якого всі сторони різні, інколи називають різностороннім.

На рис. 3.57, а) зображено рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і AC та основою BC, а на рис. 3.57, б) — рівносторонній трикутник LMN.

Коли говорять про вершину рівнобедреного трикутника, то зазвичай мають на увазі ту із трьох його вершин, яка є протилежною до основи. Інші дві вершини називають вершинами при основі. На рис. 3.57, а) A — вершина рівнобедреного трикутника ABC, B і C — вершини при його основі.

На рис. 3.58 вміщена добірка ілюстрацій архітектурних споруд різних часів, стилів і призначення, які мають деталі у формі рівнобедрених трикутників. Та найвидатнішим пам’ятником рівнобедреному трикутнику безсумнівно стане паризька «Трикутна

Рис. 3.58

вежа» (La tour Triangle), якщо цей грандіозний «кришталевий» проект буде реалізований (на рис. 3.59 зображений його макет). Планується, що вежа матиме 42 поверхи та 180 м у висоту. Це буде третя за висотою споруда Парижа після знаменитої Ейфелевої вежі (1887 р., 324 м) та вежі Монпарнас (1972 р., 210 м). Будівництво вежі було заплановане на 2015–17 рр., однак після спеціального голосування депутатів паризької міської ради, що відбулося у

Рис. 3.59

листопаді 2014 р., відкладене на невизначений термін: серед громадськості побутує думка про надмірну дорожнечу проекту і про його шкідливість для природного та історико-культурного довкілля.

Найпростіше побудувати рівнобедрений трикутник за кутом при вершині і бічною стороною. Спочатку будують кут A, що має потрібну величину, а потім на його сторонах від вершини відкладають рівні відрізки AB і AC потрібної довжини (рис. 3.60). Сполучивши точки B і C відрізком, дістають рівнобедрений трикутник ABC із заданим кутом при вершині і заданою бічною стороною.

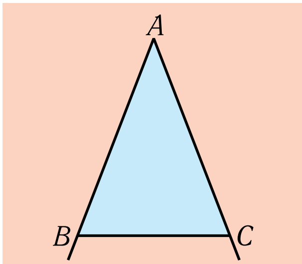


Рис. 3.60

Побудови ускладнюються, якщо трикутник повинен мати задані бічну сторону і основу. Для реалізації таких побудов потрібен циркуль. Зафіксуємо розхил циркуля на величину бічної сторони. Поставимо його ніжку в кінець B відрізка BC, що рівний основі трикутника, і проведемо дугу (рис. 3.61). Всі точки цієї дуги віддалені від точки B на одну й ту саму відстань, яка дорівнює величині розхилу циркуля. Якщо потім поставимо ніжку циркуля у точку C і тим самим розхилом проведемо ще одну дугу, то перетин обох дуг дасть точку A, яка віддалена від обох точок

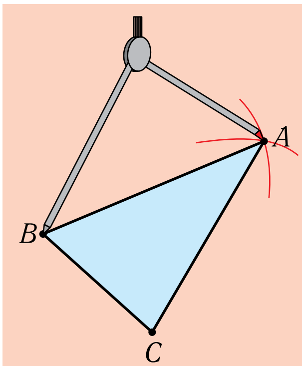


Рис. 3.61

B і C на величину розхилу циркуля, тобто на довжину заданої бічної сторони трикутника. Залишається тільки з допомогою лінійки провести відрізки AB і AC. Трикутник ABC — шуканий, BC — його основа, AB і BC — рівні бічні сторони.

Якщо виміряти за допомогою транспортира кути при основі побудованих рівнобедрених трикутників, то вони виявляться рівними. Це — властивість будь-якого рівнобедреного трикутника.

Провести доведення цієї властивості, а також сформулювати і довести інші властивості рівнобедрених трикутників зручно з використанням означень бісектриси, медіани і висоти трикутника.

Означення.

***Бісектрисою* трикутника називається відрізок бісектриси його внутрішнього кута, що сполучає вершину трикутника із точкою на протилежній стороні.**

На рис. 3.62 AL — бісектриса трикутника ABC, проведена з вершини A до протилежної сторони BC.

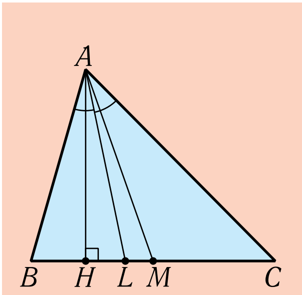


Рис. 3.62

Термін «бісектриса» запозичений з французької мови. У свою чергу, французьке слово bissectrice утворилося від латинських слів bis — «двічі» та secare — «розтинати» і дослівно означає «розтинати навпіл».

Означення.

***Медіаною* трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

На рис. 3.62 AM — медіана трикутника ABC, проведена з вершини A до середини M протилежної сторони BC.

Термін «медіана» утворений від латинського слова medius — середній.

Означення.

***Висотою* трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

На рис. 3.62 AH — висота трикутника ABC, проведена з вершини A до прямої, що містить протилежну сторону BC.

Теорема

(про властивості рівнобедреного трикутника).

Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівних трикутники, а також є медіаною й висотою трикутника. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Доведення. Нехай AL — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC, проведена з вершини A до основи BC (рис. 3.63). Оскільки, за означенням рівнобедреного трикутника, $AB = AC$, а за означенням бісектриси, $\angle BAL = \angle CAL$, то, за першою ознакою рівності трикутників, $\Delta ALB = \Delta ALC$. Отже, справді, бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівних трикутники.

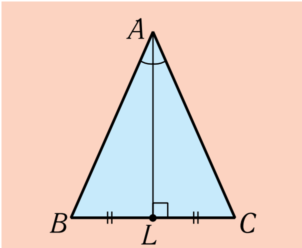


Рис. 3.63

З рівності трикутників ALB і ALC випливає, що $BK = CK$. Отже, AL — медіана трикутника ABC. Крім цього, $\angle AKB = \angle AKC$, а оскільки ці кути утворюють розгорнутий кут, то вони — прямі. Отже, AL — висота трикутника ABC. Нарешті, $\angle B = \angle C$, а тому кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. Теорему доведено.

Оскільки доведеною теоремою встановлено, що бісектриса, медіана й висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то істинними є й такі твердження:

1) медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є водночас бісектрисою і висотою;

2) висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є водночас бісектрисою і медіаною.

Безпосереднім наслідком з доведеної теореми є наступна теорема.

Теорема

(про властивість кутів рівностороннього трикутника).

Всі кути рівностороннього трикутника рівні і дорівнюють по 60°.

Доведення. Нехай маємо рівносторонній трикутник ABC (рис. 3.64). З рівності його сторін AB і AC за доведеною теоремою випливає рівність кутів 1 і 2, а з рівності сторін BA і BC — рівність кутів 2 і 3. Отже, всі три кути рівностороннього трикутника рівні. А оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то кожен із кутів 1, 2, 3 дорівнює третині від цієї суми, тобто 60°. Теорему доведено.

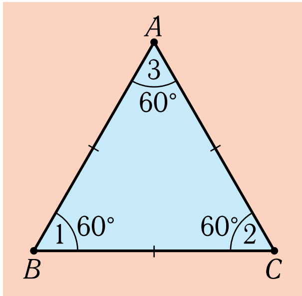


Рис. 3.64

Застосування у конструкції старовинних ватерпасів

Ватерпас — прилад для перевірки горизонтального розміщення прямолінійних предметів, наприклад, рейок і брусів. Найпростіший ватерпас, що застосовувався колись у будівництві, складався із дерев'яного рівнобедреного трикутника ABC, до основи AB якого прилягала вивірена рівна дошка FG, а до вершини C на нитці підвішувався тягарець E (рис. 3.65). Якщо тягарець розміщувався строго над зубцем D, який уособлював середину основи AB, то це означало, що нитка CE спрямована по медіані CD рівнобедреного трикутника ABC, а отже, й по його висоті. Тоді дошка FG — перпендикулярна до лінії CE дії сили тяжіння, тобто займає горизонтальне положення. У противному разі її положення не є горизонтальним.

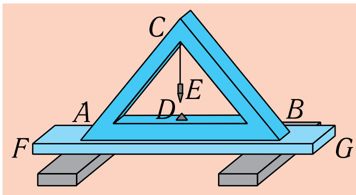


Рис. 3.65

Лише знаючи ці обставини, можна розгадати значення ватерпаса, з яким французькі художники XIX ст. зображали Маріанну — символічний образ французької республіки. На рис. 3.66 відтворений один із найвідоміших таких творів — картина Жуля Клода Зіглера «Республіка» (1848 р.). У правій руці Маріанна тримає ватерпас, яким урівноважує три найголовніші чесноти республіки, записані за нею золотистими літерами (теж у вершинах рівнобедреного трикутника): Свобода, Рівність Братерство (Liberté, Égalité, Fraternité).

Рис. 3.66

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Яким може бути розміщення висот у трикутнику

З означення бісектриси і медіани трикутника очевидно, що ці відрізки проходять усередині трикутника (див. рис. 3.62, на якому AL — бісектриса, AM — медіана трикутника ABC). Щодо висоти AH, то ситуація не така очевидна. На рис. 3.67, а) відображений випадок, коли обидва кути B і C — гострі. Доведемо, що в усіх таких випадках висота AH проходить усередині трикутника.

Припустимо супротивне. Можливі дві ситуації: або точка H лежить ближче до точки B, ніж до точки C (рис. 3.67, б), або точка H лежить ближче до точки C, ніж до точки B (рис. 3.67, в). При першій ситуації зовнішній кут ABC прямокутного трикутника ADB, який є гострим кутом трикутника ABC, був би більшим за прямий внутрішній кут H, що неможливо. При другій ситуації з аналогічних причин гострий кут C трикутника ABC був би більшим за прямий кут H трикутника AHC. Оскільки жодна із цих ситуацій неможлива, то зроблене припущення неправильне. Отже, висота AH трикутника у цьому разі справді проходить усередині трикутника.

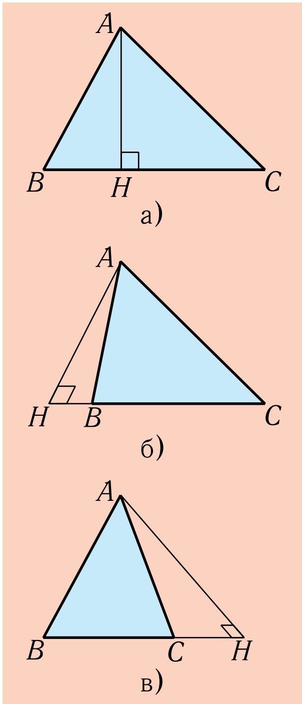


Рис. 3.67

Якщо у трикутнику всі кути гострі, тобто трикутник є гострокутним, то з доведеного випливає, що тоді всі три його висоти проходять усередині трикутника (рис. 3.68). На уроках геометрії у 8 класі буде доведено, що всі вони перетинаються в одній точці.

Якщо ж у трикутнику ABC один із кутів B або C є прямим, то очевидно, що тоді висота AH збігається з однією зі сторін, яка прилягає до прямого кута (рис. 3.69). Інша сторона прямого кута міститиме другу висоту трикутника, а третя висота, як доведено вище (оскільки кути A і C — гострі), проходитиме всередині трикутника. Тоді й без доведення очевидно, що всі три висоти перетинаються в одній точці — у вершині прямого кута.

Нехай тепер один із кутів B або C трикутника ABC, наприклад, B — тупий. Тоді висота AH проходитиме ззовні трикутника (рис. 3.70, а). Справді, якщо припустимо супротивне (рис. 3.70, б), то матимемо, що зовнішній кут AHC прямокутного трикутника AHB, який є прямим, більший за тупий внутрішній кут B. Оскільки таке неможливе, то припущення неправомірне. Отже, висота AH трикутника в цьому разі справді проходить ззовні трикутника.

У трикутнику може бути лише один тупий кут, і тоді два інші його кути обов'язково гострі. Тому одна з висот тупокутного трикутника проходить усередині трикутника, а дві інші — ззовні нього (рис. 3.71).

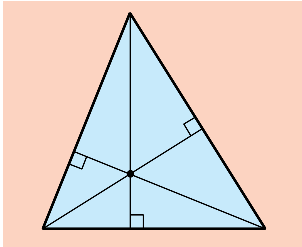


Рис. 3.68

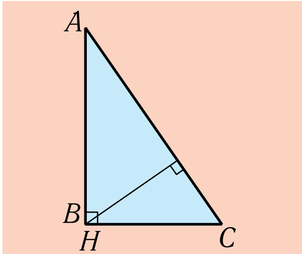


Рис. 3.69

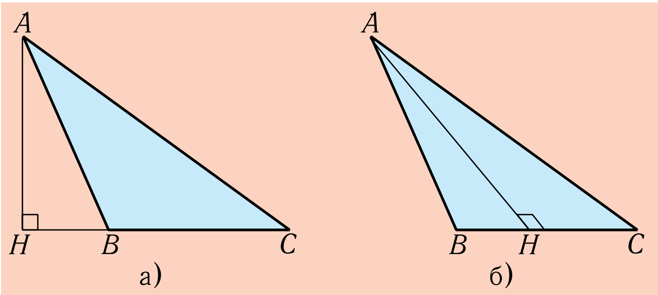


Рис. 3.70

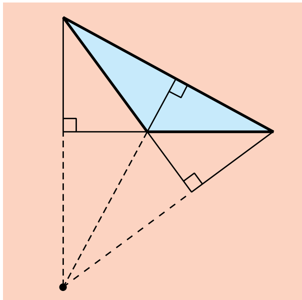


Рис. 3.71

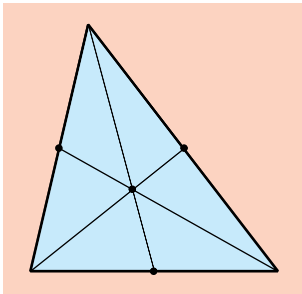


Рис. 3.72

У 8 класі буде доведено, що всі три прямі, які містять ці висоти, перетинаються в одній точці.

Принагідно зазначимо, що всі три медіани і всі три бісектриси трикутника також перетинаються в одній точці. Для медіан цю властивість (рис. 3.72) буде теж доведено у 8 класі, а для бісектрис — уже невдовзі, при вивченні останнього розділу цього підручника.

Вправи і задачі

298°. Накресліть кут A, що дорівнює 70°, і проведіть його бісектрису. Потім через точку L бісектриси, яка знаходиться на відстані 5 см від точки A, проведіть пряму, перпендикулярну до бісектриси, і позначте буквами B і C точки перетину цієї прямої зі сторонами кута A. Виміряйте сторони і кути трикутника ABC. Які висновки про вид цього трикутника ви зробите?

299°. Накресліть відрізок BC завдовжки 5 см, а потім за допомогою циркуля опишіть розхилом 5 см два кола із центрами B, C. Нехай A і D — точки перетину цих кіл. Сполучіть відрізками кожну з точок A і D з точками B і C. До якого виду належать одержані трикутники ABC і DBC? Чому дорівнюють їхні кути?

300°. На рис. 3.73 зображена арка над вхідними дверми готичного кафедрального собору в Севільї (Іспанія) (собор зведений у 1506 р.). Арка вписується у декоративний трикутник. Визначте з допомогою вимірювання кути цього трикутника. До якого виду (за сторонами і за кутами) він належить?

Рис. 3.73

301°. На рис. 3.74 відтворена одна із композицій художника-абстракціоніста В. Кандинського, на якій, як уважається, з допомогою послідовності трикутників відображено перехід земної і людської енергії (тепліші кольори) у космічну (холодні кольори). Чи є тут геометрично рівні фігури?

302°. У трикутнику LMN $MN = LN$. Чи є в цьому трикутнику рівні кути? Чому вони дорівнюють, якщо кут N дорівнює 100°?

303°. У трикутнику ABC сторони, які прилягають до кута C, рівні. Рівні також кути, що прилягають до сторони AC. Яким є цей трикутник?

304°. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 18 см. Визначте довжину його сторони.

305°. Визначте периметр рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 7 см, а основа на 3 см менша від бічної сторони.

306°. Доведіть, що зовнішні кути при вершинах основи рівнобедреного трикутника рівні.

307°. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 120°. Визначте кути при основі трикутника.

308°. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 45°. Визначте кут між його бічними сторонами.

309°. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Визначте зовнішні кути при вершинах основи.

310°. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Визначте зовнішній кут при вершині.

Рис. 3.74

311°. Доведіть, що коли основа й кут при основі одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й куту при основі іншого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.

312°. Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо бічна сторона й кут при вершині одного трикутника дорівнюють відповідно бічній стороні й куту при вершині іншого трикутника.

313. На рис. 3.75 подано дві світлини, на яких у різних ракурсах зображено споруду Музею сучасного мистецтва у Клівленді (США, штат Огайо), зведену

Рис. 3.75

за проектом британської архітекторки іранського походження Фаршид Муссаві (нар. 1965 р.) (музей відкритий для відвідувачів у серпні 2012 р.). Як ви гадаєте, які трикутники взяті за основу цього проекту, і скільки їх? Точніше відповісти на ці запитання вам допоможе каркасна модель споруди, зображена на рис. 3.76.

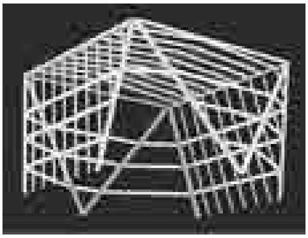


Рис. 3.76

314. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а його бічна сторона вдвічі більша за основу. Визначте довжини сторін цього трикутника.

315. Основа й бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться, як 2 : 3. Визначте сторону цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 16 см.

316. Визначте основу рівнобедреного трикутника, якщо вона на 5 дм менша від його бічної сторони, а периметр трикутника дорівнює 46 дм.

317. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 2 см, але менша від суми бічних сторін на 3 см. Визначте сторони трикутника.

318. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а його периметр — 19 см. Визначте сторони цього трикутника.

319. Медіана рівнобедреного трикутника ділить його периметр на частини, що дорівнюють 9 см і 12 см. Визначте сторони трикутника.

320. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 дм, а одна з його сторін удвічі більша за іншу. Визначте сторони трикутника. Розгляньте два випадки.

321. Дано: $CA = CB$, $AM = BN$, $\angle A = \angle B$ (рис. 3.77). Доведіть, що трикутник CMN — рівнобедрений.

322. Дано: $DA = DB$, $\angle CDA = \angle CDB$ (рис. 3.78). Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

323. Дано: $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$ (рис. 3.79). Доведіть, що трикутник BCD — рівнобедрений.

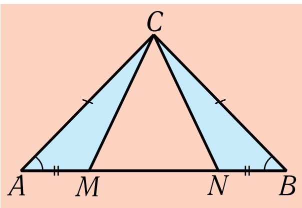


Рис. 3.77

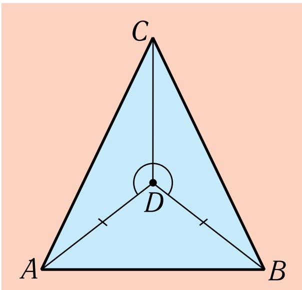


Рис. 3.78

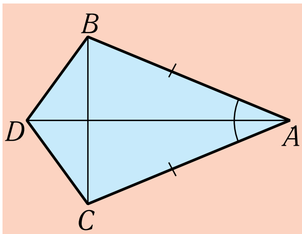


Рис. 3.79

324. Доведіть, що у рівносторонньому трикутнику: а) усі медіани рівні; б) усі висоти рівні; в) усі бісектриси рівні.

325. Доведіть, що у рівних трикутниках медіани, проведені до рівних сторін, рівні між собою.

326. Доведіть, що якщо у трикутнику ABC сторони AB і AC не рівні, то медіана AM цього трикутника не є його висотою.

327. На бічних сторонах CA і CB рівнобедреного трикутника ABC від його вершини C відкладено рівні відрізки CM і CN (рис. 3.80). Доведіть, що відрізки AN і BM рівні.

328. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BM. На сторонах AB і CB позначено відповідно точки E та F так, що $AE = CF$. Доведіть, що $\Delta BME = \Delta BMF$, а $\Delta AME = \Delta CMF$.

329. На рис. 3.81 периметр рівнобедреного трикутника ABC з основою AC дорівнює 40 см, а периметр рівностороннього трикутника ABD дорівнює 45 см. Визначте сторони трикутника ABC.

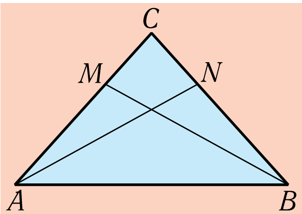


Рис. 3.80

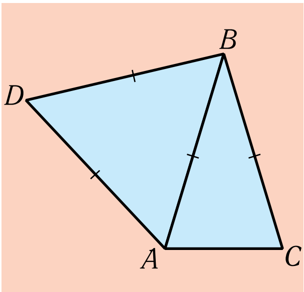


Рис. 3.81

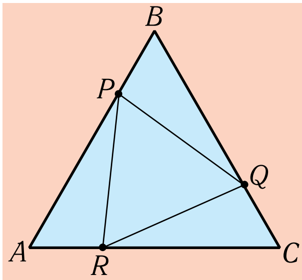


Рис. 3.82

330•. Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами іншого рівнобедреного трикутника.

331•. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні. Чи істинні аналогічні твердження стосовно бісектрис і висот?

332•. Доведіть, що коли у трикутнику дві висоти є бісектрисами, то цей трикутник — рівносторонній.

333•. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BQ і CR (рис. 3.82). Доведіть, що трикутник PQR — рівносторонній.

334•. Рівнобедрені трикутники ABC і DBC мають спільну основу BC (рис. 3.83, а, б). Доведіть, що в кожному можливому випадку взаємного розміщення цих трикутників $\Delta BAD = \Delta CAD$. Доведіть також, що пряма AD проходить через середину відрізка BC.

335•. У рівнобедреному трикутнику ABC бічні сторони AB і BC дорівнюють по 18 см. Через середину M сторони AB проведено пряму, перпендикулярну до

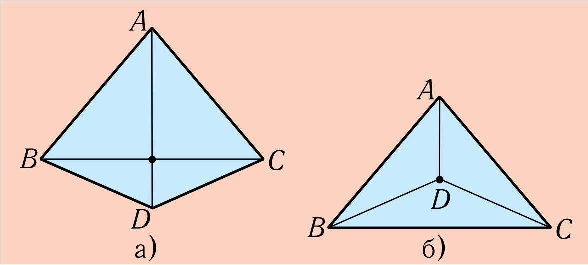


Рис. 3.83

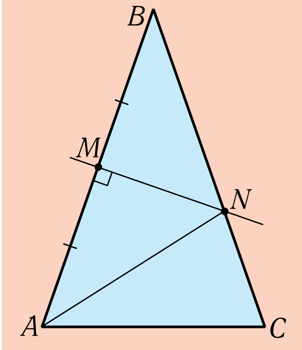


Рис. 3.84

цієї сторони. Проведена пряма перетинає сторону BC в точці N (рис. 3.84). Визначте основу AC, якщо периметр трикутника ANC дорівнює 27 см.

§17. Ознаки рівнобедреного трикутника

У попередньому параграфі було розглянуто два способи побудови рівнобедрених трикутників — за кутом при вершині і бічною стороною та за основою і бічною стороною. Існує доволі простий спосіб побудови за основою і кутом при основі.

Нехай BC — задана основа (рис. 3.85). Відкладемо від променів BC і CB в одну й ту саму півплощину кут заданої величини. Нехай A — точка перетину сторін цих кутів, які не належать прямій BC. Тоді ABC — шуканий рівнобедрений трикутник: BC — його основа, $\angle B$ і $\angle C$ — задані кути при основі.

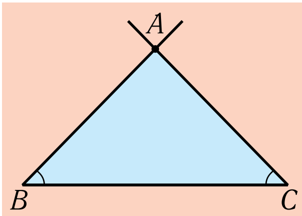


Рис. 3.85

Стверджувати це можна на підставі ознаки рівнобедреного трикутника, яку ми зараз же й доведемо.

Теорема
(ознака рівнобедреного трикутника за кутами).

Якщо у трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $\angle B = \angle C$ (рис. 3.86). Проведемо бісектрису AL. Дістанемо два трикутники ALB та ALC зі спільною стороною AL. Оскільки в них рівні дві пари кутів: $\angle B = \angle C$ і $\angle BAL = \angle CAL$, то рівні й треті кути: $\angle ALB = \angle ALC$ (адже сума кутів трикутника дорівнює 180°). Тому за спільною стороною AL і прилеглими до неї кутами (тобто за другою ознакою), $\Delta ALB = \Delta ALC$. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений. Теорему доведено.

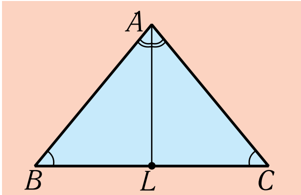


Рис. 3.86

Довести останню теорему можна інакше, без додаткових побудов і без посилання на теорему про суму кутів трикутника. Застосуємо другу ознаку рівності трикутників до трикутника ABC і трикутника ACB — того самого трикутника ABC, але «перевернутого» (рис. 3.87). Оскільки сторона BC дорівнює стороні CB, $\angle C = \angle B$, а $\angle B = \angle C$, то $\Delta ABC = \Delta ACB$. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

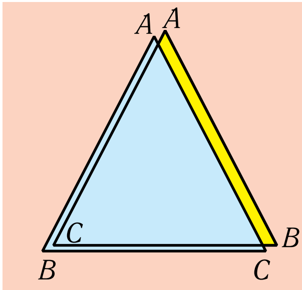


Рис. 3.87

Наслідок.

Трикутник, у якому всі кути рівні (по 60°), є рівностороннім.

Доведення цього наслідку проведіть самостійно.

Доведена ознака є оберненою теоремою до одного із тверджень теореми про властивості рівнобедреного трикутника, доведеної у попередньому параграфі. Іншим висновком тієї теореми було твердження про те, що у рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються. Ця властивість теж характерна лише для рівнобедрених трикутників, тобто є їхньою ознакою. Точніше, цих ознак аж три: по тому, які два із згаданих відрізків збігаються.

Теорема
(ознаки рівнобедреного трикутника за відрізками).

Якщо у трикутнику збігаються які-небудь два із трьох відрізків, що є медіаною, висотою і бісектрисою, проведеними з однієї вершини, то трикутник — рівнобедрений.

Доведення. **1.** Нехай AL — одночасно медіана й висота трикутника ABC (див. рис. 3.86), тобто $LB =$ $= LC$ і $AL \perp BC$. Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за першою ознакою. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

2. Нехай AL — висота і бісектриса трикутника ABC (див. рис. 3.86). Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за другою ознакою, оскільки катет AL у них спільний, а прилеглі до нього гострі кути BAL і CAL рівні. Звідси $AB = AC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

3. Нехай AL — медіана і бісектриса (рис. 3.88). Продовжимо медіану AL на таку саму довжину $LA_1 = AL$ і сполучимо точку A_1 з точками B і C. $\Delta A_1LB = \Delta ALC$ (кути при вершині L рівні як вертикальні, а сторони, що утворюють ці кути, рівні за умовою й за побудовою). Звідси $\angle BA_1L = \angle CAL$. За умовою $\angle CAL = \angle BAL$. Отже, $\angle BA_1L = \angle BAL$. Тоді, за попередньою теоремою, трикутник BAA_1 — рівнобедрений і, отже, медіана BK у ньому є висотою, тобто $BL \perp AL$. Виходить, що відрізок AL є висотою у трикутнику ABC. Отже, за доведеним у першому або другому пункті цієї теореми, трикутник ABC — рівнобедрений. Теорему доведено.

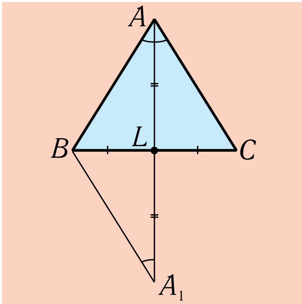


Рис. 3.88

Розв’язуємо разом

Задача.

У трикутнику ABC бісектриси кутів B і C перетинаються в точці Q (рис. 3.89). Через точку Q проведено відрізок MN, паралельний основі BC, кінці якого належать бічним сторонам трикутника. Довести, що відрізок MN дорівнює сумі відрізків BM і CN.

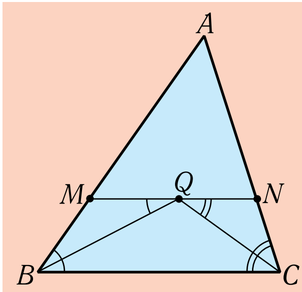


Рис. 3.89

Розв’язання. За означенням бісектриси, $\angle MBQ = \angle QBC$, а за властивістю паралельних прямих, $\angle QBC = \angle BQM$ ($MN \parallel BC$, BQ — січна). Отже, у трикутнику MBQ $\angle MBQ = \angle BQM$. Тому цей трикутник рівнобедрений і в ньому $MQ = BM$.

Так само з’ясовуємо, що рівнобедреним є трикутник NCQ і в ньому $QN = CN$.

Додавши одержані рівності, матимемо: $MQ + QN = BM + CN$, а звідси $MN = BM + CN$. Твердження задачі доведено.

Вправи і задачі

336°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а кут при основі 35°. Визначте кут при вершині побудованого трикутника.

337°. У трикутнику є два рівні кути. Що можна стверджувати про його сторони? Чи можна стверджувати, що цей трикутник рівносторонній?

338°. Один учень якось сказав: «Рівносторонній трикутник є рівнокутнім». Що він мав на увазі? Чи правильно він висловився?

339°. У трикутнику ABC кути, що прилягають до сторони BC, рівні. Рівні також сторони, що прилягають до кута B. Що це за трикутник?

340°. Чому дорівнюють зовнішні кути рівностороннього трикутника?

341°. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють по 120°. Доведіть, що цей трикутник рівносторонній.

342°. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC зовнішній кут при вершині A дорівнює 150°. Визначте кути при основі трикутника.

343°. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$, BL — бісектриса кута A. Доведіть, що $BL = LB$.

344°. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$, $BM = MC$. Доведіть, що $AM \perp BC$.

345°. У рівнобедреному трикутнику один із кутів при основі дорівнює 45°. До якого виду (за кутами) належить цей трикутник?

346°. Дано: $AB = AC$ (рис. 3.90). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

347°. Дано: $AB = BC$, $\angle B = 65°$ (рис. 3.91). Визначте $\angle ACD$.

348°. Основа й прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі й прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи рівні ці трикутники?

349. На рис. 3.92 $BH = HC$, $AH \perp BC$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений. Запропонуйте на цій підставі спосіб побудови рівнобедреного трикутника за основою і висотою, використовуючи лінійку і косинець.

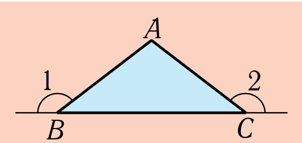


Рис. 3.90

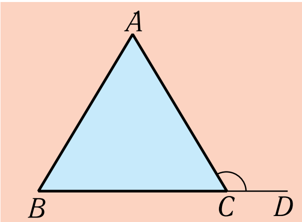


Рис. 3.91

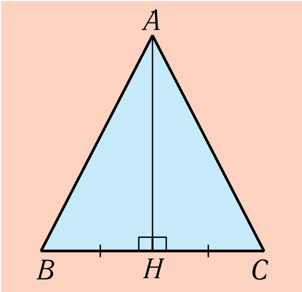


Рис. 3.92

350. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Чому дорівнюють внутрішні кути цього трикутника?

351. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його основі удвічі більший за кут при вершині, яка протилежна основі.

352. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: а) 50°; б) 110°.

353. Чому дорівнюють кути, що утворюються при перетині двох бісектрис рівностороннього трикутника?

354. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них учетверо більший за інший. Розгляньте два випадки.

355. Один із кутів рівнобедреного трикутника на 48° більший за інший. Визначте кути цього трикутника. Розгляньте два випадки.

356. Доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює половині зовнішнього кута при його вершині.

357. Дано: ΔABC — рівнобедрений; $MN \parallel AB$ (рис. 3.93). Доведіть, що ΔMNC теж рівнобедрений.

358. Доведіть, що пряма, яка перетинає бічну сторону рівнобедреного трикутника і паралельна іншій його бічній стороні, відтинає від даного трикутника рівнобедрений трикутник.

359. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 3.94). Доведіть, що $AC = BC$.

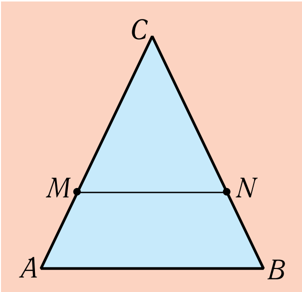


Рис. 3.93

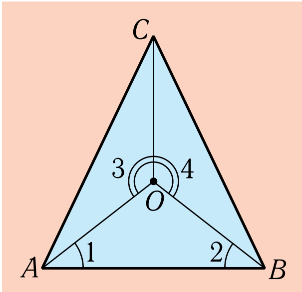


Рис. 3.94

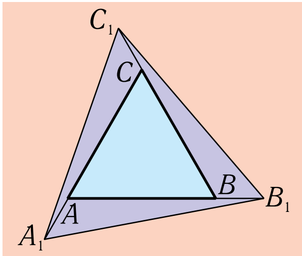


Рис. 3.95

360. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі рівні.

361. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні.

362. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = BN$. З точок M, N до AB поставлено перпендикуляри MP і NQ, які перетинають бічні сторони трикутника відповідно у точках P і Q. Доведіть, що $PM = QN$.

363. Доведіть, що в рівних трикутниках рівними є бісектриси і висоти, проведені з вершин рівних кутів.

364. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за рівними висотою, проведеною до основи, і кутом при вершині, протилежній цій основі.

365. Дано: ΔABC — рівносторонній, $BB_1 = CC_1 = AA_1$ (рис. 3.95). Доведіть, що $\Delta A_1B_1C_1$ — теж рівносторонній.

366•. Один із кутів між бісектрисами кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 124°. Визначте кути трикутника.

367•. Два зовнішні кути рівнобедреного трикутника відносяться, як 2 : 5. Визначте внутрішні кути трикутника.

368•. Дано: ΔABC — рівносторонній, $\angle RAC = \angle PBA = \angle QCB$ (рис. 3.96). Доведіть, що ΔPQR теж рівносторонній.

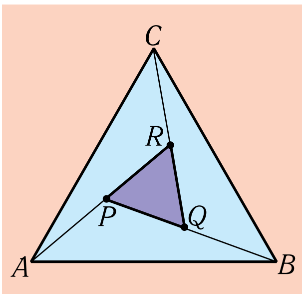


Рис. 3.96

369°. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, а $\angle B = 60°$. На продовженнях сторони AB відкладено відрізки $AD = AC$ і $BF = BC$ (рис. 3.97) . Визначте кути трикутника CDF.

370°. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC з вершин A і C проведені медіани, що перетинаються в точці G. Доведіть, що трикутник AGC — рівнобедрений.

371°. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 3.98). Доведіть, що $AB \perp CD$.

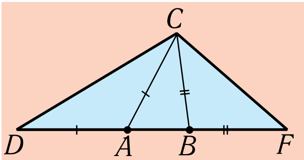


Рис. 3.97

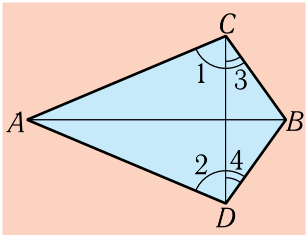


Рис. 3.98

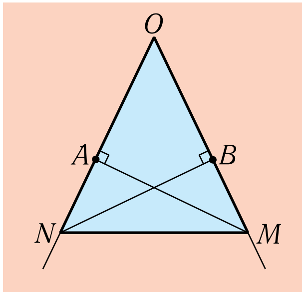
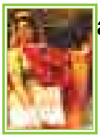


Рис. 3.99


ано: $AO = OB$; $AM \perp OA$, $BN \perp OB$ (рис. 3.99). Доведіть, що $\angle AMN = \angle BNM$.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Фалес і зародження великої грецької на

На початку VI ст. до н. е. виник новий потужний центр культурного життя стародавнього світу — Греція. Завдячуючи новій демократичній формі правління, в грецьких містах-державах з небаченою до того інтенсивністю розвивалися мистецтва. З'явилися й філософські школи, в яких проводилися інтелектуальні пошуки єдиних принципів світобудови і справедливих законів облаштування суспільного життя. Легендарним уособленням цього руху до знань, «найпершим з грецьких мудреців», вважають Фалеса.

Фалес народився в азійській грецькій колонії Мілет. У молоді роки, ймовірно, був купцем і здійснив декілька подорожей до Єгипту і Вавилонії. Там він прилучився


Фалес

до скарбниці східної мудрості, а повернувшись на батьківщину, заснував першу наукову школу.

Зокрема, Фалес — перший з учених, з чиїм ім'ям пов'язують доведення конкретних геометричних істин. Учений V ст. н. е. Прокл Діодох у своїх коментарях до «Начал» Евкліда, посилаючись на втрачену «Історію геометрії» Євдема Родоського (IV ст. до н.е.), стверджує, що Фалес першим відкрив, що при перетині двох паралельних прямих січною утворюються рівні відповідні кути. Відкрив Фалес і теорему про рівність двох трикутників, у яких рівні сторони і два прилеглих до неї кути. Євдем приписує це відкриття саме Фалесу на тій підставі, що без нього неможливо вирішити задачу про знаходження відстані до корабля на морі, яку, за легендою, вирішив Фалес. Досі достеменно невідомо, яким саме було розв'язання Фалеса. Найімовірніші два варіанти — «горизонтальний» і «вертикальний».

Фалес (третій зліва, що вказує на небесну сферу) серед легендарних сімох мудреців давнини. Помпейська мозаїка I ст. до н. е.

Серед «наймудріших» Фалес був єдиним представником від природознавчої науки. Усі інші — правителі та законодавці. Їхні список непостійний. Крім Фалеса, майже завжди називаються тільки афінянин Солон та спартанець Хілон.

