

В.О. Тадесв

Геометрія

Вимірювання багатокутників

**Дворівневий підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



**ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2016**

УДК 514 (075.3)
ББК 22.151я72
Т12

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як підручник для загальноосвітніх навчальних закладів і шкіл та класів з поглибленим вивченням математики (наказ Міністерства освіти і науки України від 10.05.2016 № 491)

Тадеев В.О.

Т12 Геометрія : Дворівневий підручник для 8 кл. загальноосвітн. навч. закл. / В.О Тадеев. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2016. — 320 с. : іл.

ISBN 978-966-10-4484-4

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. У ньому подається обов'язковий обсяг програмного матеріалу, а також розширення «Для тих, хто хоче знати більше». Розширення містить теоретичний матеріал, що відповідає програмі поглибленого вивчення математики у 8 класі, відтак підручник може використовуватися і для такого навчання — як у груповій, так і в індивідуалізованій формі. Наведені приклади розв'язування задач та вправи і задачі для класної й самостійної роботи. У кінці кожного параграфа подаються питання для самоконтролю, а в кінці розділу — завдання для проведення контрольних робіт.

При викладі теоретичного матеріалу і в підборі задач значна увага приділяється міжпредметним зв'язкам та питанням історичного, світоглядного і методологічного характеру.

Для учнів та вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-4484-4

© Тадеев В.О., 2016
© Навчальна книга – Богдан, 2016



Напутнє слово першого космонавта незалежної України, Героя України Леоніда Каденюка¹⁾

Дорогі восьмикласники!

Ми живемо в епоху небувалого розвитку науки і техніки, користуємося їхніми досягненнями: Інтернетом, мобільним зв'язком, мультимедійними технологіями. Це — чудова можливість для пізнання світу, якої у нас, дітей 60-х років минулого століття, не було. Але у нас були мрії і бажання змінювати світ, творити, досягати вершин. Переконалися, що й у вас теж є свої високі мрії.

Дитинство мого покоління припало на початок Космічної Ери — нового етапу цивілізаційного поступу людства. Перший штучний супутник Землі і перший політ людини в космос мали доле-носне значення не лише для нашої планети, а й для Всесвіту в цілому. Моя дитяча мрія була пов'язана з підкоренням космосу, пізнанням таємниць Всесвіту. Нестримне бажання піднятися ввись, побачити нашу планету з космічної орбіти спонукало мене пройти непростий та надзви-чайно цікавий шлях для здійснення цієї мрії. Мене часто запитують, чи важко стати космонав-том? Звичайно, важко, — відповідаю я. — Але якщо таку мрію міг втілити в життя хлопчина з буковинського села, то так само це можете зробити й ви.

Окремо хочу наголосити, що тепер найвищі вершини в усіх сферах діяльності доступні не тільки чоловікам, як було ще порівняно недавно, а й жінкам. Навіть — у космонавтиці. На початок липня 2016 р. вже 60 жінок з 10 країн світу здійснили космічні польоти. Приємно відзначити, що

¹⁾ **Леонід Костянтинович Каденюк** народився 1951 р. у с. Клішківці Хотинського району Чернівецької області в сім'ї сільських учителів. У 1967 р., після закінчення середньої школи зі срібною медаллю, вступив до Чернігівського вищого військового авіаційного училища і закінчив його у 1971 р. за спеціальністю «Пілотування і експлуатація літальних апаратів». У серпні 1976 року був відібраний до загону радянських космонавтів у групу багаторазової космічної системи «Буран». У 1988–1990 рр. пройшов інженерну та льотну підготовку як командир «Бурана», а в 1990–1992 рр. — як командир транспортного корабля «Союз-ТМ».

За час підготовки до космічних польотів пройшов підготовку з проведення наукових експериментів на борту космічних літальних апаратів у найрізноманітніших напрямках: біологія, медицина, метрологія, екологія, дослідження природних ресурсів Землі із космосу, геологія, астрономія, геоботаніка. У 1995 р. був відібраний від України для підготовки до космічного польоту на американському космічному кораблі багаторазового використання «Колумбія» як спеціаліст з корисного навантаження. З 19 листопада по 5 грудня 1997 року здійснив космічний політ на цьому кораблі з місією STS-87. Під час польоту виконував біологічні експерименти спільного українсько-американського дослідження з трьома видами рослин: ріпи, сої і моху. Головна мета цих експериментів полягала у вивченні впливу стану невагомості на фотосинтетичний апарат рослин, на запліднення та розвиток зародків, на експресію генів у тканинах, на вміст фітогормонів, вуглеводний метаболізм та ультраструктуру клітин та інше. Крім цих експериментів, у космічному польоті виконував експерименти Інституту системних досліджень людини за напрямком «Людина і стан невагомості».

Леонід Каденюк проводить велику громадську і просвітницьку роботу, часто зустрічається з учнівською і студентською молоддю, переконуючи школярів і студентів у тому, що «зайвих знань не буває» і що для справжнього успіху потрібно наполегливо «плекати свою мрію». Його художньо-публіцистична книга «Місія — Космос» стала кращою книгою 2009 року в Україні і нагороджена дипломом «Гран-Прі» в номінації «Вибір читача» на XIII Харківському фестивалі «Світ книги» у 2011 р. — *Прим. видавництва.*

4 Напутнє слово

однією з них була астронавтка з українським корінням Хайдемарі Стефанишин-Пайпер, котра побувала у космосі двічі¹⁾.



Хайдемарі Стефанишин-Пайпер. Зліва направо: у формі американської астронавтки (2006 р.); в українській вишиванці у студентські роки; під час однієї із зустрічей на українській землі (2007 р.)



Леонід Каденюк серед студентської молоді напередодні Дня космонавтики 2015 р.

Дорогі друзі! Від обсягу і якості знань, здобутих вами у школі, залежить ваш подальший життєвий шлях, успіх, статус у суспільстві. Пам'ятайте, що немає тих знань, які не потрібні людині. Прагніть знати якомога більше і в найрізноманітніших царинах. Вчіться, пізнавайте, мрійте і тоді зможете піднятися до вершин своїх мрій!

Геометрія — надзвичайно цікава й корисна наука. Вона була однією з улюблених мною у школі. Перебуваючи в космосі, я переконався, що геометрія космічного простору має свої — «космічні» виміри. В земних умовах математична модель простору може бути двовимірною (планіметрія) або тривимірною (стереометрія). І для життя на Землі досі цього було достатньо. Геометрична ж сутність космічного простору полягає у його динамічній багатовимірності. Коли ми навчимося будувати багатовимірні просторові системи та застосовувати їх у космічній навігації, то зможемо по-іншому рухатися у Всесвіті, а, можливо, і переходити з одного часового виміру в інший. Такі думки підказав мені Космос. Ідеями багатовимірності послуговуються нині багато інших наук і технологій. Але для їхнього усвідомлення і реалізації потрібно досконало знати класичну геометрію. Тож бажаю вам, дорогі друзі, успіхів і натхнення в її опануванні.

Любіть і вивчайте науки **на славу України!**

¹⁾ **Хайдемарі Стефанишин-Пайпер** (Heidemarie Stefanyshyn-Piper) народилася 1963 р. в м. Сент-Пол у штаті Мінесота. Її батько Михайло Стефанишин емігрував з України до Європи, а потім до США під час Другої світової війни. Там він одружився на такій же втікачці з Німеччини, і в них народилося п'ятеро дітей: четверо синів і наймолодша донька Хайдемарі. «Батько навчив мене української мови, а мати — німецької», — часто зазначає астронавтка. У 1985 р. Хайдемарі закінчила один із найпрестижніших американських вишів — Массачусетський технологічний інститут (зі ступенем магістра за спеціальністю машинобудування) і вступила на службу до Військово-морських сил США у чині офіцер-інженера. 1 травня 1996 р. була прийнята до корпусу американських астронавтів.

Перший політ здійснила 9 – 21 вересня 2006 р. у складі місії STS-115 на кораблі багаторазового використання «Атлантіс» до Міжнародної космічної станції. Завданням цієї місії були, серед іншого, доставка та встановлення на космічній станції нових сонячних батарей та заміна відповідного обладнання. За встановлення батарей відповідала саме Стефанишин-Пайпер, яка стала восьмою жінкою-астронавтом NASA, що здійснила вихід у відкритий космос.

Передмова автора і видавництва

Мама сердиться на мене за те, що я більше люблю цвяхи, ніж підручники. А хто винуватий? Звісно, не я, а підручники. Не треба бути такими нудними.

Лія Гераскіна, «В країні невивчених уроків»

— Зараз я вам цю математику поясню... Е-е-е-е... — Папуга уже розкрив дзьоба, аби почати пояснення, і ... стулив його знову. — Ні, — сказав папуга, — так нічого не вийде. Потрібний наочний посібник.

— Який? — здивувався удав.

— Наочний. Він потрапить вам на очі, і все одразу стане зрозуміло.

Григорій Остер, «38 папуг»

Шановні друзі! У 8 класі ви продовжуватимете вивчення основ геометрії. Ви вже знаєте, що геометрія — це математична наука про геометричні фігури, а геометричні фігури конструюються для пізнання реальних та можливих форм матеріального і духовного світу. У 7 класі ви вивчали найпростіші із геометричних фігур — точки, прямі, відрізки, кути, трикутники і коло, ознайомилися із численними їхніми практичними застосуваннями. У цьому році ви істотно поповните арсенал геометричних фігур та прикладів їхнього застосування, долучивши до вже відомого найрізноманітніші багатокутники. А це, у свою чергу, дасть змогу поглибити знання і про трикутники та коло.

Крім цього, у 8 класі будуть з'ясовані дуже важливі факти щодо вимірювання фігур, і серед них — знаменита теорема Піфагора про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, яку відомий астроном Йоганн Кеплер (той самий, що відкрив закони руху планет навколо Сонця) назвав однією із двох найкоштовніших перлин геометрії. Ви запитаете, а що він уважав другою перлиною? — Золотий переріз, або, як його тепер часто називають, код да Вінчі. І про нього ви теж довідаєтеся у цьому році.

З 15 по 30 листопада 2008 р. Хайдемарі здійснила другий політ до Міжнародної космічної станції у складі місії STS-126 на багаторазовому транспортному кораблі «Індевор». До програми цього польоту входило проведення на зовнішній поверхні станції робіт з обслуговування і дооснащення, в яких активну участь брала Хайдемарі.

Загалом обидва польоти Хайдемарі тривали 27 днів 15 год. 36 хв і 2 с. За цей час вона здійснила п'ять виходів у відкритий космос загальною тривалістю 33 год. і 42 хв.

У січні і в жовтні 2007 р. Хайдемарі Стефанишин-Пайпер двічі відвідала Україну. Тоді вона побувала і в рідному селі свого батька Якиміві та в сусідньому селі Новому Яричеві Кам'янка-Бузького району Львівської області, в якому зараз проживають 15 її двоюрідних братів і сестер. Під час першого візиту в Україну президент Віктор Ющенко нагородив її Орденом Княгині Ольги III ступеня — «За мужність і відагу, проявлені в освоєнні космічного простору, зміцнення дружби між українським та американським народами». — *Прим. видавництва.*

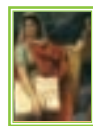
Нарешті, буде підведений логічний підсумок у тому питанні, з якого, власне, геометрія розпочиналася — в обчисленні площ багатокутників.

Однак не тільки цими суто теоретичними і практичними знаннями цінна геометрія, яку ви продовжуватимете вивчати.

Ще в сиву давнину знаменитий філософ Платон написав над входом до своєї школи мудрості в Афінах: «Не обізнаний з геометрією, не заходь під дах мій!» За що ж так цінувалася тоді геометрія? — За те, що вона розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися давні греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед своїх легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали духовними учителями, на першому місці вони завжди ставили ім'я Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим і, як стверджують легенди, довів лише декілька простих геометричних теорем. Однак цим він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей постулат став основою західної цивілізації. *Отже, вивчаючи геометрію, ви продовжуватимете навчатися мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю людського буття.*

Навчання основам теоретичних і практичних знань, а також мистецтву аргументації — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із цих завдань відведено належне місце.

По всьому тексту ви помітите низку розпізнавальних знаків, які мають своє символічне значення:



На урок вас запрошуватиме наш шкільний дзвоник, перев'язаний жовто-блакитною стрічкою.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афіна. Вибрано рельєфне її зображення з геометричними атрибутами — кутником, циркулем, лінійкою і сферою, створене Філіппом-Роланом Роландом для західного фасаду паризького Лувра.

Вправи і задачі розміщені в кінці кожного параграфів за порядком наростанням труднощі. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а найскладніші — темним. Задачі, не позначені додатковими значками, хоч і не так явно, однак теж природно розбиваються на дві

групи: перші простіші, а наступі — складніші. Отже, загалом задачний матеріал проградуєований за чотирма рівнями складності. У кінці кожного розділу подані типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах), які теж відповідним чином проградуєовані за рівнями. Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем і ученицею, які разом розв'язують задачу. На поданих у тексті прикладах демонструються застосування вивчених теоретичних відомостей, а в окремих випадках — і корисні нові факти та загальні підходи до розв'язування. Ці приклади можуть слугувати також взірцями для оформлення розв'язань у зошитах.

У підручнику є розширення «Для тих, хто хоче знати більше», розраховане на учнів, які хочуть дізнаватися про математику більше, можливо, мріють стати науковцями або працювати у високотехнологічних галузях. Розширення містить теоретичний матеріал, що відповідає програмі поглибленого вивчення математики у 8 класі, а відтак кожен учень має змогу опановувати його і в звичайній школі. Ці тексти подаються на жовтому і блакитному тлі та супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Життєвий шлях цих учених переконливо засвідчує, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці

Крім навчального матеріалу, підручник містить спеціальну рубрику «Сторінки історії». Її супроводжує муза історії Клію зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас», яка прикрашає завісу Львівського оперного театру. Клію тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні закони розвитку математики і мотиви діяльності її творців. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому її розумінню і легшому засвоєнню.

У рубриці «Перевірте себе» містяться запитання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкс з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповідав на її запитання.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!



Будівля муніципалітету в Гаазі (Нідерланди). Висота будівлі 72 м. Уведена в експлуатацію у 2011 р. Чотирикутна форма бічних граней із гострим верхнім кутом надає споруді улюблених голландцями обрисів корабля, що здіймається на хвилях. Можливо, на сьогодні це — наймасштабніше втілення в архітектурі різнокутної чотирикутної форми

Розділ I Чотирикутники

§1. Довільні чотирикутники

Уроки
1–3



1.1. Чотирикутник і його елементи

Із 7 класу відомо, що *геометрія* — це наука про *геометричні фігури*. Найпростішими геометричними фігурами на площині є точки і прямі, а їхні властивості описуються *аксіомами* геометрії. Усім іншим геометричним фігурам даються *означення*. В означенні геометричної фігури подається вичерпний перелік властивостей, який вирізняє цю фігуру з-поміж інших, або вказується спосіб її побудови. Із 7 класу вам відомі означення відрізка, півпрямой (променя), півплощини, кута, трикутника, кола і круга. Трикутник — найпростіша фігура із так званих *багатокутників*, що утворюються за допомогою певним чином розміщених відрізків. Наступним іде чотирикутник. Із нього ми й почнемо вивчення геометрії у 8 класі.

Нагадаємо, що трикутник визначається *трьома* своїми точками, які не лежать на одній прямій — вершинами і *трьома* відрізками — сторонами, які послідовно сполучають ці точки. На рис. 1.1, а, б) зображено каркасний і плоский трикутники ABC

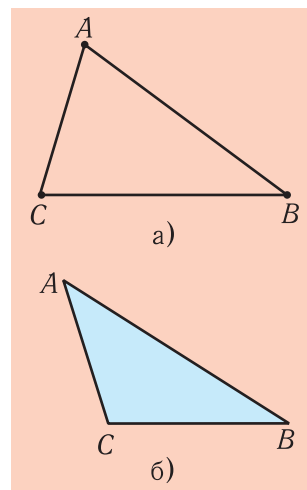


Рис. 1.1

з вершинами A, B, C і сторонами AB, BC і AC . Каркасний трикутник складається лише із вершин і сторін, а *плоский* — ще й із частини площини, обмеженої сторонами.

Чотирикутник утворюється в аналогічний спосіб, однак для його визначення потрібно уже *чотири* точки.

Означення.

Чотирикутником називається плоска фігура, яка визначається чотирма точками — *вершинами чотирикутника*, і чотирма відрізками, які послідовно сполучають ці точки, — *сторонами чотирикутника*. При цьому жодні три вершини не повинні лежати на одній прямій, а жодні дві сторони — не перетинатися у своїй внутрішній точці. Каркасний чотирикутник складається лише із вершин і сторін, а *плоский* — ще й із частини площини, обмеженої сторонами.

На рис. 1.2, а), б) зображено каркасний і плоский чотирикутники $ABCD$ з вершинами A, B, C, D і сторонами AB, BC, CD і AD .

Зауважте, що фігури, зображені на рис. 1.3, а, б, в), не є чотирикутниками, оскільки у першій з них три точки A, B, C лежать на одній прямій, а в другій

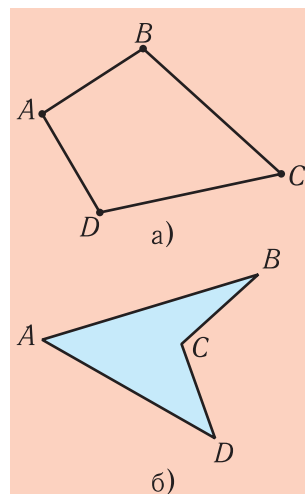


Рис. 1.2

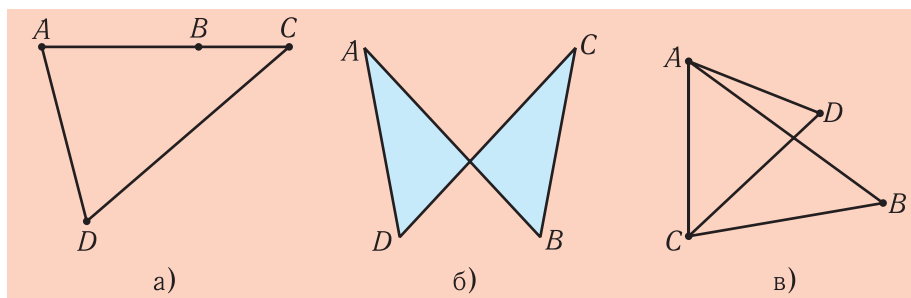


Рис. 1.3

і третій відрізки AB і CD перетинаються у своїх внутрішніх точках.

Позначення чотирикутників утворюється із позначень їхніх вершин, записаних так, щоб кожен дві сусідні вершини визначали певну сторону. Ті самі чотирикутники $ABCD$, зображені на рис. 1.2, а), б), можна позначити й так: $BCDA$, $CBAD$, $DCBA$ тощо. Проте позначення $ACBD$ — неправильне, оскільки пари сусідніх вершин A , C і B , D не є кінцями їхніх сторін.

Чотирикутник можна утворити із двох трикутників ADC і $A'BC'$, які мають по одній рівній стороні (рис. 1.4, а). Для цього потрібно сумістити рівні сторони AC і $A'C'$ трикутників, а протилежні їм вершини B і D розмістити по різні боки від прямої AC (рис. 1.4, б).

Креслення чотирикутника $ABCD$ теж можна розпочати із трикутної частини ABC , а потім розмістити зовні неї четверту вершину D так, щоб вона не належала жодній із прямих AB , BC чи AC (рис. 1.5, а, б). Провівши після цього відрізки DA і DC , матимемо чотирикутник $ABCD$.

Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називаються *суміжними*, а ті, що не мають спільної вершини, — *протилежними*. У чотирикутниках $ABCD$, зображених на рис. 1.5, а), б), суміжними є сторони AB і BC , BC і CD , CD і DA , DA і AB , а протилежними — сторони AB і CD та AD і BC .

Означення.

Сума довжин усіх сторін чотирикутника називається його периметром (від грецьких слів «пері» — навколо і «метрео» — вимірюю).

Як і для трикутника, периметр чотирикутника теж часто позначають літерою P .

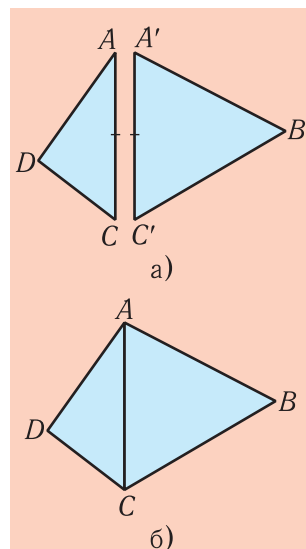


Рис. 1.4

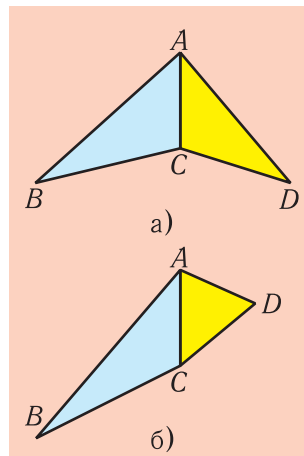


Рис. 1.5

Вершини чотирикутника, які є кінцями однієї сторони, називаються *сусідніми*, а несусідні вершини називаються *протилежними*.

Означення.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються *діагоналями* (від грецьких слів «діа» — через і «гонію» — кут).

У чотирикутниках $ABCD$, зображених на рис. 1.6, а), б), сусідніми є вершини A і B , B і C , C і D , D і A , а протилежними — вершини A і C та B і D . Діагоналями є відрізки AC і BD .

У наступному пункті 1.2 буде з'ясовано, що у так званих опуклих плоских чотирикутниках обидві діагоналі завжди належать чотирикутнику (як на рис. 1.6, а), а в неопуклих одна із діагоналей належить чотирикутнику, а інша — не належить йому (як на рис. 1.6, б).



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що будь-яка сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Розв'язання. Доведемо, що в довільному чотирикутнику $ABCD$ (байдуже, опуклому чи неопуклому) сторона AB , наприклад, менша від суми сторін BC , CD та AD (рис. 1.7). Для цього проведемо діагональ AC . Дістанемо трикутники ABC та ADC . За нерівністю трикутника, з першого із них:

$$AB < BC + AC.$$

А з другого —

$$AC < CD + AD.$$

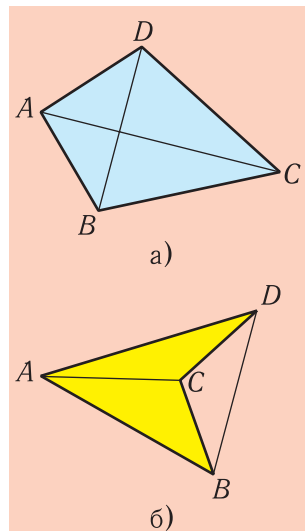


Рис. 1.6

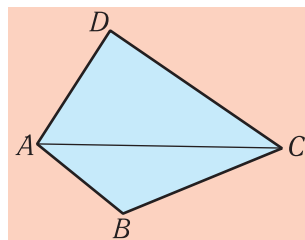


Рис. 1.7

Підставляючи у першу з цих нерівностей замість AC більше за нього значення $CD + AD$ (як свідчить друга нерівність), ми тільки підсилимо першу нерівність:

$$AB < BC + CD + AD.$$

Твердження задачі доведено.