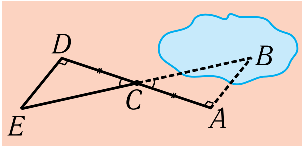


Рис. 3.100

«Горизонтальний спосіб». Для визначення відстані від доступної точки A до недосяжної точки B (наприклад, до корабля на морі) на рівній місцевості беруть який-небудь відрізок AD (рис. 3.100) і фіксують його середину C. Потім через точку D проводять промінь DE під тим самим кутом до відрізка AD, під яким його перетинає промінь AB, але у протилежному до AB напрямку. Нарешті, на промені DE знаходять таку точку E, щоб точки E, C і B розміщувалися на одній прямій. Тоді довжина відрізка DE дорівнюватиме шуканій відстані AB.

Справді, оскільки у трикутниках CAB і CDE за побудовою $AC = CD$, $\angle A = \angle D$, а $\angle ACB = \angle DCE$ (як вертикальні), то, за другою ознакою, ці трикутники рівні. Тому рівними є і їхні сторони, які лежать проти рівних кутів, зокрема, $AB = DE$.

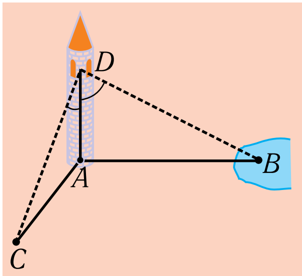


Рис. 3.101

«Вертикальний» спосіб вимірювання міг полягати у визначенні кута зору ADB на недосяжний предмет B з позиції D, розташованої на скелі чи на вежі (рис. 3.101) з наступною пеленгацією під цим кутом певного об'єкта C на суші, відстань до якого відома. Тоді шукана відстань AB дорівнює відомій відстані AC. Це випливає з рівності (за другою ознакою) прямокутних трикутників DAB і DAC.

Серед інших геометричних фактів, доведення яких Євдем приписує Фалесу, — теорема про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. Незважаючи на всю свою очевидність і, здавалося б, тривіальність, цей факт використовується у геометрії надзвичайно часто, зокрема, при доведенні інших дуже важливих теорем. І серед них — третя ознака рівності трикутників, яку ми вивчатимемо у наступному параграфі.

§18. Третя ознака рівності трикутників

Уроки 27–28

Практичний досвід переконує, що трикутні форми не піддаються деформації. У зв'язку із цим для посилення великих несучих конструкцій, наприклад, ферм підйомних кранів, перекидних мостів, великих перекриттів тощо їх часто укріплюють численними трикутними перемичками (рис. 3.102, 3.103). Юний експериментатор, якого ви бачите на рис. 3.104, в ефективності цього прийому переконався дослідним шляхом, а от сконструювати з трикутників бамбукові ноші, зображені на рис. 3.105, мабуть, допомогла інтуїція. Для створення ж конструкцій, схожих на головну спортивну арену для Всесвітньої літньої універсіади в Шеньчжені 2011 р. (рис. 3.106), потрібна була та ж інтуїція і глибока науково-інженерна думка.

Рис. 3.102

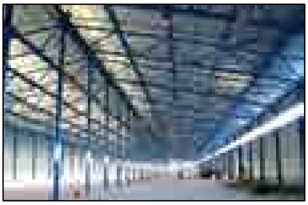


Рис. 3.103

Рис. 3.104

Причиною жорсткості трикутних форм є те, що трикутник повністю визначається своїми сторонами. Це означає, що справджується така третя ознака рівності трикутників.

Рис. 3.105

Теорема

(третя ознака рівності трикутників — за трьома сторонами).

Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Рис. 3.106

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 3.107). Потрібно довести, що ці трикутники рівні.

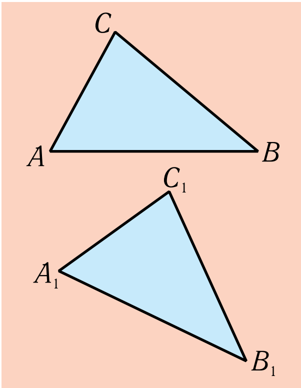


Рис. 3.107

Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сторона A_1B_1 сумістилася зі стороною AB, а вершина C_1 розміститься з протилежного боку до точки C відносно прямої AB (рис. 3.108). Таке переміщення можливе — за аксіомою рухомості трикутника. Проведемо, далі, відрізок CC_2. Оскільки $AC = AC_1$, $BC = BC_1$, то трикутники ACC_1 і BCC_1 рівнобедрені. Тому $\angle ACC_2 = \angle AC_1C$, $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$.

Можливі три випадки взаємного розміщення відрізків AB і CC_1:

1) перетин у внутрішній точці відрізка AB (рис. 3.108, а);

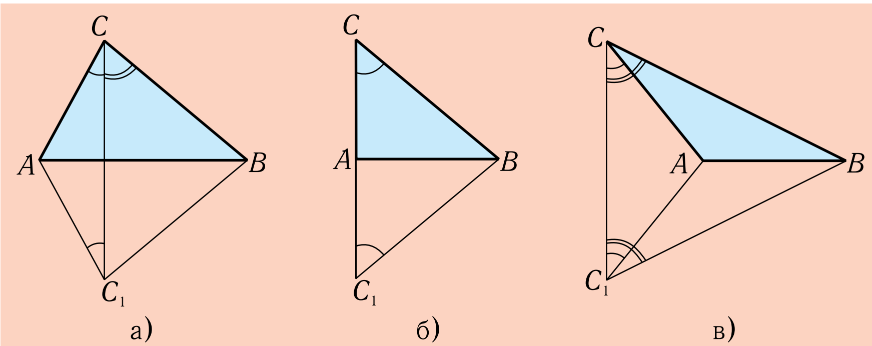


Рис. 3.108

2) перетин в одному з кінців відрізка AB (рис. 3.108, б);

3) відсутність точки перетину (рис. 3.108, в).

В усіх трьох випадках рівними є кути ACB та AC_1B. У першому випадку вони дорівнюють сумі рівних кутів, у третьому — різниці, а в другому — є кутами при основі рівнобедреного трикутника BCC_1. Отже, у кожному випадку трикутники ABC і ABC_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

Цю ознаку можна довести інакше. Сумістимо, як і в першому способі, сторони AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, а вершину C_1 розмістимо з того боку від прямої AB, де розміщена точка C (рис. 3.109). Тоді достатньо буде довести, що точки C і C_1 збігаються.

Припустимо, що це не так і позначимо через M середину відрізка CC_1. Матимемо два рівнобедрених трикутники ACC_1 і BCC_1 зі спільною основою CC_1, а їхні медіани AM і BM будуть одночасно й висотами. Точки A, B і M не можуть лежати на одній прямій, оскільки відрізок CC_1, що містить точку M, весь лежить з одного боку від прямої AB. Виходить, що через точку M проходить дві прямі AM і BM, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої CC_1. Оскільки таке неможливе, то зроблене припущення неправомірне. Отже, точки C і C_1 збігаються. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

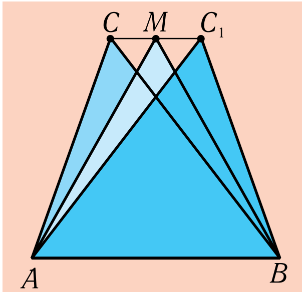


Рис. 3.109

Розв’язуємо разом

Задача.

Довести, що коли відрізки AB і DC, AD і BC попарно рівні (рис. 3.110), то вони попарно паралельні.

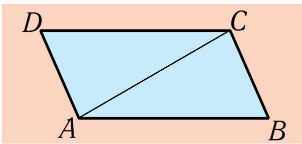
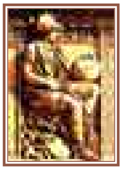


Рис. 3.110

Розв’язання. Проведемо відрізок AC і розглянемо трикутники ABC і CDA. Вони рівні, за третьою ознакою. З рівності цих трикутників випливає, що $\angle CAB =$

$= \angle ACD$, а $\angle BCA = \angle DAC$. Ці кути є внутрішніми різносторонніми для пар прямих AB і DC, AD і BC та січної AC. Тому, за ознакою паралельності, $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. Твердження задачі доведено.



Вправи і задачі

373°. Чи рівні трикутники, зображені на рис. 3.111 (розміри сторін подані у сантиметрах)? Як їх можна сумістити?

374°. Чи рівні віконця, зображені на рис. 3.112? Чи можна їх поміняти місцями? Відповідь поясніть.

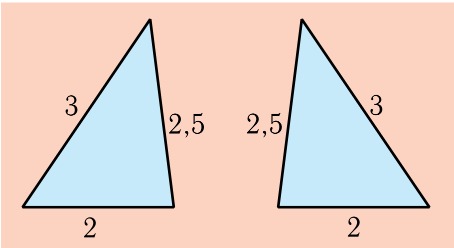


Рис. 3.111

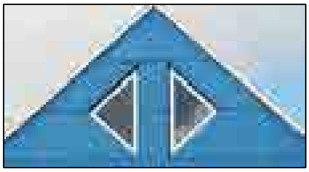


Рис. 3.112

375°. Чи будуть рівними рівносторонні трикутники, якщо вони мають рівні периметри?

376°. Периметри двох трикутників рівні. Чи випливає звідси рівність трикутників?

377°. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB, зображених на рис. 3.113.

378°. Доведіть рівність трикутників ABC і DBC, зображених на рис. 3.114.

379°. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 3.115). Доведіть, що $\angle A = \angle C$.

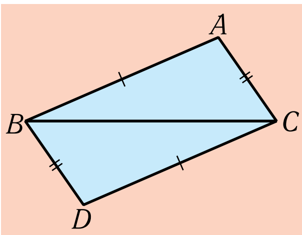


Рис. 3.113

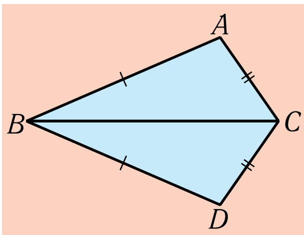


Рис. 3.114

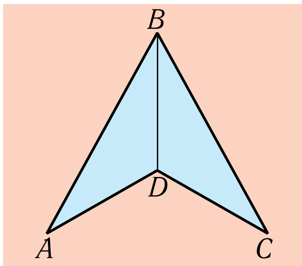


Рис. 3.115

380°. Доведіть, що коли основа й бічна сторона одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі й бічній стороні іншого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.

381. На рис. 3.116 $AB = DC$, $AC = DB$. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB.

382. На рис. 3.116 $AB = DC$, $AC = DB$. Доведіть рівність трикутників AOB і DOC.

383. На рис. 3.117 $\Delta ABD = \Delta CDB$. Доведіть, що $\Delta DAC = \Delta BCA$.

384. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (див. рис. 3.115). Доведіть, що BD — бісектриса кута B.

385. На рис. 3.118 $AB = LM$, $AC = LN$, $BN = CM$. Доведіть, що трикутник ONC — рівнобедрений.

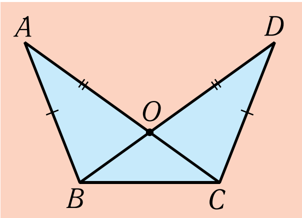


Рис. 3.116

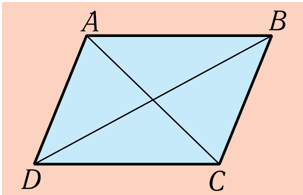


Рис. 3.117

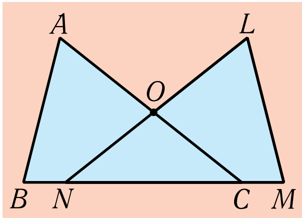


Рис. 3.118

386. Дано: $AC = BD$, $OC = OD$ (рис. 3.119). Доведіть, що $AD = BC$.

387. Дано: $AC = BD$, $AD = BC$ (рис. 3.119). Доведіть, що $OC = OD$.

388. Дано: $AB = AD$, $BC = CD$ (рис. 3.120). Доведіть, що $\angle BAO = \angle DAO$, $\angle BCO = \angle DCO$, $BO = OD$, $AC \perp BD$.

389. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і ця точка є серединою кожного з них. Доведіть, що $\Delta ACD = \Delta BDC$.

390. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC взято точку M, рівновіддалену від вершин B і C. Доведіть, що промінь AM перпендикулярний до BC і є бісектрисою кута A.

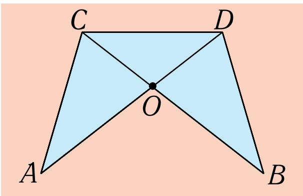


Рис. 3.119

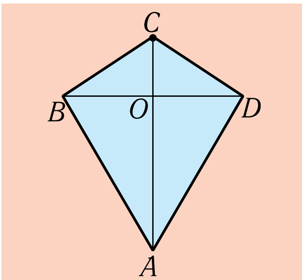


Рис. 3.120

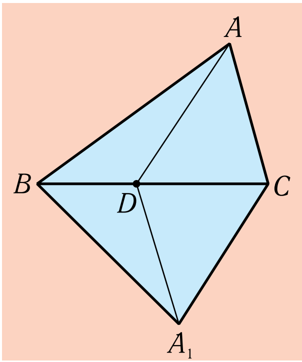


Рис. 3.121

391•. Точки B, D і C лежать на одній прямій, а $\Delta ABC = \Delta A1BC$ (рис. 3. 121). Доведіть, що тоді $\Delta ADC = \Delta\ A1DC$.

392•. Кожна з точок M і N рівновіддалена від кінців відрізка AB. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до відрізка AB і ділить його навпіл.

393•. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

394•. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за бічною стороною і медіаною, проведеною до неї.

§19. Прямокутні трикутники

Уроки 29–30

Нагадаємо, що трикутник називається прямокутним, якщо у ньому є прямий кут.

Означення.

Дві сторони прямокутного трикутника, які прилягають до прямого кута, називаються *катетами*, а третя сторона, яка лежить проти прямого кута, називається *гіпотенузою*.

На рис. 3.122 зображено прямокутний трикутник ABC. У ньому кут C — прямий, CA і CB — катети, AB — гіпотенуза.

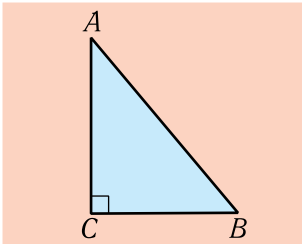


Рис. 3.122

Терміни «катет» і «гіпотенуза» грецького походження. Слово «катетос» у перекладі з грецької мови означає «прямовисний». Прямокутні трикутники часто зображають так, що одна зі сторін, яка утворює прямий кут, уявляється розміщеною вертикально, а інша — горизонтально. Вертикальну сторону колись називали катетом, а горизонтальну — основою. Пізніше за обома цими сторонами закріпилася спільна назва «катети».


Рис. 3.123

На рис. 3.123 і 3.124 зображені об'єкти, які мають форми прямокутних трикутників, розміщених так, що один з катетів займає вертикальне положення, тобто відповідає своїй первинній назві. Шпаківня — цілком реальна, а архітектурні споруди (житлова та офісна вежі, розділені штучною лагуною) — поки

Рис. 3.124

що лише змодельовані: відповідний проект для столиці Камбоджі Пномпеня у 2010 р. запропонували чилійські архітектори Хорхе Ґарсес і Лала Маркес. Чимось схожий на цей, але значно грандіозніший і вже реалізований архітектурний проект зображений далі на рис. 3.129.

Слово «гіпотенуза» в дослівному перекладі з грецької мови означає «та, що стягує» (мається на увазі «стягує прямий кут»). Евклід гіпотенузу так і називав: «сторона, що стягує прямий кут».

Замфір Думітреску.
Прямокутний трикутник

Із того, що прямокутний трикутник має прямий кут, випливає, що два інші його кути — гострі і що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Істинним є також обернене твердження, яке є ознакою прямокутних трикутників:

якщо сума двох кутів трикутника дорівнює 90°, то трикутник — прямокутний.

Справді, сума всіх трьох кутів трикутника дорівнює 180°, і якщо на два з них припадає 90°, то третій дорівнює $180° - 90° = 90°$, тобто є прямим.

При з'ясуванні рівності прямокутних трикутників береться до уваги те, що в них завжди є рівні елементи — прямі кути, а також те, що одним із гострих кутів визначається й інший, оскільки він доповнює його до 90°.

Взявши до уваги перший фактор, з першої ознаки рівності довільних трикутників безпосередньо **виводиться ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами**:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 3.125).

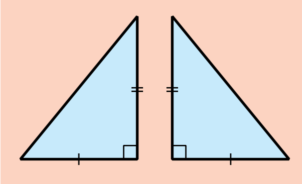
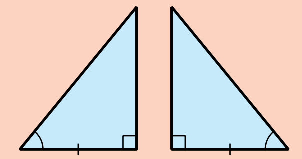


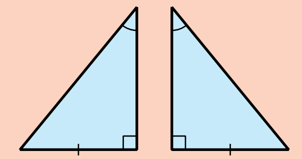
Рис. 3.125

Якщо ж узяти до уваги обидва згадані фактори, то з другої ознаки рівності довільних трикутників легко виводяться **ознаки рівності прямокутних трикутників за катетом та прилеглим або протилежним гострим кутом та за гіпотенузою і прилеглим гострим кутом**:

якщо катет і прилеглий (або протилежний) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету та прилеглому (або протилежному) гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 3.126, а, б).



а)



б)

Рис. 3.126

Якщо гіпотенуза і прилеглий гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі та прилеглому гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 3.127).

Справді, нехай у двох прямокутних трикутників рівні катети і по одному з прилеглих до них гострих кутів (див. рис. 3.126, а). Оскільки рівними є ще й прямі кути, які теж прилягають до цих катетів, то, за другою ознакою, трикутники рівні.

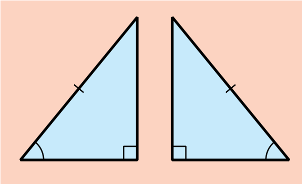


Рис. 3.127

Якщо ж у прямокутних трикутниках рівні гіпотенузи і по одному з гострих кутів (рис. 3.127), то рівними є й інші гострі кути, — оскільки в сумі гострі кути дають 90°. Отже, трикутники рівні за тою самою другою ознакою.

Ще одна ознака рівності прямокутних трикутників потребує окремого доведення.

Теорема

(ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою).

Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Нехай маємо прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 3.128, а). Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сумістилися катети AC і A_1C_1, а вершини B і B$_1$ розмістилися по різні боки від прямої AC (рис. 3. 128, б). Дістанемо рівнобедрений трикутник ABB_1, у якому AC — висота, проведена до основи BB_1. Оскільки ця висота є й бісектрисою, то $\angle BAC = \angle B_1AC$. Отже, трикутники ABC і $A_1C_1B_1$ рівні за першою ознакою. Теорему доведено.

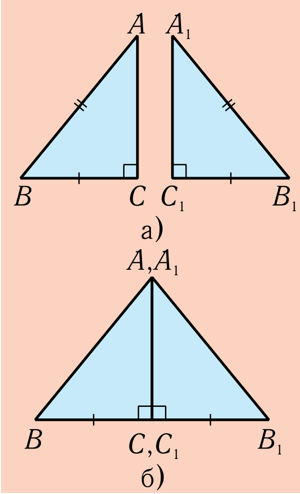


Рис. 3.128

Чудовою наочною ілюстрацією усіх ознак рівності прямокутних трикутників є вежі Всесвітнього торгового центру в Бахрейні (рис. 3.129), зведені у 2008 р. (загальна висота кожної вежі 240 м).

Рис. 3.129

Застосуємо одну з ознак для доведення цікавої властивості прямокутних трикутників, що мають кути 30°.

Теорема

(про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника з гострим кутом 30°).

Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Навпаки, якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то гострий кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Доведення. Нехай у трикутнику ACB $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 3.130). Тоді $\angle B = 60°$. Продовжимо катет BC за вершину C на таку саму довжину $CB_1 = BC$ і сполучимо відрізком точки A і B_1. Дістанемо прямокутний трикутник ACB_1, який, за першою ознакою, рівний трикутнику ACB. Тому $\angle B = \angle B_1 = 60°$. Звідси випливає, що ΔABB_1 — рівносторонній. Отже, $AB = BB_1$. Але $BB_1 = 2BC$. Отже, $AB = 2BC$. Тому катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB.

Обернене твердження доведіть самостійно.

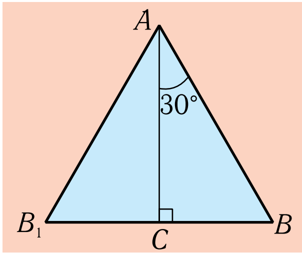
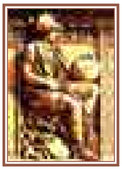


Рис. 3.130



Вправи і задачі

395°. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою BC і проведіть його висоту AH. Доведіть рівність прямокутних трикутників ABH і ACH на підставі різних ознак рівності прямокутних трикутників.

396°. Накресліть рівнобедрений прямокутний трикутник з катетами по 6 см і визначте його гострі кути — спочатку вимірюванням, а потім обчисленням. Чи збігаються результати?

397°. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 45°. Доведіть, що цей трикутник — прямокутний.

398°. Накресліть рівносторонній трикутник ABC зі стороною 7 см, а потім проведіть його медіану AM. Визначте кути трикутника AMB — спочатку вимірюванням, а потім обчисленням. Чи збігаються результати?

399°. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхня різниця дорівнює 20°.

400°. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них учетверо менший від іншого.

401°. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 45°$, $AC = 5$ см. Визначте BC.

402°. У прямокутному трикутнику ABC кут A дорівнює 30°, а катет BC — 40 см. Визначте гіпотенузу AB.

403°. У прямокутному трикутнику ABC кут B дорівнює 60°, а гіпотенуза AB — 10 см. Визначте катет BC.

404. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться, як 3 : 7.

405. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює 135°.

406. На рис. 3.131 $\angle B = \angle C$, $\angle AMB = \angle AMC$. Доведіть, що $AB = AC$.

407. На рис. 3.132 $\angle ACD = \angle CAB = 90°$, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $AB = DC$.

408. На рис. 3.133 CH — висота прямокутного трикутника ACB, проведена до гіпотенузи. Визначте гострі кути трикутника ABC, якщо $\angle HCB = 40°$.

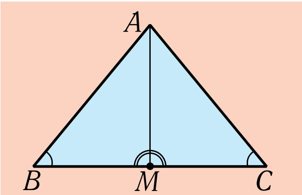


Рис. 3.131

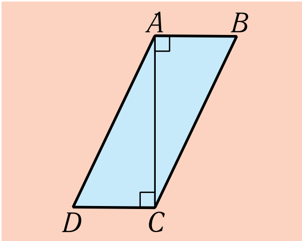


Рис. 3.132

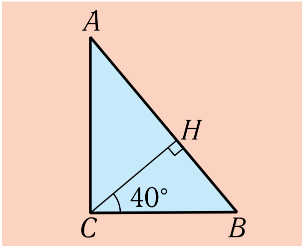


Рис. 3.133

409. На рис. 3.134 $AM \perp BN$, $BN \perp MN$, $AM = BN$. Доведіть, що точка O є серединою кожного з відрізків AB і MN.

410. На рис. 3.134 $AM \perp BN$, $BN \perp MN$, $MO = ON$. Доведіть, що точка O є серединою відрізка AB.

411. На рис. 3.134 $AM \perp BN$, $BN \perp MN$, $AO = OB$. Доведіть, що точки A і B рівновіддалені від прямої MN.

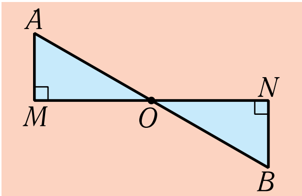


Рис. 3.134

412. На рис. 3.135 $\angle B = \angle D$, AC — бісектриса кута A. Доведіть, що $AB = AD$, $CB = DB$.

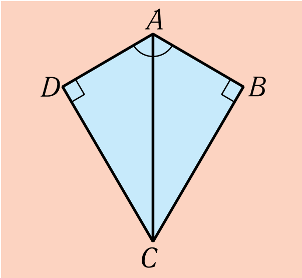


Рис. 3.135

413. Доведіть, що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить прямий кут на кути, що дорівнюють гострим кутам трикутника.

414. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до нього.

415. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

416. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

417. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною до гіпотенузи.

418. Доведіть, що в рівнобедреного трикутника дві висоти рівні.

419. Доведіть, що коли трикутник має дві рівні висоти, то він — рівнобедрений.

420. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, утворює з бічною стороною кут 60°. Визначте довжину цієї висоти, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 12 см.

421. Прямі AB і CD паралельні. Визначте довжину їхнього спільного перпендикуляра, якщо AD = 8 см, а $\angle ADC$ = 30°.

422. Пряма перетинає дві паралельні прямі. Один із кутів, які вона утворює з однією із цих прямих, дорівнює 150°. Визначте довжину відрізка січної з кінцями на паралельних прямих, якщо довжина спільного перпендикуляра між цими прямими дорівнює 7 см.

423. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи й меншого катета — 60 см. Визначте довжину гіпотенузи.

424•. Доведіть методом «від супротивного», що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, лежить усередині трикутника.

425•. Визначте кут між прямими, які містять бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника.

426•. Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

427•. Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною та проведеними до неї медіаною і висотою.

428•. Доведіть, що коли медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, утворює з гіпотенузою кут 30°, то гіпотенуза трикутника учетверо більша за висоту, проведену до неї.

429•. Доведіть, що коли гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 15°, то висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює чверті гіпотенузи. Чи істинне обернене твердження?

§20. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Уроки 31–32

У §16 розглядався спосіб побудови рівнобедреного трикутника за допомогою циркуля і лінійки, коли задано основу BC і бічну сторону AB (див. рис. 3.61). Тоді нас цікавили властивості рівнобедреного трикутника і ми не зауважили, що описані побудови можуть не дати потрібного результату.

Справді, якщо задана бічна сторона AB буде меншою від половини основи BC, то дуги, які ми проводили із центрів B і C для визначення вершини A трикутника, не перетнуться (рис. 3.136). Тому рівнобедреного трикутника з такими довжинами сторін не існує.

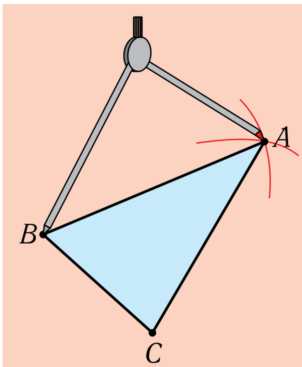


Рис. 3.61

Описана побудова має важливе узагальнення, яке ми детально розглянемо в наступному розділі. Воно полягає у тому, щоб побудувати різносторонній трикутник, коли задані всі його сторони. У зв'язку з цим виникає питання про те, які співвідношення між сторонами трикутника можливі.

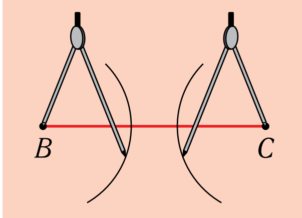


Рис. 3.136

Відповідь на це питання ми дістанемо у кінці цього параграфа. А для цього нам потрібно попередньо з'ясувати, які залежності існують у трикутнику між довжинами сторін і величинами протилежних їм кутів.

Із властивостей та ознак рівнобедреного трикутника випливає, що проти рівних сторін у такому трикутнику лежать рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони. А якщо сторони не рівні, то яке співвідношення існує між кутами, що лежать проти них? Або: якщо кути не рівні, то яке співвідношення існує між сторонами, що лежать проти них?

У тому разі, коли довжини сторін або величини кутів відчутно відрізняються, із конкретних рисунків доволі очевидно, що проти більшого кута лежить і більша сторона, а проти більшої сторони — більший кут (рис. 3.137). Виявляється, що ця закономірність справджується завжди, навіть тоді, коли з рисунка вона не очевидна.

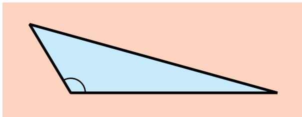


Рис. 3.137

Теорема

(про співвідношення між сторонами і кутами трикутника).

У будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC сторона AB більша за сторону AC (рис. 3.138). Доведемо, що тоді кут C більший за кут B. Для цього відкладемо на стороні AB відрізок AC_1, рівний меншій стороні AC трикутника, і сполучимо точки C і C_1. Дістанемо

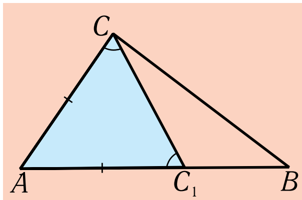


Рис. 3.138

рівнобедрений трикутник ACC_1 з основою CC_1. Отже, $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. Але кут ACC_1 є частиною кута ACB, тому весь кут ACB більший за кут ACC_1. З іншого боку, кут AC_1C є зовнішнім для трикутника CC_1B. Тому він більший за несуміжний з ним кут B.

Виходить, що кут C трикутника більший, а кут B — менший від рівних кутів ACC_1 і AC_1C. Тому $\angle C > \angle B$, що й треба було довести.

Нехай тепер, навпаки, кут C більший за кут B (рис. 3.139). Доведемо, що тоді й сторона AB більша за сторону AC. Справді, ці сторони не можуть бути рівними, бо тоді проти рівних сторін лежали б рівні кути C і B, але, за умовою, вони не рівні. Крім цього, сторона AB не може бути й меншою від сторони AC, бо тоді, як щойно доведено, кут C був би меншим від кута B. Тому залишається єдина можливість: сторона AB більша за сторону AC. Теорему доведено.

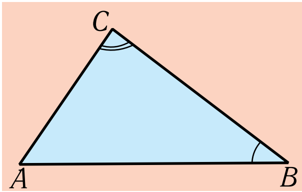


Рис. 3.139

Наслідок 1.

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за будь-який з катетів.

Наслідок 2.

У тупокутному трикутнику сторона, що лежить проти тупого кута, є найбільшою.

Твердження обох наслідків випливають із того, що у трикутнику може бути лише один прямий і один тупий кут, і тоді він є найбільшим з-поміж усіх кутів. Тому проти нього лежить і найбільша сторона.

Тепер доведемо основну теорему цього параграфа — про співвідношення між сторонами будь-якого трикутника.

Теорема

(про нерівність трикутника).

У трикутнику кожна сторона менша від суми двох інших сторін.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 3.140). Доведемо, для прикладу, що $AC < AB + BC$. Для цього продовжимо сторону AB за точку B і відкладемо на цьому продовженні відрізок $BB_1 = CB$. Сполучивши точки B_1 і C, дістанемо рівнобедрений трикутник BCB_1 з основою CB_1. У цьому трикутнику $\angle BCB_1 = \angle BB_1C$. З іншого боку, кут ACB є тільки частиною кута ACB_1. Тому $\angle ACB_1$ більший за кут BCB_1 і, отже, більший за кут BB_1C. Тому в трикутнику ACB_1 проти меншого кута B_1 лежить менша сторона AC, ніж проти більшого кута C: $AC < AB_1$. А якщо візьмемо до уваги, що $AB_1 = AB + BC$, то звідси й дістанемо потрібну нерівність: $AC < AB + BC$.

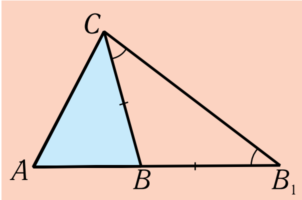


Рис. 3.140

Нерівність $AC < AB + BC$ для сторін трикутника ABC називаються **нерівністю трикутника**.

Наслідок 1.

У трикутнику кожна сторона більша за різницю двох інших сторін.

Доведення. Віднімаючи AB від обох частин доведеної нерівності $AC < AB + BC$, маємо: $BC > AC - AB$.

Аналогічно можна одержати, що $AB > AC - BC$. А якщо взяти до уваги іншу нерівність для сум сторін: $AB < AC + BC$, то так само дістанемо: $AC > AB - BC$. Наслідок доведено.

Наслідок 2.

Якщо справджується рівність $AC + CB = AB$, то точка C належить відрізку AB (рис. 3.141).

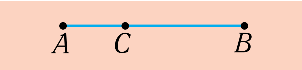


Рис. 3.141

Доведення. Припустимо, що точка C лежить поза прямою AB. Тоді за нерівністю трикутника $AC + CB > AB$. А це суперечить умові $AC + CB = AB$. Отже, це припущення неправомірне. Якби точка C лежала на прямій AB за межами відрізка AB, то або відрізок AC, або відрізок BC був би більшим за AB. Тому рівність $AC + CB = AB$ теж не могла б виконуватися. Отже, залишається єдина можливість: точка C належить відрізку AB. А для цього випадку рівність $AC + CB = AB$ випливає з аксіоми про вимірювання відрізків. Наслідок доведено.

Розв'язуємо разом

Задача.

Точки A і B лежать по один бік від прямої m (рис. 3.142). Знайти на прямій таку точку M, для якої сума відстаней AM і MB набуває найменшого значення.

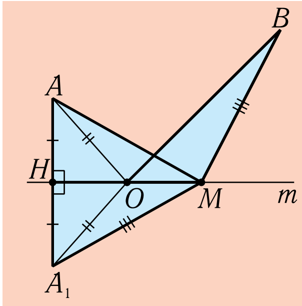


Рис. 3.142

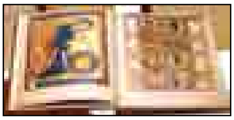
Розв'язання. Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до прямої m, і відкладемо від точки H її перетину з прямою m відрізок $HA_1 = AH$. Нехай O — точка перетину прямих m і A_1B.

Відрізок OH є медіаною і висотою у трикутнику OAA_1. За відповідною ознакою, цей трикутник — рівнобедрений. Тому $AO = A_1O$.

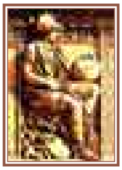
Аналогічно з'ясовуємо, що $AM = A_1M$. Звідси випливає, що сума $AM + MB = A_1M + MB$. За нерівністю трикутника, $A_1M + MB > A_1B$. Отже, яка б не було точка M на прямій m, завжди $A_1M + MB > A_1O + OB$. Тому точка O є шуканою.

Зауваження. Оскільки $\angle AOH = \angle A_1OH$ (у рівнобедреному трикутнику OAA_1 медіана OH є бісектрисою), а $\angle A_1OH = \angle BOM$ (як вертикальні), то $\angle AOH = \angle BOM$. Це означає, що прямі AO і OB утворюють з прямою m рівні кути. Зважаючи на відомий фізичний закон відбивання світла, звідси випливає такий цікавий факт: шлях світлового променя від точки A до точки B з відбиванням від прямої m є найкоротшим з усіх можливих.

Ньютон уважав, що Бог створив світ за законами геометрії. Як тут не повіриш у це!



Фронтиспис так званої моралізаторської Біблії (Bible moralisée) 1250 р. — французької рукописної Біблії у картинках з короткими моральними настановами. Зображено Бога-творця, який з допомогою циркуля окреслив межі Всесвіту і створив круглі Сонце (праворуч) і Місяць (ліворуч). Безформна маса, в яку встромлена ніжка циркуля, — ще не сформована Земля.



Вправи і задачі

430°. Накресліть який-небудь різносторонній гострокутний трикутник. Виміряйте з допомогою лінійки усі його сторони, а з допомогою транспортира усі кути, та переконайтесь, що твердження теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника виконується.

431°. У трикутнику ABC AB = 5 см, BC = 7 см, AC = 10 см. Який кут трикутника найбільший, а який — найменший?

432°. У трикутнику ABC $\angle A$ = 55°, $\angle C$ = 30°. Яка сторона трикутника найбільша, а яка — найменша?

433°. Порівняйте кути трикутника ABC, якщо $AB < BC < AC$. Які кути цього трикутника не можуть бути ні прямими, ні тупими?

434°. Порівняйте сторони трикутника LMN, якщо $\angle L > \angle M > \angle N$.

435°. Чи може існувати трикутник з такими довжинами сторін: а) 5 см, 6 см, 7 см; б) 5 см, 6 см, 12 см?

436°. Чи можуть довжини сторін трикутника відноситися, як: а) 1 : 2 : 3; б) 4 : 7 : 9; в) 5 : 7 : 12?

437°. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Визначте периметр трикутника.

438. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 6 см. Якою може бути його основа, якщо вона має виражатися цілим числом?

439. У рівнобедреному трикутнику одна сторона дорівнює 4 см, а інша — 9 см. Котра із них основа, а котра — бічна сторона?

440. Який кут у рівнобедреному трикутнику більший — при основі чи при вершині, якщо основа дорівнює 6 см, а сума бічних сторін — 13 см?

441. Що більше — основа чи бічна сторона рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при основі дорівнює 135°?

442. Чи може існувати трикутник, у якого периметр і одна зі сторін відповідно дорівнюють: а) 17 см і 9 см ; б) 17 см і 5 см?

443. У трикутнику ABC $AC < AB$, $\angle B > \angle A$. Котрий із кутів трикутника є найбільшим?

444. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle A > \angle B$, $BC > AB$. Яка сторона є основою трикутника?

445. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 3 см, а периметр — 19 см. Визначте сторони трикутника.

446. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника на 2 см менша від іншої, а периметр трикутника дорівнює 22 см. Визначте сторони трикутника.

447. Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину рівнобедреного трикутника з будь-якою точкою на його основі, яка не є вершиною, менший від бічної сторони трикутника.

448. Доведіть, що кожна сторона трикутника менша від половини його периметра.

449•. Доведіть, що сума двох сторін трикутника більша за його півпериметр.

450•. Доведіть, що медіана CM трикутника ABC менша від півсуми сторін CA і CB.

451•. Доведіть, що сума медіан трикутника менша від його периметра.

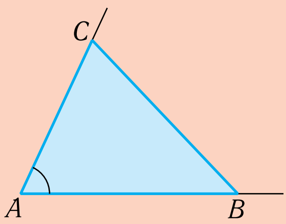
452•. Точка M лежить усередині трикутника ABC. Доведіть, що $AB + AC > MB + MC$.

453•. Точка лежить усередині трикутника. Доведіть, що сума відстаней від цієї точки до вершин трикутника більша за його півпериметр.

454•. Доведіть, що сума висот трикутника менша від його периметра.

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі III

Трикутник і його елементи



Трикутник — це фігура, що складається із трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються **вершинами** трикутника, а відрізки — **сторонами**.

Позначення: ΔABC, ΔACB, ΔCAB тощо. Тут A, B, C — вершини, AB, BC, AC — сторони.