1.2. Кути чотирикутника. Опуклі й неопуклі чотирикутники

На відміну від трикутника, означення кута чотирикутника потребує уточнення самого поняття про кут. Досі *кутом* ми називали фігуру, утворену двома променями (сторонами), що мають спільний початок (вершину) (рис. 1.8, а). Кутом називали також частину площини, обмежену цими променями; її заповнюють усі відрізки з кінцями на сторонах кута (рис. 1.8, б). Для трикутників таких понять про кут було цілком достатньо, оскільки жоден із кутів трикутника не перевищує максимальної міри кута між двома променями, тобто 180° . У чотирикутнику ж можуть бути й кути, які більші за 180° . Наприклад, у чотирикутника $ABCD$, зображеному на рис. 1.9, таким є кут при вершині D . Це й вимагає розширення поняття про кут.

Надалі фігуру, що складається із двох променів зі спільним початком, називатимемо *лінійним* кутом і братимемо до уваги кожну з обох частин площини, на які лінійний кут її розбиває (рис. 1.10). Ці частини називаються *плоскими* кутами, визначеними лінійним кутом. Якщо лінійний кут нерозгорнутий, то один із визначених ним плоских кутів має ту особливість, що йому належать усі відрізки з кінцями на сторонах лінійного кута. Його називають *опуклим* плоским кутом. Іншому плоскому куту згадані відрізки не належать. Його називають *неопуклим* плоским кутом. Вершина і сторони лінійного кута називаються,

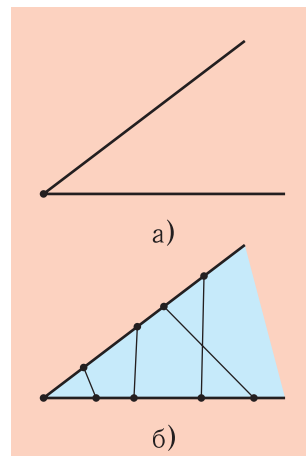


Рис. 1.8

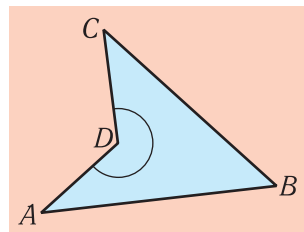


Рис. 1.9

відповідно, *вершиною* і *сторонами* кожного з обох визначених ним плоских кутів.

На рис. 1.10, а) жовтим кольором зафарбовано опуклий плоский кут, а синім — неопуклий плоский кут, які визначаються лінійним кутом з вершиною O та сторонами a і b .

Уважається, що розгорнутий лінійний кут (рис. 1.11) розбиває площину на два рівних плоских *розгорнутих* кути.

Мірою опуклого плоского кута вважається градусна міра φ відповідного йому лінійного кута. Отже, ця міра більша за 0° і не перевищує 180° . Мірою неопуклого плоского кута вважається величина $360^\circ - \varphi$. Отже, ця міра не менша від 180° і не більша за 360° . Якщо лінійний кут розгорнутий, то обидва визначених ним плоских кути дорівнюють по 180° .

Тепер перейдемо до означення кута чотирикутника.

Як і для трикутника, при кожній вершині чотирикутника розглядається плоский кут, який визначається його сторонами. Однак тепер, коли тими самими сторонами визначаються два плоскі кути, ставиться додаткова вимога — *плоский кут чотирикутника повинен містити його протилежну вершину*. Плоский кут чотирикутника найчастіше називається просто його *кутом*.

Наприклад, на рис. 1.12, а) дужкою відзначений опуклий, а на рис. 1.12, б) — неопуклий кути чотирикутника $ABCD$ при вершині B . Кожен із них містить протилежну вершину D .

Кути чотирикутника, вершини яких є протилежними, називаються *протилежними*, а кути, які мають спільну сторону чотирикутника — *сусідні* або *прилеглими* до цієї сторони.

У чотирикутниках $ABCD$, що на рис. 1.12, а, б), протилежними є кути A і C та B і D , а прилеглими до сторони AB — кути DAB та CBA .

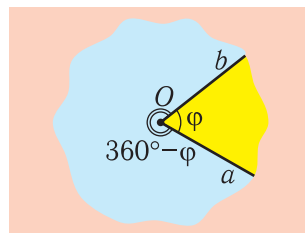


Рис. 1.10

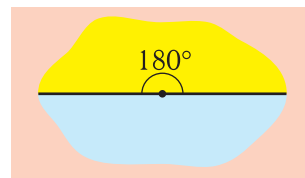


Рис. 1.11

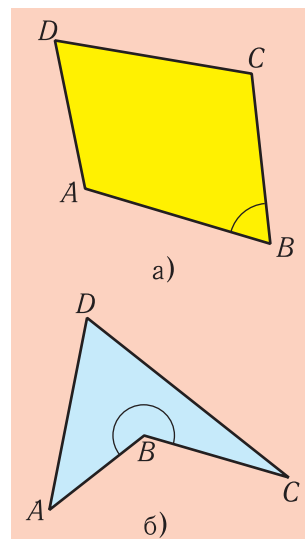


Рис. 1.12

Теорема*(про суму кутів чотирикутника).**Сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360° .*

Доведення. Нехай маємо довільний чотирикутник $ABCD$. Проведемо діагональ AC (рис. 1.13). Якщо вона належить чотирикутнику (рис. 1.13, а, б), то цей чотирикутник розіб'ється нею на два трикутники, сума кутів яких дорівнюватиме сумі кутів чотирикутника. А оскільки сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180° , то звідси випливає, що сума кутів такого чотирикутника дорівнює $2 \cdot 180^\circ$, тобто 360° .

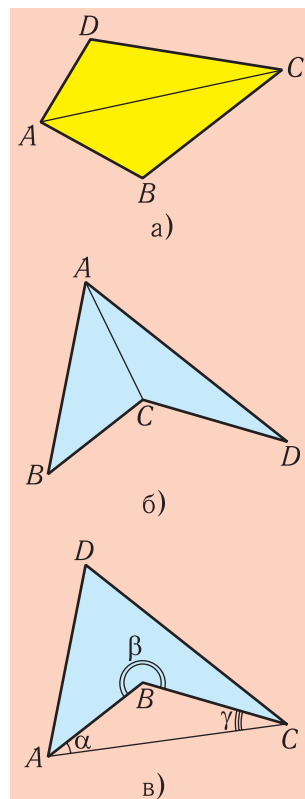
Якщо ж діагональ AC лежатиме ззовні чотирикутника $ABCD$ (рис. 1.13, в), то невідома сума x його кутів дорівнюватиме сумі кутів трикутника ADC (тобто 180°), до якої потрібно додати кут β чотирикутника при вершині B і відняти кути α і γ трикутника ABC : $x = 180^\circ + \beta - \alpha - \gamma$.

Але сума кутів трикутника ABC теж дорівнює 180° , тому $\alpha + \gamma = 180^\circ - \angle ABC$. Отже, $x = 180^\circ + \beta - (180^\circ - \angle ABC) = \beta + \angle ABC = 360^\circ$.

Як бачимо, і в цьому разі сума кутів чотирикутника дорівнює 360° . Теорему доведено.

Наслідок.*Чотирикутник може мати щонайбільше один неопуклий кут.*

Справді, величина неопуклого кута більша за 180° . Тому, якби таких кутів у чотирикутнику було хоча б два, то їхня сума перевищувала б 360° , що є неможливим.

**Рис. 1.13**

Означення.

Чотирикутник, у якого всі кути опуклі, називається опуклим. Чотирикутник, у якого один із кутів є неопуклим, називається неопуклим.

На рис. 1.13, а) зображено опуклий чотирикутник $ABCD$, а на рис. 1.13, б), в) — неопуклі чотирикутники $ABCD$.

Теорема

(про діагоналі чотирикутника).

Обидві діагоналі опуклого плоского чотирикутника належать чотирикутнику. Одна із діагоналей неопуклого плоского чотирикутника належить чотирикутнику, а інша — не належить йому.

Доведення. Розглянемо, наприклад, діагональ AC чотирикутника $ABCD$ з усіма опуклими плоскими кутами (рис. 1.14, а). Оскільки обидва протилежні кути ABC і ADC опуклі, то відрізок AC належить кожному з них, а тому належить і чотирикутнику. Аналогічні міркування застосовуємо й до іншої діагоналі BD .

Розглянемо тепер неопуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 1.14, б). Оскільки з усіх кутів такого чотирикутника тільки один є неопуклим (нехай це буде кут при вершині C), то із трьох решти його опуклих кутів два обов'язково є протилежними один до одного. Нехай — це кути B і D . Тоді діагональ AC , яка їм належить, належить і чотирикутнику. Навпаки, інша діагональ BD не належить одному із плоских кутів — при вершині C , а тому вона не належить і самому чотирикутнику. Теорему доведено.

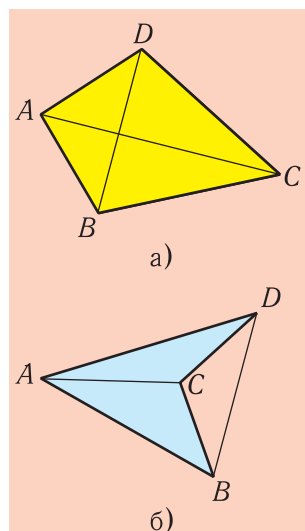


Рис. 1.14



Розв'язуємо разом

Задача 1.

Протилежні кути A і C чотирикутника $ABCD$ дорівнюють по 40° , а кут D утричі більший за кут B . Визначити, опуклий чи неопуклий цей чотирикутник. Використовуючи лінійку і транспортир, побудувати який-небудь чотирикутник з такими кутами.

Розв'язання. Оскільки сума усіх кутів чотирикутника дорівнює 360° , а на кути A і C припадає $2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$, то для суми кутів B і D маємо величину $360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$.

Нехай кут B дорівнює x градусів. Тоді кут D дорівнює $3x$ градусів. Маємо рівняння: $x + 3x = 280$. Звідси $x = 70^\circ$. Отже, $\angle B = 70^\circ$, а $\angle D = 3 \cdot 70^\circ = 210^\circ$.

Оскільки величина кута D більша за 180° , то цей кут, а отже, і чотирикутник, є неопуклим.

Відповідь. Чотирикутник є неопуклим.

Побудову чотирикутника $ABCD$ можна розпочати з побудови кута $\angle B = 70^\circ$. Потім на його сторонах відкладаємо які-небудь відрізки, які приймаємо за сторони BA і BC чотирикутника, наприклад, завдовжки 3 см і 5 см (рис. 1.15). Насамкінець, усередині кута ABC від променів AB і CB відкладаємо кути по 40° . Точка D перетину їхніх сторін буде шуканою четвертою вершиною чотирикутника $ABCD$.



Чотирикутники
в абстрактній композиції
Казимира Малевича
«Супрематизм – 6» (1915 р.)

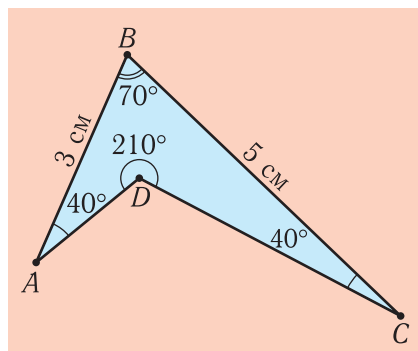


Рис. 1.15



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1.3. Замощення площини чотирикутниками

Той факт, що сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360° , знайшов несподіване застосування для розв'язання надзвичайно важливої практичної задачі про так звані замощення площини рівними фігурами. *Замостити площину рівними фігурами* означає розмістити яку завгодно кількість цих фігур на площині так, щоб вони прилягали одна до одної рівними сторонами, ніде не накладалися і не утворювали незаповнених проміжків. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360° , то чотири рівних чотирикутника $ABCD$ завжди можна прикласти один до одного рівними сторонами так, щоб кути A, B, C, D заповнили весь простір довкола однієї спільної точки (рис. 1.16). Зрозуміло, що таке саме замощення

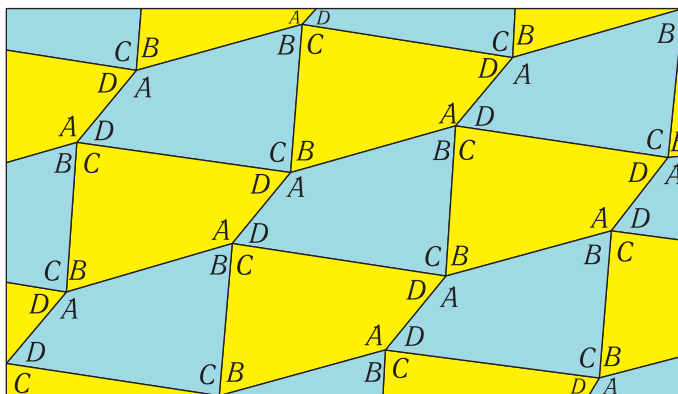


Рис. 1.16

можна здійснити довкола кожної з інших вершин і продовжити це викладання як завгодно далеко у будь-якому напрямку, тобто замостити будь-яку частину площини. Для посилення естетичного враження можна вдаватися до фарбування чотирикутників у різні кольори. На рис. 1.17 наведено декілька прикладів геометричних орнаментів, які можна одержати у такий спосіб. Спробуйте за цими взірцями створити свій власний неповторний орнамент!

Втім, чотирикутники — далеко не єдині фігури, якими можна замостити площину. Зокрема, це можна зробити й трикутниками (рис. 1.18). Однак фігурами з більшою кількістю кутів замощення можливе лише в окремих випадках.

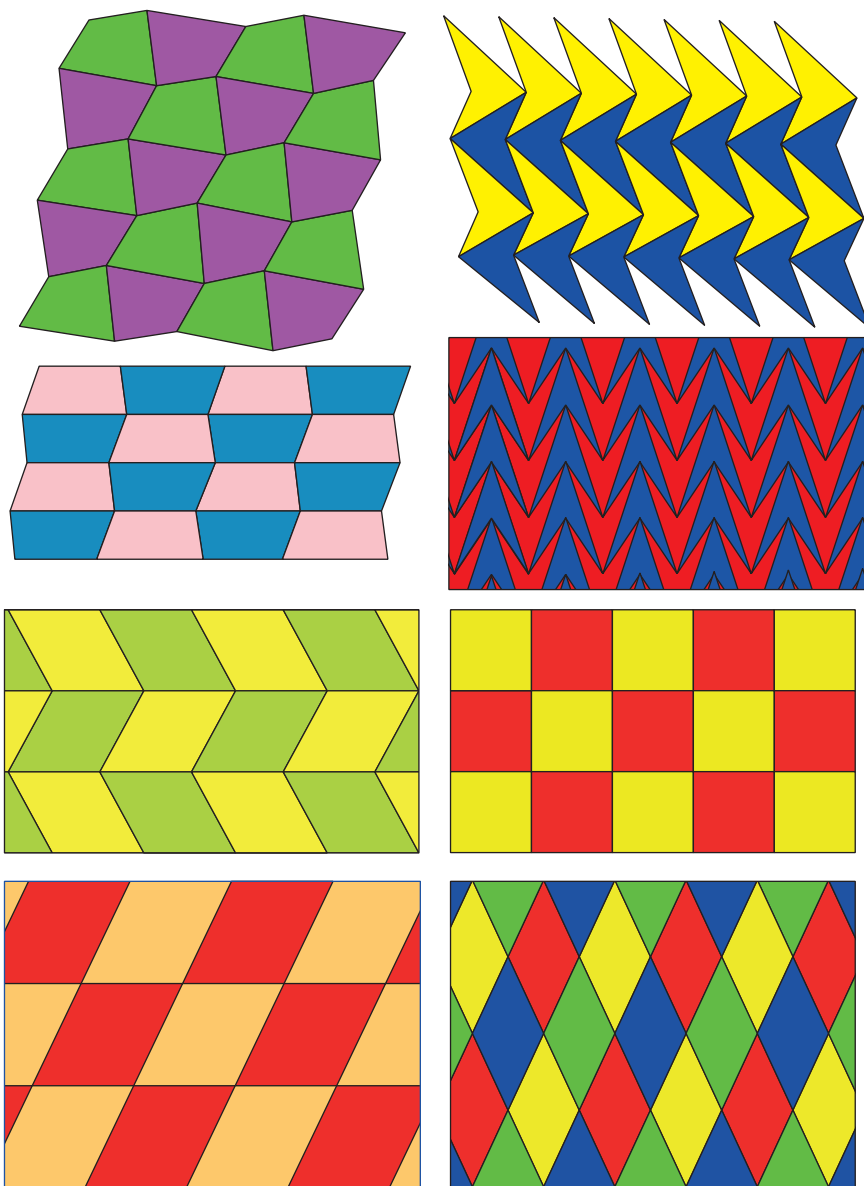


Рис. 1.17

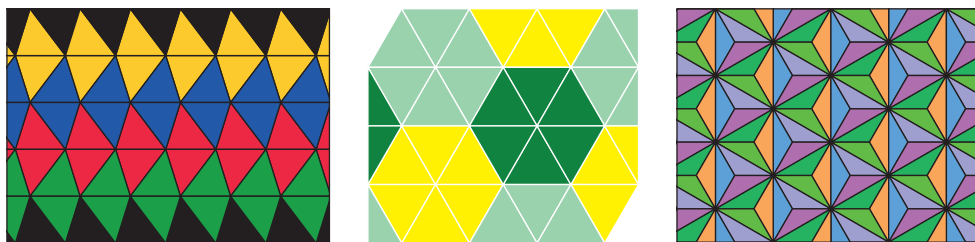


Рис. 1.18

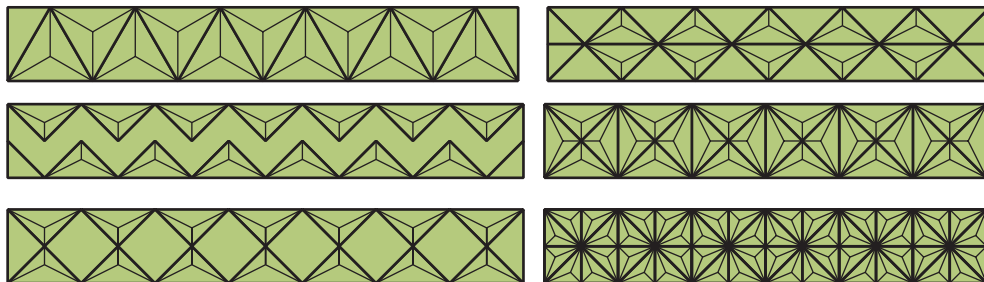


Рис. 1.19

На рис. 1.19 наведені приклади декоративних орнаментів, створених на основі заощення площини трикутниками і чотирикутниками.

1.4. «Нежорсткість» чотирикутника

Уявімо собі механічну модель чотирикутника $ABCD$ у вигляді чотирьох планок, скріплених за допомогою шарнірів так, що вони можуть повертатися одна відносно одної (рис. 1.20). Діагоналі AC у цій моделі немає, вона проведена на рисунку умовно.

Із нерівності трикутника випливає, що існує ціла множина значень для довжини відрізка AC із числового проміжку $(|a - b|; a + b)$, за яких при заданих довжинах сторін $AB = a$ та $BC = b$ існуватиме трикутник ABC .

Так само існує ціла множина значень з числового проміжку $(|c - d|; c + d)$ для довжини відрізка AC , за яких при заданих довжинах сторін $CD = c$ та $AD = d$ існуватиме трикутник ACD . Нехай m — більше зі значень $|a - b|$ та $|c - d|$, а n — менше зі значень $a + b$ і $c + d$. Тоді для будь-якого зі значень для довжини відрізка AC з проміжку $(m; n)$ одночасно існуватимуть обидва трикутники ABC і ACD . А це свідчить про те, що коли існує хоча б один із чотирикутників

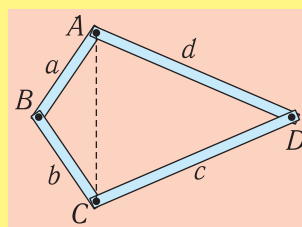


Рис. 1.20

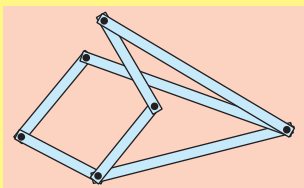


Рис. 1.21

$ABCD$ зі сторонами a, b, c, d , то їх існує нескінченно багато. З фізичної точки зору це означає *нежорсткість* шарнірного чотирикутника $ABCD$, тобто можливість різних його трансформацій без зміни довжин сторін (рис. 1.21).

Цей факт широко використовується у техніці для створення шарнірних механізмів. Далі у нашому підручнику буде розглянуто декілька прикладів таких механізмів (див. п. 2.5).

Нагадаємо, що, на відміну від чотирикутника, трикутник є *жорсткою* фігурою, оскільки він повністю визначається своїми сторонами: два трикутники з відповідно рівними сторонами обов'язково рівні між собою.



Перевірте себе

1. Яка фігура називається чотирикутником? Що таке каркасні і плоскі чотирикутники?
2. Що таке вершини і сторони чотирикутника? Які вершини (сторони) чотирикутника називаються сусідніми (суміжними), а які — протилежними? Що таке периметр чотирикутника? Що таке діагоналі чотирикутника?
3. Дайте означення плоского кута. Які плоскі кути називаються опуклими, а які — неопуклими? Як вимірюються плоскі кути?
4. Що таке кут чотирикутника? Які кути називаються сусідніми, а які — протилежними?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів чотирикутника. Скільки неопуклих кутів може мати чотирикутник?
6. Дайте означення опуклих та неопуклих чотирикутників?
7. Сформулюйте і доведіть теорему про діагоналі опуклих і неопуклих чотирикутників.



Вправи і задачі

- 1°. Які з фігур, зображених на рис. 1.22, є чотирикутниками? Котрі з них опуклі, а котрі — неопуклі?