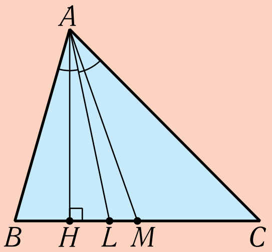
Кутом (внутрішнім кутом) трикутника ABC при вершині A називається кут BAC, утворений променями AB і AC. Позначення: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Кут A уважається **протилежним** до сторони BC, а сторони AB і AC — **прилеглими** до кута A.

Елементи трикутника — це його вершини, сторони і кути.

Периметр трикутника — сума довжин усіх його сторін. Периметр позначається літерою P. Отже, $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$.

Слово «периметр» походить від грецьких слів «пері» — «навколо» і «метрео» — «вимірюю». Буквально означає «міра обводу».

Бісектриса, медіана і висота трикутника



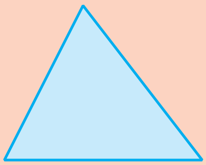
Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси його внутрішнього кута, що сполучає вершину трикутника із точкою на протилежній стороні.

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

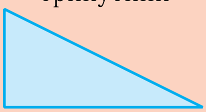
Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На рисунку AL — бісектриса, AM — медіана, AH — висота трикутника ABC, проведені з вершини A до протилежної сторони BC.

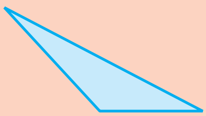
Види трикутників за величинами кутів



Гострокутний трикутник



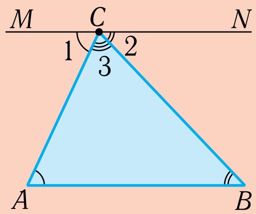
Прямокутний трикутник



Тупокутний трикутник

Якщо всі кути трикутника гострі, то трикутник називається **гострокутним**. Якщо у трикутнику є прямий кут, то трикутник називається **прямокутним**, а якщо є тупий кут — то **тупокутним.**

Сума кутів трикутника

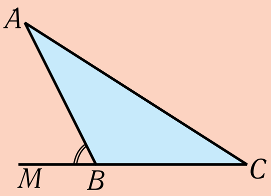


Теорема (*про суму кутів трикутника*). ***Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.***

Доведення. Проведемо $MN \parallel AB$. $\angle A = \angle 1$ — як внутрішні різносторонні при паралельних прямих MN і січній CA. Так само $\angle B = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Наслідки (*про величини кутів трикутника*). ***Трикутник не може мати двох негострих кутів — прямих або тупих. У кожному трикутнику принаймні два кути — гострі. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.***

Зовнішній кут трикутника



Зовнішній кут трикутника — це кут, суміжний із внутрішнім кутом.

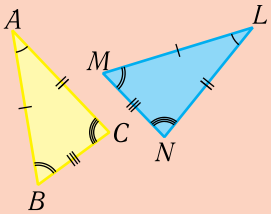
$\angle ABM$ — зовнішній для ΔABC.

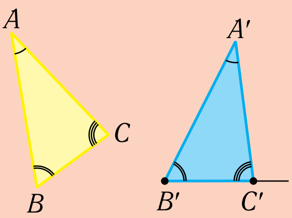
Теорема (*про зовнішній кут трикутника*). ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.***

Доведення. $ABM = 180° - \angle B$. $\angle A + \angle C = 180° - \angle B$. Тому $\angle ABM = \angle A + \angle C$,

Наслідок. ***Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.***

Рівність трикутників





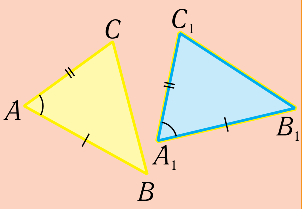
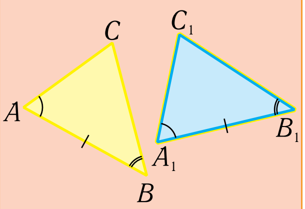
Трикутники називаються **рівними**, якщо їх можна сумістити шляхом переміщення.

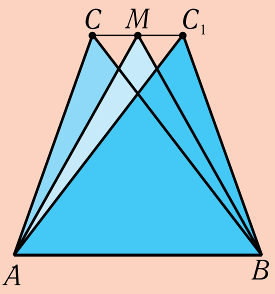
У рівних трикутниках рівні всі відповідні елементи — сторони і кути.

Позначення: $\Delta ABC = \Delta LMN$. Цей запис означає, що $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle M$, $\angle C = N$.

Аксіома рухомості трикутника. ***Який би не був трикутник, його можна перемістити у задане положення відносно даної півпрямої.***

Трикутник $A'B'C'$ — переміщене положення трикутника ABC у положення, визначене півпрямою m.

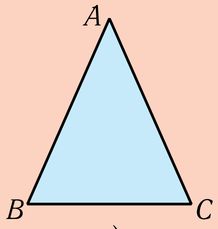
Ознаки рівності трикутників	
	*Перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами і кутом між ними.* ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.*** Доведення. Перемістимо ΔABC так, щоб вершина A сумістилася з A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$, то точка B суміститься з точкою B_1. $\angle A = \angle A_1$, тому кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1. Оскільки $AC = A_1C_1$, то точка C суміститься з точкою C_1. Отже, ΔABC сумістився з $\Delta A_1B_1C_1$. Тому вони рівні.
	*Друга ознака рівності трикутників — за стороною і двома прилеглими кутами*). ***Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.*** Доведення. Перемістимо ΔABC так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$, то точка B суміститься з точкою B_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1. Так само півпряма BC суміститься з півпрямою B_1C_1. Тоді точка C суміститься з точкою C_1, оскільки дві півпрямі можуть мати не більше однієї спільної точки. Отже, ΔABC сумістився з $\Delta A_1B_1C_1$. Тому ці трикутники рівні.



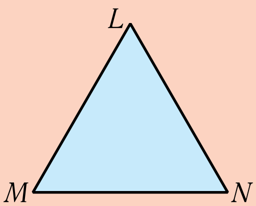
Третя ознака рівності трикутників — за трьома сторонами. ***Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Сумістимо сторони AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, а вершину C_1 розмістимо з того боку від прямої AB, де розміщена точка C. Припустимо, що при цьому точки C і C_1 не сумістилися. Нехай тоді M — середина відрізка CC_1. У рівнобедрених трикутниках ACC_1 і BCC_1 медіани AM і BM є висотами. Отже, через точку M проходить дві прямі AM і BM, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої CC_1. Оскільки таке неможливе, то точки C і C_1 збігаються. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Рівнобедрений і рівносторонній трикутники



а)



б)

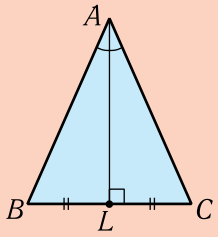
Трикутник називається **рівнобедреним**, якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються **бічними сторонами**, а третя сторона — **основою**.

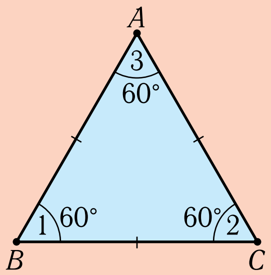
Коли говорять про **вершину** рівнобедреного трикутника, то зазвичай мають на увазі ту, яка протилежна основі. Інші дві вершини називають *вершинами при основі*.

На рисунку ΔABC — рівнобедрений, AB і AC — його бічні сторони, BC — основа, A — вершина, B і C — вершини при основі.

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається **рівностороннім** або **правильним**.

На рисунку ΔLMN — рівносторонній.



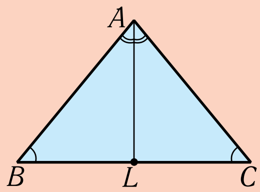


Властивості рівнобедреного трикутника. ***Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівних трикутники і є медіаною та висотою. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.***

Доведення. Нехай AL — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC. Оскільки $AB = AC$, $\angle BAL = \angle CAL$, то, за першою ознакою рівності трикутників, $\Delta ALB = \Delta ALC$. Звідси $BK = CK$. Отже, AL — медіана трикутника ΔABC. $\angle AKB = \angle AKC$. Ці кути суміжні, а тому вони — прямі. Отже, AL — висота трикутника ΔABC. $\angle B = \angle C$, а тому кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Наслідок. ***Всі кути рівностороннього трикутника рівні і дорівнюють по 60°.***

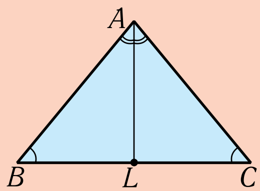
Доведення. Оскільки $AB = AC$, то $\angle 1 = \angle 2$, а оскільки $BA = BC$, то $\angle 2 = \angle 3$. Отже, всі три кути рівностороннього трикутника рівні. Тому кожен з них дорівнює третині від 180°, тобто 60°.



Ознака рівнобедреного трикутника за кутами. ***Якщо у трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.***

Доведення. Нехай $\angle B = \angle C$. Проведемо бісектрису AL. $\angle B = \angle C$, $\angle BAL = \angle CAL$, тому $\angle ALB = \angle ALC$ (сума кутів трикутника дорівнює 180°). Тому за за другою ознакою $\Delta ALB = \Delta ALC$. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

Наслідок. ***Трикутник, у якому всі кути рівні (по 60°), є рівностороннім.***

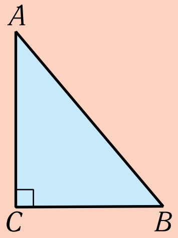


Ознаки рівнобедреного трикутника за відрізками. ***Якщо у трикутнику висота збігається з медіаною або з бісектрисою, то трикутник — рівнобедрений.***

Доведення. **1.** Нехай AL — медіана й висота трикутника ABC. Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за першою ознакою. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

2. Нехай AL — висота і бісектриса трикутника ABC. Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за другою ознакою, оскільки катет AL у них спільний, а прилеглі гострі кути рівні. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

Прямокутні трикутники



Трикутник називається **прямокутним**, якщо він має прямий кут. Сторони прямокутного трикутника, які прилягають до прямого кута, називаються **катетами**, а сторона, яка лежить проти прямого кута, називається **гіпотенузою**.

На рисунку AC і BC — катети, AB — гіпотенуза.

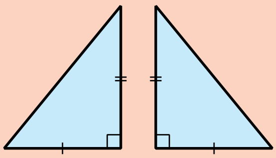
Терміни «катет» походить від грецького «катетос», що означає «прямовисний». Слово «гіпотенуза» в дослівному перекладі з грецької мови означає «та, що стягує» (мається на увазі «стягує прямий кут»).

У прямокутному трикутнику два кути гострі. ***Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°***.

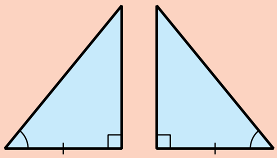
Ознака прямокутного трикутника. ***Якщо сума двох кутів трикутника дорівнює 90°, то трикутник — прямокутний***.

Доведення. Сума усіх кутів трикутника дорівнює 180°, тому якщо два з них у сумі дають 90°, то третій дорівнює $180° - 90° = 90°$, тобто є прямим.

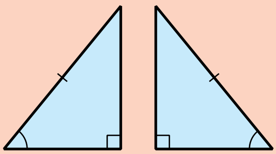
Ознаки рівності прямокутних трикутників



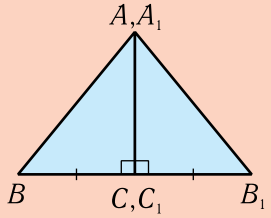
1. *За двома катетами.* ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні***.



2. *За катетом та прилеглим або протилежним гострим кутом.* ***Якщо катет і прилеглий (або протилежний) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету та прилеглому (або протилежному) гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні***.



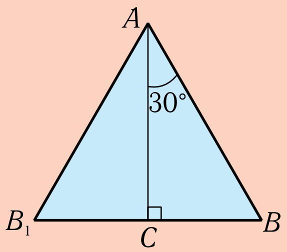
3. *За гіпотенузою і прилеглим гострим кутом.* ***Якщо гіпотенуза і прилеглий гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі та прилеглому гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні***.



4. *За катетом і гіпотенузою.* ***Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сумістилися катети AC і A_1C_1, а вершини B і B_1 розмістилися по різні боки від прямої AC. Дістанемо рівнобедрений трикутник ABB_1, у якому AC — висота, проведена до основи BB_1. Оскільки вона є й бісектрисою, то $\angle BAC = \angle B_1AC$. Отже, трикутники ABC і $A_1C_1B_1$ рівні за першою ознакою.

Властивість прямокутного трикутника з кутом 30°



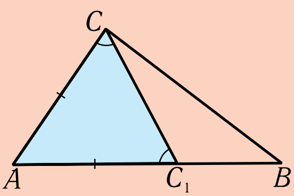
Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Навпаки, якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний гострий кут дорівнює 30°.

Доведення. Нехай у ΔACB $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 3.130). Тоді $\angle B = 60°$. Відкладемо $CB_1 = BC$. $\Delta ACB_1 = \Delta ACB$. Тому $\angle B = \angle B = 60°$. Отже, ΔABB_1 — рівносторонній і $AB = BB_1$. Але $BB_1 = 2BC$. Тому $AB = 2BC$.

Навпаки, якщо $AB = 2BC$, то AC є медіаною і висотою у ΔABB_1. Отже, цей трикутник рівнобедрений, а тому й рівносторонній. Тому $\angle B = 60°$, а $\angle\angle A = 90° - 60° = 30°$.

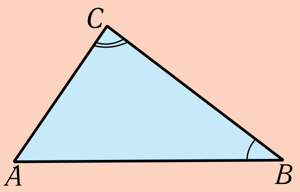
Співвідношення між сторонами і кутами в довільному трикутнику



Теорема (*про співвідношення між сторонами і кутами трикутника*). ***У будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона***

Доведення. Нехай $AB > AC$. Відкладемо $AC_1 = AC$. ΔACC_1 рівнобедрений, тому $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. $\angle ACC_1$ є частиною кута ACB, тому $\angle ACB > ACC_1$. З іншого боку, $\angle AC_1C$ є зовнішнім для ΔCC_1B. Тому $\angle AC_1C > \angle B$.

Отже, $\angle C$ більший, а $\angle B$ — менший від рівних кутів ACC_1 і AC_1C. Тому $\angle C > \angle B$, що й треба було довести.

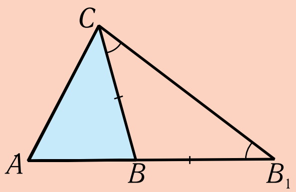


Нехай, навпаки, $\angle C > \angle B$. Сторони AB і AC не можуть бути рівними, бо тоді й кути C і B були б рівними. Сторона AB не може бути меншою від AC, бо тоді, як щойно доведено, $\angle C$ був би меншим від $\angle B$. Тому залишається єдина можливість: $AB > AC$. Теорему доведено.

Наслідки.

1. ***У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за будь-який з катетів.***

2. ***У тупокутному трикутнику сторона, що лежить проти тупого кута, є найбільшою.***



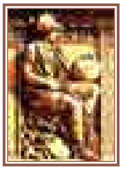
Теорема (про нерівність трикутника). ***У будь-якому трикутнику ABC справджується нерівність трикутника: $AC < AB + BC$.***

Доведення. Продовжимо AB за точку B і відкладемо $BB_1 = CB$. У рівнобедреному трикутнику BCB_1 $\angle BCB_1 = \angle BB_1C$. Кут ACB є частиною кута ACB_1. Тому $\angle ACB_1 > \angle BCB_1$ і, отже, $\angle ACB_1 > \angle BB_1C$. Тому в ΔACB_1 $AC < AB_1$. А оскільки $AB_1 = AB + BC$, то $AC < AB + BC$.

Перевір себе

1. Що таке трикутник? Назвіть елементи трикутника і дайте їхні означення.
2. Дайте означення кута трикутника. Як класифікуються трикутники залежно від величин їхніх кутів?
3. Що таке периметр трикутника?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника. Які наслідки вона має?
5. Що таке зовнішній кут трикутника? Сформулюйте і доведіть теорему про зовнішній кут трикутника. Які наслідки вона має?
6. Які трикутники називаються рівними? Як записується рівність трикутників?
7. Сформулюйте аксіому рухомості трикутника.
8. Сформулюйте і доведіть першу ознаку рівності трикутників.
9. Сформулюйте і доведіть другу ознаку рівності трикутників.
10. Дайте означення рівнобедреного трикутника і його елементів.
11. Що таке рівносторонній трикутник?
12. Дайте означення бісектриси, медіани і висоти трикутника.

13. Сформулюйте і доведіть теорему про властивості рівнобедреного трикутника. Які наслідки вона має для рівностороннього трикутника?
14. Сформулюйте і доведіть ознаку рівнобедреного трикутника за кутами.
15. Сформулюйте і доведіть ознаку рівнобедреного трикутника за відрізками.
16. Сформулюйте і доведіть третю ознаку рівності трикутників.
17. Дайте означення прямокутного трикутника і його елементів.
18. Сформулюйте і доведіть ознаку прямокутного трикутника за кутами.
19. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.
20. Сформулюйте і доведіть властивість прямокутного трикутника, що має гострий кут 30°.
21. Сформулюйте і доведіть теорему про співвідношення між сторонами і кутами у довільних трикутниках. Які наслідки вона має для прямокутних і тупокутних трикутників?
22. Сформулюйте і доведіть теорему про співвідношення між сторонами трикутника. Що таке нерівність трикутника?



Завдання для повторення та проведення контрольної роботи до розділу III

1°. а) За рис. 3.143, а) визначте довжину відрізка BC і градусну міру кута A.
б) За рис. 3.143, б) визначте довжину відрізка DC і градусну міру кута D.

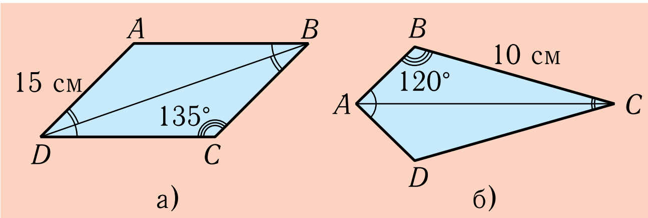


Рис. 3.143

2°. а) На рис. 3.144, а) точка O — середина відрізка MN. Визначте кут B.
б) На рис. 3.144, б) трикутник ABC — рівнобедрений з основою BC. Визначте кут CAN.

3°. а) Чи є трикутник ABC на рис. 3.145, а) рівнобедреним? Обґрунтуйте.
б) Чи є трикутник ABC на рис. 3.145, б) рівнобедреним? Обґрунтуйте.

4°. а) За рис. 3.146, а) визначте кут B. Обґрунтуйте.
б) За рис. 3.146, б) визначте кут M. Обґрунтуйте.

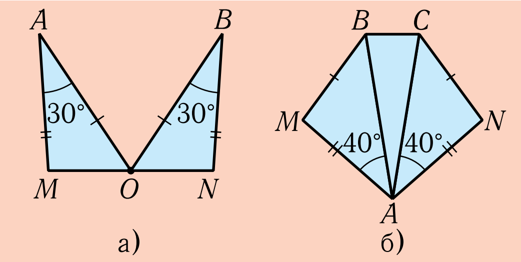


Рис. 3.144

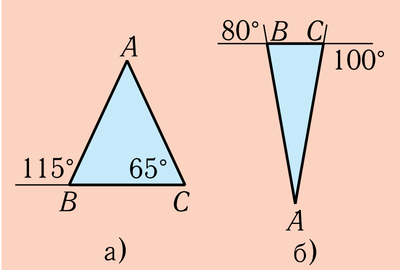


Рис. 3.145

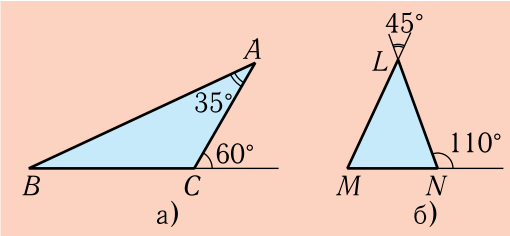


Рис. 3.146

5. а) Один із кутів трикутника дорівнює 25°, а різниця двох інших кутів дорівнює 75°. Визначте невідомі кути.

б) Різниця двох кутів трикутника дорівнює 10°, а кут, суміжний із третім кутом, дорівнює 140°. Визначте кути трикутника.

6. а) Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (рис. 3.147, а). Доведіть, що $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$.

б) Дано: $AO = CO$, $OB = OD$ (рис. 3.147, б). Доведіть, що $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

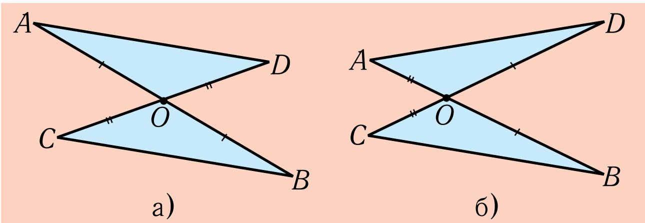


Рис. 3.147

7. а) Дано: $AB = AC$, $\angle B = \angle C$ (рис. 3.148, а). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

б) Дано: $OA = OB$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.148, б). Доведіть, що $OC = OD$.

8. а) Дано: $AD = BC$; $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.149, а). Доведіть, що $OC = OD$.

б) Дано: $AC = BC$; $AM = BN$ (рис. 3.149, б). Доведіть, що $AN = BM$.

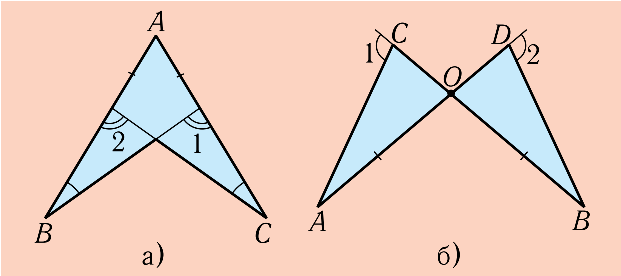


Рис. 3.148

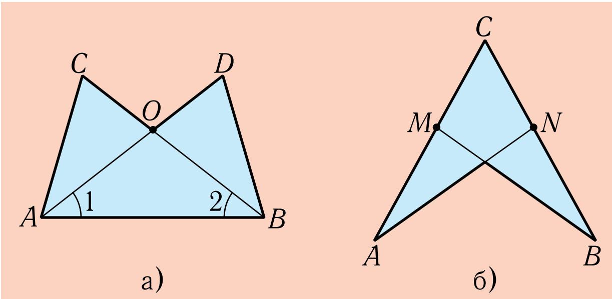


Рис. 3.149

9. а) Доведіть, що коли всі кути трикутника дорівнюють по 60°, то цей трикутник рівносторонній.
б) Доведіть, що коли у рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній.

10. а) Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і висотою, проведеною до гіпотенузи.
б) Доведіть рівність гострокутних трикутників за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони.

11. а) У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 30°, а бічна сторона — 8 см. Визначте довжину медіани трикутника, проведеної до основи.
б) У рівнобедреному трикутнику кут між бічними сторонами дорівнює 120°, а бічна сторона — 8 см. Визначте бісектрису, проведену до основи.

12. а) У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а різниця гіпотенузи й меншого катета дорівнює 5 см. Визначте довжину гіпотенузи.
б) У прямокутному трикутнику різниця гострих кутів дорівнює 30°, а сума гіпотенузи й меншого катета дорівнює 9 см. Визначте довжину гіпотенузи.

13•. а) Дано: $OC = OD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.150). Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$, а OQ — бісектриса кута O.

б) Дано: $OA = OB$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 3.150). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$, а OQ — бісектриса кута O.

14•. а) Дано: $AB = BC$, $AM = MC$ (рис. 3.151). Доведіть, що $AD = DC$.
б) Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 3.151). Доведіть, що $AM = MC$.

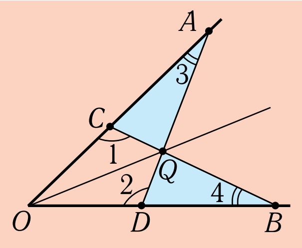


Рис. 3.150

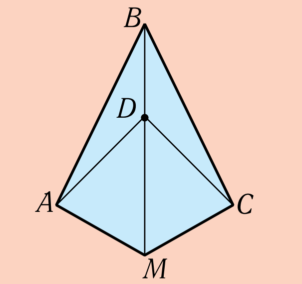
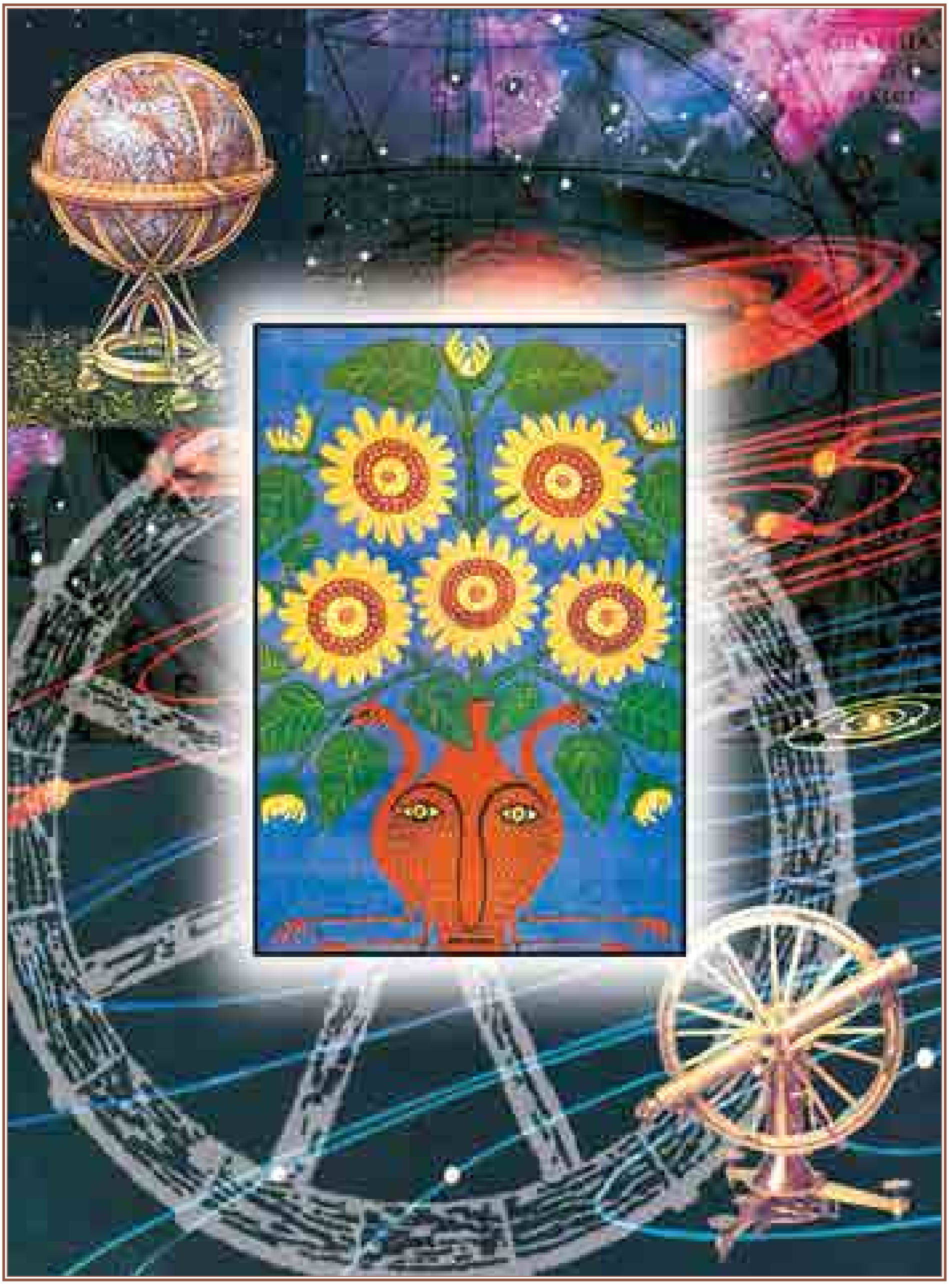


Рис. 3.151

15•. а) У трикутнику ABC $AB = AC$, K — точка перетину бісектрис кутів B і C. Доведіть, що $AK \perp BC$.
б) У трикутнику ABC $AB = AC$, H — точка перетину висот, проведених з вершин B і C. Доведіть, що $AH \perp BC$.

16•. а) Точка, що лежить на висоті трикутника, рівновіддалена від кінців сторони, до якої проведена ця висота. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.
б) Точка лежить усередині рівнобедреного трикутника і рівновіддалена від вершин основи. Доведіть, що ця точка лежить на висоті трикутника, проведеній до основи.



У центрі — композиція Марії Приймаченко «Соняшник життя», 1963

Розділ IV Коло і круг. Геометричні побудови

Вступ

Уроки 33–34

Уже не раз у цьому підручнику зазначалося, що давньогрецького мудреця Фалеса вважають першим, хто запровадив у геометрію доведення. Зокрема, Фалес, як уважається, першим довів такі геометричні істини: 1) рівність вертикальних кутів; 2) другу ознаку рівності трикутників; 3) рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. А ще Фалесу приписують доведення двох властивостей кола і круга: 1) діаметр круга ділить круг на дві рівні частини (рис. 4.1); 2) з будь-якої точки кола його діаметр видно під прямим кутом (рис. 4.2). Якою б очевидною не видавалася перша із цих властивостей, але щоб стати незаперечним геометричним фактом її потрібно довести за всіма правилами геометрії, тобто вивести з уже встановлених істин. Ми зможемо довести її через один урок — як наслідок з теореми про властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди. Натомість друга з доведених Фалесом властивостей кола аж ніяк не очевидна. Легенда стверджує, що за її доведення Фалес приніс у жертву бика. Однак після того, як вона була відкрита, довести її навіть легше, ніж першу, і ми це зробимо вже на цьому уроці.

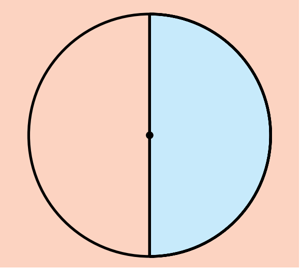


Рис. 4.1

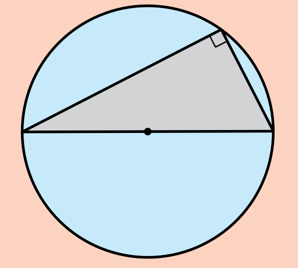
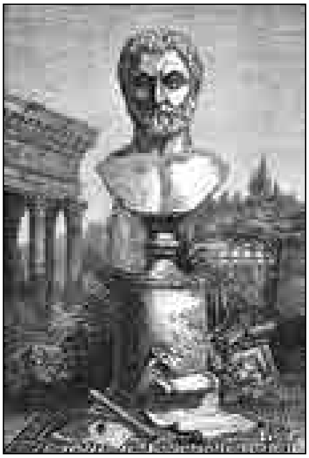


Рис. 4.2

На наступних кількох уроках розглядатимуться різні можливості для взаємного розміщення кола і прямої, а також взаємного розміщення двох кіл. Особливо виокремлюють граничні випадки, коли ці фігури дотикаються одна до одної (рис. 4.3 і рис. 4.4). Аналогічні граничні випадки для взаємного розміщення кола і трикутника характеризуються поняттями вписаного та описаного кіл. Зокрема, ви довідаєтеся, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло (рис. 4.5) і в будь-який трикутник можна вписати коло (рис. 4.6), причому для кожного трикутника кожне із цих кіл буде лише одне.

У другій частині розділу розглядатимуться теоретичні основи геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки. Ці побудови мають давню історію, і вони значною мірою стимулювали розвиток геометрії. Зокрема, ви довідаєтеся про застосування в геометричних побудовах ліній з певними властивостями — так званих геометричних місць точок. Одним із найважливіших геометричних місць точок є коло. Буде розглянуто й декілька інших важливих прикладів.



Фалес. Гравюра на основі античного бюсту з музею скульптури Ватикану

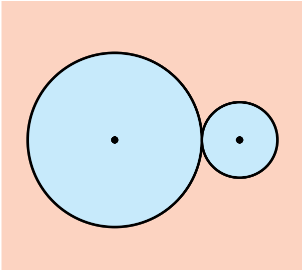


Рис. 4.3

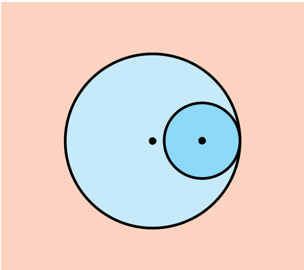


Рис. 4.4

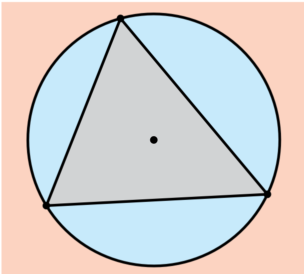


Рис. 4.5

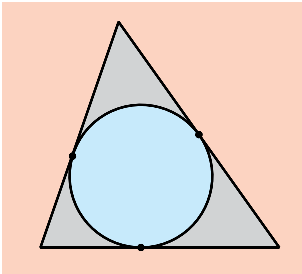


Рис. 4.6

§21. Коло і круг

Усім добре відома геометрична фігура, яку креслять за допомогою циркуля (рис. 4.7). Це — коло. Відомий також спосіб побудови кола за допомогою мотузки і двох кілків, який інколи застосовують для розбиття клумб (рис. 4.8). У кожному разі всі точки побудованого кола знаходяться на однаковій відстані від однієї точки (O), в якій застромлена ніжка циркуля або нерухомий кілок.

Рис. 4.7

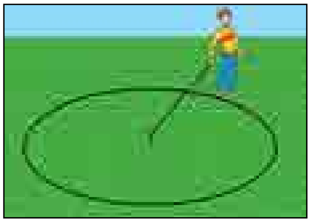


Рис. 4.8

Означення.

Колом **називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, які рівновіддалені від деякої точки. Цю точку називають** ***центром*** **кола, а відстань від центра кола до будь-якої його точки —** ***радіусом*** **кола. Радіусом кола називається і будь-який з відрізків, які сполучають центр кола з його точками.**

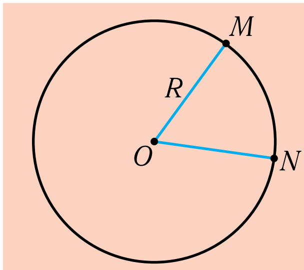


Рис. 4.9

На рис. 4.9 зображено коло з центром O і два його радіуси OM і ON.

Слово «центр» походить від латинського слова «центрум», а те, у свою чергу, від грецького «кентрон», що означає «вістря», «гострий кінець палиці».

Слово «радіус» в перекладі з латини означає «промінь». Радіуси кола справді виходять із його центра, неначе промені. Із цим порівнянням пов'язані й фізичні терміни «радіоактивний» та «радіаційний». Радіус кола найчастіше позначають першою літерою його латинської назви — R або r.

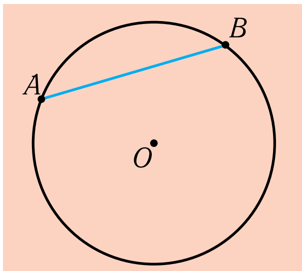


Рис. 4.10

Відрізок з кінцями на колі називається *хордою* кола. На рис. 4.10 AB — одна із хорд зображеного кола з центром O.

Слово «хорда» бере свій початок від грецького слова «куерда», що означає «тятива лука», а також «струна». Якщо дугу лука уявляти у формі дуги кола, то тятива, яка стягує кінці цієї дуги, справді буде хордою (рис. 4.11). У зв'язку з цим і про хорду кола кажуть, що вона стягує його дугу.

Якщо хорда AB проходить через центр кола (рис. 4.12), то вона називається *діаметром* кола («діаметрос» в перекладі з грецької означає «поперечник»). Очевидно, що діаметр кола дорівнює двом його радіусам.

Кінці діаметра інколи називають *діаметрально протилежними* точками кола. Такими на рис. 4.12 є точки A і B. Вони розміщуються на однакових відстанях по різні боки від центра. Часто цей термін використовується і в розмовній мові — коли говорять про цілком протилежні точки зору (погляди) на якусь подію чи явище.

Легко довести, що будь-яка хорда кола, яка не є його діаметром, менша від діаметра.

Справді, нехай хорда CD не проходить через центр O кола (рис. 4.13). Тоді точки O, C, D не лежать на одній прямій, тобто є вершинами деякого трикутника. Відповідно до нерівності трикутника, $CD < OC + OD$, а звідси $CD < 2R$, що й треба було довести.

Якщо відстань OP від центра кола O до якоїсь точки P площини менша від радіуса кола, то про таку точку P кажуть, що вона лежить *усередині* кола (рис. 4.14). Якщо ж відстань OP від центра до точки P більша за радіус, то про таку точку P кажуть, що вона лежить зовні кола (рис. 4.15).

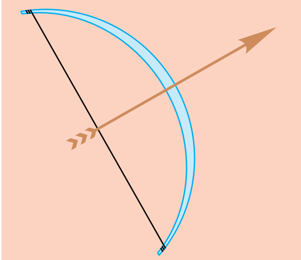


Рис. 4.11

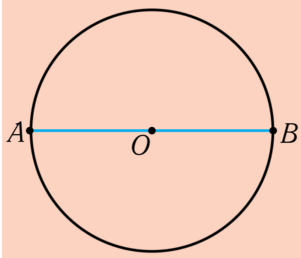


Рис. 4.12

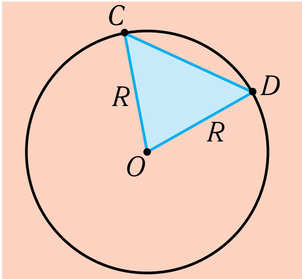


Рис. 4.13

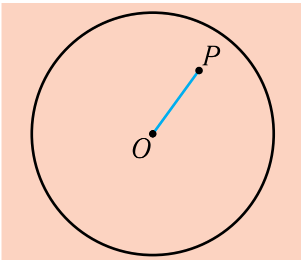


Рис. 4.14

Означення.

Сукупність усіх точок площини, які лежать на колі й усередині нього, називається *кругом* (рис. 4.16). Центр і радіус кола називаються також *центром* і *радіусом* круга.

Коротко кажуть, що круг — це сукупність усіх точок площини, обмежених колом. Очевидно, також що круг — це сукупність усіх точок площини, які знаходяться від центра на відстанях, що не перевищують його радіуса.

Хорди і діаметри кола називаються відповідно *хордами* і *діаметрами* обмеженого ним круга.

Зауважте, що центр, будь-який радіус, діаметр чи будь-яка хорда круга належать кругу, однак не належать колу, яке його обмежує.

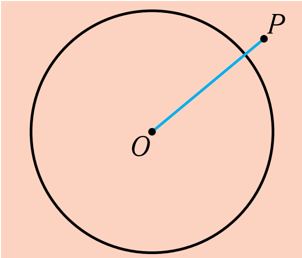


Рис. 4.15

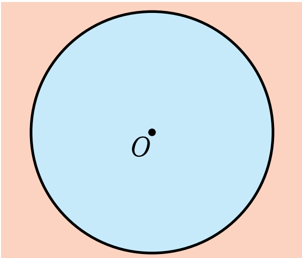


Рис. 4.16

Форму кола або круга має один із найдавніших і найвидатніших винаходів людства — колесо. Зображення коліс зі шпицями (фізичних прообразів кіл та їхніх радіусів) знаходимо навіть у найдавніших пам'ятках єгипетської культури (рис. 4.17).

З прадавніх часів помічено, що круговим є добовий рух Сонця, Місяця та зірок по небосхилу. У зв'язку з цим тривалий час (аж до XVII ст.) коло було основним геометричним елементом у побудові моделей всесвіту (рис. 4.18).

Крім усього цього, коло і круг мають довершені (симетричні) форми, тому вони здавна використовуються для проектування архітектурних споруд і створення орнаментів (рис. 4.19).

Усе це спонукало вже найдавніших учених до ґрунтовного дослідження геометричних властивостей кола і круга.

Рис. 4.17

Рис. 4.18. Символічні зображення кругових систем світу Птолемея (планети рухаються по колах навколо Землі) і Коперника (планети рухаються по колах навколо Слнця).

Теорема Фалеса

(про кут, під яким діаметр кола видно з точки на колі).

З будь-якої точки кола його діаметр видно під прямим кутом.

Доведення. Нехай AB — діаметр кола, O — його центр, C — довільна точка на колі (рис. 4.20). Потрібно довести, що $\angle ACB = 90°$.

Трикутник OAC — рівнобедрений, оскільки $OA = OC$ (як радіуси кола). Тому $\angle OAC = \angle OCA$. Аналогічно доводимо, що $\angle OBC = \angle OCB$.

Якщо додамо праві й ліві частини останніх двох рівностей, то дістанемо: $\angle A + \angle B = \angle C$. Підставляючи цей результат замість перших двох доданків у рівність для суми кутів трикутника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, матимемо: $2\angle C = 180°$. Звідси $\angle C = 90°$, що й треба було довести.

Зауваження. Аби бути зовсім точним, то у формулюванні теореми Фалеса потрібно вказувати, що у ній не беруться до уваги ті дві точки кола, які є кінцями взятого діаметра. Справді, якщо точка C збігається з кінцем A чи B діаметра AB (див. рис. 4.20), то кути C стають невизначеними.

Рис. 4.19. Вітраж собору Паризької Богоматері

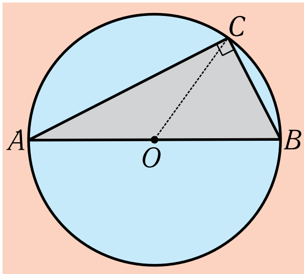
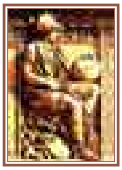


Рис. 4.20



Вправи і задачі

455°. Накресліть коло з радіусом 3 см, позначте його центр літерою O. Проведіть який-небудь радіус цього кола, потім діаметр, а після цього яку-небудь хорду, яка не є діаметром. Чи може хорда мати довжину 3 см? Якщо так, то як побудувати хорду саме такої довжини? Чи може хорда мати довжину 7 см?

456°. Накресліть коло з діаметром 7 см. Позначте всередині кола яку-небудь точку M, що не збігається з центром, а на колі — яку-небудь точку P. Проведіть через ці точки радіус, діаметр і по одній хорді. Яку найбільшу довжину можуть мати хорди? Чи можна було б виконати ці побудови для точки M, якби вона лежала поза колом?

457°. Ви виміряли діаметр скла круглого наручного годинника. Чи можна за цими даними визначити довжину хвилинної стрілки?

458°. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку? Чи всі вони будуть різними за довжиною?

459°. Усередині кола взято точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести? Чи всі вони будуть різними за довжиною?

460°. Дано коло. Яку лінію утворюють всі точки площини, відстані від яких до центра кола: а) вдвічі менші від його радіуса; б) вдвічі менші від діаметра; в) вдвічі більші за діаметр?

461°. Чи може хорда кола дорівнювати: а) радіусу; б) двом радіусам; в) трьом радіусам; г) половині радіуса?

462°. На рис. 4.21 зображені різні прямолінійні відрізки у крузі (O — центр круга). Які з них є: діаметрами; хордами; радіусами? Чи істинне таке твердження: «Діаметри й радіуси круга є його хордами»?

463°. Діаметр кола на 4 см довший за радіус. Яким є радіус і яким — діаметр?

464°. Побудуйте коло з діаметром AB, що дорівнює 6 см, а на ньому — точки M і P, для якої хорди AM і BP відповідно дорівнюють 2,5 см і 1,5 см. Виміряйте за допомогою транспортира кути AMB і APB. Чи впевнені ви у тих результатах, які одержали?

465°. На рис. 4.22 AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що: 1) $AC = DB$; 2) $AC \parallel DB$. Обґрунтуйте, як на підставі цієї властивості, лише за допомогою однієї лінійки, можна побудувати дві рівні або дві паралельні хорди кола.

466°. На рис. 4.23 AB — діаметр кола, $AC = CB$. Визначте кути A, B і C. Чому дорівнює кут AOC?

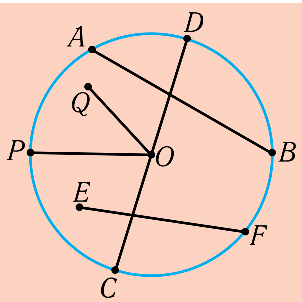


Рис. 4.21

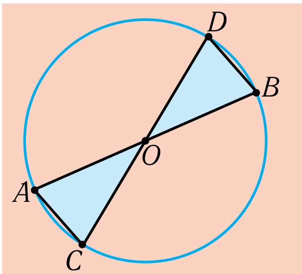


Рис. 4.22

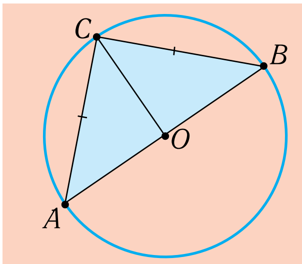


Рис. 4.23

467°. На рис. 4.24 хорди AB і BC рівні. Доведіть, що кути 1 і 2 теж рівні. Чи обов'язково будуть рівними AB і BC, якщо рівні кути 1 і 2?

468. На рис. 4.25 AB — діаметр кола, CB і DB — рівні хорди. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$. Чи обов'язково будуть рівними хорди CB і DB, якщо $\angle 1 = \angle 2$?

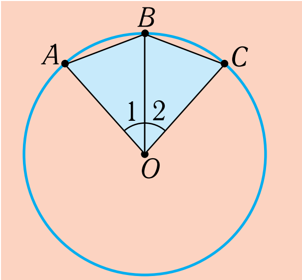


Рис. 4.24

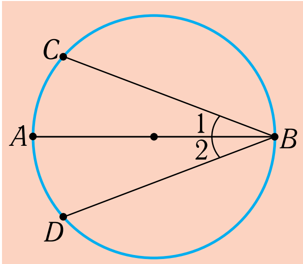


Рис. 4.25

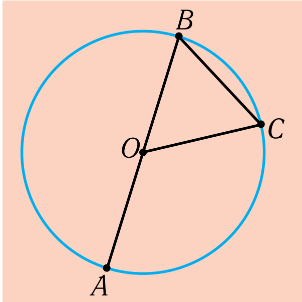


Рис. 4.26

469. На рис. 4.26 AB — діаметр кола, O — його центр. Доведіть, що $\angle AOC = 2\angle OBC$.

470. На рис. 4.27 AB — діаметр кола, O — його центр, $BC = BO$. Визначте $\angle ABC$.

471. На рис. 4.28 AB — діаметр кола, $AE \parallel BF$. Доведіть, що $AE = BF$.

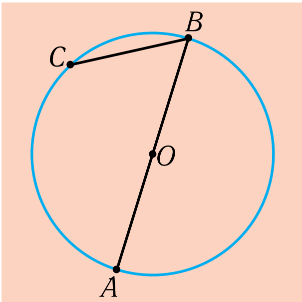


Рис. 4.27

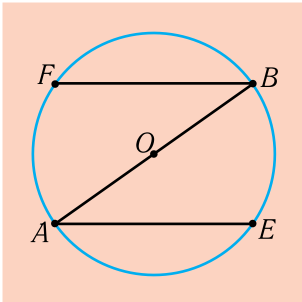
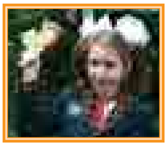


Рис. 4.28

§22. Коло і круг як геометричні місця точок

Урок 35



Ви знаєте, що будь-яка сукупність точок площини називається геометричною фігурою. Якщо ж про точки геометричної фігури відомо, що вони характеризуються певною властивістю, і немає інших точок на площині, які мають цю властивість, то таку геометричну фігуру називають *геометричним місцем точок*.

Означення.

Геометричним місцем точок **називають фігуру, яка складається з усіх тих, і лише**

тих точок площини, що мають певну властивість.

Зверніть увагу на слова, виділені в цьому означенні жирним шрифтом. Вони дуже важливі.

Наприклад, відповідно до цього означення, ***коло є геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від деякої точки (центра кола)***.

Справді, по-перше, **усі точки кола** рівновіддалені від його центра. А по-друге, **лише ці точки** віддалені від центра на ту саму відстань, тобто на площині немає інших точок, які мають цю властивість.

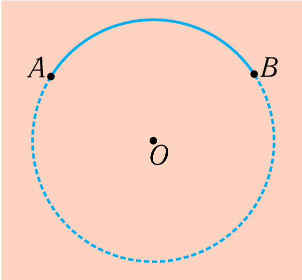


Рис. 4.29

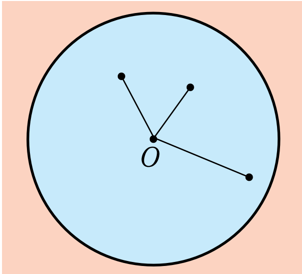


Рис. 4.30

На противагу цьому, наприклад, дуга кола, тобто частина кола, обмежена якими-небудь двома його точками A і B (рис. 4.29), або круг (рис. 4.30) уже не є геометричними місцями точок, рівновіддалених від центра O. У першому випадку зазначена фігура (дуга кола) не вміщує **всіх** точок площини, рівновіддалених від точки O, а в другому випадку вказаній фігурі (кругу) належать **не лише** ті точки, що рівновіддалені від центра на певну відстань, а ще й ті, що знаходяться від центра ближче за цю відстань. Однак можна сказати, що *круг є геометричним місцем точок площини, відстані від яких до центра круга не перевищують певної величини*.

Отже, для того, аби можна було стверджувати, що якась фігура (множина точок) є геометричним місцем точок з певною властивістю, потрібно довести два взаємно обернені твердження:

1) кожна точка цієї фігури має зазначену властивість;

2) якщо точка має зазначену властивість, то вона належить цій фігурі.

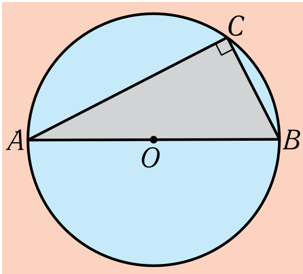


Рис. 4.31

У попередньому параграфі було доведено теорему Фалеса, згідно з якою, з будь-якої точки C кола його діаметр AB видно під прямим кутом (рис. 4.31). Чи можна на підставі цього стверджувати, що коло з діаметром AB є геометричним місцем точок M, з яких цей діаметр видно під прямим кутом (рис. 4.32)?

Ні, не можна, адже, як уже зауважувалося у попередньому параграфі, точки A і B кола не мають цієї властивості.

То, може, все коло без цих двох виняткових точок A і B є таким геометричним місцем точок?

Аби це довести, потрібно показати, що жодна точка N, яка лежить усередині кола або ззовні нього, не має зазначеної властивості.

Якщо точка N належатиме прямій AB, то у разі розміщення її всередині кола (рис. 4.33, а) кут ANB дорівнюватиме 180°, а при розміщенні ззовні кола (рис. 4.33 б) — 0°, тобто в жодному із цих випадків кут ANB не дорівнюватиме 90°.

Нехай точка N лежить усередині кола і не належить прямій AB (рис. 4.34). Позначимо через K точку перетину прямої BN з колом. За теоремою Фалеса, кут AKN — прямий. Кут ANB є зовнішнім для трикутника AKN, а тому він більший за внутрішній кут AKN. Отже, з усіх внутрішніх точок N діаметр AB видно під тупим кутом.

Нехай тепер точка N лежить ззовні кола і не належить прямій AB. Можливі декілька характерних випадків розміщення точки N відносно прямих a і b, проведених через точки A і B перпендикулярно до діаметра AB. Якщо точка N належатиме прямій a чи b (рис. 4.35, а), то у прямокутному трикутнику NAB кут N буде гострим. В усіх інших випадках (див. рис. 4.35, б-г) принаймні одна із прямих AN чи BN перетинатиме коло у деякій точці K, а тому, за теоремою Фалеса, кут AKB буде прямим. Цей кут є зовнішнім для трикутника KBN, а тому внутрішній кут N буде гострим. Виходить, що з усіх точок N, розміщених поза колом, діаметр AB видно під гострим кутом.

Цим завершено обґрунтування такого твердження.

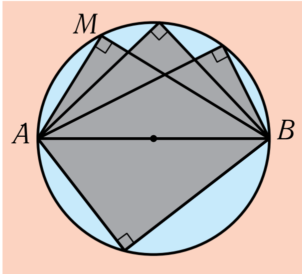


Рис. 4.32

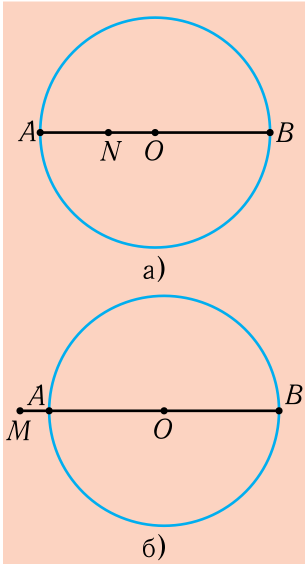


Рис. 4.33

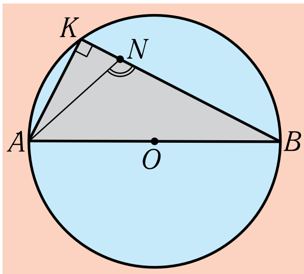


Рис. 4.34

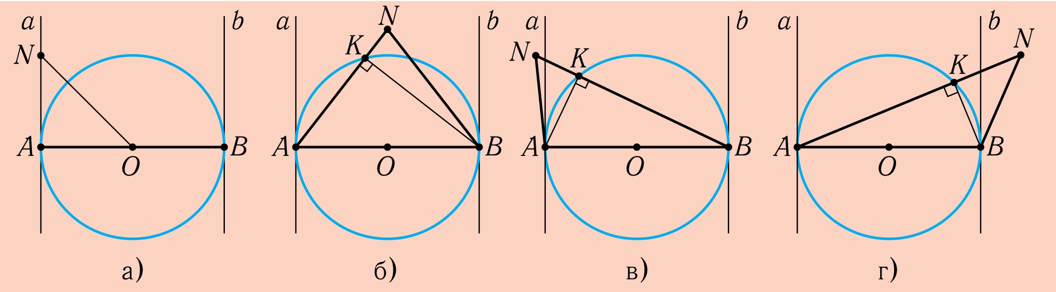


Рис. 4.35

Геометричним місцем точок площини, з яких заданий відрізок видно під прямим кутом, є коло, побудоване на цьому відрізку як на діаметрі, з якого вилучені дві точки — кінці діаметра.

Це геометричне місце точок інколи називають *геометричним місцем точок Фалеса*.

Вправи і задачі

472°. Хорда круга дорівнює 4 см. Чи може діаметр цього круга дорівнювати: а) 4 см; б) 3 см; в) 10 см?

473°. AB — хорда у крузі з центром O (рис. 4.36). Визначте:

а) кути A і B, якщо кут O дорівнює 70°;

б) кут O, якщо кут A дорівнює 40°.

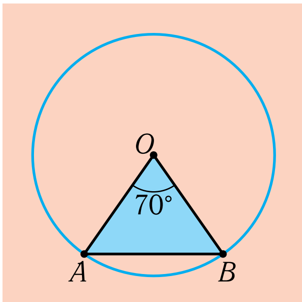


Рис. 4.36

474°. AB — діаметр кола з центром O, C — точка на колі (рис. 4.37). Визначте:

а) кут BOC, якщо кут C дорівнює 36°;

б) кут A, якщо кут BOC дорівнює 52°.

475. Які найбільше і найменше значення можуть мати кути A і BOC на рис. 4.37?

476. Яка фігура є геометричним місцем точок, відстані від яких до заданої точки більші або дорівнюють певній величині?

477. Що є геометричним місцем точок, з яких заданий відрізок видно:
а) під кутом 0°; б) під кутом 180°;
в) під гострими кутами; г) під тупими кутами?

478. Користуючись рис. 4.38, запропонуйте спосіб побудови точок кола за допомогою косинця, коли задано діаметр AB.

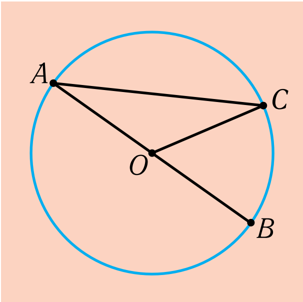


Рис. 4.37

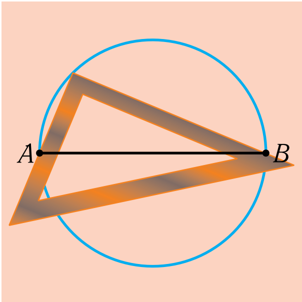


Рис. 4.38

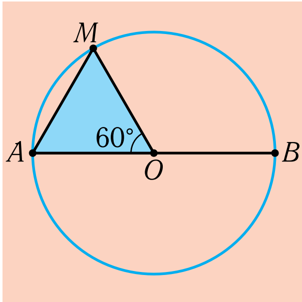


Рис. 4.39

479. У крузі з центром O і діаметром $AB = 7$ см проведено хорду AM (рис. 4.39). Виявилося, що кут AOM дорівнює 60°. Чи можна за цими даними без додаткових вимірювань визначити довжину хорди AM? А якби було відомо довжину хорди AM і те, що кут AOM дорівнює 60°, — то чи можна було б тоді обчислити довжину діаметра?

480. З однієї точки кола проведено дві хорди, які дорівнюють радіусу кола. Визначте кут між цими хордами.

481. У крузі проведено два радіуси під кутом 120° один до одного. Визначте відстань від центра круга до хорди, якщо діаметр круга дорівнює 8 см.

482. Відстань від центра O круга до хорди AB удвічі менша від радіуса круга. Визначте кут AOB.

483. Відстань від центра круга до хорди удвічі менша від самої хорди. Визначте, під яким кутом цю хорду видно із центра круга.

484•. Доведіть, що з точки, взятої всередині круга, діаметр круга видно під тупим кутом (рис. 4.40, а), а з точки, взятої ззовні круга, — під гострим (рис. 4.40, б).

485•. Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на частини завдовжки 6 см і 14 см. Визначте відстані від кінців хорди до цього діаметра.

486•. Дано коло з радіусом R. Яку довжину матимуть дві рівні хорди, аби при будь-якому розміщенні їхніх кінців на колі вони перетиналися?

487•. AB — хорда кола з центром O, точка C лежить на колі з того самого боку від прямої AB, що й точка O. Доведіть, що незалежно від розміщення точок A, B відносно прямої CO — по різні боки (рис. 4.41, а) чи з одного боку (рис. 4.41, б), кут AOB завжди удвічі більший за кут ACB.

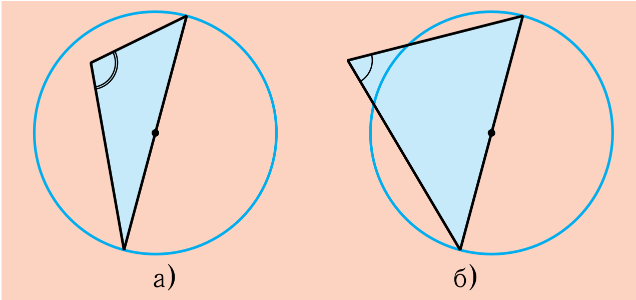


Рис. 4.40

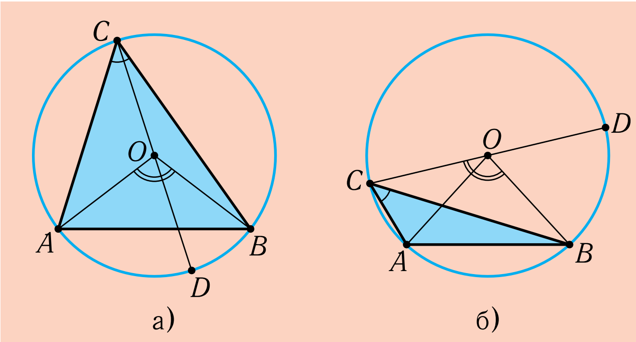


Рис. 4.41

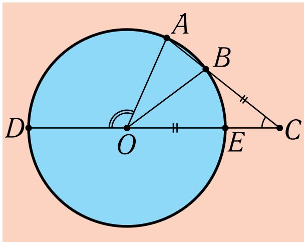


Рис. 4.42

488•. На продовженні хорди AB кола з центром O відкладено відрізок BC, що дорівнює радіусу кола (рис. 4.42). Пряма OC перетинає коло у точках D, E. Доведіть, що $\angle DOA = 3\angle ACD$.

§23. Властивість діаметра, перпендикулярного до хорди

Теорема

(про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди).

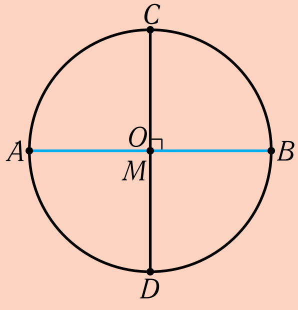
Урок 36

Діаметр кола (круга), який перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

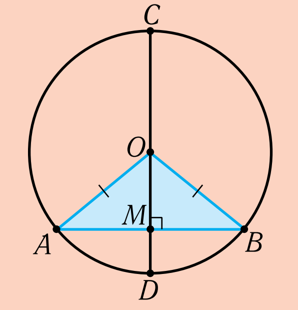
Доведення. Нехай O — центр кола, AB — довільна хорда кола, діаметр CD перпендикулярний до AB, M — точка їхнього перетину (рис. 4.43). Потрібно довести, що $AM = MB$.

Твердження очевидне, якщо хорда AB теж є діаметром (рис. 4.43, а), — адже будь-які два діаметри перетинаються в центрі кола, а центр кола ділить кожен діаметр на два радіуси, тобто навпіл.

Якщо ж хорда AB не є діаметром (рис. 4.43, б), то маємо два прямокутні трикутники OMA та OMB. Ці трикутники рівні, оскільки у них рівні гіпотенузи OA і OB — як радіуси кола, і спільний катет OM. Тому рівними є й катети AM та MB. Теорему доведено.



а)



б)

Рис. 4.43

Теорема обернена

(про властивість діаметра, який ділить хорду навпіл).

Якщо діаметр кола ділить хорду, яка не є діаметром, навпіл, то він перпендикулярний до цієї хорди.

Доведення. Нехай тепер діаметр CD проходить через середину M хорди AB і при цьому хорда AB не є діаметром, тобто точка M не збігається з центром O кола (рис. 4.44). Потрібно довести, що діаметр CD перпендикулярний до хорди AB.

Оскільки $OA = OB$ — як радіуси кола, а за умовою $AM = MB$, то трикутники OMA і OMB рівні за трьома сторонами. Тому рівними є їхні кути OMA та OMB, що лежать проти рівних сторін OA і OB. А оскільки ці кути суміжні, то вони — прямі. Отже, $CD \perp AB$. Теорему доведено.

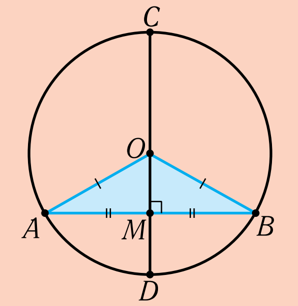


Рис. 4.44

Наслідком з теореми про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди, є ще одна теорема Фалеса, яка згадувалася на початку цієї теми.

Теорема Фалеса

(про поділ круга діаметром на дві рівні частини).

Кожен діаметр розбиває круг (і обмежуюче його коло) на дві рівні фігури — півкруги (і півкола).

Доведення. Нехай AB — діаметр круга з центром O (рис. 45). Уявімо собі, що проведено всі хорди цього круга, які перпендикулярні до діаметра AB. Через кожну точку круга проходитиме своя хорда, тому усі ці хорди повністю заповнять круг. Відповідно до доведеної теореми, кожна з хорд точкою перетину з діаметром AB ділиться навпіл, наприклад, хорда CD — точкою M. А це означає, що якби перегнути круг уздовж діаметра AB, то кожен відрізок CM сумістився б з відповідним йому відрізком DM. А оскільки всі відрізки CM заповнюють один із півкругів, а всі відрізки DM — інший, то один із півкругів при цьому сумістився б з іншим (а півколо — з іншим півколом). А це й означає, що обидва півкруги (і обидва півкола) рівні між собою. Теорему доведено.

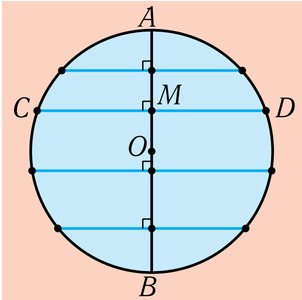


Рис. 4.45

Якщо у цьому доведенні брати до уваги лише такі відрізки CD, кінці яких належать якійсь дузі PAQ (рис. 46, а), то з рівності частин CM і MD цих відрізків випливатиме можливість суміщення дуг PA та QA. Отже, ці дуги рівні між собою. Так само доведемо, що рівні й дуги PB та QB.

Отже, ***діаметр кола, який перпендикулярний до хорди, ділить навпіл кожну з обох дуг, які стягує ця хорда***.

Якщо ж узяти до уваги лише такі відрізки CD, які лежать між паралельними хордами PQ і KN (рис. 46, б), то дійдемо висновку про рівність дуг PK і QN між цими хордами.

Отже, ***дуги кола, розміщені між паралельними хордами, рівні між собою***.

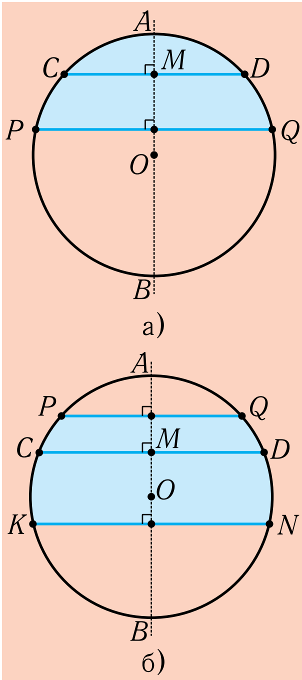


Рис. 4.46

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що рівні хорди круга рівновіддалені від його центра. Навпаки, хорди, які рівновіддалені від центра круга, — рівні між собою.

Розв'язання. Істинність цих тверджень очевидна, якщо рівні хорди є діаметрами (рис. 4.47). Тоді вони проходять через центр круга, а тому їхні відстані від центра круга дорівнюють нулю, тобто є рівними. Навпаки, якщо рівні відстані від хорд до центра круга дорівнюють нулю, то ці хорди проходять через центр круга, тобто є діаметрами, а діаметри круга рівні між собою.

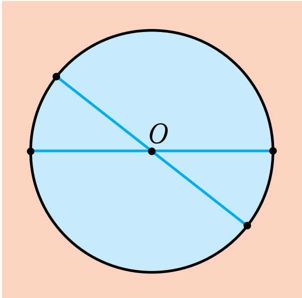


Рис. 4.47

Нехай тепер рівні хорди AB і A_1B_1 не є діаметрами, а відрізки $OM \perp AB$ та $OM_1 \perp A_1B_1$ визначають їхні відстані від центра круга (рис. 4.48). За доведеною теоремою, точки M і M_1 є серединами хорд. А оскільки хорди рівні, то $AM = A_1M_1$. Розглянемо прямокутні трикутники OMA та OM_1A_1. Вони рівні за катетом ($AM = A_1M_1$) і гіпотенузою ($OA = OA_1$ — як радіуси круга). Звідси $OM = OM_1$, що й треба було довести.

Навпаки, якщо будуть рівними перпендикуляри OM і OM_1, то з рівності прямокутних трикутників OMA і OM_1A_1 випливатиме рівність відрізків AM і A_1M_1, а звідси — рівність хорд AB і A_1B_1, що удвічі довші за ці відрізки. Твердження задачі доведено.

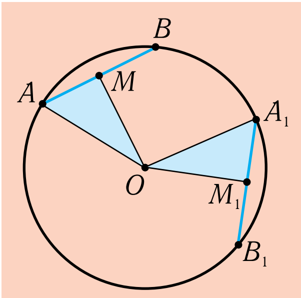
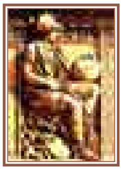


Рис. 4.48



Вправи і задачі

489°. Накресліть коло, позначте його центр літерою O і проведіть яку-небудь хорду AB. Користуючись лише косинцем і не задіюючи його сантиметрової шкали, поділіть хорду AB навпіл.

490°. Накресліть коло, позначте його центр літерою O і проведіть яку-небудь хорду CD. Користуючись лише лінійкою зі шкалою, проведіть діаметр, перпендикулярний до хорди CD.

491°. За допомогою шаблона нарисовано коло. Як за допомогою косинця й лінійки зі шкалою знайти його центр?

492°. Діаметр кола ділить хорду навпіл, однак не перпендикулярний до неї. Доведіть, що хорда — теж діаметр.

493. На рис. 4.49 відображено принцип дії одного із центрошукачів — креслярського приладу для відшукання центра круга (наприклад, у слюсарній справі). Як, на ваш погляд, застосовується цей прилад?

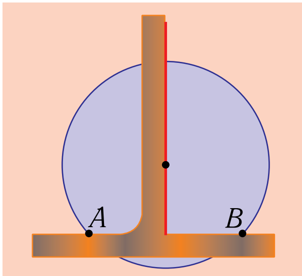


Рис. 4.49

494. Частину кола, нарисованого на дошці, і його центр стерли. Чи можна за допомогою креслярських інструментів відновити це коло?

495. Із паперу за допомогою шаблона вирізали круг. Чи можна знайти його центр, не використовуючи креслярських інструментів?

496. Як поділити дугу заданого кола навпіл?

497. На рис. 4.50 радіус OD перпендикулярний до хорди AB. Доведіть, що $AD = DB$.

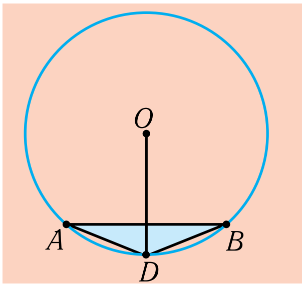


Рис. 4.50

498. На рис. 4.50 хорди AD і DB рівні, OD — радіус. Доведіть, що $OD \perp AB$.

499. Доведіть, що всі хорди, які діляться навпіл одним із діаметрів кола, паралельні.

500. Через точку всередині круга проведіть хорду, яка цією точкою ділилася б навпіл.

501. Дано коло. Через середину його радіуса проведено перпендикулярну до нього хорду. Доведіть, що цю хорду видно із центра кола під кутом 120°.

502•. Дано квадрат. Побудуйте коло, для якого сторони даного квадрата були б його хордами.

503•. Із точки A кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра кола на відстань 4 см. Визначте довжину кожної хорди.

504•. Хорда завдовжки 16 см відтинає від кола його чверть. Визначте відстань від центра кола до цієї хорди.

505•. У колі проведено дві паралельні хорди, кожна з яких відтинає від кола його чверть. Визначте відстань між хордами, якщо довжина однієї з них дорівнює 10 см.

506•. У крузі проведено дві взаємно перпендикулярні хорди. Доведіть, що відстань від центра круга до точки їхнього перетину дорівнює відстані між серединами цих хорд.

§24. Взаємне розміщення прямої і кола. Дотична до кола

Урок 37

Для активних користувачів геометрії, наприклад, для дизайнерів та архітекторів, потрібно вміти комбінувати коло з найрізноманітнішими фігурами. Звісно, у першу чергу слід знати, як можуть розміщуватися одне відносно одного коло і пряма.

Накресліть у зошиті коло з радіусом 3,5 см. Потім покладіть на нього лінійку і почніть поступово відсувати її від центра кола. Ви помітите, що край лінійки якийсь час перетинатиме коло у двох доволі віддалених одна від одної точках (рис. 4.51, а). Потім ці точки почнуть поступово зближатися, аж поки не зіллються в одну — тоді край лінійки немовби торкнеться до кола (рис. 4.51, б). При подальшому

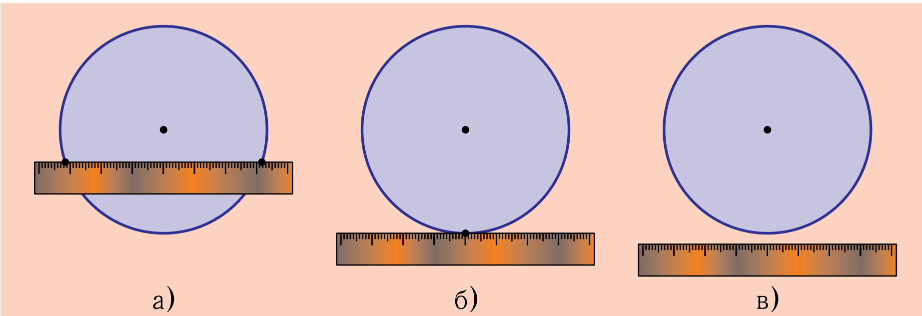


Рис. 4.51

відсуванні лінійки від центра точок перетину уже не буде (рис. 4.51, в).

Цей простий експеримент наштовхує на думку, що можливі три характерні випадки взаємного розміщення прямої і кола: 1) перетин прямої з колом у двох точках; 2) перетин в одній точці, або дотик; 3) відсутність спільних точок. З'ясуємо геометричні умови із цих випадків.

Нехай Q — основа перпендикуляра, опущеного із центра O кола на пряму (тобто OQ — відстань від центра кола до прямої), R — радіус кола (рис. 4.52). Можливі три суттєво відмінних один від одного випадки: 1) точка Q лежить усередині кола, тобто відстань $OQ < R$ (рис. 52, а); 2) точка Q лежить на колі, тобто $OQ = R$ (рис. 52, б); 3) точка Q лежить ззовні кола, тобто $OQ > R$ (рис. 52, в).

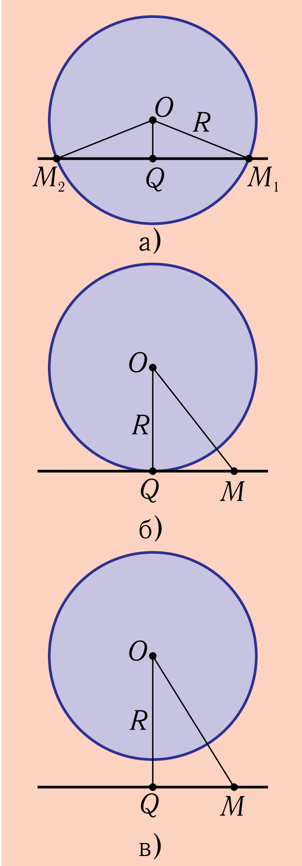


Рис. 4.52

У першому випадку можна побудувати два, і тільки два, прямокутні трикутники OQM_1 і OQM_2, що мають: спільний катет OQ; прямі кути при вершині Q і рівні гіпотенузи OM_1 та OM_2 завдовжки $R > OQ$. Ці трикутники розміщуватимуться по різні боки від прямої OQ. При цьому точки M_1, M_2 лежатимуть і на прямій (оскільки $OM_1 \perp OQ$ і $OM_2 \perp OQ$), і на колі (оскільки $OM_1 = OM_2 = R$), тобто будуть точками перетину прямої з колом. Інших спільних точок прямої з колом у цьому разі існувати не може.

У другому випадку візьмемо на прямій довільну точку M, що не збігається з Q, і розглянемо прямокутний трикутник OQM. Оскільки гіпотенуза OM зажди більша за катет $OQ = R$, то всі точки M лежатимуть ззовні кола, тобто точка Q у цьому разі буде єдиною спільною точкою прямої і кола.

У третьому випадку так само візьмемо на прямій довільну точку M і так само розглянемо прямокутний трикутник OQM. Тепер уже й катет OQ буде більшим за радіус кола R, а гіпотенуза OM — і поготів. Тому вже всі точки прямої лежатимуть ззовні кола, тобто пряма з колом не матимуть жодної спільної точки.

Означення.

Пряма, яка має з колом дві спільні точки, називається *січною* для кола. Пряма, яка має з колом єдину спільну точку, називається *дотичною* до кола.

Результати проведеного дослідження такі:

якщо відстань від центра кола до прямої менша від радіуса кола, то пряма і коло мають рівно дві спільні точки (тобто пряма є січною для кола). Якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює радіусу кола, то пряма і коло мають єдину спільну точку (тобто пряма є дотичною до кола), причому радіус кола, проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної. Якщо ж відстань від центра кола до прямої більша за радіус кола, то пряма і коло не мають жодної спільної точки.