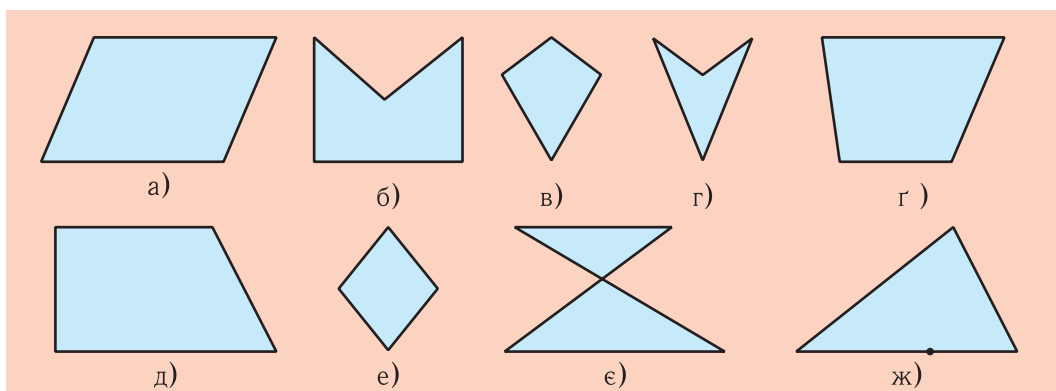


Рис. 1.22

2°. На рис. 1.23 зображено чотирикутник із вершинами A , B , C , D . Чи можна цей чотирикутник позначити так: а) $ABCD$; б) $BCDA$; в) $DCBA$; г) $ADBC$; ґ) $ACBD$? Назвіть вершини, сусідні з вершиною B . Назвіть сторони, суміжні зі стороною AD . Назвіть вершину, протилежну до вершини C , та сторону, протилежну до сторони AD . Назвіть кути, прилеглі до сторони CD , та кут, протилежний куту A .

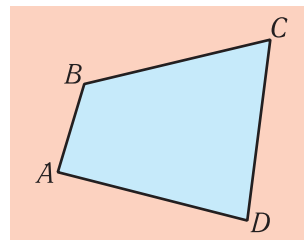


Рис. 1.23

- 3°. Накресліть два чотирикутники, один із яких опуклий, а інший — неопуклий. Визначте вимірюванням їхні сторони й кути. Чому дорівнюють периметри та суми кутів цих чотирикутників?
- 4°. Накресліть чотирикутник, у якому дві протилежні сторони паралельні і дорівнюють відповідно 3 см і 5 см. Чи можна виконати побудови так, щоб один із кутів одержаного чотирикутника дорівнював: а) 55° ; б) 130° ; в) 220° ?
- 5°. Два рівних рівнобедрених трикутники прикладають один до одного рівними сторонами. За яких умов утворена фігура буде чотирикутником? Коли цей чотирикутник буде опуклим, а коли — неопуклим? Як зміняться відповіді, якщо рівнобедрені трикутники будуть нерівними?
- 6°. Накресліть чотирикутник, в якого три кути: а) гострі; б) прямі; в) тупі. У якому випадку можна одержати як опуклий, так і неопуклий чотирикутники?
- 7°. Чи може існувати чотирикутник з усіма: а) гострими; б) прямими; в) тупими кутами? Відповідь обґрунтуйте.
- 8°. Накресліть чотирикутник із взаємно перпендикулярними діагоналями, які: а) перетинаються; б) перетинаються і одна з них точкою перетину ділиться навпіл; в) не перетинаються.
- 9°. Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати: а) 1 см, 2 см, 4 см, 8 см; б) 3 см, 5 см, 6 см, 14 см?

- 10°. Яку найбільшу кількість тупих кутів може мати чотирикутник? А — неопуклий?
- 11°. Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що прямим є й четвертий кут.
- 12°. Чи може неопуклий чотирикутник мати два прямих кути?
- 13°. Чи можуть тільки два протилежних кути чотирикутника бути прямими?
14. Чи можуть бути рівними периметри двох чотирикутників $ABCD$ та $ABCE$, якщо один із них опуклий, а інший — неопуклий. Відповідь обґрунтуйте і проілюструйте рисунками.
15. Визначте сторони чотирикутника, якщо:
- його периметр дорівнює 60 см, а одна зі сторін більша за кожну з решти трьох відповідно на 3 см, 4 см і 5 см;
 - його периметр дорівнює 35 дм, а одна зі сторін удвічі менша від кожної з трьох решти;
 - його периметр дорівнює 72 см, перша сторона більша за другу на 8 см, третя більша за першу теж на 8 см, а четверта — утричі більша за другу.
16. Визначте кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам:
- 1, 2, 3, 4;
 - 1, 3, 3, 11.
17. Усі сторони чотирикутника рівні. Доведіть, що його протилежні кути попарно рівні. Чи може такий чотирикутник бути неопуклим?
18. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.24) $AB = AD$, $BC = DC$. Доведіть, що кути D і B — рівні.
19. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.25) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $AB = AD$, $BC = DC$.
20. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.26) $AB = AD$, $BC = DC$. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника взаємно перпендикулярні.

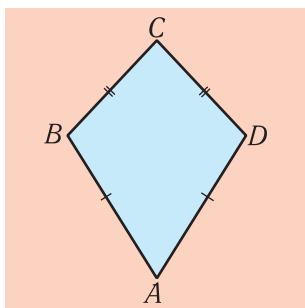


Рис. 1.24

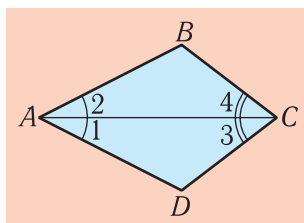


Рис. 1.25

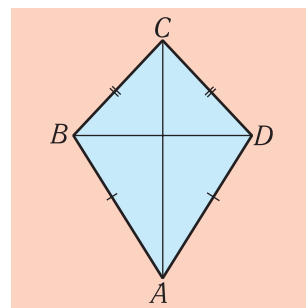
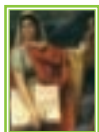


Рис. 1.26

21. Чи існує чотирикутник, у якого один із кутів дорівнює сумі трьох інших?
22. Визначте кути чотирикутника, в якого всі сторони і одна з діагоналей рівні між собою.
23. Чи можуть дві протилежні сторони чотирикутника бути взаємно перпендикулярними?

- 24.** Один із кутів опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших. Доведіть, що цей кут є тупим.
- 25.** Доведіть, що коли один із кутів опуклого чотирикутника гострий, то в цьому чотирикутнику є обов'язково тупий кут.
- 26*.** Чи можуть бісектриси двох суміжних кутів чотирикутника бути паралельними?
- 27*.** Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів чотирикутника паралельні або належать одній прямій, то два інших його кути рівні.
- 28*.** Доведіть, що: а) кожна діагональ чотирикутника менша за половину його периметра;
 б) довжина відрізка, який сполучає дві точки на протилежних сторонах опуклого чотирикутника, менша від половини його периметра;
 в) сума відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, менша від половини його периметра;
 г) сума діагоналей опуклого чотирикутника більша за суму будь-яких двох його протилежних сторін;
 ґ) сума діагоналей опуклого чотирикутника більша за його півпериметр і менша від периметра.
- 29*.** Два протилежних кути опуклого чотирикутника тупі. Доведіть, що діагональ, яка сполучає вершини цих кутів, менша від іншої діагоналі.
- 30*.** Як побудувати чотирикутник, коли задані його сторони й одна з діагоналей?
- 31*.** Як побудувати чотирикутник, коли задані його сторони й один із кутів?
- 32*.** Чи можна побудувати чотирикутник із трьома заданими сторонами й обома діагоналями?



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Кубізм і геометризація образотворчого мистецтва

На початку XX ст. у середовищі західноєвропейських художників-авангардистів виник новий напрям, який невдовзі дістав назву кубізму. Кубізм став відповіддю творчої спільноти на ті величезні трансформації, які відбулися в житті суспільства у зв'язку з розвитком машинної індустрії та засобів комунікації — «механічних сил цивілізації», як влучно висловився один із художників і теоретиків мистецтва тієї епохи Марсель Дюшан (1887–1968). «Який сенс у тому, щоб прагнути до натуралістичного зображення дійсності, коли вона така мінлива і, до того ж, для цього існує фотографія та кінематограф. Образотворче мистецтво повинне прагнути до того, щоб вловлювати й відображати сутнісні аспекти буття, які непідвладні часу і випадковим впливам», — такою в загальних рисах була закономірна логіка цього процесу. Дуже влучно про це висловився Пабло Пікассо (1881–1973),



Марсель Дюшан



Пабло Пікассо



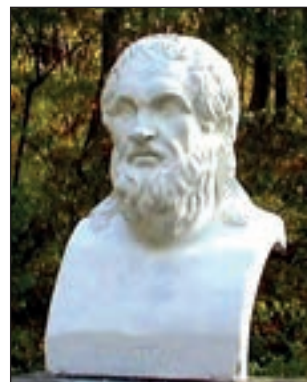
Анрі Матісс



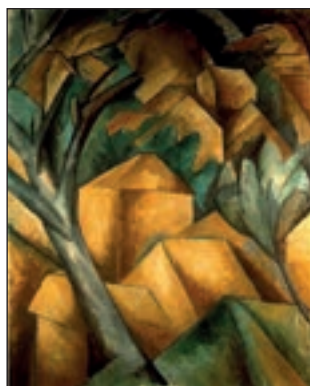
Жорж Брак

якого вважають «батьком» кубізму: «Коли ми виявили кубізм, то у нас не було мети винаходити кубізм. Ми лише хотіли висловити те, що в нас уже було».

Сам термін «кубізм» уперше був застосований Анрі Матіссом (1869–1954) у 1908 р. в його характеристиці картини Жоржа Брака (1882–1963) «Дім в Естаку», яка викликала в нього враження гри з дитячими кубиками (Естак (L'Estaque) — живописне рибальське селище поблизу Марселя, улюблене місце творчості багатьох художників). Порівняння виявилось надзвичайно продуктивним у тому сенсі, що безпосередньо пов'язувало живопис із геометрією. Це робило абсолютно природним подальше узагальнення: до арсеналу зображальних засобів залучалися не тільки кубічні, а й будь-які інші геометричні форми.



Погруддя Платона, знаменитого давньогрецького філософа IV ст. до н. е., у національному парку «Софіївка» в Умані

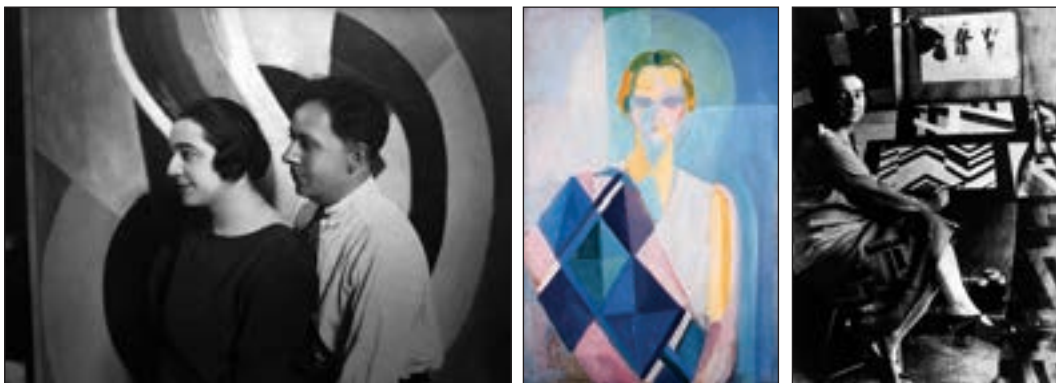


Зліва направо. 1) Пабло Пікассо. Фабрика в Хорта де Ебро (1909 р.);
2) Жорж Брак. Дім в Естаку (1908 р.); 3) Людмила Попова. Портрет філософа (1915 р.)