Враховуючи, що кожен із розглянутих випадків виключає інші, істинними є й обернені твердження:

якщо пряма є січною для кола, то відстань до неї від центра кола менша від радіуса кола. Якщо пряма є дотичною до кола, то відстань до неї від центра кола дорівнює радіусу, причому точкою дотику є кінець радіуса, перпендикулярного до дотичної. Якщо ж пряма не має з колом жодної спільної точки, то відстань від до неї від центра кола більша за радіус.

Джон Бірні Філіп (1824–1875). Статуя Геометрії на меморіалі принца Альберта у Лондоні (1876 р.)

З усіх цих тверджень найчастіше застосовуються ті, що стосуються дотику прямої з колом. Їх формулюють у вигляді таких двох теорем.

Теорема
(властивість дотичної до кола).

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса кола, проведеного у точку дотику.

Теорема
(обернена: ознака дотичної).

Якщо пряма проходить через точку кола і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кола.

Дотична до кола називається також *дотичною* до обмеженого ним круга. Дотична до круга має з кругом єдину спільну точку.

Січна кола перетинає обмежений ним круг по хорді і називається *січною* цього круга.

Пряма, яка не перетинається з колом, не перетинається і з обмеженим ним кругом.

Розв'язуємо разом

Задача 1.

На площині задано коло і точку P. Провести через точку P дотичну до заданого кола.

Розв'язання. Якщо пряма a є дотичною до кола з центром O, то радіус OQ, проведений у точку дотику Q, перпендикулярний до дотичної (рис. 4.53). Крім цього, кожна точка M прямої a, відмінна від точки дотику Q, лежить ззовні кола, оскільки відстань OM, як гіпотенуза у прямокутному трикутнику OQM, більша за катет OQ.

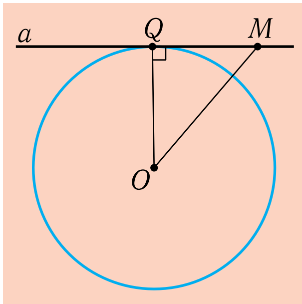


Рис. 4.53

Звідси випливає, що коли точка P лежить усередині кола (рис. 4.54), то через неї неможливо провести жодної дотичної до кола, а якщо точка P лежить на колі (рис. 4.55), то існує єдина дотична, яка проходить через цю точку — це пряма a, перпендикулярна до радіуса OP. Її можна провести, наприклад, за допомогою косинця.

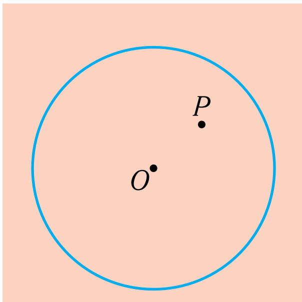


Рис. 4.54

Проаналізуємо тепер ситуацію, коли точка P лежить ззовні кола (рис. 4.56). Оскільки радіус OQ, проведений у точку дотику Q, має бути перпендикулярним до дотичної, то це означає, що відрізок OP має бути видно із точки Q під прямим кутом. З теореми Фалеса відомо, що таку властивість мають точки кола з діаметром OP.

Звідси випливають такі побудови: 1) ділимо відрізок OP навпіл; нехай точка C — точка поділу; 2) проводимо коло з центром C і радіусом CO; 3) через точки Q і Q' перетину цього кола із заданим колом проводимо шукані дотичні PQ і PQ'.

Прямокутний трикутник з гіпотенузою OP і катетом, що дорівнює радіусу кола і виходить з точки O, можна побудувати однозначно з кожного боку від прямої OP, оскільки усі трикутники, що мають рівні гіпотенузи і рівні катети, рівні між собою. Тому в цьому разі існує рівно дві дотичні PQ і PQ', які проходять через точку P, причому відрізки цих дотичних від точки P до точок дотику Q і Q' рівні між собою.

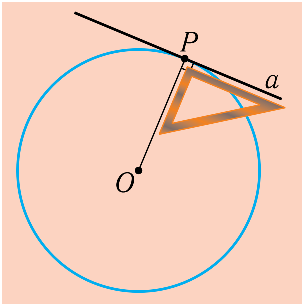


Рис. 4.55

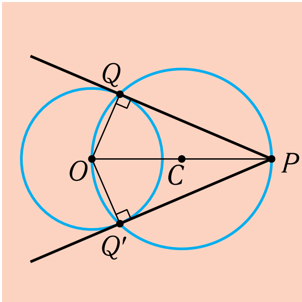


Рис. 4.56

Останній висновок із наведеного розв'язання часто використовується при розв'язуванні інших задач. Тому його формулюють у вигляді тереми.

Теорема

(властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола).

Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

Розглянемо приклад задачі на використання цієї теореми.

Задача 2.

Через точку A, що лежить ззовні кола, проведено до кола дотичні AK і AL (K, L — точки дотику) (рис. 4.57). На меншій із дуг, обмежених точками K і L, взято довільну точку M і через неї проведено третю дотичну до кола. Нехай B і C — точки перетину цієї дотичної з дотичними

AK і AL. Довести, що периметр трикутника ABC не залежить від розміщення точки M.

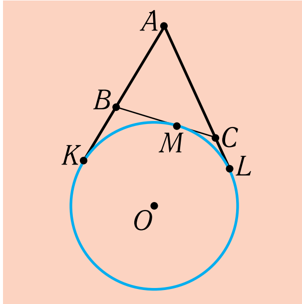
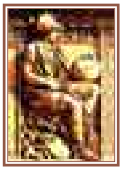


Рис. 4.57

Розв'язання. Периметр трикутника ABC дорівнює сумі $AB + BC + AC$, або $AB + BM + MC + AC$. Водночас, за властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола, $BM = BK$, а $MC = CL$. Тому $P = AB + BK + CL + AC = AK + AL$, що справді не залежить від розміщення точки M. Твердження задачі доведено.



Вправи і задачі

507°. Чи істинним є таке твердження: «Будь-яка пряма, яка перпендикулярна до радіуса, дотикається до кола»? А таке: «Будь-яка пряма, яка перпендикулярна до радіуса і проходить через його кінець, дотикається до кола»?

508°. Чи можна сказати, що дотична до кола — це пряма, яка має з колом менше двох спільних точок?

509°. Побудуйте коло з діаметром 8 см, а також три прямі, які віддалені від центра кола на відстанях 3 см, 4 см і 5 см. Як розміщені ці прямі відносно кола?

510°. Накресліть коло з радіусом 3 см і позначте на ньому точку P. Як за допомогою косинця або транспортира побудувати дотичну до кола, що проходить через точку P? А якщо точку P буде взято ззовні кола?

511°. На рис. 4.58 AB — дотична до кола, P — точка дотику, $\angle MPB = 32°$. Визначте кути OPM і APM.

512°. На рис. 4.59 AB — дотична до кола, P — точка дотику, $\angle MOP = 80°$. Визначте кути APM і MPB.

513. P — точка дотику дотичної AP до кола з центром O, кут OAP дорівнює 30°. Визначте діаметр кола, якщо $OA = 4$ см.

514. Доведіть, що дві дотичні до кола, які проходять через кінці одного й того самого діаметра, паралельні між собою. Чи істинне обернене твердження?

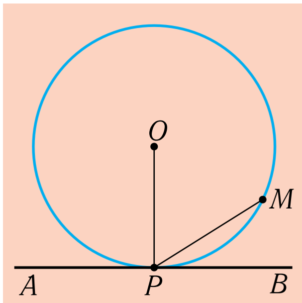


Рис. 4.58

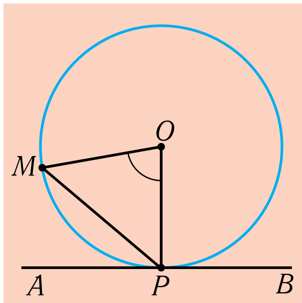


Рис. 4.59

515. Діаметр кола ділить хорду, яка не є діаметром, навпіл. Доведіть, що дотичні до кола, проведені через кінці цього діаметра, паралельні заданій хорді.

516. Пряма дотикається до кола з центром O, A — точка дотику. На цій прямій по різні боки від точки A відкладено рівні відрізки AB і AC. Доведіть, що $OB = OC$.

517. Дано кут 30°. Коло радіуса R дотикається до прямої, яка містить одну зі сторін кута, а його центр належить іншій стороні. Визначте відстань від центра кола до вершини кута.

518. З точки P проведені до кола дві дотичні PA і PB. Доведіть, що центр кола лежить на бісектрисі кута APB.

519. З точки, що лежить поза колом, проведені дві дотичні до кола. Відстань від точки до центра кола вдвічі більша за радіус кола. Визначте кут між дотичними.

520. Відстань від точки M до центра кола менша від його радіуса. Доведіть, що будь-яка пряма, яка проходить через M, перетинає коло у двох точках.

521. До кола проведено дві паралельні дотичні. Доведіть, що відрізок, який сполучає точки дотику, проходить через центр кола.

522. Точки A і B лежать на колі з центром O. Через ці точки до кола проведені дві дотичні, які перетинаються в точці C. Доведіть, що прямі AB і AC перпендикулярні.

523. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до заданої прямої у заданій на ній точці A.

524. На рис. 4.60 відображено принцип дії центрошукача (приладу для знаходження центра суцільного круга). Прилад складається із трьох лінійок. Дві крайні лінійки взаємно перпендикулярні, а один бік середньої лінійки ділить кут між ними навпіл. Як, на ваш погляд, застосовується цей прилад?

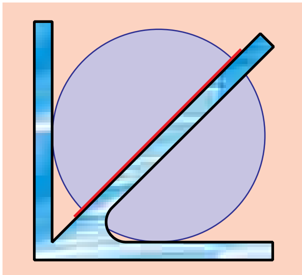


Рис. 4.60

525•. Побудуйте два кола зі спільним центром O, одне — з радіусом 2 см, інше — з радіусом 4 см. Потім проведіть таку хорду AB більшого кола, яка дотикалася б до меншого кола. Доведіть, що точка дотику C ділить хорду AB навпіл і визначте кут AOB.

526•. На рис. 4.61 відображено спосіб побудови дотичних до кола, проведених через довільну зовнішню точку P: шукані точки дотику Q і Q' належать основам рівнобедрених трикутників POT і POT'; довжини цих основ дорівнюють двом радіусам кола. Деталізуйте та обґрунтуйте цей спосіб.

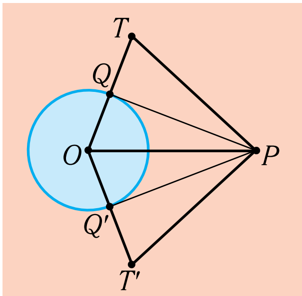


Рис. 4.61

527°. Кут між діаметром AB і хордою AC дорівнює 30°. Через точку C проведено дотичну, яка перетинає пряму AB у точці D. Доведіть, що $OC = DB$.

528°. Доведіть, що два різних кола з однаковими радіусами мають дві спільні дотичні, які паралельні прямій, що проходить через їхні центри.

529°. Дано коло з радіусом R. Із зовнішньої точки P до нього проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні PA і PB, C — довільна точка меншої із дуг, обмежених точками A і B, MN — дотична до кола, проведена через точку C (точка M належить прямій PA, а точка N — прямій PB). Визначте периметр трикутника PMN.

530°. До двох кіл з радіусами R і r ($R > r$) проведено дві спільні дотичні так, що відносно кожної з них обидва кола лежать з одного боку. Кут між дотичними дорівнює 90°. Визначте довжини відрізків дотичних між точками дотику. Як зміниться відповідь до задачі, якщо кола лежатимуть з різних боків від кожної з дотичних?

§25. Задання кола точками. Коло, описане навколо трикутника

Урок 38

Як відомо, пряма лінія повністю визначається двома своїми точками. Виникає природне запитання: скількома точками визначається коло?

Для визначення кола потрібно задати його центр і радіус. Зрозуміло, що існує лише одне коло із заданими центром O і радіусом R (рис. 4.62). Проте часто доводиться будувати коло не за цими даними, а за окремими точками, через які воно має проходити — наприклад, коли його потрібно описати навколо трикутника. Тому-то питання про те, скільки точок потрібно задати, аби визначити коло, яке через них проходить, і як за цими точками знайти центр і радіус кола, має й практичне значення.

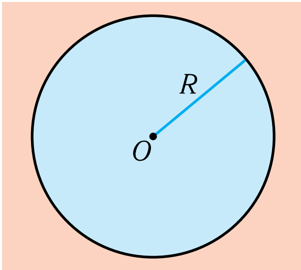


Рис. 4.62

Зрозуміло, що через окремо взяту точку A можна провести безліч кіл. Їхніми центрами можуть бути будь-які точки O, O_1, O_2, ... площини (рис. 4.63). Тоді відповідними радіусами будуть відрізки OA, O_1A, O_2A, ...

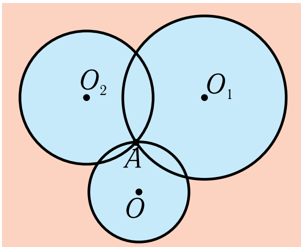


Рис. 4.63

Нехай тепер на площині маємо дві точки A і B (рис. 4.64). Центр кола, яке проходить через ці точки, має бути рівновіддаленим від них. Однією з таких точок є середина M відрізка AB. Усі інші точки O можна розглядати як вершини рівнобедрених трикутників зі спільною основою AB. Тому, враховуючи властивості рівнобедреного трикутника, можна стверджувати, що всі можливі центри лежать на прямій MO, проведеній через середину M відрізка AB перпендикулярно до нього (рис. 4.65). Таку пряму називають *серединним перпендикуляром до відрізка* AB.

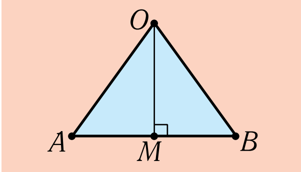


Рис. 4.64

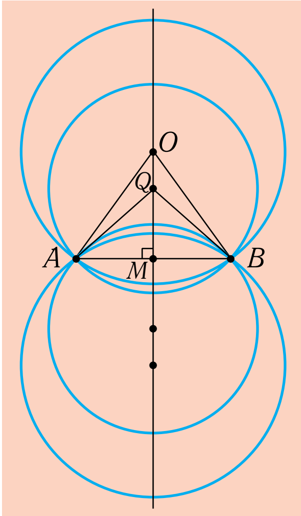


Рис. 4.65

Означення.

Пряма, яка проходить через середину відрізка і перпендикулярна до нього, називається *серединним перпендикуляром* до цього відрізка.

Отже, усі центри кіл, проведених через точки A і B, належать серединному перпендикуляру до відрізка AB.

Неважко довести, що й навпаки, кожна точка Q серединного перпендикуляра OM до відрізка AB буде рівновіддаленою від його кінців A і B. — Це випливає з рівності прямокутних трикутників QMA і QMB, що мають спільний катет QM і рівні катети MA та MB; звідси $QA = QB$.

Отже, кожну точку O серединного перпендикуляра до відрізка AB можна взяти за центр кола, що проходить через задані точки A і B. Радіусом цього кола буде відрізок OA. Усіх таких кіл — безліч.

Те, що кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка, і, навпаки, точка, яка рівновіддалена від відрізка, належить серединному перпендикуляру, означає, що справджується така теорема.

Теорема
(про властивість серединного перпендикуляра).

Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Візьмемо тепер на площині три точки. Якщо вони лежатимуть на одній прямій, то жодного кола через них провести не вдасться, оскільки, як з'ясовано у §24, коло з прямою може мати щонайбільше дві спільні точки (а тут би їх було вже три).

Тому нехай задані три точки A, B, C не лежать на одній прямій (рис. 4.66). Шуканий центр O кола, яке проходить через точки A, B, C, повинен бути рівновіддаленим від усіх цих точок. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від точок A і B, є серединний перпендикуляр l до відрізка AB, а геометричним місцем точок, рівновіддалених від точок A, C, — серединний перпендикуляр m до відрізка AC. Нехай O — точка перетину прямих l і m (ці прямі обов'язково перетнуться, бо якби вони були паралельними, то перпендикулярні до них прямі AB і AC збігалися б, отже, точки A, B і C лежали б на одній прямій). Тоді $OA = OB$ і $OA = OC$. Отже, усі три відрізки OA, OB, OC рівні між собою. Звідси випливає, що точка O є центром шуканого кола, а OA, OB і OC — його радіуси. Причому, з рівності $OB = OC$ виходить, що третій серединний перпендикуляр n до відрізка BC теж проходить через ту саму точку O, що й перші два l і m, адже всі точки, які рівновіддалені від точок B і C, належать прямій n).

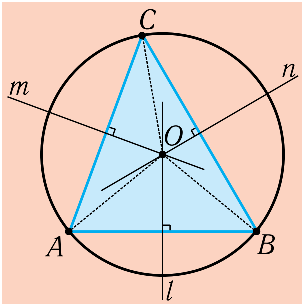


Рис. 4.66

Чи може існувати інше коло, яке теж проходить через точки A, B, C? — Ні, не може, адже його центр неодмінно мав би належати прямим l і m, а ці прямі перетинаються лише в одній точці O. Тоді й радіус OA, як відстань між двома цілком визначеними точками, визначається однозначно.

Отже, доведено таку теорему.

Теорема

(про задання кола трьома точками).

Існує єдине коло, яке проходить через три задані точки, що не лежать на одній прямій.

Важливим наслідком із цієї теореми є можливість описати коло навколо будь-якого трикутника.

Геометрія, що описує коло. Скульптура на будівлі колишньої чоловічої школи Лондонського Сіті (*City of London School*) на набережній Вікторії.

Означення.

Коло називається *описаним* навколо трикутника, а трикутник — відповідно, *вписаним* у коло, якщо це коло проходить через усі вершини трикутника.

Теорема

(про існування і єдиність кола, описаного навколо трикутника).

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, причому єдине. Центром цього кола є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника (див. рис. 4.66).

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

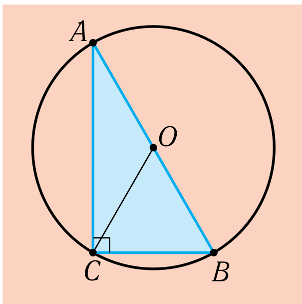


Рис. 4.67

Розв'язання. Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C, O — середина гіпотенузи AB (рис. 4.67). Проведемо коло з центром O і радіусом OA. Відомо, що це коло, якщо його взяти без точок A і B, є геометричним місцем точок, з яких відрізок AB видно під прямим кутом (геометричним місцем точок Фалеса). Отже, вершина прямого кута C лежить на ньому. Тому це коло є описаним навколо трикутника ABC. А оскільки описане коло — єдине, то цим твердження задачі доведено.

Із твердження цієї задачі випливає такий наслідок:

медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, отже, є радіусом описаного кола.

Вправи і задачі

531°. На якому з рисунків 4.68, а) – г) зображене коло, описане навколо трикутника?

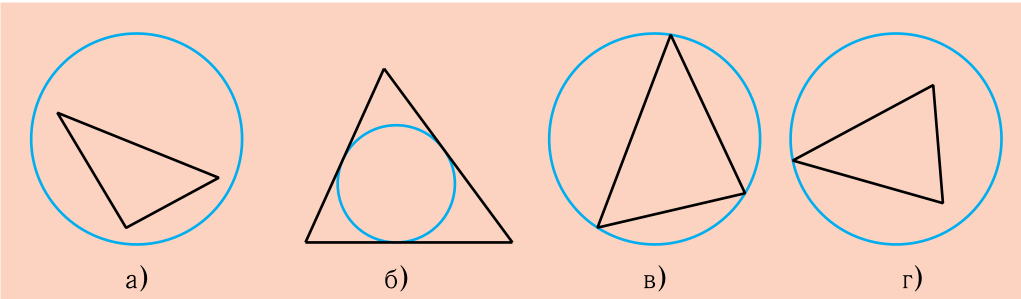


Рис. 4.68

532°. Накресліть коло з радіусом 3,5 см, а потім який-небудь трикутник, вписаний у це коло. Як вписати у коло прямокутний трикутник?

533°. Накресліть рівнобедрений трикутник з основою 5 см і з кутами при основі по 75°, а потім опишіть навколо нього коло. Що можна стверджувати про розміщення центра цього кола?

534°. Виконайте завдання попередньої вправи для рівнобедреного трикутника з бічною стороною 3 см і кутом при вершині 120°.

535°. Побудуйте прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а потім опишіть навколо нього коло. Де розміщується його центр?

536. Два населених пункти A і B розташовані по різні боки від річки. В якому місці потрібно побудувати міст через річку, аби він був однаково віддалений від населених пунктів?

537. Позначте точку A і побудуйте відрізок a завдовжки 2,5 см. Знайдіть і побудуйте геометричне місце центрів кіл з радіусом R, що дорівнює відрізку a, які проходять через точку A.

538. Позначте дві точки A і B. Знайдіть і побудуйте геометричне місце центрів кіл, які проходять через ці точки.

539. Накресліть трикутник ABC. Знайдіть і побудуйте точку, рівновіддалену від усіх вершин цього трикутника. Чи завжди є така точка?

540. Позначте три точки. Знайдіть і побудуйте точку, рівновіддалену від цих точок. Чи завжди є така точка? У якому випадку задача не має розв'язків?

541. Навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою BC описано коло з центром O (рис. 4.69). Визначте кут BAC, якщо кут BOC дорівнює $100°$.

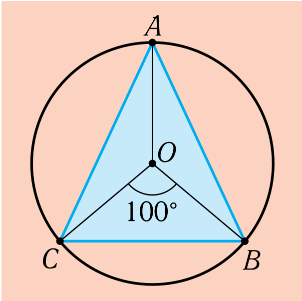


Рис. 4.69

542. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, належить прямій, яка містить медіану, проведену до основи трикутника.

543. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, належить прямій, яка містить бісектрису, проведену до основи трикутника.

544. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, збігається з точкою перетину його бісектрис.

545. Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, збігається з точкою перетину його медіан, то цей трикутник — рівносторонній.

546. У трикутнику центр описаного кола належить висоті. Доведіть, що цей трикутник — рівнобедрений.

547. Чи буде висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

548. Із середини відрізка проведено промінь, перпендикулярний до цього відрізка. Чи буде він геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?

549. Дано кут і дві точки A і B. На сторонах кута знайдіть точки, рівновіддалені від точок A і B.

550•. Чи буде пряма, на якій лежить медіана трикутника, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

551•. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а кут при основі — $30°$. Визначте радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

552•. У трикутнику центр описаного кола належить медіані. Доведіть, що цей трикутник — рівнобедрений або прямокутний.

553*. Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні, то цей трикутник — прямокутний, причому згадана сторона є його гіпотенузою.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§26. Взаємне розміщення двох кіл

Якщо два кола на площині мають три спільні точки, то, за теоремою про задання кола трьома точками, вони збігаються. Отже, можна передбачити, що два різні кола можуть мати або дві спільні точки, або одну, або жодної.

Неважко переконатися, що кожна із цих можливостей справді може реалізовуватися.

Якщо на серединному перпендикулярі до відрізка AB візьмемо дві які-небудь точки O_1, O_2 (рис. 4.70), то два кола із центрами у цих точках і з радіусами O_1A та O_2A матимуть лише дві спільні точки A і B.

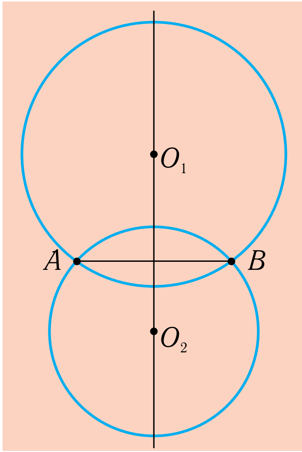


Рис. 4.70

Означення.

Про кола, які мають дві спільні точки, кажуть, що вони *перетинаються*.

Як випливає з нерівностей трикутника, у випадку перетину двох кіл, і тільки в цьому разі, відстань O_1O_2 між їхніми центрами менша від суми радіусів R і r, але більша за їхню різницю:

$$R + r > O_1O_2 > R - r.$$

Якщо, далі, на якій-небудь прямій O_1O_2 візьмемо довільну точку A і проведемо два кола з центрами O_1, O_2 і радіусами $O_1A = R$ та $O_2A = r$ (рис. 4.71 і 72), то ці кола матимуть лише одну спільну точку A.

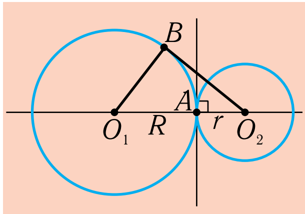


Рис. 4.71

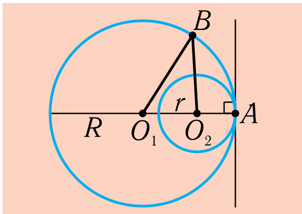


Рис. 4.72

Справді, припустимо, що існує ще якась спільна точка B. Зрозуміло, що вона не може лежати на прямій O_1O_2, бо тоді, маючи дві спільні діаметрально протилежні точки A і B, обидва кола збігалися б, отже, збігалися б і їхні центри O_1, O_2. В такому разі, за наслідком з нерівності трикутника: $O_2B > |O_1O_2 - O_1B| = |O_1O_2 - R|$. Якщо маємо ситуацію, зображену на рис. 4.71, то $O_1O_2 =$

$= O_1A + O_2A = R + r$. І тоді $O_2B > r$. Якщо ж маємо ситуацію, зображену на рис. 4.72, то $O_1O_2 = O_1A - O_2A = R - r$. І тоді так само $O_2B > r$. А це означає, що в жодному із цих випадків точка B не належить другому колу (причому, в першому випадку одне коло лежить ззовні іншого, а в другому — всередині іншого). Одержана суперечність свідчить про те, що побудовані кола справді мають єдину спільну точку A.

П'єро Форназетті (1913–1988).
Вгорі: Два круги з обличчями.
Внизу: Півмісяць

Означення.

Про кола, які мають лише одну спільну точку, кажуть, що вони *дотикаються* у цій точці, а сама ця точка називається *точкою дотику*.

Кола можуть дотикатися *зовнішньо*, як показано на рис. 4.71, або *внутрішньо*, як показано на рис. 4.72. В обох випадках точка дотику A лежить на прямій O_1O_2, що сполучає їхні центри (так званій *лінії центрів*), а пряма, що проходить через цю точку і перпендикулярна до лінії центрів O_1O_2, є спільною дотичною до обох кіл. У випадку зовнішнього дотику кола розміщуються по різні боки від спільної дотичної, а у випадку внутрішнього дотику — з одного боку від неї.

Неважко довести, що завжди, коли кола дотикаються зовнішньо (рис. 4.71), то відстань O_1O_2 між їхніми центрами дорівнює сумі радіусів:

$$O_1O_2 = R + r,$$

а якщо внутрішньо (рис. 4.72), — то різниці радіусів:

$$O_1O_2 = R - r.$$

Нехай тепер два кола розміщені так, що відстань O_1O_2 між їхніми центрами більша за суму радіусів $R + r$ (рис. 4.73):

$$O_1O_2 > R + r.$$

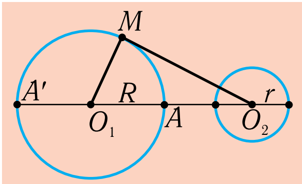


Рис. 4.73

Зрозуміло, що спільні точки цих кіл не можуть лежати на лінії центрів O_1O_2. Припустимо, що існує якась спільна точка M поза цією прямою. Тоді, за наслідком з нерівності трикутника, $O_2M > |O_1O_2 - O_1M| = O_1O_2 - R$. Отже, $O_2M > r$, а тому точка M не може належати другому колу. Одержана суперечність свідчить про те, що в цьому разі кола не перетинаються, причому всі точки одного коло лежать ззовні іншого.

Аналогічно можна показати, що коли відстань O_1O_2 між центрами двох кіл буде меншою від різниці їхніх радіусів (рис. 4.74):

$$O_1O_2 < R - r,$$

то кола теж не перетинатимуться, причому коло з меншим радіусом лежатиме всередині кола з більшим радіусом. Ця ситуація, зокрема, характерна для так званих *концентричних* кіл — кіл зі спільним центром (рис. 4.75).

Підсумовуючи, маємо такі умови взаємного розміщення двох кіл з радіусами R і r, відстань між центрами яких дорівнює O_1O_2:

1) якщо $O_1O_2 > R + r$, то кола не перетинаються і одне з них лежить ззовні іншого;

2) якщо $O_1O_2 = R + r$, то кола дотикаються зовнішньо;

3) якщо $R - r < O_1O_2 < R + r$ $(R > r)$, то кола перетинаються;

4) якщо $O_1O_2 = R - r$ $(R > r)$, то кола дотикаються внутрішньо;

5) якщо $O_1O_2 < R - r$ $(R > r)$, то кола не перетинаються і одне з них лежить всередині іншого; зокрема, при $d = 0$ кола є концентричними.

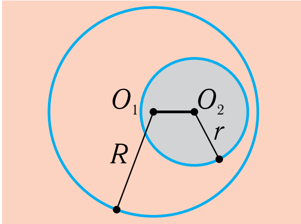


Рис. 4.74

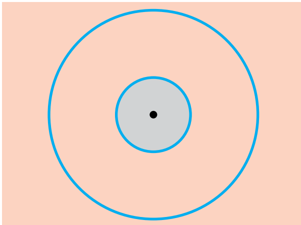
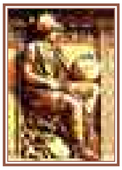


Рис. 4.75



Вправи і задачі

554°. Зобразіть за допомогою креслярських інструментів різні можливі випадки взаємного розміщення двох кіл з радіусами 2 см і 3 см. Якою є відстань між центрами цих кіл у кожному випадку?

555°. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 8 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їхні радіуси дорівнюють:

а) 3 см і 4 см; б) 7 см і 5 см; в) 9 см і 2 см; г) 9 см і 1 см; ґ) 3 см і 5 см; д) 12 см і 3 см.

556°. Радіуси двох кіл дорівнюють 5 см і 9 см. Визначте відстань між їхніми центрами, якщо кола дотикаються одне до одного: а) зовнішньо; б) внутрішньо.

557°. Яким є взаємне розміщення двох кіл, якщо:

а) радіуси кіл дорівнюють 8 см і 2 см, а відстань між їхніми центрами — 10 см;

б) радіуси кіл дорівнюють 11 см і 7 см, а відстань між їхніми центрами — 4 см;
в) діаметри кіл дорівнюють 32 см і 8 см, а відстань між їхніми центрами — 20 см;
г) діаметри кіл дорівнюють 42 см і 26 см, а відстань між їхніми центрами — 8 см?

558°. Визначте радіуси двох концентричних кіл, якщо діаметр більшого кола ділиться меншим колом на три частини, які дорівнюють 9 см, 12 см і 9 см.

559. Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до прямої O_1O_2.

560. Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що промінь O_1O_2 є бісектрисою кута AO_1B, а промінь O_2O_1 — бісектрисою кута AO_2B.

561. Доведіть, що коли два кола дотикаються (зовнішньо або внутрішньо), то точка їхнього дотику лежить на лінії центрів.

562. Спільна точка A двох кіл із центрами O_1 і O_2 лежить на прямій O_1O_2. Доведіть, що ці кола дотикаються одне до одного в точці A.

563. Два кола дотикається зовнішнім чином. Їхні радіуси відносяться, як 2 : 3. Визначте радіуси кіл, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює 10 см.

564. Три кола з радіусами 2 см, 3 см і 4 см зовнішньо попарно дотикаються одне до одного. Визначте периметр трикутника з вершинами у центрах цих кіл.

565. Знайдіть геометричне місце центрів кіл із радіусом R, що дотикаються до даного кола з радіусом r.

566•. Три кола зовнішньо попарно дотикаються одне до одного ззовні. Відстані між центрами цих кіл дорівнюють 6 см, 7 см і 9 см. Визначте радіуси цих кіл.

567•. На рис. 4.76 кола з центрами $O1$, $O2$ дотикаються зовнішньо у точці A, AM і BC — їхні спільні дотичні. Доведіть, що кут $O1MO2$ — прямий.

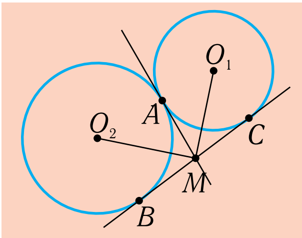


Рис. 4.76

568•. Два рівних круги, що дотикаються один до одного, внутрішньо дотикаються до третього круга. Сполучивши їхні центри, дістанемо трикутник з периметром 18 см. Визначте радіус більшого круга.

§27. Коло, вписане у трикутник

Уроки 40–41

Коло *дотикається* до відрізка, якщо воно дотикається до прямої, яка містить цей відрізок, а точка дотику належить цьому відрізку (рис. 4.77, а).

Аналогічно означається дотик кола до променя (рис. 4.77, б).

Коло називається *вписаним у кут*, якщо воно дотикається до обох сторін цього кута (рис. 4.77, в). Таке розміщення фігур дістанемо, наприклад, якщо з деякої зовнішньої точки кола проведемо до кола дві дотичні.

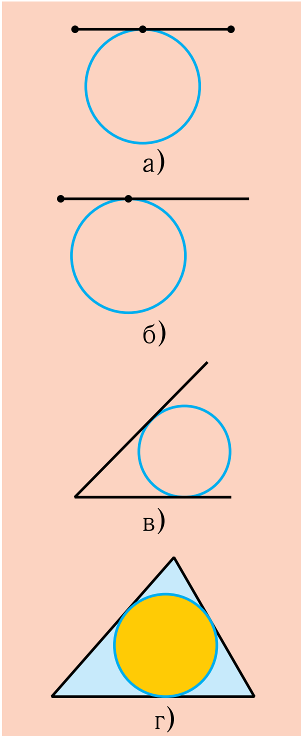


Рис. 4.77

Означення.

Коло називається *вписаним у трикутник*, а трикутник — відповідно, описаним навколо кола, якщо коло дотикається до всіх сторін трикутника (рис. 4.77, г).

Основна мета цього параграфа полягає у тому, щоб з'ясувати, як знайти центр і радіус кола, вписаного у заданий трикутник. При цьому ми будемо враховувати таку очевидну річ: якщо коло вписане у трикутник, то воно вписане і в кожний з його кутів. Тому для розв'язання поставленого завдання потрібно спочатку дослідити питання про розміщення кіл, вписаних у кут.

Теорема

(про геометричне місце центрів кіл, вписаних у кут).

Геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут, є бісектриса цього кута.

Доведення. Доведемо спочатку, що кожна точка Q бісектриси AF кута А є центром кола, вписаного в цей кут A (рис. 4.78). Для цього проведемо перпендикуляри QM і QN до сторін кута. Дістанемо прямокутні трикутники AMQ і ANQ зі спільною

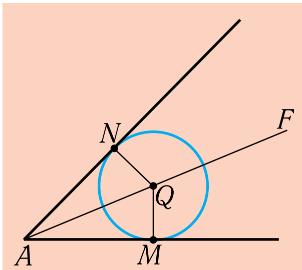


Рис. 4.78

гіпотенузою AQ і рівними гострими кутами MAQ і NAQ. Оскільки ці трикутники рівні між собою, то $QM = QN$. Отже, коло з центром Q і радіусами QM та QN буде вписаним у заданий кут A.

Доведемо тепер, що центри усіх кіл, вписаних у заданий кут A, належать бісектрисі AF цього кута (рис. 4.79).

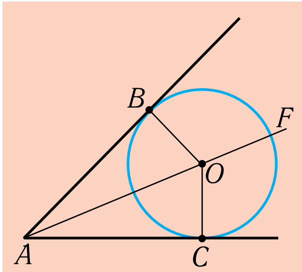


Рис. 4.79

Нехай O — центр якого-небудь одного із вписаних кіл, B і C — точки його дотику зі сторонами кута. Тоді, за властивістю дотичної, $\angle ABO = \angle ACO = 90°$. А тому прямокутні трикутники ABO і ACO рівні за катетом ($OB = OC$ — як радіуси кола) та спільною гіпотенузою AO. З рівності цих трикутників випливає рівність їхніх кутів OAB та OAC. Отже, AO — бісектриса кута A. Теорему доведено.

Теорема

(про існування і єдиність кола, вписаного у трикутник).

У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центр вписаного кола збігається з точкою перетину бісектрис трикутника.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 4.80). Геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут A, є бісектриса цього кута. Так само, геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут B, є бісектриса кута B. Отже, центром кола, вписаного одночасно в обидва кути A і B, є точка O перетину цих бісектрис. Точка O неодмінно існує, оскільки бісектриса кута A перетинає будь-який відрізок з кінцями на сторонах цього кута, зокрема, й бісектрису кута B.

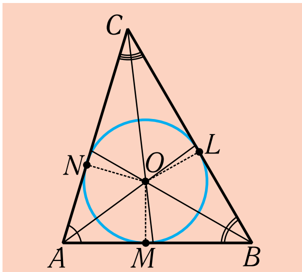


Рис. 4.80

Оскільки рівними є відстані OM і ON від точки O до сторін AB і AC кута A, а також відстані OM і OL від точки O до сторін BA і BC кута B, то рівні й відстані ON та OL від точки O до сторін CA і

CB кута C. Тому рівними є прямокутні трикутники CON і COL, звідки випливає рівність їхніх кутів OCN та OCL. А це означає, що точка O належить ще й бісектрисі третього кута C трикутника ABC, тобто є центром кола, вписаного і в кут С. Оскільки коло вписане в кожен із кутів трикутника, то воно вписане і в сам трикутник.

Кожна з бісектрис трикутника визначається однозначно, тому однозначно визначається й центр O кола, вписаного трикутник. Однозначно визначається й радіус цього кола, оскільки він дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки O на яку-небудь зі сторін трикутника. Теорему доведено.

Наслідок
(про перетин бісектрис трикутника).

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що відстань від вершини A трикутника до ближчих від неї точок K, L дотику вписаного кола дорівнює різниці між півпериметром p трикутника і стороною a, протилежною до вершини A: $AK = p - a$ (рис. 4.81).

Розв'язання. Нехай M — точка дотику сторони a. Тоді, за властивістю дотичних, $AK = AL$, $BK = BM$, $CL = CM$. Тому $2p = AB + BC + AC = 2AK + 2BM + 2CM = 2AK + 2(BM + CM) = 2AK + 2a$. Звідси $p = AK + a$, отже, $AK = p - a$, що й треба було довести.

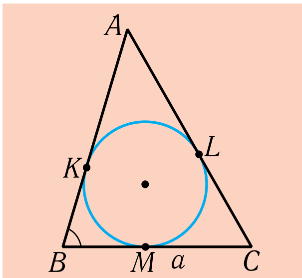
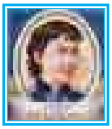


Рис. 4.81



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. Про геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута

Доведену вище допоміжну теорему про геометричне місце центрів кіл, вписаних у кут, інколи без достатнього обґрунтування формулюють у такому вигляді: ***геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута.***

Таке формулювання неточне. Джерелом неточності є неналежне обходження з поняттям відстані від точки до сторін кута.

Взагалі, *відстанню від точки до фігури* називають довжину найкоротшого з відрізків, що сполучають цю точку з точками фігури.

Нехай a — промінь, O — його початок, M — довільна точка площини, M_1 — основа перпендикуляра, опущеного з M на пряму, що містить промінь a (рис. 4.82). Якщо точка M_1 належить променю, то відстань від точки M до променя дорівнює довжині перпендикуляра MM_1 (рис. 4.82, а), як і передбачається в наведеному неточному формулюванні теореми. Однак якщо точка M_1 не належить променю (рис. 4.82, б), то відстань від M до цього променя уже не дорівнює відрізку MM_1, а дорівнює відстані MO від точки M до початку променя. Це випливає з того, що в цьому разі для будь-якої внутрішньої точки X променя відрізок MX буде довшим за відрізок MO. Отже, відрізок MO буде найкоротшим з усіх відрізків, які сполучають точку M з точками променя a. Справді, кут O у трикутнику MOX буде тупим — як зовнішній кут прямокутного трикутника MM_1O, а тому сторона MX, що лежить проти тупого кута, буде більшою за сторону MO.

Взявши це до уваги, рівновіддаленими від сторін кута BAC (рис. 4.83) потрібно вважати не тільки точки його бісектриси AD, а й усі точки M, розміщені всередині кута EAF, сторони якого перпендикулярні

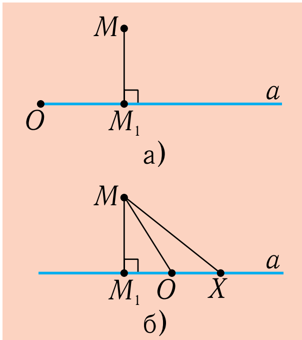


Рис. 4.82

до сторін кута BAC. Справді, відстані від кожної такої точки M до кожної сторони кута BAC дорівнюють довжині відрізка MA, тобто рівні між собою.

Аби «відсікти» такі рівновіддалені точки, які до питання про вписане коло не мають жодного стосунку, наведене вище формулювання потрібно уточнити вказівкою про розміщення точок всередині кута:

Геометричним місцем точок, розміщених всередині кута і рівновіддалених від його сторін, є бісектриса цього кута.

У такому вигляді теорема є істинною, однак її доведення теж потребує відповідного корегування.

Якщо кут A гострий або прямий (рис. 4.84), то основи перпендикулярів PM і PN, опущених з будь-якої його внутрішньої точки P на прямі, що містять сторони кута, належать цим сторонам. Тому для таких кутів точки, рівновіддалені від сторін кута, збігаються із центрами вписаних кіл. Отже, у цьому разі видозмінену теорему можна вважати доведеною на підставі теореми про геометричне місце центрів вписаних кіл.

Якщо ж кут A — тупий (рис. 4.85), то в ньому є й такі точки K, для яких основи перпендикулярів KM, опущених на пряму, що містить сторону a кута, уже не належать цій стороні (якщо через вершину A провести пряму n, перпендикулярну до сторони a, то такі точки K розміщуються з того боку від прямої n, де немає точок променя a). Тому відстань від точок K до сторони a вимірюється не перпендикулярами KM, а відрізками KA. Однак для таких точок K відстань KN до іншої сторони кута b за жодних умов не може дорівнювати відстані KA, оскільки KN — катет, а KA — гіпотенуза у прямокутному трикутнику KNA. Отже, із точок, розміщених всередині тупого кута, рівновіддаленими від сторін кута можуть бути лише такі точки Q, для яких зазначені основи перпендикулярів належать сторонам. А це, як доведено, — точки бісектриси AF.

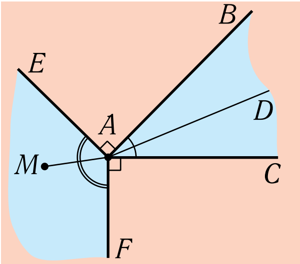


Рис. 4.83

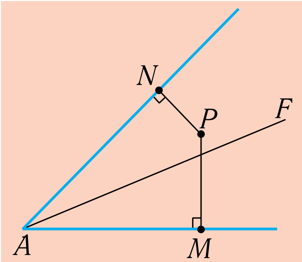


Рис. 4.84

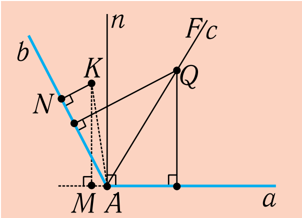


Рис. 4.85

2. Про кола, вписані ззовні у трикутник

Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, тобто є вписаним у трикутник, — одне. Але цікаво розглянути й кола, які дотикаються до прямих, що містять сторони трикутника, не обов'язково дотикаючись до самих його сторін. Такі кола називаються *ззовнівписаними*, оскільки вони розміщуються ззовні трикутника.

Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 4.86). Покажемо, що існує ззовнівписане коло, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за межі трикутника.

Зрозуміло, що таке коло має бути вписаним у кут BAC, а тому його центр $O1$ мусить лежати на бісектрисі цього кута. З іншого боку, це коло має бути вписаним у зовнішній кут CBK трикутника, а тому його центр O_1 мусить лежати на бісектрисі вже цього кута. Отже, O_1 — точка перетину вказаних бісектрис.

Враховуючи властивості бісектрис, $O_1G = O_1E$, а $O_1E = O_1J$, де O_1E, O_1G, O_1J — перпендикуляри, опущені з точки O_1 відповідно на прямі AB, AC та BC. Звідси випливає рівність усіх трьох цих перпендикулярів, а це й означає, що точка O_1 є центром шуканого ззовнівписаного кола. При цьому, оскільки $O_1G = O_1J$, то центр O_1 належить і бісектрисі зовнішнього кута BCL, тобто є спільною точкою бісектриси одного із внутрішніх кутів та двох зовнішніх кутів трикутника ABC.

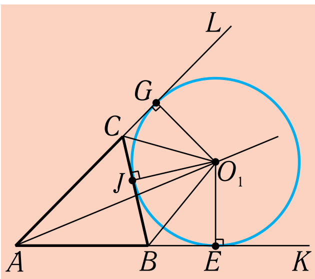


Рис. 4.86

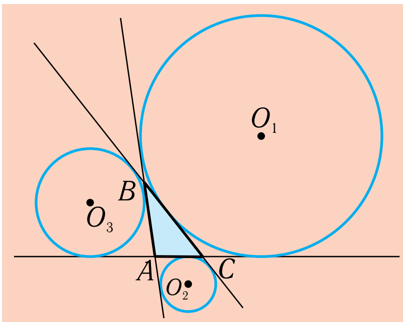
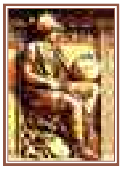


Рис. 4.87

Аналогічно визначаються ще два ззовнівписані кола. Отже, загалом для кожного трикутника ABC таких кіл існує рівно три (рис. 4.87).



Вправи і задачі

569°. На якому з рис. 4.88, а) – ґ) зображено коло, вписане у трикутник?

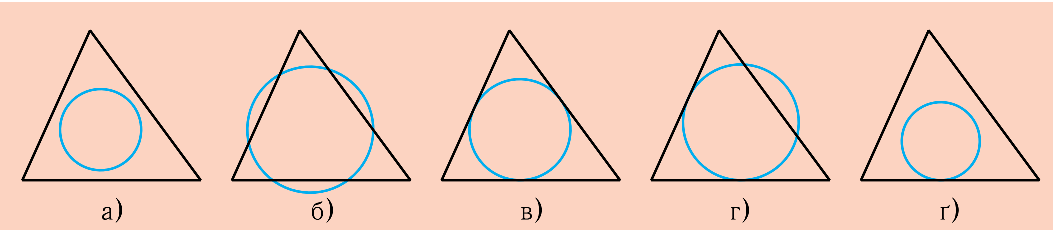


Рис. 4.88

570°. Накресліть гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники, а потім за допомогою транспортира, лінійки і циркуля побудуйте кола, вписані у кожний з цих трикутників.

571°. Побудуйте кут з градусною мірою 110°, а потім за допомогою креслярських інструментів впишіть у нього два кола.

572. Усередині трикутника знайдіть точку, рівновіддалену від усіх трьох його сторін. Скільки існує таких точок?

573. Накресліть кут з градусною мірою 70° і впишіть у нього коло з радіусом 2,5 см.

574. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 7 см. Визначте периметр трикутника.

575. Доведіть, що для рівностороннього трикутника центри вписаного й описаного кіл збігаються.

576. Доведіть, що для рівнобедреного трикутника центр вписаного кола належить висоті (медіані), проведеній до основи трикутника.

577. Побудуйте коло, а потім за допомогою косинця опишіть навколо нього трикутник. Як досягти, щоб описаний трикутник був: прямокутним; рівнобедреним; правильним?

578. Центр кола, яке перетинає сторони кута, лежить на бісектрисі цього кута (рис. 4.89). Доведіть, що таке коло відтинає на сторонах кута рівні відрізки? Чи істинне обернене твердження?

579. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

580. У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

581•. Коло вписане у рівнобедрений трикутник. Доведіть, що пряма, яка сполучає точки дотику з бічними сторонами, паралельна основі трикутника.

582•. Доведіть, що коли для трикутника центри вписаного й описаного кіл збігаються, то цей трикутник — правильний.

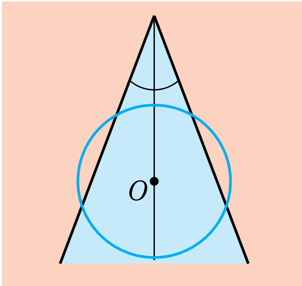


Рис. 4.89

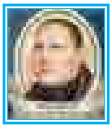
583•. Сторони трикутника ABC дорівнюють 5 см, 10 см і 11 см. Визначте довжини відрізків, на які ці сторони розбиваються точками дотику вписаного кола.

584•. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які розміщені всередині трикутника і дотикаються не менше, ніж до двох його сторін.

585•. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних пересічних прямих.

586•. Дано кут і точку M всередині нього. Знайдіть таку точку, яка однаково віддалена від обох сторін кута і знаходиться від точки M на даній відстані p.

587•. Доведіть, що діаметр d кола, вписаного у прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою с визначається за формулою: $d = a + b - c$.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§28. Знаходження кривини довільної плавної лінії

Чим більшим є радіус кола, тим його точки, взяті на невеликому проміжку, менше віддаляються від дотичної до кола, проведеної через середню точку цього проміжку (рис. 4.90). А якщо радіус кола буде дуже великим, то на доволі великому проміжку воно практично зливатиметься зі своєю дотичною. Тому, зокрема, округлість земної кулі людиною не помічається. Отже, чим більший радіус R кола, тим його викривленість менша. У зв'язку із цим величину $k = \dfrac{1}{R}$, обернену до радіуса, називають *кривиною* кола.

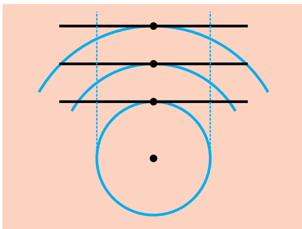


Рис. 4.90

Цілком природно вважати, що на всіх своїх ділянках коло має однакову кривину. Зовсім не так з іншими плавними лініями. На одних проміжках, як, наприклад, на AB (рис. 4.91), вони «закручуються» більше, тобто мають більшу кривину, на інших, як на CD, — менше, тобто мають меншу кривину. Інколи важливо вміти визначити цю кривину.

Зокрема, такі задачі виникають у фізиці при реєстрації елементарних частинок у так званій камері Вільсона, сконструйованій у 1912 р. англійським фізиком, Нобелівським лауреатом Чарльзом Вільсоном (1869–1959). Дія камери Вільсона ґрунтується на конденсації дрібних пузирчиків пари уздовж траєкторії елементарної частинки, що пролітає крізь камеру, й утворення у такий спосіб сліду (рис. 4.92). Цей слід (фізики його називають треком) фотографують і за його кривиною роблять висновок про енергію частинки та про її вид.

Для визначення кривини лінії на певній ділянці, цю ділянку наближено замінюють частиною кола. А для цього на ній беруть три точки A, B, C і проводять серединні перпендикуляри до відрізків AB і BC (рис. 4.93). Точка O перетину цих серединних перпендикулярів буде центром кола-замінника, а його радіусом $R = OA$, отже, наближено визначиться кривина k лінії на взятій ділянці — за формулою: $k = \frac{1}{R}$.

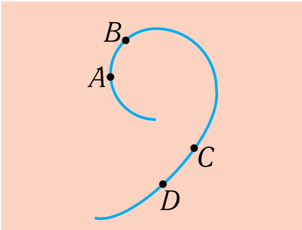


Рис. 4.91

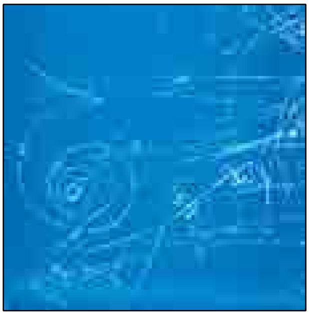


Рис. 4.92

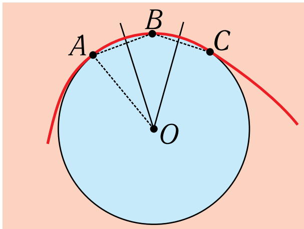


Рис. 4.93

§29. Геометричні побудови за допомогою лінійки і циркуля (прямих і кіл)

Урок 41-42

Як ви вже знаєте, *геометричною фігурою* називається будь-яка множина точок. Проте про фігури, складені з точок хаотично, без системи, нічого певного й не скажеш. Для того, аби стати предметом вивчення у геометрії, фігуру потрібно *означити*.

Означення геометричних фігур бувають двох видів: *конструктивні* та *описові*.

У конструктивних означеннях безпосередньо вказується, як можна побудувати означувану фігуру. Наприклад, коли ми означуємо прямий кут як такий, що дорівнює 90°, то цим фактично вказуємо й на спосіб побудови прямого кута за допомогою транспортира. Це — приклад конструктивного означення. Конструктивними також є означення суміжних та вертикальних кутів, різних видів трикутників, залежно від величини їхніх кутів, елементів трикутника — бісектриси, медіани і висоти, елементів кола — радіуса, хорди, діаметра.

На противагу цьому, в описових означеннях указуються властивості, які повинна мати означувана фігура, однак не вказується способу її побудови. Наприклад, означення дотичної до кола як прямої, яка має з колом лише одну спільну точку, є описовим, оскільки у ньому зазначається властивість, яку повинна мати дотична пряма, однак не вказується способу її побудови. Іншими відомими вам прикладами є означення паралельних прямих, як таких, що не мають спільних точок, різних видів трикутників, залежно від величини їхніх сторін, описаного та вписаного кіл.

Особливістю описових означень є те, що у них наперед невідомо, за яких умов означувана фігура існує і навіть достеменно невідомо, чи існує вона

Геометричні інструменти, особливо циркуль, здавна чинили на людину, яка прагне до пізнання, особливу магічну дію. Це добре знали художники й графіки минулого, які часто розміщували ці атрибути на своїх картинах та гравюрах.

Йос ван Вассенхове (Юстус з Гента). **Евклід**, близько 1474.

Олексій Бельський. **Уранія (муза астрономії).** 1756 р.

взагалі. Наприклад, за аналогією з означенням кола, вписаного у трикутник, можна сформулювати описове означення кола, вписаного у прямокутник — як кола, що дотикається до усіх сторін прямокутника. Але такого кола не існує: коло може дотикатися щонайбільше до трьох із чотирьох сторін прямокутника (рис. 4.94).

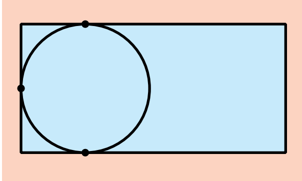


Рис. 4.94

Єдиним способом переконатися в існуванні фігури за її описовим означенням є побудова.

Але якими інструментами можна користуватися?

Досі таке питання у нас навіть не виникало: що було під руками, тим і користувалися — лінійками, косинцями, циркулями, транспортирами, можливо, навіть, шаблонами... Не особливо задумувалися і над тим, які ж елементарні операції з цими інструментами можна виконувати. Наприклад, чи можна вважати лінійку «двосторонньою» чи «односторонньою», інакше кажучи, чи можна з її допомогою проводити паралельні прямі, чи ні? Якою має бути довжина цієї лінійки, тобто наскільки можуть бути віддалені точки, аби через них можна було провести пряму? Або: чи будь-які відрізки можна відкладати з допомогою лінійки, а чи тільки ті, які вдається виміряти з допомогою нанесеної на неї міліметрової шкали? Аналогічні запитання стосуються й інших інструментів. Наприклад, чи можна за допомогою циркуля «переносити» відрізки, а чи це неодмінно потрібно робити за допомогою лінійки? Або: чи можна за допомогою транспортира проводити коло?

Символічне зображення сузір'я «Циркуль» з атласу «Уранологія» німецького астронома Йоганна Боде (1801 р.). Сузір'я знаходиться у Південній частині неба і тому невидиме у Північній півкулі. Його назву у 1752 р. запропонував французький астроном Нікола Луї Лакайль (1713–1762) на відзначення виняткового значення циркуля в науці.

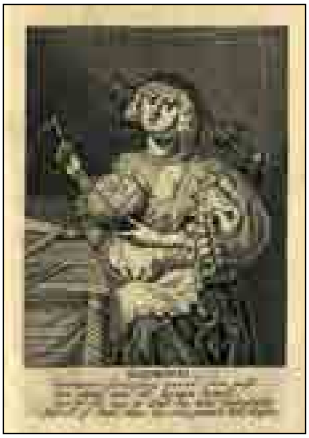
Для теоретичної геометрії такі невизначеності неприпустимі. Так само, як при доведенні теорем можна користуватися лише зафіксованим набором основних фактів (аксіом), так і в геометричних побудовах використання інструментів регламентується чітким переліком основних побудов. Фундатори геометрії, які жили ще в античну епоху, заклали традицію виконувати геометричні побудови за допомогою проведення прямих і кіл, тобто лінійкою і циркулем. При цьому вони відповідним чином «ідеалізували» ці інструменти. А саме, у геометрії вважається, що:

1) за допомогою лінійки можна провести пряму через *будь-які* дві точки площини;

2) за допомогою циркуля можна провести коло з центром у *будь-якій* точці площини і з радіусом, який дорівнює *будь-якому* заданому відрізку.

Отже, «ідеальність» лінійки полягає у тому, що вона, по-перше, нескінченна, тобто дає змогу без щонайменших відхилень проводити прямі через дві точки, навіть як завгодно віддалених одна від одної; по-друге, — лінійка «одностороння», по-третє, вона не має шкали для вимірювання відрізків.

«Ідеальність» циркуля полягає у тому, що він дає змогу проводити кола з центрами у будь-якій точці площини і з як завгодно великими чи малими радіусами.



Ґеорґ Гловер. Геометрія (1630 р.)

Жодних інших операцій, крім зазначених, у геометричних побудовах циркулем і лінійкою робити не можна. Наприклад, за допомогою лінійки не можна відкладати відрізки, що дорівнюють заданим, наприклад, позначаючи олівцем їхніх довжин на краю лінійки. Не можна проводити дотичні до кола, спільні дотичні до двох кіл тощо. А за допомогою циркуля не можна провести кола, що дотикається до заданої прямої чи до іншого кола, підбираючи «на око» центр або радіус.

Виконати побудову фігури із заданими властивостями означає *вказати послідовність* (алгоритм) із указаних вище двох ***елементарних побудов***, після виконання яких буде отримано цю фігуру, а також *довести*, що побудована фігура справді має потрібні властивості. При цьому саме ілюстрування побудов за допомогою реальних креслярських інструментів у геометрії носить допоміжний, схематичний характер. Головне — це алгоритм і доведення.

З максимальною точністю побудови виконують лише у застосуваннях геометрії, наприклад, у кресленні чи інженерній графіці.

До ***основних побудов*** відносять: відкладання відрізків і кутів, побудову трикутника за трьома сторонами, поділ відрізків і кутів навпіл, а також проведення перпендикулярних прямих. Розглянемо детально ці побудови.

Побудова 1.

На заданому промені від його початку відкласти відрізок, рівний даному відрізку.

Розв'язання. Нехай задано промінь OX та відрізок a (рис. 4.95) і потрібно на промені OX від його початку O відкласти відрізок, рівний відрізку a.

За допомогою циркуля будуємо коло з центром O і радіусом $OC = a$; нехай A — точка його перетину з променем OX (інша точка B перетину прямої OX з проведеним колом не належатиме променю OX). Оскільки пряма OX проходить через центр O кола, то OA — його радіус. Тому $OA = OC = a$. Отже, відрізок OA — шуканий: він відкладений на промені OX від його початку O і дорівнює заданому відрізку a.

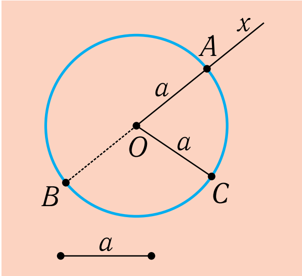


Рис. 4.95

Побудова 2.

Від даної півпрямої відкласти кут, рівний заданому нерозгорнутому куту.

Розв'язання. Нехай дано нерозгорнутий кут A і півпряму OM (рис. 4.96), а потрібно від півпрямої OM відкласти кут, рівний куту A, тобто побудувати кут B_1OC_1, одна зі сторін якого належить півпрямій OM, а його величина дорівнює величині кута A.

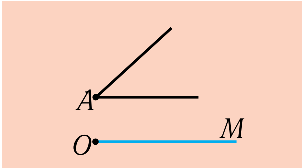


Рис. 4.96

За допомогою циркуля будуємо два кола рівних радіусів, одне з центром A, інше — з центром O (рис. 4.97). Нехай B, C — точки перетину першого кола зі сторонами кута A, B_1 — точка перетину другого кола з півпрямою OM.

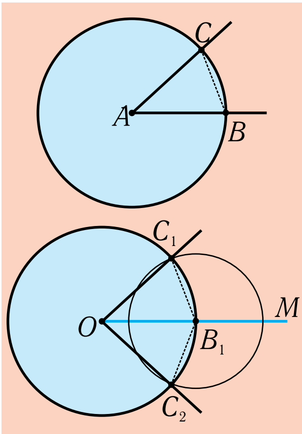


Рис. 4.97

За допомогою лінійки проводимо відрізок BC, а потім за допомогою циркуля — коло з центром B_1 і радіусом BC. Нехай C_1, C_2 — точки перетину цього кола з раніше побудованим колом із центром O. Тоді кути B_1OC_1 і B_1OC_2 — шукані.

Це випливає з того, що обидва трикутники OB_1C_1 і OB_1C_2 рівні трикутнику ABC за трьома сторонами. Тому й кути B_1OC_1 та B_1OC_2 цих трикутників рівні відповідному їм куту A трикутника ABC.

Один із побудованих кутів лежить з одного боку від півпрямої OM, а інший — з іншого.

Зауваження. В реальній креслярській практиці для більшої прозорості рисунка зображення допоміжних кіл як правило обмежують невеличкими дугами (засічками). Наприклад, у розглянутій щойно побудові замість повних кіл із центрами O і B_1 (див. рис. 4.97) креслярobмежується дугами (рис. 4.98). Проте у геометрії відповідною елементарною побудовою є побудова саме кола, а не дуги. Тому правильніше будувати повні кола, а не обмежувати їх засічками.

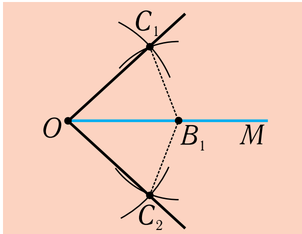


Рис. 4.98

Побудова 3.

Побудувати трикутник за трьома даними сторонами.

Розв'язання. Нехай дано три відрізки a, b, c (рис. 4.99) і потрібно побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють цим відрізкам.

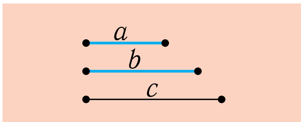


Рис. 4.99

За допомогою лінійки будуємо довільну пряму l. На прямій l від будь-якої точки A на будь-якому з променів з початком A відкладаємо відрізок AB, що дорівнює одному із заданих відрізків, наприклад, c — як описано у побудові 1) (рис. 4.100). Потім за допомогою циркуля проводимо два кола, одне — з центром A і радіусом b, інше — з центром B і радіусом a. Якщо ці кола перетнуться і C, C_1 — точки їхнього перетину, то трикутники ABC і ABC_1 будуть шуканими.

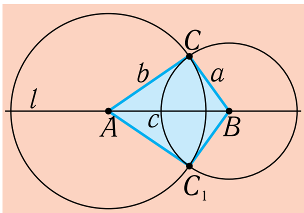


Рис. 4.100

Справді, наприклад, для трикутника ABC сторона AB дорівнює відкладеному від точки A відрізку

c, а сторони AC і BC — радіусам проведених кіл, тобто a і b.

Умовою існування трикутника зі сторонами a, b і c є виконання нерівностей трикутника. Наприклад, сторона c повинна бути меншою від суми $a + b$ і більшою від різниці $b - a$ сторін a і b. Якщо ці умови виконуються, то проведені кола з центрами A і B перетнуться, а отже, трикутники ABC і ABC_1 із заданими сторонами a, b і c існуватимуть. Якщо ж зазначені умови не виконуються, то побудовані кола не перетнуться (рис. 4.101, а, б) і трикутника зі сторонами a, b і c не існуватиме.

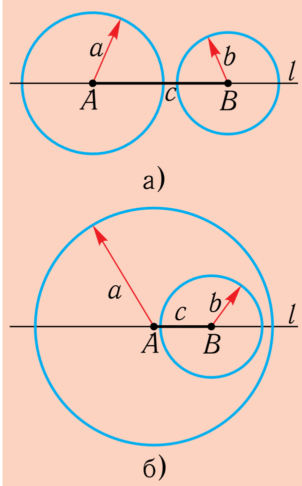


Рис. 4.101

Побудова 4.

Заданий нерозгорнутий кут поділити навпіл.
Інакше кажучи: побудувати бісектрису заданого нерозгорнутого кута.

Розв'язання. Нехай потрібно побудувати бісектрису кута O (рис. 4.102). За допомогою циркуля проведемо яке-небудь коло з центром O. Нехай A і B — точки перетину цього кола зі сторонами кута. Проведемо ще два кола з тим самим радіусом OA — з центрами A і B. Однією точкою їхнього перетину буде точка O. Нехай C — інша точка перетину. Тоді промінь OC — шукана бісектриса.

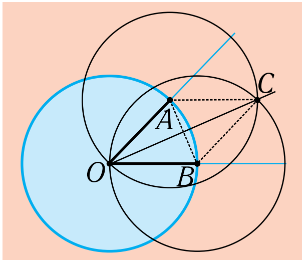


Рис. 4.102

Справді, трикутники OAC і OBC рівні за трьома сторонами. Тому рівними є їхні кути AOC та BOC, що лежать проти рівних сторін AC і BC. А це й означає, що OC — бісектриса кута A.

Зауваження. Бісектриса OC належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. Це випливає з того, що бісектриса кута O рівнобедреного трикутника OAB є одночасно медіаною й висотою цього трикутника. Тому побудову точки С шуканої бісектриси OC можна проводити й за допомогою інших кіл з центрами A і B, наприклад, з радіусом, що дорівнює довжині відрізка AB (рис. 4.103).

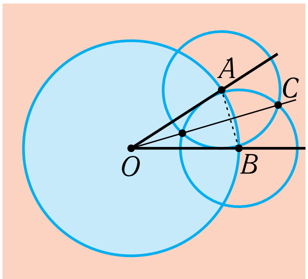
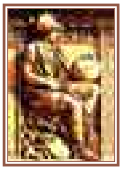


Рис. 4.103



Вправи і задачі

Усі вказані тут побудови, окрім тих, що окремо обумовлені, потрібно виконувати за допомогою проведення прямих і кіл (лінійкою і циркулем).

588°. Дано точку A і відрізок p. Побудуйте точку, яка знаходиться від точки A на відстані, що дорівнює довжині відрізка p. Скільки розв'язків має ця задача?

589°. Дано пряму a, точку A, яка їй не належить, і відрізок p. Побудуйте на прямій a таку точку, яка віддалена від точки A на відстань, що дорівнює довжині відрізка p. Скільки розв'язків може мати ця задача?

590°. Накресліть за допомогою косинця прямий кут, а потім за допомогою циркуля і лінійки побудуйте рівний йому кут.

591°. Накресліть за допомогою транспортира тупий кут, а потім за допомогою циркуля і лінійки побудуйте рівний йому кут.

592°. Побудуйте рівносторонній трикутник за даною стороною a.

593°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою b і бічною стороною a.

594°. Накресліть за допомогою косинця прямий кут, а потім за допомогою циркуля і лінійки побудуйте його бісектрису.

595. Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.

596. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при основі.

597. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом між бічними сторонами.

598. Побудуйте в зошиті фігури, рівні зображеним на рис. 4.104, а) – б).

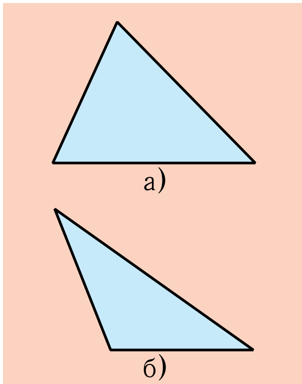


Рис. 4.104

599. Дано трикутник. Побудуйте точку перетину його бісектрис.

600. Побудуйте кут 60°, а потім проведіть його бісектрису.

601. Побудуйте кути 30°, 15° і 120°.

602. Даний кут поділіть на 4 рівні частини.

603•. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеної до більшої з них.

604•. За даними двома гострими кутами трикутника побудуйте його третій кут.

605•. За кутом при основі рівнобедреного трикутника побудуйте кут між його бічними сторонами.

606•. За кутом між бічними сторонами рівнобедреного трикутника побудуйте його кут при основі.

Урок 43

Побудова 5.

Заданий відрізок поділити навпіл.

Розв'язання. Нехай дано відрізок AB, який потрібно поділити навпіл (рис. 4.105).

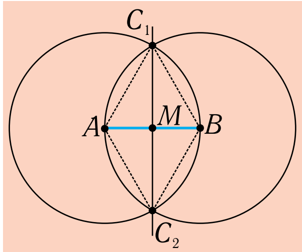


Рис. 4.105

За допомогою циркуля проводимо два кола, радіуси яких дорівнюють відрізку AB: одне з центром A, інше — з центром B. Нехай C_1, C_2 — точки перетину цих кіл.

За допомогою лінійки проводимо пряму C_1C_2 і знаходимо точку M її перетину з прямою AB. Точка M — шукана середина відрізка AB.

Справді, точки C_1, C_2 рівновіддалені від точок A, B, оскільки відстані AC_1 і BC_1, а також AC_2 і BC_2 дорівнюють радіусам побудованих кіл. Отже, ці точки належать серединному перпендикуляру до відрізка AB. Висота C_1M у рівнобедреному трикутнику C_1AB є й медіаною. Тому $AM = MB$.

Зауваження. Замість кіл з радіусами AB можна було проводити кола з будь-якими іншими рівними радіусами і з тими самими центрами A і B (рис. 4.106), аби тільки вони перетиналися. А перетинатися вони будуть тоді, якщо їхні радіуси будуть більшими за половину відрізка AB, зокрема, — більшими за сам цей відрізок AB.

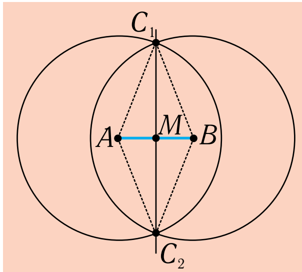


Рис. 4.106

Побудова 6.

Через точку, задану на прямій, провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої.

Розв'язання. Нехай потрібно через точку M прямої l провести перпендикуляр до цієї прямої (рис. 4.107).

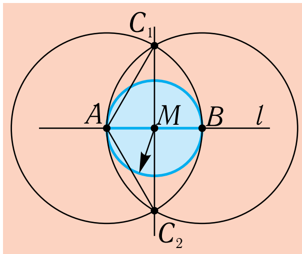


Рис. 4.107

За допомогою циркуля проведемо яке-небудь коло з центром M; нехай A, B — точки його перетину з прямою l.

Далі за допомогою циркуля проведемо два кола центрами A і B, радіуси яких дорівнюють AB. Нехай C_1, C_2 — точки їхнього перетину. Тоді пряма C_1C_2 — шукана.

Справді, оскільки кожна з точок C_1, C_2 рівновіддалена від точок A і B, то пряма C_1C_2 — серединний перпендикуляр до відрізка AB. Вона перпендикулярна до цього відрізка (отже, й до прямої l) і проходить через його середину, тобто через точку M.

Побудова 7.

Через точку, розміщену поза прямою, провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої.

Розв'язання. Нехай через точку N, задану поза прямою l, потрібно провести пряму, перпендикулярну до прямої l (рис. 4.108).

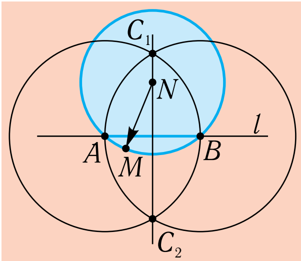


Рис. 4.108

Візьмемо яку-небудь точку M, що лежить з іншого боку від прямої l, ніж точка N, і за допомогою циркуля проведемо коло з центром N і радіусом NM. Це коло перетне пряму l у двох точках A і B.

Далі за допомогою циркуля проводимо два кола з центрами A і B з одним і тим самим радіусом, що дорівнює довжині відрізка AB. Нехай C_1, C_2 — точки перетину цих кіл. Тоді пряма C_1C_2 — шукана.

Справді, кожна з точок N, C_1, C_2 рівновіддалена від кінців відрізка AB, а тому лежать на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Отже, пряма C_1C_2 перпендикулярна до прямої l і проходить через точку N.

Інколи до основних побудов відносять також побудови трикутників за двома сторонами і кутом між ними, за стороною і двома прилеглими кутами, прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою, а також паралельних прямих. Однак ці побудови, як і багато інших важливих побудов, легко зводяться до виокремлених вище основних. Розглянемо на двох прикладах, як це здійснюється.

Розв'язуємо разом

Задача 1.

Побудувати прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

Розв'язання. Нехай задано катет a і гіпотенузу c прямокутного трикутника (рис. 4.109). Побудуємо прямий кут MCN (див. основну побудову 6) (рис. 4.110) і на одній з його сторін CN відкладемо відрізок CB, рівний відрізку a (побудова 1). Потім за допомогою циркуля побудуємо коло з центром B і радіусом c. Нехай A — одна з точок перетину цього кола з іншою стороною CM побудованого прямого кута. Тоді трикутник ABC — шуканий.

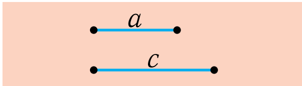


Рис. 4.109

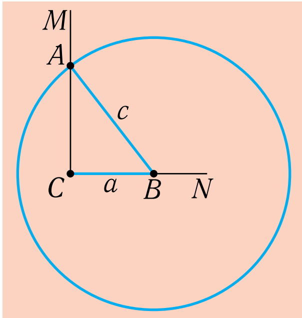


Рис. 4.110

Оскільки гіпотенуза прямокутного трикутника завжди більша від будь-якого з катетів, то необхідною умовою для існування розв'язку цієї задачі є виконання нерівності $a < c$. Ця умова є й достатньою, оскільки при її виконанні центр проведеного кола розміщуватиметься на відстані a від прямої CM, яка менша від радіуса c, а тому коло і пряма перетнуться. Отже, точка A існуватиме, а з нею існуватиме і трикутник ABC.

Задача 2.

Через точку, розміщену поза прямою, провести пряму, паралельну даній прямій.

Розв'язання. Нехай через точку A, розміщену поза прямою l, потрібно провести пряму, паралельну прямій l (рис. 4.111).

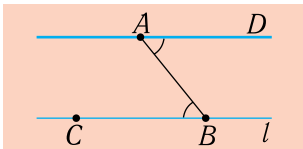
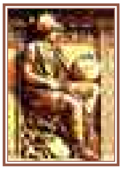


Рис. 4.111

Візьмемо на прямій l яку-небудь точку B і за допомогою лінійки проведемо пряму AB. Нехай C — яка-небудь інша точка прямої l. Відкладемо від променя AB кут BAD, рівний куту ABC і розміщений з протилежного боку від прямої AB (побудова 3). Пряма AD — шукана. Справді, оскільки для прямих l і AD та січної AB рівні кути BAD і ABC є внутрішніми різносторонніми, то прямі l і AD — паралельні.



Вправи і задачі

607°. Накресліть довільний відрізок і поділіть його навпіл.
608°. Накресліть довільний відрізок і побудуйте його серединний перпендикуляр.
609°. Накресліть довільний трикутник і побудуйте одну з його висот.
610°. Дано довільний трикутник. Як побудувати точку перетину прямих, які містять його висоти?
611°. Задано розгорнутий кут. Побудуйте його бісектрису.
612°. Як заданий відрізок поділити на 4 рівні частини.
613. Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.
614. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.
615. Побудуйте прямий кут, а потім проведіть його бісектрису.
616. Побудуйте кут 45°.
617. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до основи.
618. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.
619. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за гіпотенузою.
620. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, проведеною до основи.
621. Впишіть коло у даний кут.
622. Впишіть у даний кут коло, яке проходить через задану точку на стороні кута.
623•. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.
624•. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.
625•. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і висотою, проведеною до гіпотенузи.
626•. Побудуйте дотичну до кола, яка паралельна даній прямій.
627•. Побудуйте дотичну до кола, яка перпендикулярна даній прямій.