За великим рахунком, кубізм став перенесенням на мистецтво науково-філософських ідей Платона про незмінні сутності, які в античну епоху призвели до бурхливого розвитку геометрії. Такий самий бурхливий розвиток розпочався у мистецтві на початку ХХ ст.

Револьюційні ідеї перших кубістів привнесли в живопис такий заряд інтелектуальної і виражальної свободи, який довго не міг уміщатися в певних рамках. З'явилися численні відгалуження, в яких основні ідеї кубістів про геометризацию рисунка і композиції уточнювалися, доповнювалися або навіть звужувалися (мінімізувалися). Відрадно, що зачинателями двох із найбільш впливових таких напрямків були вихідці з України — Соня Делоне і Казимир Малевич.

Соня Делоне (Sonia Delaunay, справжнє ім'я — Сара Єлїївна Штерн) (1885–1979) народилася в Одесі у єврейській родині. Батьки померли дуже рано, і в п'ятирічному віці її взяв на виховання дядько по маминій лінії, відомий на той час і вельми успішний у Петербурзі адвокат Генріх Товієвич Терк. Відтоді вона носила прізвище Терк і навіть після одруження часто додавала його до прізвища свого чоловіка. Дядько дав дівчинці чудову освіту: вона не тільки закінчила престижну петербурзьку гімназію, а й щороку під час канікул виїжджала у європейські країни для ознайомлення з музеями і виставками. У 18-річному віці, за порадою свого шкільного вчителя малювання, Соня вступає в Художню академію у німецькому місті Карлсруе, однак через два роки переїздить до Парижа, визнаного мистецького центру Європи, і закінчує освіту в академії «Ла Палетт». У Парижі дівчина одразу поринає в культурне життя столиці, входить до різних авангардних мистецьких об'єднань. В одному з них вона познайомилася з талановитим художником-кубістом Робером Делоне (1885–1941), і в 1910 р. вони побралися. Це був щасливий і міцний творчий союз, який збагатив обох і дав



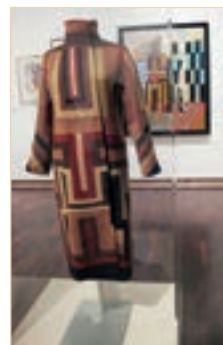
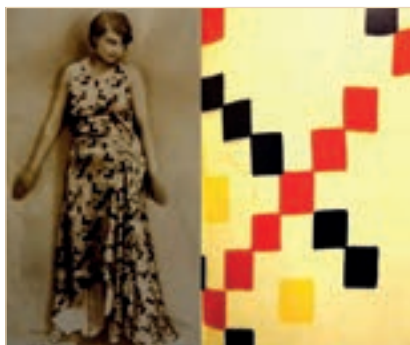
Зліва направо. 1) Соня і Робер Делоне (1920-і роки);
2) Робер Делоне. Портрет мадам Хейм (1927 р.); 3) Соня Делоне за роботою (1926 р.)

новий напрямок у мистецтві, названий *орфізмом*, а обірвався лише з передчасною смертю Робера. «Робер дав мені форму, а я йому — колір», — писала Соня Делоне у своїх спогадах.



На цих світлинах 1970-х років Соня Делоне зображена зі своїми найвідомішими картинами та графічними ескізами. Уся її творчість надихалася двома головними субстанціями — кольором і геометричними формами. Про свою любов до яскравих і барвистих кольорів вона писала: «Це фарби мого дитинства, фарби України, спогади про сільське весілля, з платтями у червоних і зелених тонах, з кольоровими стрічками». В Україні вона прожила лише перших років п'ять свого довгого життя. Однак саме вони, за її визнанням, наклали найбільший відбиток на всю її багатогранну творчість. А геометричні форми Соня Делоне вивчала уже в гімназії, коли ще мріяла про наукову кар'єру. І без цього етапу в її житті теж не було б великої художниці.

Особливістю орфізму стала підвищена увага до кольорів і їхнього поєднання, а особливістю вдачі Соні Делоне — те, що її творчий світ не обмежувався картинами, а поширювався на весь життєвий простір — одяг, інтер'єр, костюми, декорації і навіть автомобілі.



Моделі одягу від Соні Делоне (1920-і рр.)

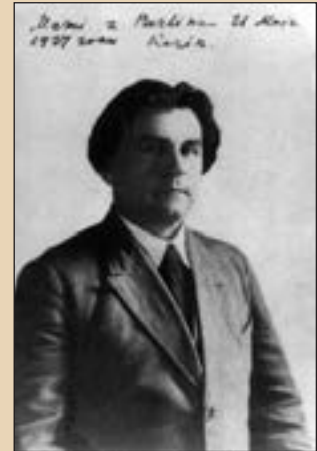
Про славу Соні Делоне свідчить те, що вона була нагороджена найвищою нагородою Франції — орденом Почесного легіону (1975 р.) і стала першою жінкою, чия персональна виставка відбулася у знаменитому Луврі (1964 р.).

Казимир Северинович Малевич (1879–1935) народився у Києві в сім'ї українських поляків. Його батько був інженером у корпорації цукрозаводчика М.І. Терещенка, тому сім'я час від часу переїжджала з одного невеличкого містечка, в якому була цукроварня, до іншого. Загалом до 17-річного віку Казимир устиг побувати на Поділлі (у Ямполі), на Харківщині (у Пархомівці та Білопільлі) та Чернігівщині (у Вовчку і Конотопі). Під час тривалого перебування у Пархомівці у 1890–1894 рр. він закінчив п'ятикласне агрономічне училище. Наприкінці навчання в училищі (у 15 років) вперше взяв до рук пензлі. А в 1895–96 рр., коли сім'я на якийсь час повернулася до Києва, відвідував Київську рисувальну школу відомого художника і педагога М.І. Мурашка. І це надовго була його єдина систематична художня освіта. Пізніше він двічі вступав до Московського художнього училища, однак двічі провалювався. Лише після відкриття приватного училища художника Ф.І. Рерберга, Малевич упродовж трьох років систематично відвідував у ньому заняття (з 1907 по 1910 рр.). Відтоді починається і його кар'єра художника, з усіма необхідними атрибутами цієї професії — виставками, обговореннями, диспутами.

Від самого початку Казимир Малевич у своїй творчості тяжів до радикального кубізму, котрий ще інакше називали кубофутуризмом. Однак згодом викристалізувалася і крайня форма цього напрямку, яку сам художник назвав супрематизмом (від латинського *supremus* — крайній, найвищий). Своєрідною точкою відліку нового стилю став показ у 1915 р. на виставці в Петрограді знаменитого «Чорного квадрата» Малевича.

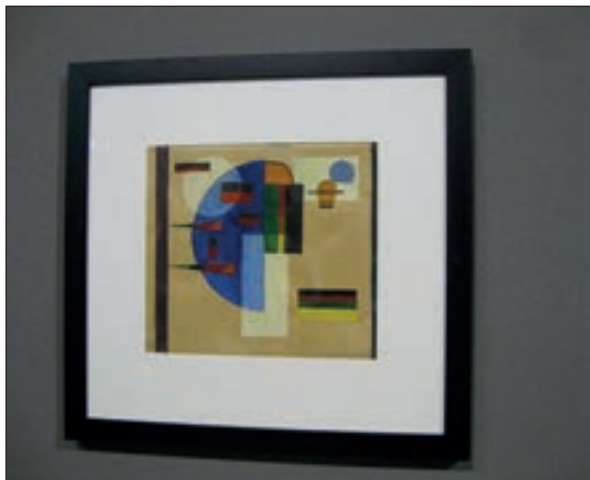
У своєму новому методі Малевич повністю пориває з предметною реальністю і значною мірою — з кольоровою, дивлячись на землю немовби ззовні, з космосу. Він сам конструює свою художню реальність, беручи за основу лише найпростіші і найпрозоріші геометричні елементи.

Супрематизм Малевича — це високоінтелектуальний живопис. Його сприйняття потребує теоретичної підготовки. Саме тому в 1922 р. Малевич написав спеціальну теоретичну працю: «Супрематизм. Світ як безпредметність». Після цього він істотно відійшов від принципів супрематизму і повернувся у бік класич-



Казимир Малевич (1927 р.)
Зверху латинськими літерами українською мовою написано: Мамі з Берліна. 21 мая, 1927 року. Казим.

ного кубізму. Саме у цей час з'явився його крилатий вислів: «Якщо ти прагнеш вивчати мистецтво, то вивчай кубізм».



Ліворуч. Перед «Чорним квадратом» Малевича у Третьяковській галереї в Москві.
Праворуч. Казимир Малевич. Супрематизм 65 (1915 р.). Із фондів Пархомівського історико-художнього музею. Виставка у Мистецькому арсеналі (Київ, 2013 р.)



Колаж із творів Казимира Малевича у стилі супрематизму



Твори Казимира Малевича у стилі класичного кубізму (зліва направо):

1) Жінка з відрами; 2) Лісоруб; 3) На сінокосі

Майже одразу після свого утвердження в живописі та дизайні, ідеї кубізму почали проникати в архітектуру. Особливо яскраво вони заявляли про себе тоді, коли нові технології та матеріали істотно розширювали технічні можливості будівництва. У поданій на наступній сторінці композиції зображена низка видатних сучасних архітектурних споруд і ансамблів з різних країн світу, від Канади до Японії, які можна пов'язати з кубізмом¹⁾. У центрі композиції — твір-жарт сучасного британського художника Філіпа Абсолона (нар. 1960 р.) «Кессі розмірковує над кубізмом» (Philip Absolon. «Cassie Thinking About Cubism»)²⁾.

Залишається зауважити, що, на відміну від живопису, де художник у питаннях геометричних форм може значною мірою покладатися на свою інтуїцію, архітектура потребує значно глибших теоретичних знань з геометрії.

Основні геометричні фігури для кубізму — багатокутники. Саме вони головним чином і вивчаються на уроках з геометрії у 8 класі.

¹⁾ Справа наліво і зверху вниз: Будинок музики у м. Порто (Португалія, 2005 р.); вулиця Будинків-кубів у Роттердамі (Нідерланди, 1984 р.); нове крило Королівського музею Онтаріо у Торонто (Канада, 2007 р.); вежа «Херст-Тауер» у Нью-Йорку (США, 2006 р.); Банк Китаю у Гонконзі (1990 р.); офісна споруда «Фает» у м. Утрехті (у висотній частині споруди — головний офіс фармацевтичної компанії MEDIQ) (Нідерланди, 2011 р.); музей сучасної архітектури і дизайну у м. Імабарі (префектура Ехіме, Японія, 2011 р.); Центральна міська бібліотека у м. Сіетлі (США, 2004 р.).

²⁾ Ім'я кішки Кессі — англійська зменшувальна форма жіночого грецького імені Кассандра (у Британії — Кетрін). Це може мати символічний зміст. За античною легендою, провісниця Кассандра закликала троянців не приймати від ахейців їхнього подарунка («троянського коня»), однак ті не послушали її і жорстоко поплалися за це.



Кубізм в архітектурі

§2. Паралелограм

Уроки
4–8

2.1. Означення і властивості паралелограма

Візьмемо лінійку і, використовуючи обидва її краї, проведемо дві паралельні прямі (рис. 1.27). Потім повернемо трохи лінійку і в такий самий спосіб проведемо дві інші паралельні прямі. Унаслідок взаємного перетину чотирьох побудованих прямих визначиться чотирикутник $ABCD$ із попарно паралельними протилежними сторонами (рис. 1.28). Чотирикутники з такою властивістю називаються *паралелограмами*.