§30. Орієнтовна схема для розв'язування задач на побудову

Урок 44

Розв'язування кожної геометричної задачі на побудову, за винятком, можливо, найпростіших, можна порівняти зі зведенням будівлі чи складанням машини. Перш ніж приступити до самих побудов, в уяві повинен з'явитися образ того, що хочеш побудувати. Потім, відштовхуючись від цього образу, немовби від уже реалізованого, крок за кроком аналізують усі його деталі, аж поки не сформується послідовність (алгоритм) побудов. Однак після цього потрібно ще впевнитися (у математиці це називається доведенням), що після реалізації намічених побудов справді одержиться те, що було потрібно. Нарешті, бажано оцінити (дослідити), скільки розв'язків може існувати і як вони відрізняються один від одного.

Ґеорґ Пенц.
Геометрія (1541 р.)

Тому розв'язування геометричних задач на побудову як правило розбивають на 4 етапи.

Перший етап (*аналіз*). Спочатку припускають, що задача розв'язана і що, отже, фігура з потрібними властивостями побудована. При цьому виконують схематичний рисунок (зазвичай від руки), на якому відображають усі задані й шукані фігури. Потім, уважно розглядаючи усі ці фігури, намагаються відшукати визначальні залежності між ними, які зводили б побудову шуканої фігури до виконання елементарних побудов. У результаті цього виникає певна стратегія розв'язування.

Другий етап (*побудова*). Після того, як з'явилася певна стратегія побудов, її деталізують у вигляді конкретного алгоритму, в якому чітко, крок за кроком, описуються усі побудови, результатом яких має стати побудова шуканої фігури. При цьому самі побудови на рисунку можуть проводитися не всі або відображатися лише схематично.

Третій етап (*доведення*). Оскільки аналіз задачі має так би мовити дорадчу функцію, то цілком може трапитися, що з'ясовані при його проведенні необхідні умови не є достатніми для побудови шуканої фігури. Тому для гарантування правильності розв'язання потрібно обов'язково довести, що побудована за вказаним алгоритмом фігура справді задовольнятиме усі вимоги задачі.

Четвертий етап (*дослідження*). Нарешті, для повноти розв'язання бажано дослідити, при яких співвідношеннях між заданими елементами задача має розв'язок і скільки цих розв'язків може бути.

Якщо задача нескладна, то в записі її розв'язування аналіз, а інколи й дослідження пропускають, а вказують лише алгоритм побудови і доведення. Саме так на попередніх уроках розв'язувалися основні задачі на побудову. Розглянемо декілька прикладів, які покажуть, що в складніших ситуаціях описану схему розв'язування бажано застосовувати у повному обсязі.

Розв'язуємо разом

Задача 1.

Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, проведеною до основи.

Розв'язання. Проведемо *аналіз* задачі. Припустимо, що потрібний рівнобедрений трикутник ABC побудовано і що в ньому бічні сторони BA і BC рівні заданому відрізку a, а висота BM, проведена до основи AC, рівна заданому відрізку h (рис. 4.112).

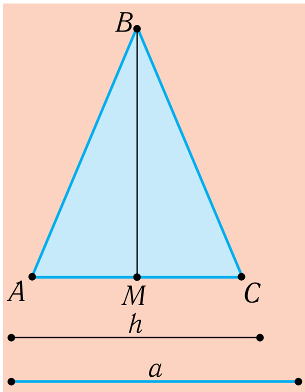


Рис. 4.112

Відомо, що висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є його медіаною, тобто $AM = MC$. Тому прямокутні трикутники BMA і BMC рівні за першою ознакою. Отже, якщо побудуємо один із них, наприклад, BMA, то, продовживши відрізок AM за точку M на таку саму довжину, дістанемо й третю вершину C трикутника ABC.

Звідси випливає такий *алгоритм побудови*: 1) будуємо прямокутний трикутник BMA за катетом $BM = h$ та гіпотенузою $BA = a$ (задача 1 із попереднього уроку); 2) на промені AM від початку M відкладаємо відрізок MC, рівний відрізку AM. Трикутник BAC — шуканий.

Доведемо це. Оскільки $\angle BMC$ суміжний з прямим кутом BMA, то він теж прямий. Отже, прямокутні трикутники BMA і BMC рівні за двома катетами. Звідси $BA = BC$. Тому побудований трикутник BAC справді рівнобедрений. За побудовою, BM — висота цього трикутника і вона дорівнює h. Тому трикутник BAC — шуканий.

Дослідження. Задача має розв'язки тоді і тільки тоді, коли існує прямокутний трикутник BMA з катетом h і гіпотенузою a, тобто при $a > h$. Усі трикутники BMA, які можна побудувати за цими даними, рівні між собою. Тому рівні і всі трикутники BAC.

Джон Хеннінг молодший (1801–1857). Геометрія

Задача 2.

Побудувати трикутник ABC за даною стороною $AC = b$, кутом A і сумою $a + c$ двох інших сторін.

Розв'язання. *Аналіз*. Припустимо, що потрібний трикутник ABC побудовано (рис. 4.113), тобто в ньому сторона AC дорівнює заданому відрізку b, кут A — заданому куту, а сума сторін $AB + BC$ — іншому заданому відрізку, що позначений як $a + c$.

Продовжимо відрізок AB за точку B на відстань BD, що дорівнює стороні BC, і сполучимо відрізком точки C і D. Одержимо трикутник ACD, який можна побудувати за двома сторонами b і $a + c$ та кутом A між ними. З іншого боку, вершина B трикутника ABC рівновіддалена від точок C і D, отже, належить

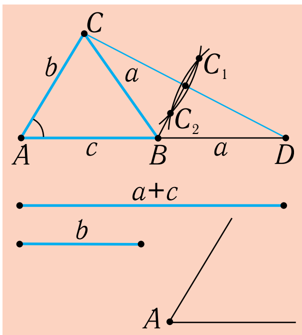


Рис. 4.113

серединному перпендикулярі C_1C_2 до відрізка CD. Тому вона визначається перетином прямої C_1C_2 з відрізком AD.

Побудова. 1. Будуємо трикутник ACD за двома сторонами b та $a + c$ і кутом A між ними. 2. Проводимо серединний перпендикуляр C_1C_2 до сторони CD побудованого трикутника. 3. Визначаємо точку B перетину прямої C_1C_2 зі стороною AD. Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Справді, у побудованому трикутнику ABC сторона AC і кут A рівні заданим. Сума сторін $AB + BC = AB + BD = a + c$ теж дорівнює заданому відрізку. Отже, трикутник ABC задовольняє усі вимоги задачі.

Дослідження. Трикутник ACD за сторонами b і $a + c$ та кутом A між ними завжди можна побудувати, і всі такі трикутники рівні між собою. Що ж до шуканого трикутника ABC, то для його існування серединний перпендикуляр C_1C_2 до сторони CD повинен перетинати сторону AD. Якщо це не виконуватиметься (рис. 4.114), то задача розв'язків не матиме.

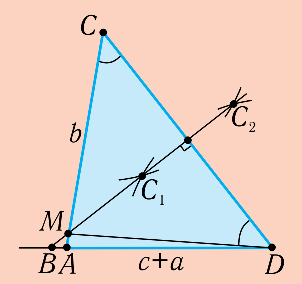


Рис. 4.114

Вправи і задачі

628°. Побудуйте прямокутний трикутник, якщо дано його гострий кут і бісектрису цього кута.

629°. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

630°. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

631°. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, протилежним до більшої сторони.

632°. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, що лежить проти меншої сторони.

633. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом вписаного кола.

634. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

635. Побудуйте трикутник за стороною, висотою і медіаною, проведеними до цієї сторони.

636. Дано коло і точку всередині нього. Проведіть через цю точку хорду, яка ділиться нею навпіл.

637. Через точку, взяту всередині кута, проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

638. Побудуйте трикутник за основою і висотами, проведеними до бічних сторін.

639. Побудуйте трикутник за основою, одним із кутів при основі і радіусом вписаного кола.

640. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

641. Побудувати трикутник, якщо задані точки дотику вписаного кола до бічних сторін.

642•. Побудуйте трикутник за двома кутами й сумою протилежних їм сторін.

643•. Побудуйте трикутник за кутом, різницею двох прилеглих до нього сторін і висотою, проведеною до однієї із цих сторін.

644•. Побудуйте прямокутний трикутник за сумою катетів та гострим кутом.

645•. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та іншого катета.

646•. Побудуйте трикутник за кутами при основі і сумою бічних сторін.

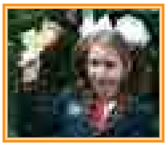
647•. Побудуйте трикутник за стороною, кутом при основі та різницею бічних сторін.

648•. Побудуйте трикутник за кутом, прилеглою до нього стороною та периметром.

649•. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

§31. Метод геометричних місць у розв'язуванні задач на побудову

Урок 45



Ще давні геометри відкрили універсальний метод розв'язування задач на побудову, який тепер називають ***методом геометричних місць точок***. За цим методом побудову шуканої фігури зводять до побудови деякої ключової точки, для якої вказують геометричні місця точок, яким вона належить. Тоді ключова точка визначиться перетином указаних геометричних місць.

Нам уже відомі такі геометричні місця точок:

1. ***Геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на відстань, що дорівнює довжині заданого відрізка*** — коло із центром у заданій точці і радіусом, що дорівнює довжині заданого відрізка.

2. ***Геометричне місце точок (Фалеса), з яких заданий відрізок видно під прямим кутом*** — коло, діаметром якого є заданий відрізок (без кінців цього діаметра).

3. ***Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців заданого відрізка*** — серединний перпендикуляр до цього відрізка.

4. ***Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін заданого кута*** — бісектриса цього кута.

Разом із цими геометричними місцями точок при розв'язуванні задач на побудову часто використовується ще одне:

5. ***Геометричне місце точок, які лежать з одного боку від прямої і віддалені від неї на довжину заданого відрізка.***

Доведемо, що цим геометричним місцем точок є інша пряма, паралельна даній.

Візьмемо на даній прямій l довільну точку A_1 і поставимо в ній перпендикуляр A_1A до прямої l, довжина якого дорівнює довжині заданого відрізка p (рис. 4.115). Далі через точку A проведемо пряму a, перпендикулярну до прямої AA_1. Як відомо, пряма a паралельна прямій l і всі її точки лежать з одного боку від прямої l. Покажемо, що будь-яка точка B прямої a віддалена від прямої l на довжину відрізка p.

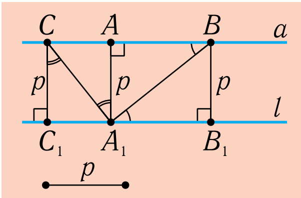


Рис. 4.115

Проведемо перпендикуляр BB_1 до прямої l і розглянемо прямокутні трикутники A_1AB і BB_1A_1. Вони рівні за спільною гіпотенузою A_1B і гострими кутами A_1BA та BA_1B_1, які є внутрішніми різносторонніми при паралельних прямих a, l та січній A_1B. Звідси випливає рівність їхніх катетів AA_1 і BB_1, що й треба було довести.

Навпаки, нехай C — довільна точка площини, яка розміщена з того самого боку від прямої l, що й точка A, і для якої довжина перпендикуляра CC_1 до прямої l так само дорівнює p. Два перпендикуляри AA_1 і CC_1 до прямої l паралельні, тому внутрішні різносторонні кути C_1CA_1 CA_1A при січній CA_1 рівні. Тому трикутники C_1CA_1 і AA_1C рівні за двома сторонами і кутом між ними. Звідси випливає рівність їхніх кутів при вершинах C_1 і A. Отже, кут при вершині A — прямий, а тому пряма AC паралельна прямій l. Але через точку A проходить єдина пряма, паралельна прямій l. Отже, точка C належить прямій l. Доведення завершене.

Розв'язуємо разом

Розглянемо два приклади розв'язування задач на побудову методом геометричних місць точок.

Задача 1.

Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і радіусом описаного кола.

Розв'язання. *Аналіз.* Припустимо, що шуканий рівнобедрений трикутник ABC побудовано (рис. 4.116), отже, у ньому основа BC дорівнює заданому відрізку a, а радіуси OA, OB, OC описаного кола — заданому відрізку R.

Виберемо за ключову точку для побудови центр O описаного кола. Ця точка, з одного боку, рівновіддалена від вершин B і C трикутника, отже, належить серединному перпендикуляру C_1C_2 до відрізка BC. З іншого боку, точка O віддалена від точки C (або B) на задану відстань R, тобто належить колу з центром C і радіусом R. Отже, точка O є перетином обох цих геометричних місць точок.

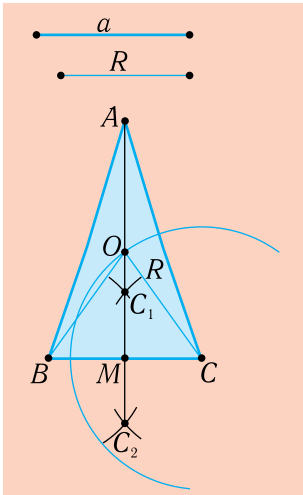


Рис. 4.116

Побудова. Відклавши від довільної точки B відрізок $BC = a$, будуємо серединний перпендикуляр C_1C_2 до цього відрізка, а потім — коло з центром C і радіусом R. Далі знаходимо точку O перетину цих фігур і відкладаємо від неї на прямій C_1C_2 відрізок $OA = R$. Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Оскільки точка A належить серединному перпендикуляру C_1C_2 до відрізка BC, то $AB = AC$, отже, трикутник ABC — рівнобедрений. З тієї самої причини $OB = OC = R$, а, за побудовою, й $OA = R$. Тому радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, справді дорівнює заданій величині R. За побудовою також і основа BC дорівнює заданій величині a. Отже, трикутник ABC задовольняє усі вимоги задачі.

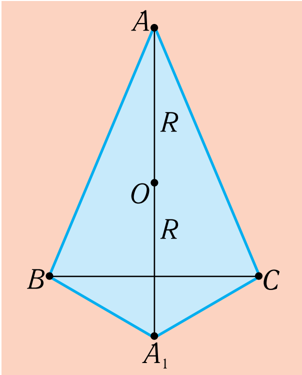


Рис. 4.117

Дослідження. Задача має розв'язок завжди, коли існує точка O, тобто, якщо відстань OC не менша від MC. Отже, має виконуватися нерівність $R \geq a/2$.

Якщо $R > a/2$, то на прямій C_1C_2 існує дві точки O з потрібною властивістю — розміщені по різні боки від прямої BC. У свою чергу, для кожної з них існує по дві точки A і A_1, віддалені від O на потрібну відстань R. На рис. 4.116 і рис. 4.117 зображені шукані трикутники ABC і A_1BC для однієї із точок O. Трикутники, що одержаться для точки O, розміщеної з іншого боку від прямої BC, будуть рівними трикутнику ABC і трикутнику A_1BC.

Якщо ж $R = a/2$, то точка O буде одна і збігатиметься із серединою відрізка AB. Трикутник ABC тоді буде прямокутним (рис. 4.118).

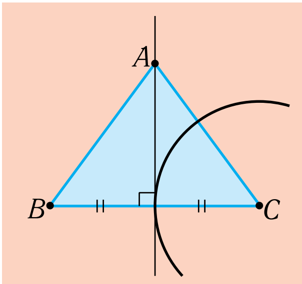


Рис. 4.118

У другому прикладі обмежимося лише аналізом та дослідженням задачі.

Задача 2.

Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною до гіпотенузи.

Аналіз. Припустимо, що шуканий прямокутний трикутник ABC побудовано і в ньому гіпотенуза AB і висота CH, проведена до гіпотенузи, дорівнюють заданим відрізкам c і h відповідно (рис. 4.119). Оскільки гіпотенуза AB задана, то, відклавши її від довільної точки, зведемо задачу до побудови вершини C прямого кута.

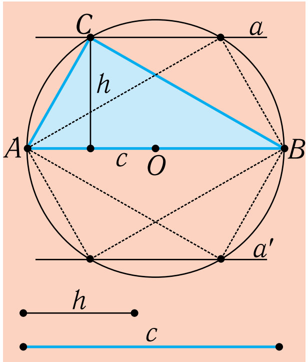
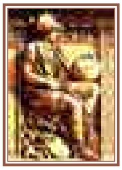


Рис. 4.119

Відомо, що точка C належить геометричному місцю точок Фалеса, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, тобто — колу з діаметром AB.

З іншого боку, точка C має знаходитися на заданій відстані h від прямої AB, тобто лежати на одній з двох прямих a, a', паралельних прямій AB і віддалених від неї на відстань h. Отже, точка C є перетином вказаного кола та прямих a, a'.

Дослідження. Якщо відрізок h буде меншим від половини відрізка c, то при вибраному розміщенні гіпотенузи AB матимемо чотири можливих розміщення для точки C і, відповідно, — чотири трикутники ABC. Усі ці трикутники будуть рівними між собою. При $h = c/2$ трикутників буде два (вони будуть рівнобедреними). При $h < c/2$ задача розв'язків не матиме.



Вправи і задачі

650°. На заданій прямій побудуйте центр кола, яке проходить через дві задані точки.

651°. На даному колі (даній прямій) побудуйте точку: а) рівновіддалену від заданих точок P і Q; б) віддалену від даної точки P на відстань p.

652°. Знайдіть точку, віддалену на відстань p від даної прямої a і на відстань m від даної точки M.

653°. Дано кут ABC і точку D. Побудуйте точку, що лежить всередині кута, яка рівновіддалена від його сторін і знаходиться на відстані p від точки D.

654°. Побудуйте коло даного радіуса з центром на одній стороні даного кута, яке дотикається до іншої сторони цього кута.

655°. Впишіть у даний кут ABC коло з даним радіусом R.

656°. Знайдіть і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих.

657°. Знайдіть і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються.

658. На заданій прямій a знайдіть точку, рівновіддалену від прямих b і c, які перетинаються.

659. На даному колі побудуйте точку, рівновіддалену від двох даних прямих, що перетинаються. Скільки розв'язків має задача?

660. Побудуйте коло, що проходить через задану точку B і дотикається до даної прямої a в заданій на ній точці A.

661. Побудуйте коло з даним радіусом R, що проходить через дану точку A і дотикається до даної прямої a.

662. Побудуйте коло, що дотикається до двох даних паралельних прямих і проходить через дану точку, яка лежить між ними.

663. Побудуйте трикутник за двома сторонами й висотою, проведеною до однієї з них.

664. Побудуйте трикутник за кутом, прилеглою до нього стороною й висотою, проведеною до цієї сторони.

665. Побудуйте трикутник ABC за кутом A і висотами, проведеними до сторін AB та AC.

666•. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, та радіусом описаного кола.

667•. Побудуйте трикутник за кутом, бісектрисою, проведеною з вершини цього кута, і висотою, проведеною до прилеглої до цього кута сторони.

668•. Побудуйте трикутник за кутом, протилежною йому стороною й висотою, проведеною до іншої сторони.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§32. Спряження відрізків і кіл в інженерній графіці

Оскільки пряма і коло — найпростіші фігури у геометрії, то природно, що при конструюванні нових форм у техніці, будівництві, ужитковому мистецтві тощо у першу чергу намагаються обходитися саме цими лініями. Тимчасом при поєднанні цих найпростіших елементів конструкції може виникнути потреба в тому, щоб досягти максимальної плавності переходу від одного з них до іншого. Часто ця вимога продиктовується лише естетичними міркуваннями (рис. 4.120, 4.121), але нерідко до цього долучаються й функціональні чинники. Наприклад, при проектуванні склепінь (рис. 4.122) плавність у переходах забезпечує поступовість у передачі навантаження по всій конструкції, у кулачкових розподільчих валах (рис. 4.123) плавність ліній контура кулачка забезпечує плавність руху штовхача, який відкриває та закриває клапан для подачі пального у циліндр двигуна, а плавність заокруглення залізничної колії дає змогу безпечно рухатися потягам. Такі плавні переходи від однієї лінії до іншої називаються *спряженнями* ліній.

Цікавим прикладом суто естетичного застосування спряжень відрізків і кіл є геометричне конструювання друкарських шрифтів, започатковане видатними діячами епохи Відродження. Для прикладу, на рис. 4.124 зображено літеру А, одержану одним із таких способів.

З точки зору геометрії спряженість ліній означає наявність у них спільної дотичної у точці спряження, тобто в точці, де одна з ліній переходить в іншу.

Найпростішими є спряження, що складаються лише з двох елементів: а) відрізка й дуги кола; б) двох дуг кола.

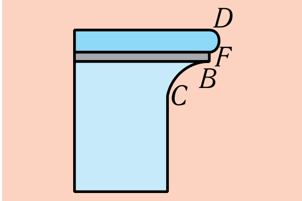


Рис. 4.120. Профіль верхньої частини пілястри з переходом у капітель. Спряження пілястри й капітелі здійснюється за допомогою дуги CB. Горизонтальні лінії верхнього валика спряжені півколом DF.

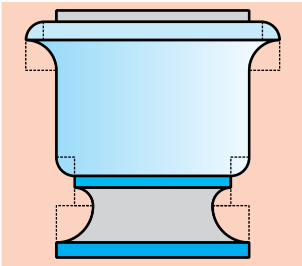


Рис. 4.121. Профіль вази, утворений за допомогою спряження відрізків і четвертинок кола.

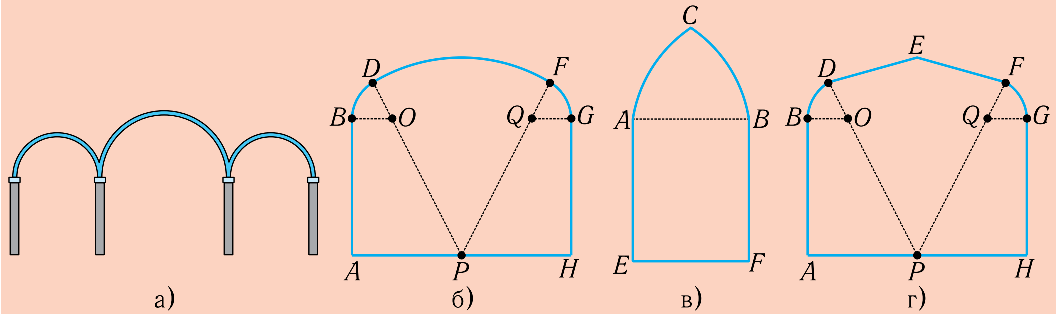


Рис. 4.122.

а) Схема аркади. Дуга кожної арки спряжена з колонами, на які вона спирається.
б) Схема побудови напівовального (зниженого) склепіння. Це склепіння складається з трьох спряжених дуг із центрами O, P і Q.
в) Схема побудови готичного склепіння. Дуга BC має центр A і радіус AB, а дуга AC — центр B і радіус BA. Дуга AC спряжена з відрізком EA, а дуга BC — з відрізком BF.
г) Схема побудови мавританського склепіння. Відрізки AB та DE спряжені дугою BD, а відрізки HG та EF — дугою FG.

Крім цього, до основних відносять також спряження, що складається із трьох елементів: 1) двох відрізків і дуги між ними; 2) двох дуг і відрізка між ними; 3) двох дуг і відрізка збоку; 4) трьох дуг.

Побудова кожного із цих спряжень є окремою геометричною задачею на побудову. Розглянемо схематично розв'язування кожної з них.

а) Для спряження відрізка a й дуги кола дуга має дотикатися до відрізка у його кінці A, а тому радіус OA дуги повинен бути перпендикулярним до відрізка (рис. 4.125).

Відклавши на перпендикулярі b до відрізка від точки A потрібний радіус R, дістанемо центр O дуги. Радіус R дуги можна вибирати довільно.

б) Центри двох спряжених дуг, а також точка спряження мають лежати на одній прямій. При цьому кола, яким належать ці дуги, можуть дотикатися як зовнішньо, так і внутрішньо (рис. 4.126).

1) Нехай потрібно виконати спряження двох відрізків, розміщених під певним кутом A, за допомогою дуги кола з радіусом R. Кут A може бути гострим, прямим або тупим (рис. 4.127).

Рис. 4.123

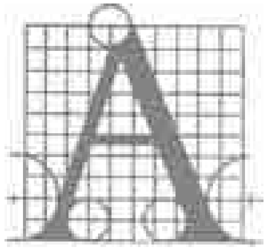


Рис. 4.124

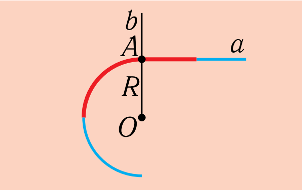


Рис. 4.125

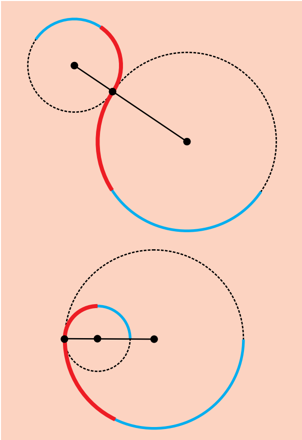


Рис. 4.126

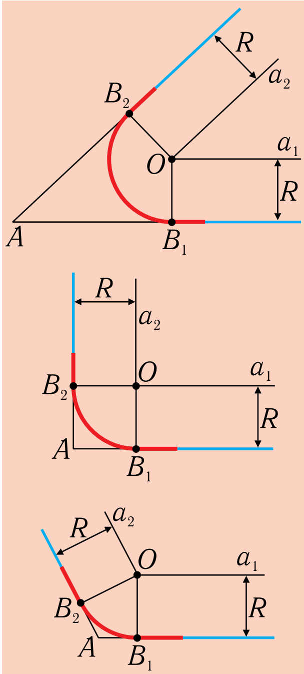


Рис. 4.127

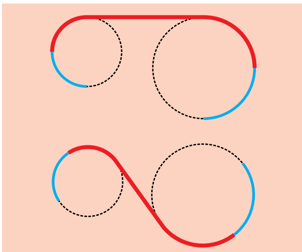


Рис. 4.128

Оскільки дуга повинна дотикатися до обох сторін кута, то її центр O має розміщуватися всередині кута на відстанях R від його сторін. Тому, провівши всередині кута прямі a_1, a_2, на відстані R від кожної сторони кута, у перетині дістанемо потрібну точку O. Точки спряження B_1 і B_2 знайдемо як основи перпендикулярів, опущених з точки O на сторони кута.

2) Побудова спряжень із двох колових дуг і відрізка між ними (рис. 4.128) зводиться до побудови спільної дотичної двох кіл. Ці побудови відображені окремо на рис. 4.129 і 4.130.

3) Можливі схеми спряжень двох дуг і відрізка скраю відображені на рис. 4.131.

4) Дві з можливих схем послідовного спряження трьох колових дуг зображені на рис. 4.132. У першій з них крайні кола дотикаються до середнього зовнішньо, а в другій — внутрішньо.

Якщо дуги з центрами O_1, O_2 та радіусами R_1, R_2 задані і задано також радіус R «середньої» дуги для їхнього спряження, то центр O середньої дуги у першому випадку визначається перетином дуг з центрами O_1, O_2 та відповідно радіусами $R + R_1$ і $R + R_2$, а в другому — перетином дуг з тими самими центрами та відповідно радіусами $R - R_1$ і $R - R_2$.

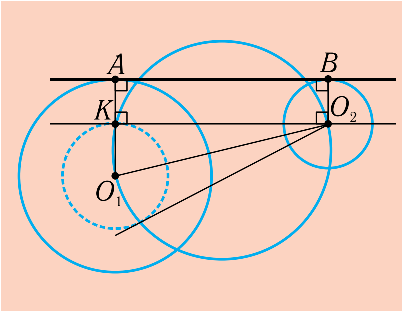


Рис. 4.129

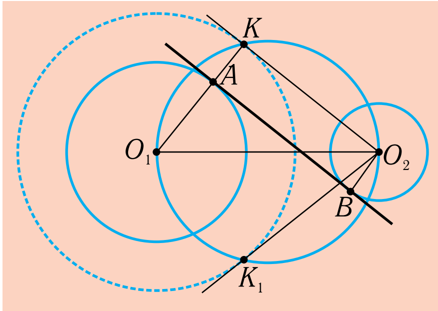


Рис. 4.130

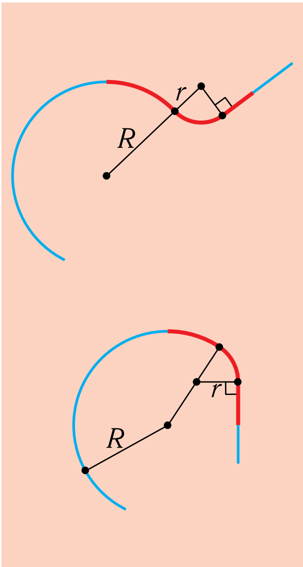


Рис. 4.131

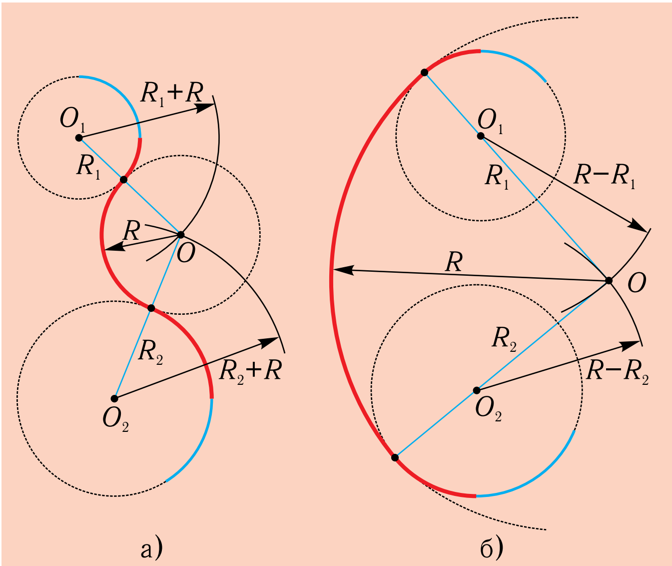


Рис. 4.132

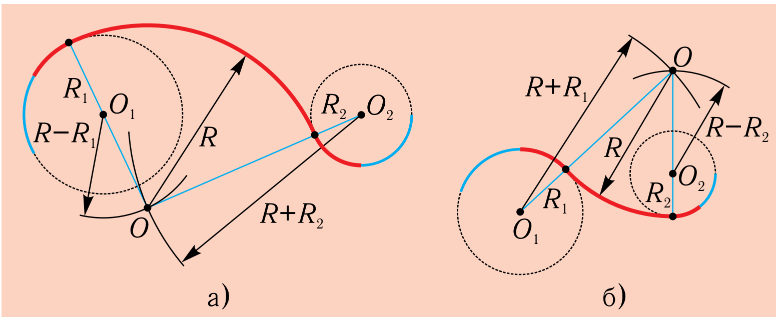


Рис. 4.133

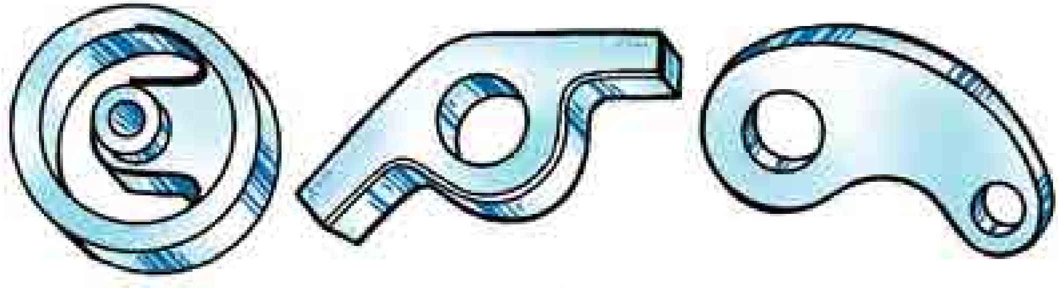


Рис. 4.134

Ще дві схеми для спряження трьох дуг зображено на рис. 4.133. Обґрунтування цілком аналогічне до попереднього. В обох цих випадках одне з крайніх кіл дотикається до середнього ззовні, а інше — зсередини.

На рис. 4.134 зображено приклади технічних деталей, у яких застосовані різні види спряжень.

За допомогою спряження декількох колових дуг можна одержати замкнену лінію. Так, зокрема, одержують *овоїди* (дослівно «яйцеподібні») та *овали*. Якщо у схемі, відображеній на рис. 4.132, б), спряження провести по обидва боки від лінії центрів O_1O_2, то у випадку різних радіусів R_1, R_2 дістанемо овоїд (рис. 4.135), а у випадку однакових радіусів — овал (рис. 4.136).

Оскільки для овоїдів співвідношення між радіусами R_1, R_2, R спряжених дуг, а також відстань O_1O_2 між центрами крайніх із них може змінюватися в дуже широких межах, то існує велике різноманіття цих фігур. Різноманіття овалів менше, однак теж доволі широке, аби вибрати саме ту форму, яка потрібна для конкретної прикладної задачі.

Часто окремі види овоїдів та овалів будують не за описаним загальним способом, а на основі окремих прийомів, які визначаються прикладними задачами, для яких ці фігури застосовують. Наприклад, овоїд, яким визначається профіль однієї із конструкцій кулачків розподільчого валу (див. рис. 4.123), будують так (рис. 4.137). Визначальним є коло з центром O_2 і радіусом R_2. Його півколо з діаметром AB — одна із дуг цього овоїда. На іншому півколі з діаметром AB розміщується центр O_1 іншої дуги овоїда з радіусом r.

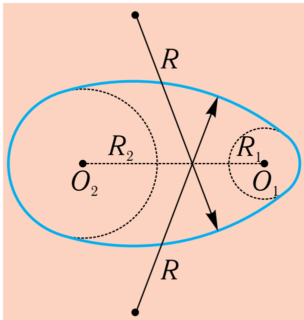


Рис. 4.135

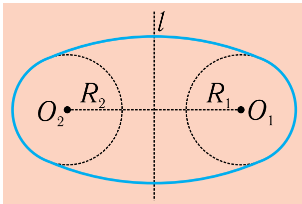


Рис. 4.136

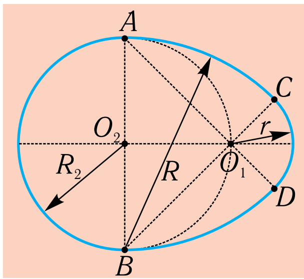


Рис. 4.137

Центрами середніх дуг є точки A і B, а радіусами — відрізок AB. Точка спряження C лежить на одній прямій з точками B і O_1, а точка спряження D — на одній прямій з точками A і O_1.

Овали, які застосовують у кресленні для побудови ізометричних аксонометричних проекцій, одержують так. Спочатку будують ромб $ABCD$ з гострим кутом A, що дорівнює 60° (рис. 4.138). Середини K, L, M, N його сторін беруться за точки спряження сусідніх дуг. Центрами більших дуг є вершини B і D тупих кутів ромба, а радіусами — відрізки BM і DL. Центрами менших дуг є точки O_1, O_2, в яких діагональ AC перетинає радіуси DL та DK, а радіусами цих дуг — відрізки O_1M та O_2K. Оскільки, наприклад, точка L лежить на одній прямій з центрами D і O_1 дуг, які в ній сходяться, то вона справді є точкою спряження. Аналогічні умови виконуються й для точок K, N і M.

Овали у кресленні застосовуються як наближення для еліпсів — паралельних проекцій кола. Заміну еліпсів на овали проводять у зв'язку з тим, що еліпс — доволі складна для побудови фігура, а овал легко будується за допомогою найпростіших креслярських інструментів. При цьому точність наближення цілком достатня для практичних потреб.

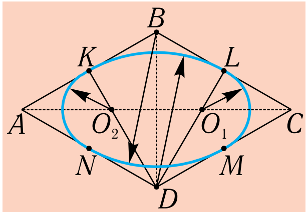
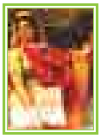


Рис. 4.138



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Задача про трисекцію кута

Уже античні геометри помітили, що не всі задачі на побудову можна розв'язати проведенням прямих і кіл, тобто за допомогою лінійки та циркуля. Можливо, це їх не здивувало б і не стурбувало, якби то були якісь спеціально вигадані задачі, обтяжені складними комбінаціями заданих і шуканих фігур. Та серед таких нерозв'язних задач виявилися і вкрай прості за формулюванням. Однією з найвідоміших серед них стала *задача про трисекцію кута*: **заданий кут поділити на три рівні частини.**

Для деяких кутів задачу неважко розв'язати. Наприклад, прямий кут на три рівні частини можна поділити так. На одній зі сторін кута від його вершини відкладаємо довільний відрізок OA і на ньому, як на основі, всередині кута будуємо рівносторонній трикутник OAB (рис. 4.139). Потім проводимо бісектрису OD кута AOB. Тоді промені OB і OD поділять даний прямий кут на три рівних частини.

Справді, оскільки $\angle BOA = 60°$, то $\angle AOD = \angle BOD = 30°$. Зрозуміло, що й кут BOC дорівнює 30°.

Аналогічним способом можна здійснити трисекцію кута POQ, що дорівнює 45° (рис. 4.140): побудувавши рівносторонній трикутник OAB, дістанемо кут $\angle BOQ = 60° - 45° = 15°$. Залишається відкласти цей кут від сторін OP і OQ заданого кута POQ всередину нього.

Можна довести, що трисекція можлива для будь-якого кута з величиною $\frac{180°}{2^n}$ при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Довга історія пошуку розв'язання задачі в загальному випадку завершилася аж у XIX ст., коли французький математик П'єр Лоран Ванцель (1814 – 1848) довів, що в загальному випадку здійснити трисекцію кута за допомогою циркуля і лінійки неможливо.

Під час пошуків розв'язку задачі про трисекцію кута за допомогою лінійки і циркуля було відкрито низку надзвичайно дотепних способів із використанням інших засобів. Нижче описуються три найвідоміші з них.