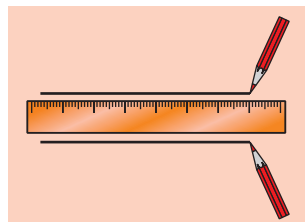


Рис. 1.27

Означення.

Паралелограмом називається чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно паралельні.

Неважко обґрунтувати, що у паралелограмі $ABCD$, одержаному в результаті побудов, зображених на рис. 1.27 і 1.28, усі сторони будуть рівними між собою (див. розв'язання задачі 2 у кінці цього пункту).

Накреслити паралелограм із потрібним кутом і сторонами можна так. Накреслимо кут A заданої величини і відкладемо на його сторонах сторони AB та AD потрібної довжини (рис. 1.29, а). Потім через точку B проведемо пряму BC , паралельну прямій AD , а через точку D — пряму DC , паралельну прямій AB . Оскільки прямі AB та AD перетинаються, то перетинаються і паралельні їм прямі DC і BC . Нехай C — точка їхнього перетину. Тоді, відповідно до означення, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (рис. 1.29, б).

Інший спосіб. Побудуємо два рівних трикутники ABD та $CB'D'$ із заданими кутом A і сторонами AB та AD так, щоб вершини B і D першого сумістилися відповідно з вершинами D' , B' другого і при цьому вершини A і C розмістилися по різні боки від прямої BD (рис. 1.30, а). Утворений при цьому чотирикутник $ABCD$

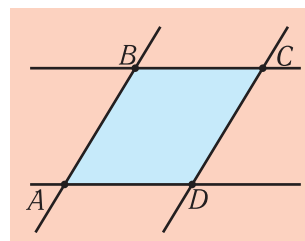


Рис. 1.28

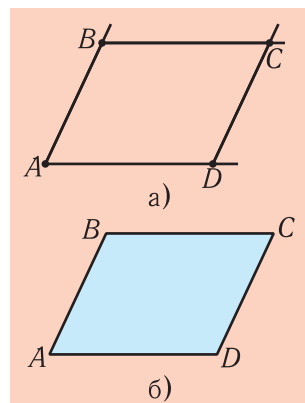


Рис. 1.29

(рис. 1.30, б) буде паралелограмом. Справді, оскільки $\angle ABD = \angle CB'D' = \angle CDB$, то, за ознакою паралельності прямих, $AB \parallel CD$, а оскільки $\angle ADB = \angle CD'B' = \angle CBD$, то з аналогічних причин, $AD \parallel CB$. Отже, за означенням, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Модифікацією цього способу є зручний спосіб побудови паралелограма на папері «у клітину», що відображений на рис. 1.30, в). Цим способом зручно користуватися при побудові паралелограмів у зошиті.

Паралелограми можуть мати найрізноманітніші форми (рис. 1.31). Попри це вони мають і чимало спільних властивостей.

Теорема

(властивості сторін і кутів паралелограма).

У будь-якому паралелограмі кожні дві протилежні сторони і кожних два протилежних кути рівні між собою

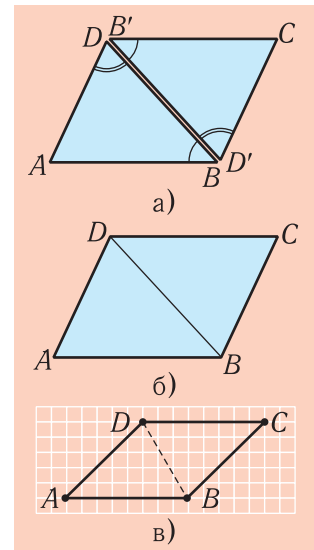


Рис. 1.30

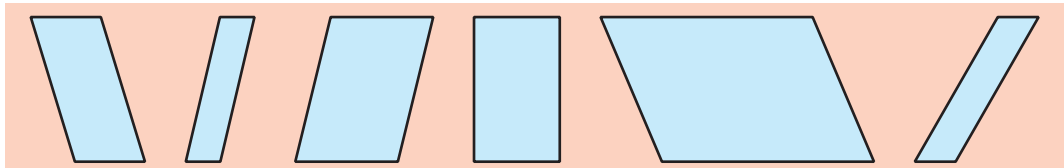


Рис. 1.31



Приклади грандіозних архітектурних проектів у формі паралелограмів.

Ліворуч. Офісна споруда Гамбурзького морського порту (Німеччина, 2006 р.).

Довжина основи цього паралелограма 40 м, висота — 25 м.

Праворуч. Новий корпус Королівської бібліотеки у Копенгагені (Данія, 1999 р.). За свою строгую геометричну форму і облицювання чорним гранітом будівля має неофіційну назву «Чорний діамант»

Доведення. Нехай маємо довільний паралелограм $ABCD$ (рис. 1.32). Проведемо у ньому одну з діагоналей, наприклад, BD . Дістанемо два рівних трикутники ABD і CDB . У них спільна сторона BD і рівні прилеглі до неї кути. А саме: $\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і DC та січній DB), а $\angle ADB = \angle CBD$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній DB). Отже, ці трикутники рівні. З рівності трикутників випливає рівність їхніх сторін, що лежать проти рівних кутів: $AD = CB$, $AB = CD$, а також рівність кутів A і C паралелограма. Оскільки інші протилежні кути ABC і ADC паралелограма складаються із відповідно рівних кутів трикутників ABD і CDB , то вони теж рівні між собою. Теорему доведено.

Наслідок.

Діагональ розбиває паралелограм на два рівних трикутники.

Теорема

(властивість діагоналей паралелограма).

Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай $ABCD$ — який завгодно паралелограм, O — точка перетину його діагоналей AC і BD (рис. 1.33). Розглянемо трикутники OAB і OCD . У них: сторони AB і CD рівні — як протилежні сторони паралелограма; $\angle OAB = \angle OCD$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних AB і CD та січній AC ; $\angle OBA = \angle ODC$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних AD і BC та січній BD . За другою ознакою, трикутники OAB і OCD рівні. З рівності цих трикутників випливає рівність їхніх сторін, які лежать проти рівних кутів. Отже, $OB = OD$, $OA = OC$, що й треба було довести.

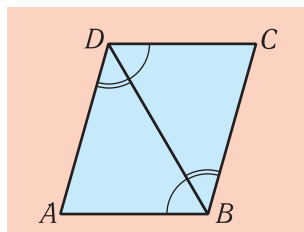


Рис. 1.32



Фігура паралелограма варта того, щоб над нею замислитися

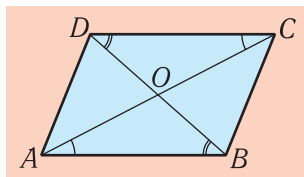


Рис. 1.33



Розв'язуємо разом

Задача 1.

Довести, що у будь-якому паралелограмі сума кутів, які прилягають до кожної зі сторін, дорівнює 180° .

Розв'язання. Нехай маємо який завгодно паралелограм $ABCD$ (рис. 1.34). Розглянемо, для прикладу, кути A і B , які прилягають до сторони AB . Оскільки сторона DC паралельна стороні AB , то відрізок DC не перетинає прямої AB . Отже, точки D і C лежать з одного боку від цієї прямої. Тому кути DAB і CBA є внутрішніми односторонніми для паралельних AD і BC та січної AB . Сума ж таких кутів, як відомо, дорівнює 180° .

Так само доведемо, що й суми кутів паралелограма $ABCD$, які прилягають до інших його сторін, теж дорівнюють по 180° . Твердження задачі доведено.

З а у в а ж е н н я. Важливим наслідком із розв'язаної задачі є те, що *будь-який паралелограм є опуклим чотирикутником*.

Справді, оскільки сума будь-яких двох кутів паралелограма, які прилягають до його сторін, дорівнює 180° , то кожен із них менший від 180° , тобто є опуклим. А це й означає, що цей чотирикутник є опуклим.

Задача 2.

Довести, що у паралелограмі $ABCD$, одержаному внаслідок побудов, зображених на рис. 1.27 та 1.28, усі сторони будуть рівними між собою.

Розв'язання. Справді, якщо який-небудь із кутів чотирикутника $ABCD$, наприклад, кут A , виявиться прямим, то, внаслідок властивостей паралельних прямих, прямими будуть і всі решта його кутів (рис. 1.35). Тоді сторони цього чотирикутника

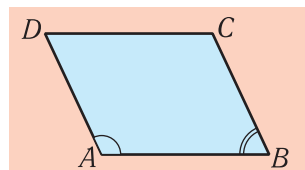
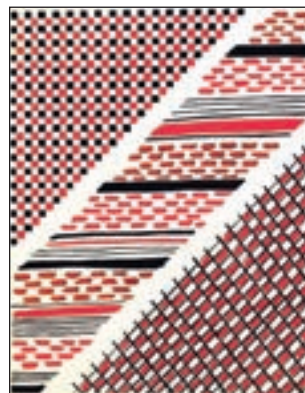


Рис. 1.34



Паралелограми у текстильній «Композиції № 13» Соні Делоне.
Інша назва композиції — «Доріжка»

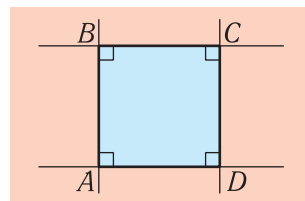


Рис. 1.35

дорівнюватимуть відстаням між паралельними краями лінійки, отже, будуть рівними між собою. Чотирикутник $ABCD$ із такими властивостями називається *квадратом*. Детальніше про квадрати йтиметься у §5.

Якщо ж кут A не буде прямим (рис. 1.36), то проведемо з вершини A перпендикуляри AM та AN на прямі BC і CD . Ці перпендикуляри дорівнюватимуть відстаням між паралельними краями лінійки, а тому будуть рівними між собою. Рівними також будуть і кути ABM та ADN , оскільки, за властивостями паралельних прямих, вони дорівнюватимуть або куту BAD (рис. 1.36, а), або куту, суміжному з кутом BAD (рис. 1.36, б). За ознакою рівності прямокутних трикутників, $\triangle AMB = \triangle AND$, а звідси випливає рівність сторін AB та AD . За властивістю паралелограма, рівні і протилежні їм сторони CD і BC . Отже, всі сторони паралелограма $ABCD$ рівні між собою, що й треба було довести.

Зауваження. Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається *ромбом*. Детальніше про ромби йтиметься у §4.

Задача 3.

Довести, що бісектриси двох кутів паралелограма, які прилягають до однієї з його сторін, взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Нехай маємо який завгодно паралелограм $ABCD$, і в ньому проведено бісектриси AL та DM кутів, які прилягають до сторони AD (рис. 1.37). Потрібно довести, що $AL \perp DM$.

Позначимо точку перетину бісектрис AL та DM через F . За означенням бісектриси,

$$\angle DAF = \frac{1}{2} \angle DAB, \angle ADF = \frac{1}{2} \angle ADC. \text{ Тоді}$$

$$\angle DAF + \angle ADF = \frac{1}{2} (\angle DAB + \angle ADC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

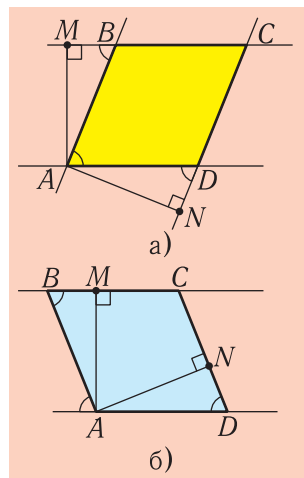


Рис. 1.36

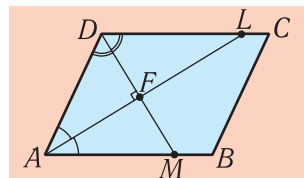
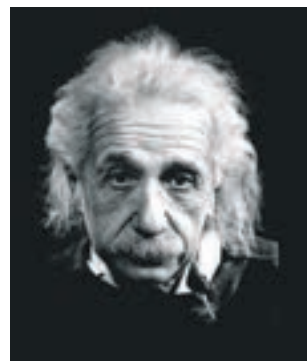


Рис. 1.37

Отже, у трикутнику AFD сума двох кутів A і D дорівнює 90° . Тому третій кут F — прямий. А це й означає, що $AL \perp DM$. Твердження задачі доведено.