1. (*Спосіб Архімеда*). Відступ Архімеда від канонів класичних геометричних побудов лінійкою і циркулем був таким мізерним, що при першому ознайомленні з ним цього відступу можна й не помітити. А полягав він у тому, що Архімед на лінійці ставив дві засічки, одну з яких під час побудов суміщав з точкою на певній прямій, а іншу — з точкою на певному колі. Однак, як ви вже знаєте, такі дії не належать до елементарних побудов лінійкою і циркулем.

Алгоритм для трисекції кута AOB, за Архімедом, був таким (рис. 4.141). Проводиться коло з центром O, радіус OB якого дорівнює відстані ED між засічками на лінійці. Потім лінійка прикладається до

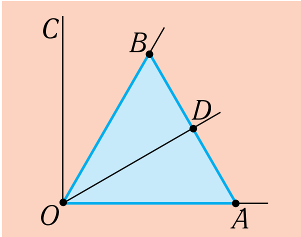


Рис. 4.139

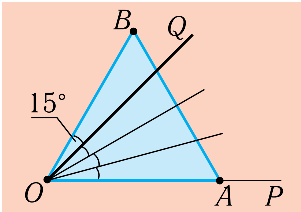


Рис. 4.140

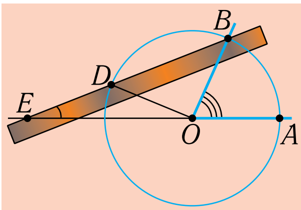


Рис. 4.141

точки B на колі так, щоб засічка D розмістилася на колі, а засічка E — на продовженні сторони OA кута за вершину O. При цьому одержаний кут DEO дорівнюватиме рівно третині від заданого кута AOB. Отже, подальші побудови зводилися до відкладення кута BEO від сторін заданого кута AOB.

Доведення. Оскільки $DE = DO$, то $\angle DOE = \angle DEO$. Тому, за властивістю зовнішнього кута трикутника, $\angle BDO = 2\angle DEO$. У ΔDOB кут OBD дорівнює куту BDO, тобто $2\angle DEO$. Нарешті, $\angle AOB$ є зовнішнім для ΔBEO. Отже, $\angle AOB = \angle DEO + \angle OBD = \angle DEO + 2\angle DEO = 3\angle DEO$, що й треба було довести.

2. (За допомогою трисектора). У практичних застосуваннях, наприклад, у кресленні, значно зручнішим від способу Архімеда є використання спеціального приладу — *трисектора*, що складається із кутника і півкруга, з'єднаних, як показано на рис. 4.142. Радіус QC півкруга дорівнює довжині AC меншої сторони кутника.

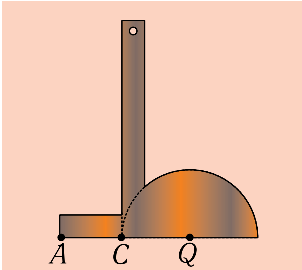


Рис. 4.142

Для трисекції заданого кута AOB (рис. 4.143) трисектор розміщують так, щоб вершина O кута розміщувалася на краю більшої сторони кутника, при цьому одна зі сторін OA кута пройшла через кінець меншої сторони кутника, а інша сторона OB — дотикалася до півкруга (нехай у точці D). Тоді промені OC і OQ поділять кут AOB на три рівних частини.

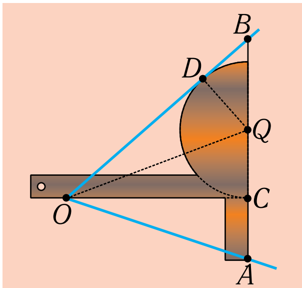


Рис. 4.143

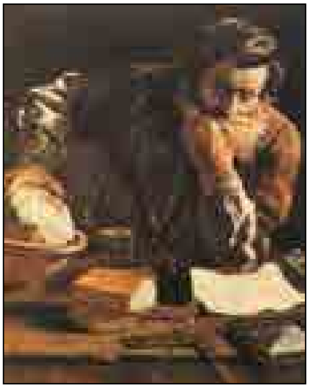
Справді, оскільки OC — серединний перпендикуляр до відрізка AQ, то $OA = OQ$, тобто ΔOAQ — рівнобедрений. Тоді його висота OC є й бісектрисою. З іншого боку, оскільки OC і OD — дотичні до кола з центром Q, то $\angle COQ = \angle QOB$. Отже, усі три кути AOC, COQ і QOB рівні між собою, що й треба було довести.

3. (За допомогою конхоїдального циркуля). Особливо продуктивним для розвитку математичних ідей був той напрямок у розв'язуванні задач на побудову, коли окрім прямих і кіл використовувалися ще й інші лінії, спеціально для цього винайдені (звідси, до речі, й бере свій початок метод геометричних місць точок у розв'язуванні задач на побудову). Яскравим таким прикладом є застосування до трисекції кута *конхоїди Нікомеда*, винайденої грецьким геометром Нікомедом у II ст. до н. е. (конхоїда — дослівно «схожа на мушлю»).

Конхоїда означається так. Береться деяка пряма l (база конхоїди) і точка O (фокус) поза прямою l (рис. 4.144). Через точку O проводяться всі можливі промені OX до перетину з прямою l, на яких від точок L перетину з l відкладаються відрізки LM сталої довжини a. Множина точок M і утворює конхоїду Нікомеда.

Відома конструкція так званого *конхоїдального циркуля* — механічного приладу для креслення конхоїди (рис. 4.145). Основою приладу є Т-подібна рамка з прямолінійними прорізами всередині. Третя планка OL фіксується за допомогою шарніра у точці O, але завдяки прорізу може здійснювати комбінований рух, що є результатом поступального руху шипа L уздовж прямої l та обертального навколо точки O. У результаті такого руху точка M описує конхоїду.

Нехай потрібно здійснити трисекцію довільного кута LOK (рис. 4.146). Проводимо яку-небудь пряму LK, перпендикулярну до однієї зі сторін кута, і будуємо конхоїду з базою LK так, щоб відстань LM дорівнювала $2LO$. Далі з точки L ставимо перпендикуляр NL до LK (точка N лежить на конхоїді) і проводимо пряму NO. Тоді $\angle NOK = \frac{1}{3}\angle LOK$.



Архімед.
Символічний портрет італійського художника Доменіко Фетті (XVII ст.)

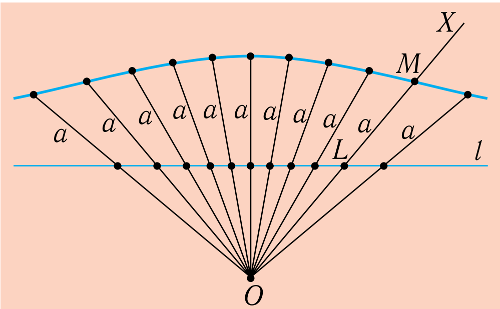


Рис. 4.144

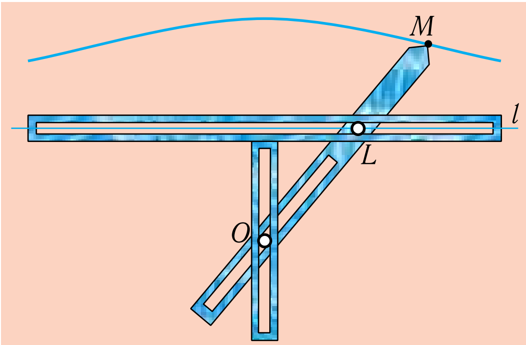


Рис. 4.145

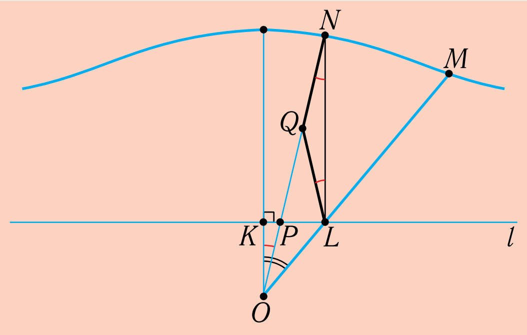


Рис. 4.146

Доведення. Позначимо через P точку перетину прямих NO і LK, а через Q — середину відрізка NP. Оскільки $NL \parallel OK$, то $\angle LNQ = \angle NOK$. А оскільки ΔNLP — прямокутний і Q — середина його гіпотенузи, то вона є центром описаного кола; звідси $QL = QN$ і, отже, $\angle LNQ = \angle NLQ$. За властивістю зовнішнього кута трикутника, $\angle LQO = 2\angle LNQ$, отже $\angle LQO = 2\angle NOK$. Нарешті, оскільки у трикутнику LOQ, за побудовою, $LO = LQ$, то $\angle LQO = \angle LON$. Отже, $\angle LON = 2\angle NOK$, і тому $\angle NOK = \frac{1}{3}\angle LOK$, що й треба було довести.

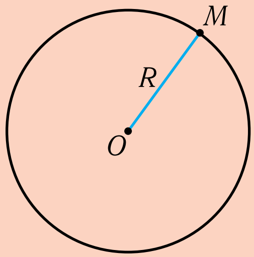
Намагаючись аналогічним чином розв'язати інші нерозв'язні задачі на побудову, античні математики відкрили цілу низку цікавих ліній, зокрема, конічні перерізи. На дослідженні цих ліній випробовували свої сили дослідники усіх наступних епох аж до нашого часу, а самі ці лінії дивовижним чином знайшли застосування у фізиці. Парадоксально, але параболічні й гіперболічні антени ми зараз маємо саме тому, що колись сиві мудреці, розв'язуючи «шкільні» задачі на побудову, відкрили лінії, які здатні фокусувати промені.

Але про це вже в наступних класах!

Хуан Корреа (Мексика) (1674–1739). Геометрія. Із циклу «Вільні мистецтва» (1670 р.). Музей декоративних мистецтв у Мехіко

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі IV

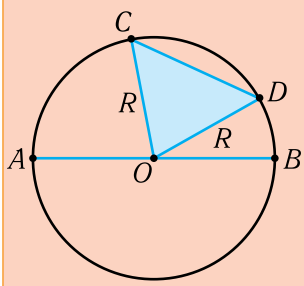
Основні означення і властивості кола і круга



Коло — геометрична фігура (геометричне місце точок), що складається з усіх точок M площини, які рівновіддалені від деякої точки O. Точка O — **центр** кола, а відрізок і відстань OM — **радіус** кола.

Слово «центр» походить від латинського «центрум» і грецького «кентрон», які означають «вістря».

Слово «радіус» в перекладі з латини означає «промінь». Радіус кола часто позначається літерами R або r.



Хорда кола — відрізок CD, що сполучає дві точки на колі.

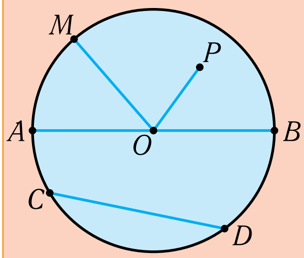
Діаметр кола — хорда AB, що проходить через центр кола.

Слово «хорда» походить від грецького «куерда» — «тятива лука», «струна».

Слово діаметр походить від грецького «діаметрос» — «поперечник».

Діаметр дорівнює двом радіусам.

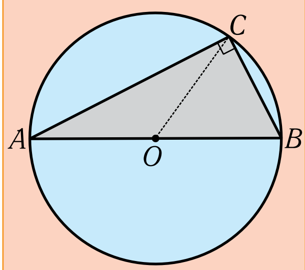
Діаметр більший за будь-яку іншу хорду. Справді, за нерівністю трикутника, $CD < OC + OD$. Звідси $CD < AB$.



Точка P лежить **усередині кола**, якщо відстань OP до центра кола менша від радіуса.

Круг — геометрична фігура, що складається з усіх точок P площини, які лежать на колі і всередині нього.

Центр O, радіус OM, хорда CD і діаметр AB кола називаються відповідно **центром**, **радіусом**, **хордою** і **діаметром** круга.



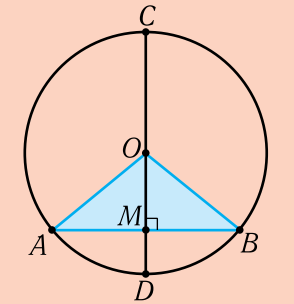
Теорема Фалеса (*про кут, під яким діаметр кола видно з точки на колі*). ***З будь-якої точки C кола його діаметр AB видно під прямим кутом.***

Доведення. $\angle OAC = \angle OCA$, $\angle OBC = \angle OCB$.

Додавши ці рівності, матимемо: $\angle A + \angle B = \angle C$.

Але $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, звідси $2\angle C = 180°$, $\angle C = 90°$.

Геометричним місцем точок C площини, з яких заданий відрізок AB видно під прямим кутом, є коло, побудоване на цьому відрізку як на діаметрі, з якого вилучені дві точки — кінці діаметра AB.

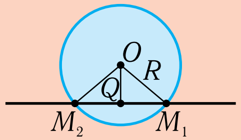


Теорема. ***Діаметр кола, який перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.***

Доведення. $\angle OMA = \angle OMB$, $OA = OB$, тому $\Delta OMA = \Delta OMB$. Звідси $AM = MB$.

Теорема. ***Якщо діаметр кола ділить хорду, яка не є діаметром, навпіл, то він перпендикулярний до цієї хорди.***

Доведення. $AM = MB$, $OA = OB$, тому $\Delta OMA = \Delta OMB$. Звідси $\angle OMA = \angle OMB = 90°$.

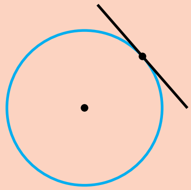


Пряма називається **січною** для кола, якщо вона має з колом дві спільні точки.

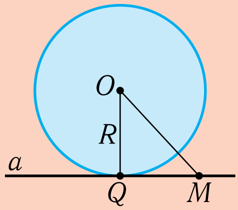
Якщо a — січна, то відстань OQ до неї (як катет у ΔOQM_1) менша від радіуса $OM_1 = R$ (гіпотенузи).

Навпаки, якщо відстань OQ менша від радіуса OM_1, то існує рівно два рівних прямокутник трикутники OQM_1 і OQM_2 зі спільним катетом OQ і гіпотенузою R. Тому пряма a є січною.

Дотична до кола

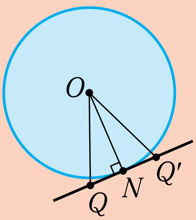


Пряма називається *дотичною* до кола, якщо вона має з колом єдину спільну точку.



Теорема (*ознака дотичної*). ***Якщо пряма проходить через точку кола і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною.***

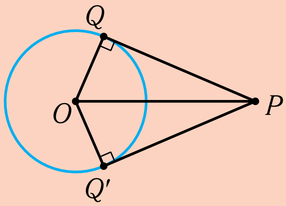
Доведення. Нехай $a \perp OQ$. Тоді у ΔOQM: $OM > OQ$, тобто $OM > R$. M не належить колу. Q — єдина спільна точка прямої a і кола. a — дотична.



Теорема (*властивість дотичної*). ***Дотична до кола перпендикулярна до радіуса кола, проведеного у точку дотику.***

Або інакше: ***Відстань від центра кола до січної дорівнює радіусу.***

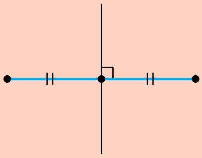
Доведення. Нехай Q — точка дотику дотичної a. Якщо OQ — не перпендикуляр до a, то проведемо перпендикуляр ON і побудуємо $\Delta ONQ'$, рівний ΔONQ з іншого боку від прямих ON. Тоді на прямій a матимемо ще одну спільну точку з колом — Q'. Протиріччя. Отже, $a \perp OQ$.



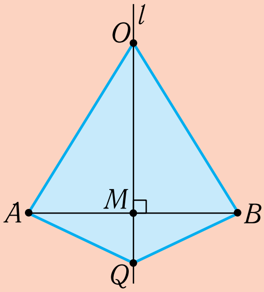
Теорема (*властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола*). ***Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.***

Доведення. Трикутники OQP і $OQ'P$ рівні за катетом ($OQ = OQ'$) і гіпотенузою OP. Тому $PQ = PQ'$.

Задання кола точками. Коло, описане навколо трикутника



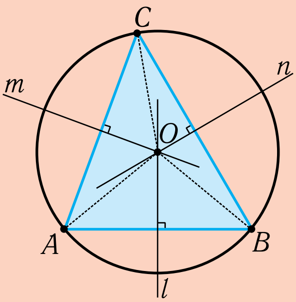
Серединний перпендикуляр до відрізка — пряма, що проходить через середину відрізка і перпендикулярна до нього.



Теорема (*про властивість серединного перпендикуляра*). ***Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка.***

Доведення. 1. Нехай O — довільна точка серединного перпендикуляра l до відрізка AB. $\Delta OMA = \Delta OMB$ за двома катетами. Тому $OA = OB$.

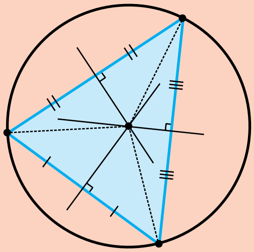
2. Навпаки, нехай $QA = QB$. Тоді $\Delta OMA = \Delta OMB$ за трьома сторонами. Тому $\angle QMA = \angle QMB = 90°$. Отже, точка Q належить l.



Теорема (*про задання кола трьома точками*).

Існує єдине коло, яке проходить через три задані точки, що не лежать на одній прямій.

Доведення. Нехай A, B, C — задані точки. Центр O шуканого кола може належати тільки серединним перпендикулярам l, m і n до відрізків AB, AC і BC. Прямі l, m обов'язково перетнуться, бо якби були паралельними, то перпендикулярні до них прямі AB і AC збігалися б. Для точки O перетину маємо: $OA = OB$ і $OA = OC$. Звідси $OB = OC$, а тому точка O належить і третьому серединному перпендикуляру n. Отже, точка O є центром шуканого кола і вона визначається однозначно. Так само однозначно визначається й радіус — як відстань від точки O до якоїсь із рівновіддалених точок A, B, C.

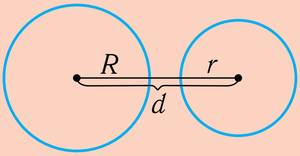


Коло називається **описаним** навколо трикутника, а трикутник — відповідно, **вписаним** у коло, якщо це коло проходить через усі вершини трикутника.

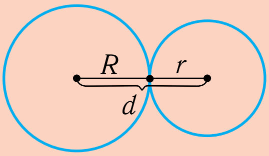
Теорема (*про існування і єдиність кола, описаного навколо трикутника*). ***Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, причому єдине. Центром цього кола є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.***

Теорема є простим наслідком з теореми про задання кола трьома точками.

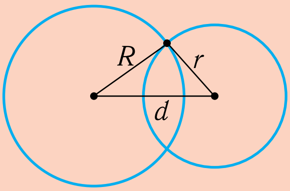
Взаємне розміщення двох кіл



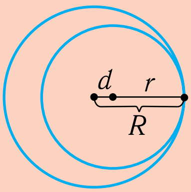
Якщо $d > R + r$, то кола не перетинаються і одне з них лежить ззовні іншого.



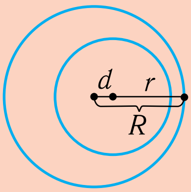
Якщо $d = R + r$, то кола дотикаються зовнішньо.



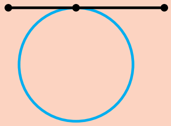
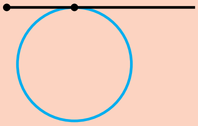
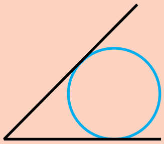
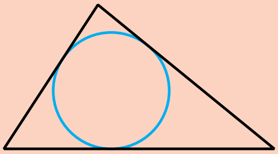
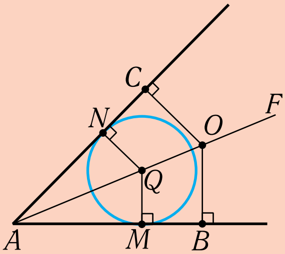
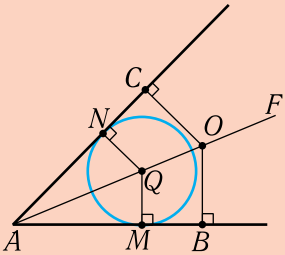
Якщо $R - r < d < R + r$ $(R > r)$, то кола перетинаються.

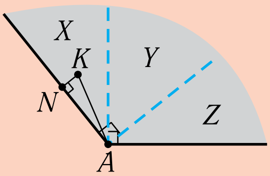


Якщо $d = R - r$ $(R > r)$, то кола дотикаються внутрішньо.



Якщо $d < R - r$ $(R > r)$, то кола не перетинаються і одне з них лежить всередині іншого; зокрема, при $d = 0$ кола є концентричними.

Вписане коло	
	Коло **дотикається** до відрізка, якщо воно дотикається до прямої, яка містить цей відрізок, а точка дотику належить відрізку.
	Коло **дотикається** до променя, якщо воно дотикається до прямої, яка містить цей промінь, а точка дотику належить променю.
	Коло називається **вписаним у кут**, якщо воно дотикається до обох сторін цього кута.
	Коло називається **вписаним у трикутник**, а трикутник — відповідно, *описаним навколо кола*, якщо коло дотикається до всіх сторін трикутника.
	**Теорема** (*про геометричне місце центрів кіл, вписаних у кут*). ***Геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут, є бісектриса цього кута.*** Доведення. 1. Нехай Q — довільна точка бісектриси кута А, OM і ON — перпендикуляри до сторін кута. $\Delta AMQ = \Delta ANQ$ — за спільною гіпотенузою AQ і рівними гострими кутами MAQ і NAQ. Тому $QM = QN$. Отже, точка Q є центром кола, вписаного в кут A. 2. Навпаки, нехай O — центр довільного кола, вписаного у кут A, B і C — точки його дотику зі сторонами кута. Тоді $\angle ABO = \angle ACO = 90°$. Тому $\Delta ABO = \Delta ACO$ — за катетом ($OB = OC$ — як радіуси кола) та гіпотенузою AO. Звідси $\angle OAB = \angle OAC$. Отже, AO — бісектриса кута A.
	**Властивість бісектриси.** ***Бісектриса кута є геометричним місцем точок, розміщених усередині кута і рівновіддалених від його сторін.*** Доведення. 1. Бісектриса кута A розміщена всередині кута і, як доведено у попередній теоремі, для будь-якої її точки Q: $QM = QN$. Отже, точка Q рівновіддалена від сторін кута.

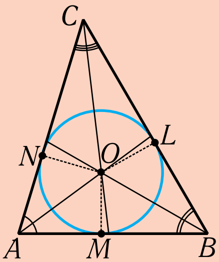


2. Навпаки, якщо точка O рівновіддалена від сторін кута A і кут A не тупий, то основи перпендикулярів OB і OC завжди належатимуть сторонам кута. Оскільки $OB = OC$, то $\Delta ABO = \Delta ACO$. Звідси $\angle OAB = \angle OAC$. Отже, AO — бісектриса кута A.

Якщо ж кут A — тупий, то, провівши всередині кута два промені, перпендикулярні до його сторін, розіб'ємо цей кут на три області X, Y, Z. Основи перпендикулярів, опущених з будь-якої точки області Y на сторонни кута, належать сторонам кута. Тому для них залишається в силі доведення, проведено для гострого кута, за яким усі точки, рівновіддалені від сторін кута A, належать його бісектрисі.

Тому для завершення доведення потрібно показати, що жодна точка K з області X чи Z не може бути рівновіддаленою від сторін кута.

Відстань від точки K до однієї зі сторін кута вимірюється катетом KN, а до іншої — гіпотенузою KA трикутника KNA. Звісно, що ці відстані не можуть бути рівними.



Теорема (*про існування і єдиність кола, вписаного у трикутник*). ***У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центр вписаного кола збігається з точкою перетину бісектрис трикутника.***

Доведення. Геометричними місцями центрів кіл, вписаних у кути A і B є бісектриси цих кутів. Тому центром кола, вписаного одночасно в обидва кути A і B, є точка O перетину цих бісектрис. Точка O неодмінно існує, оскільки бісектриса кута A перетинає будь-який відрізок з кінцями на сторонах цього кута, зокрема, й бісектрису кута B.

$OM = ON$, $OM = OL$, тому $ON = OL$. Звідси $\Delta CON = \Delta COL$ і тому $\angle OCN = \angle OCL$. Отже, точка O належить бісектрисі й третього кута C трикутника ABC, тобто є центром кола, вписаного в кут C, тобто і в трикутник.

Кожна з бісектрис трикутника визначається однозначно, тому центр і радіус вписаного кола теж визначаються однозначно.

Задачі на побудову лінійкою і циркулем

Задачі на побудову лінійкою і циркулем (проведенням прямих і кіл) розв'язуються на основі таких двох правил (елементарних побудов):

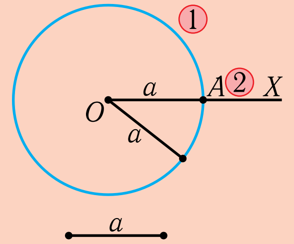
1) ***за допомогою лінійки можна провести пряму через будь-які дві точки площини;***

2) ***за допомогою циркуля можна провести коло з центром у будь-якій точці площини і з радіусом, який дорівнює будь-якому заданому відрізку.***

Виконати побудову геометричної фігури із заданими властивостями (розв'язати задачу на побудову) означає *вказати послідовність* (алгоритм) із вказаних вище двох ***елементарних побудов***, після виконання яких буде отримано цю фігуру, а також *довести*, що побудована фігура справді має потрібні властивості.

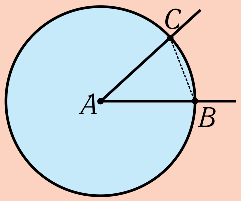
Основні побудови

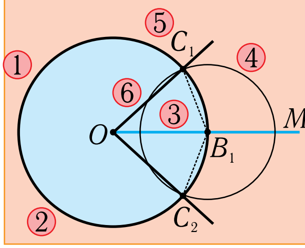
(У кружечках на рисунках указується послідовність кроків відповідної побудови)



Побудова 1.

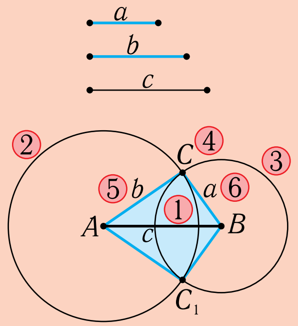
На заданому промені OX від його початку відкласти відрізок, рівний даному відрізку a.





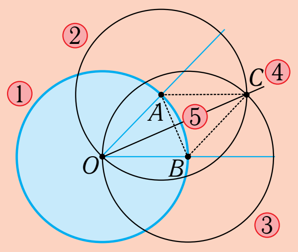
Побудова 2.

Від даної півпрямої OM відкласти кут, рівний заданому нерозгорнутому куту CAB.



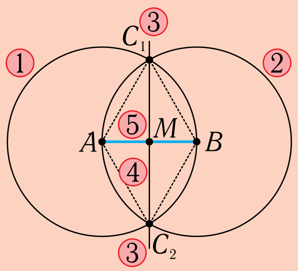
Побудова 3.

Побудувати трикутник за трьома даними сторонами a, b, c.



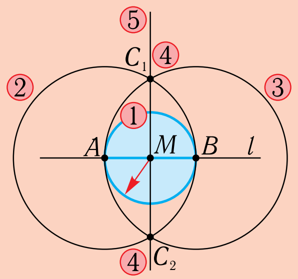
Побудова 4.

Заданий нерозгорнутий кут O поділити навпіл.



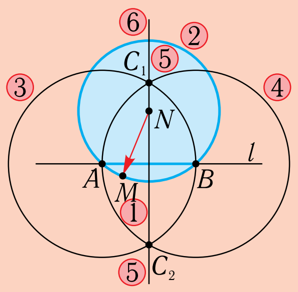
Побудова 5.

Заданий відрізок AB поділити навпіл.



Побудова 6.

Через точку M, задану на прямій l, провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої.



Побудова 7.

Через точку N, розміщену поза прямою l, провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої.

Орієнтовна схема розв'язування задач на побудову:
1) аналіз; 2) побудова (алгоритм побудови); 3) доведення; 4) дослідження.

Метод геометричних місць точок у розв'язуванні задач на побудову

Полягає у зведенні побудови шуканої фігури до побудови деякої ключової точки, для якої вказуються геометричні місця точок, яким вона належить. Тоді ця точка визначається як перетин указаних геометричних місць.

Основні геометричні місця точок, що використовуються при розв'язуванні задач на побудову

1. ***Геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на відстань, що дорівнює довжині заданого відрізка*** — коло із центром у заданій точці і радіусом, що дорівнює довжині заданого відрізка.

2. ***Геометричне місце точок (Фалеса), з яких заданий відрізок видно під прямим кутом*** — коло, діаметром якого є заданий відрізок (без кінців цього діаметра).

3. ***Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців заданого відрізка*** — серединний перпендикуляр до відрізка.

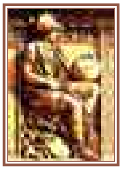
4. ***Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін заданого кута*** — бісектриса кута.

5. ***Геометричне місце точок, які лежать з одного боку від прямої і віддалені від неї на довжину заданого відрізка*** — дві прямі, паралельні даній і віддалені від неї на довжину даного відрізка.

Перевір себе

1. Дайте означення кола і круга. Що таке хорда та діаметр кола і круга? Яка залежність між довжинами діаметра і хорди, проведеними в одному крузі?
2. Сформулюйте теорему Фалеса про кут, під яким діаметр видно з точки кола. Як довести цю теорему? Яке геометричне місце точок можна означити на підставі цієї теореми?
3. Які властивості має діаметр кола (круга), проведений перпендикулярно до хорди або через її середину? Як довести ці властивості?

4. Сформулюйте теорему Фалеса про поділ круга діаметром. Які ідея покладена в основу її доведення? Які наслідки можна вивести із цієї теореми?
5. Яким може бути взаємне розміщення прямої і кола на площині?
6. Що таке дотична до кола? Яку характерну властивість вона має? Як можна провести дотичну до кола із зовнішньої точки?
7. Скільки кіл можна провести на площині через одну точку? А через дві? Як розміщені центри цих кіл?
8. Сформулюйте теорему про властивість серединного перпендикуляра до відрізка.
9. Скільки кіл можна провести на площині через три фіксовані точки? Сформулюйте й доведіть відповідну теорему. Який наслідок для трикутника з неї можна вивести?
10. Яким може бути взаємне розміщення двох кіл на площині?
11. Коли коло називають вписаним у кут? А — в трикутник? Де розміщуються центри всіх кіл, вписаних у кут? Сформулюйте і доведіть відповідну теорему.
12. Скільки кіл можна вписати у трикутник? Сформулюйте і доведіть відповідну теорему.
13. Що таке геометричні побудови за допомогою циркуля і лінійки? До яких елементарних побудов має зводитися кожна побудова за допомогою циркуля та лінійки?
14. Які із задач на побудову вважають основними? Як вони розв'язуються?
15. Якою є орієнтовна схема розв'язування задач на побудову? У чому полягає кожен з етапів?
16. У чому полягає метод геометричних місць для розв'язування задач на побудову? Назвіть відомі вам приклади геометричних місць точок.



Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу IV

1. а) Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділиться цим діаметром на частини завдовжки 6 см і 12 см. Визначте відстані від кінців хорди, а також від її середини до діаметра.
   б) Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки завдовжки 5 см і 15 см. Визначте відстань від центра кола до цієї хорди.
2. а) У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник — рівнобедрений.
   б) У трикутнику центр описаного кола збігається з точкою перетину двох медіан. Доведіть, що трикутник — рівносторонній.

3. а) На рис. 4.147, а) DA — дотична до кола в точці A. Визначте кут BAD.
б) На рис. 4.147, б) AD — дотична до кола в точці A. Визначте кут BOA.

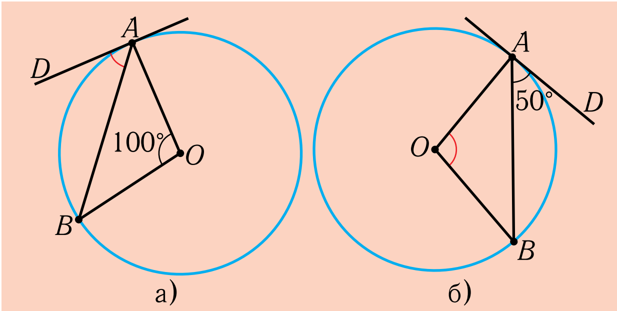


Рис. 4.147

4. а) У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник — рівнобедрений.
б) У трикутнику центр вписаного кола лежить на серединному перпендикулярі до однієї зі сторін. Доведіть, що трикутник — рівнобедрений.

5. а) Сторони трикутника ABC дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Визначте довжини відрізків, на які ці сторони розбиваються точками дотику вписаного кола.
б) Сторони трикутника ABC дорівнюють 7 см, 8 см і 13 см. Визначте довжини відрізків, на які ці сторони розбиваються точками дотику вписаного кола.

6. а) Два кола розміщені одне всередині іншого. Діаметр більшого кола, що проходить через центр меншого кола, ділиться меншим колом на три частини, які дорівнюють 2 см, 10 см і 6 см. Визначте діаметри кіл і відстань між їхніми центрами.
б) Два кола, радіуси яких відносяться, як 2 : 5, розміщені одне всередині іншого. Діаметр більшого кола, що проходить через центр меншого кола, ділиться меншим колом на три частини, крайні з яких дорівнюють 10 см і 5 см. Визначте радіуси цих кіл і відстань між їхніми центрами.

7. а) Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.
б) Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що пряма O_1O_2 ділить навпіл кути AO_1B та AO_2B.

8. а) Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при основі та висотою, проведеною до бічної сторони.
б) Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при вершині та висотою, проведеною до бічної сторони.

9. а) Дано дві точки і пряму. Проведіть через ці точки інше коло, центр якого належить даній прямій.
б) Дано дві точки і коло. Проведіть через ці точки інше коло, центр якого належить даному.

10. а) Дано дві паралельні прямі і точку, яка лежить між ними. Побудуйте коло, яке дотикається до даних прямих і проходить через дану точку.
б) Дано дві пересічні прямі і точку, яка лежить між ними. Побудуйте коло, яке дотикається до даних прямих і проходить через дану точку.

11. а) Знайдіть геометричне місце центрів кіл із даним радіусом R, що дотикаються до даної прямої m.
б) Знайдіть геометричне місце центрів кіл із даним радіусом R, які відтинають на даній прямій m хорду даної довжини p.

12. Побудуйте коло із даним радіусом r, яке дотикається до даного кола з радіусом R:
а) зовнішньо; б) внутрішньо.

13•. а) Побудуйте прямокутний трикутник за сумою катетів та гіпотенузою.
б) Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та сумою іншого катета і гіпотенузи.

14•. а) Побудуйте прямокутний трикутник за різницею катетів та гіпотенузою.
б) Побудуйте прямокутний трикутник за різницею катетів та кутом, протилежним до меншого з катетів.

Предметний покажчик

Ф

Х

Ц

Зміст

Опис обкладинки і форзаців

На картині у центрі обкладинки зображено основні прилади для проведеня наукових досліджень у «дотелескопний» період, які мали значний вплив на розвиток геометрії. Праворуч, біля небесного глобуса, із циркулем у лівій руці, а правицею вказує на небо — відомий астроном Тихо Браге (1546–1601). Глобус і сфера у цьому підручнику дають змогу глибше зрозуміти геометрію на площині. Ілюстрації запозичені з книги: Дубкова С., Маркова Н. История астрономии. — М.: Белый город, 2002.

На згині обкладинки — картина фундатора живописного абстракціонізму Василя Кандинського «Піки на вигині» (Spitzen im Bogen) (1927 р.). Трикутник був одним з основних виражальних засобів у творах цього художника. Цим він немовби переносив виняткову роль цієї фігури із геометрії на абстрактний живопис. У картині прочитується ідея космічності людського шляху, який проходить довкола Землі під вітрилами-піками, що наповнюються Сонцем.

На 1-у форзаці — гравюра з першого тому поширеної у XIX ст. чотиритомної праці французького природодослідника і літератора Луї Фіг'є (1819-1894) «Життя славетних учених від давнини до дев'ятнадцятого століття з коротким оглядом їхніх праць» (Louis Figuier. Vie des savants illustres depuis l'antiquité jusqu'à dix-neuvième siècle avec l'appréciation sommaire de leurs travaux. — 1-e édition, Paris, 1866–1870).

Гравюра відображає елліністичну епоху в історії науки, пов'язану з тріумфом академічної школи Платона. У той час центр науки перемістився з Афін у єгипетську Александрію. Саме там Евклід створив свої знамениті «Начала» геометрії, а великі астрономи Гіппарх і Птолемей активно застосовували геометрію в астрономічних дослідженнях.

На 2-у форзаці — фреска італійського художника та архітектора Пеллегріно Тібальді (1527–1596) «Спір між академіками (ліворуч) та стоїками (ліворуч)» (1592 р.) з бібліотеки монастиря св. Лоренсо і резиденції іспанських королів (Ескоріалу) поблизу Мадрида.

Якщо академіки на чолі з Платоном сповідували значущість для пізнання лише ідеальних і вічних ідей, то стоїки на чолі із Зеноном Кітіонським головним уважали гармонійне облаштування земного буття. Відоме їхнє порівняння науки з фруктовим садом, у якому логіка — це садова огорожа, фізика — фруктові дерева, а етика — плоди.

Полемізуючи щодо стратегічних завдань науки, академіки й стоїки незмінно надавали великого значення геометрії, що й засвідчують геометричні атрибути на цій картині.

Шановний друже!

Геометрія 7 класу завершена. Ми запрошуємо тебе до 8 класу, де ти, з-поміж іншого, вивчатимеш теорему Піфагора і золотий переріз, які знаменитий астроном Йоганн Кеплер уважав найціннішими перлинами геометрії. Саме їх французький художник Лоран Делагір відобразив на аркуші в руках музи Геометрії на цій картині.

Лоран Делагір. Алегорія геометрії (1649 р.)

Навчальне видання

ТАДЕЄВ Василь Олександрович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу

загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Дизайн та комп’ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 19.01.2015. Формат 70×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. 30,895.
Умовн. фарбо-відб. 123,58.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com