2.2. Застосування для трикутника: теорема про висоти трикутника

Зовсім неочікуваним наслідком з властивостей сторін паралелограма є теорема про перетин висот трикутника. Геніальний фізик XX ст. Альберт Айнштайн, згадуючи свої шкільні роки, зауважував, що збагнув велич геометрії лише після того, як побачив, з якою незаперечністю доводиться цей абсолютно неочевидний факт.



Альберт Айнштайн

Теорема

(про висоти трикутника).

Для будь-якого трикутника три прямі, що містять його висоти, перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 1.38). Доведемо, що прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 , які містять його висоти, перетинаються в одній точці.

Проведемо через кожну вершину трикутника ABC пряму, паралельну протилежній стороні. Ці три прямі визначають трикутник $A_0B_0C_0$, для якого точки A , B , C будуть серединами сторін.

Справді, оскільки, наприклад, $C_0A \parallel BC$, а $C_0B \parallel AC$, то $ACBC_0$ — паралелограм. Тому $C_0A = BC$. Розглядаючи аналогічно паралельні прямі AB_0 і BC та AB і B_0C , дійдемо висновку, що $AB_0 = BC$. Тому $C_0A = AB_0$.

Розглянемо тепер пряму AA_1 . Оскільки вона перпендикулярна до прямої BC , то перпендикулярна і до паралельної їй прямої C_0B_0 . Виходить, що пряма AA_1 є серединним перпендикуляром до сторони C_0B_0 трикутника $A_0B_0C_0$.

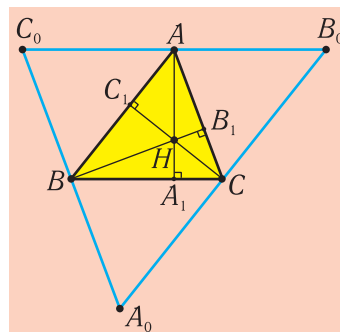


Рис. 1.38

З аналогічних міркувань прямі BB_1 і CC_1 теж є серединними перпендикулярами до сторін трикутника $A_0B_0C_0$. Як відомо, серединні перпендикуляри до усіх трьох сторін трикутника перетинаються в одній точці (центрі описаного кола). Теорему доведено.

Точка перетину прямих, які містять висоти трикутника, називається *ортоцентром* трикутника. Перший корінь «орто» у цьому слові — той самий, що й у слові «ортогональний», яке є грецьким відповідником для латинського слова «перпендикулярний».

2.3. Ознаки паралелограма

Як виявляється, зазначені в п. 2.1 властивості сторін і діагоналей паралелограма виконуються лише для цього виду чотирикутників, тобто є їхніми *ознаками*. Крім цього, часто застосовується ознака паралелограма за рівністю і паралельністю однієї пари протилежних сторін.

Перейдемо до точних формулювань і доведення цих ознак.

Теорема

(ознака паралелограма за попарною рівністю протилежних сторін).

Якщо у чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник є паралелограмом.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні: $AB = DC$, $AD = BC$ (рис. 1.39). Проведемо одну з діагоналей, наприклад, AC , і розглянемо трикутники ABC та CDA . Вони рівні за трьома сторонами (сторона AC у них спільна, а інші відповідно рівні за умовою). Отже, рівними є кути CAB та ACD цих трикутників. А вони є внутрішніми різносторонніми для прямих AB і DC та січної AC . Тому прямі AB і DC паралельні. Аналогічно



Будівля компанії зі збереження даних Мікросор у Люблянці (Словенія) (2008 р.). Гігантська сітка з паралелограмів на східному і південному фасадах захищає інтер'єр від пекучого і яскравого сонця

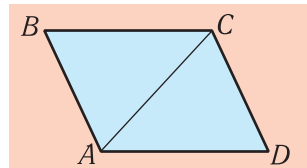


Рис. 1.39

доводимо паралельність прямих AD і BC . Отже, за означенням, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Теорему доведено.

Теорема

(ознака паралелограма за рівністю і паралельністю однієї пари протилежних сторін).

Якщо у чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони AD і BC рівні і паралельні (рис. 1.40). Проведемо яку-небудь з діагоналей цього чотирикутника, наприклад, AC і розглянемо трикутники ADC і CBA . Вони рівні за двома сторонами і кутом між ними (сторона AC у них спільна, $AD = CB$ за умовою, $\angle DAC = \angle BCA$ — як внутрішні різносторонні при паралельних AD і BC та січній AC). З рівності цих трикутників випливає рівність їхніх відповідних кутів ACD та CAB . А оскільки ці кути є внутрішніми різносторонніми для прямих DC і AB та січної AC , то $DC \parallel AB$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ обидві пари протилежних сторін паралельні. Тому, за означенням, це — паралелограм. Теорему доведено.

Теорема

(ознака паралелограма за властивістю діагоналей).

Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і кожна з них точкою перетину ділиться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограмом.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і кожна з них цією точкою ділиться навпіл (рис. 1.41). Розглянемо трикутники OAB і OCD . У них $\angle AOB = \angle COD$ — як вертикальні кути, а сторони $OA = OC$,

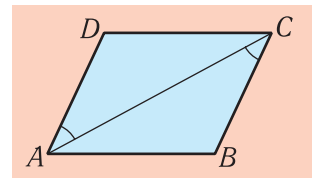


Рис. 1.40

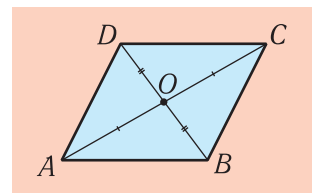


Рис. 1.41

$OB = OD$ — за умовою. За першою ознакою, ці трикутники рівні. Тому рівними є й кути OAB та ODC , які лежать проти рівних сторін OB та OD . Ці кути є внутрішніми різносторонніми для прямих AB і CD та січної DB . Отже, прямі AB і CD — паралельні.

Розглядаючи аналогічно трикутники OAD та OCB , дійдемо висновку, що рівними є кути OAD та OCB , а звідси впливатиме паралельність прямих AD і BC . Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому цей чотирикутник є паралелограмом. Теорему доведено.

Третя ознака паралелограма вказує на ще один простий спосіб побудови цієї фігури. А саме: побудувавши які-небудь два відрізки AC і BD , які перетинаються і точкою перетину O діляться навпіл (див. рис. 1.41), та сполучивши послідовно їхні кінці, дістанемо паралелограм $ABCD$.

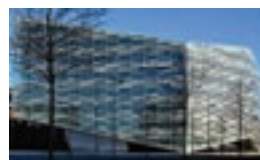


Розв'язуємо разом

Задача 1.

Чотирикутники $ABCD$ та $ABEF$ — паралелограми, причому їхні сторони CD і EF не лежать на одній прямій (рис. 1.42). Довести, що чотирикутник $DCEF$ теж є паралелограмом.

Розв'язання. Із того, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, випливає, що його протилежні сторони AB і DC рівні і паралельні. Так само, рівними і паралельними є сторони AB та FE . Оскільки, таким чином, відрізки DC і FE рівні і паралельні одному й тому самому відрізку AB і, за умовою, не лежать на одній прямій, то вони рівні і паралельні між собою. Звідси, на основі відповідної ознаки,



Тут зображено декілька видів, а також план на рівні першого поверху будівлі штаб-квартири данської інвестиційної компанії

Nykredit, зведеної у Копенгагені в 2010 р. Будівля має видовжену форму і шість бічних граней-паралелограмів. Це дало змогу ефективно вирішити проблему природного освітлення всередині споруди

чотирикутник $DCEF$ є паралелограмом. Твердження задачі доведено.

Задача 2.

Довести, що будь-який відрізок з кінцями на протилежних сторонах паралелограма, що проходить через точку перетину його діагоналей, ділиться цією точкою навпіл.

Розв'язання. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, MN — який-небудь відрізок з кінцями на протилежних сторонах AB і CD , що проходить через точку O (рис. 1.43). Потрібно довести, що $OM = ON$.

Розглянемо трикутники OAM і OCN . У них сторони OA і OC рівні, оскільки діагональ AC ділиться точкою O навпіл, $\angle AOM = \angle CON$ — як вертикальні кути, а $\angle OAM = \angle OCN$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC . Тому, за другою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси випливає рівність сторін OM та ON . Твердження задачі доведено.

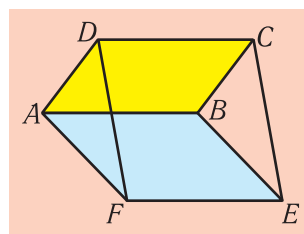


Рис. 1.42

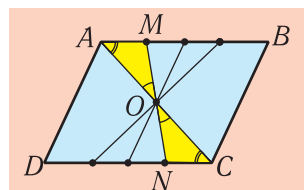


Рис. 1.43

2.4. Висоти паралелограма

Будь-яку зі сторін паралелограма умовно можна вважати *основою* цієї фігури. Тоді протилежна їй сторона називатиметься *протилежною основою*, а дві інші сторони — *бічними* сторонами.

Якщо, наприклад, у паралелограмі $ABCD$ (рис. 1.44) за основу взяти сторону AB , то протилежною основою буде сторона DC , а бічними сторонами — сторони AD і BC .

Означення.

Висотою паралелограма відносно основи називається будь-який із перпендикулярів, опущених із точки протилежної сторони на пряму, що містить основу.

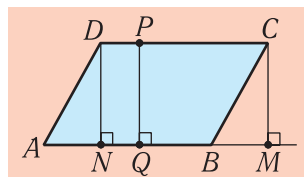


Рис. 1.44

На рис. 1.44 зображено три висоти DN , PQ і CM паралелограма $ABCD$ відносно основи AB , а на рис. 1.45 — дві висоти AK і DL відносно основи BC .

Усі висоти паралелограма, проведені до однієї основи, рівні між собою — як перпендикуляри між паралельними прямими, що містять основу паралелограма і протилежну їй сторону. Зокрема, на рис. 1.44 із цих причин $DN = PQ = CM$.

Якщо у паралелограмі $ABCD$ провести висоти з кінців однієї сторони, наприклад, DC (див. рис. 1.44), то основи цих висот розмістяться так, що $AN = BM$, а $NM = AB$. Перша рівність випливає з рівності прямокутних трикутників DNA та CMB (за катетом і гіпотенузою), а друга — з того, що чотирикутник $DCMN$ — теж паралелограм, у якому NM і DC — протилежні сторони, і тому $AB = DC$, а $DC = NM$.

Рівність $NM = AB$, зокрема, означає, що відрізок AB не може лежати всередині відрізка MN , а відрізок MN не може лежати всередині відрізка AB . Тому відрізки AB і MN або частково перекриваються (див. рис. 1.44), або один із них лежить ззовні іншого (рис. 1.46). В окремому випадку — коли кути A і B будуть прямими — відрізки AB і MN збігатимуться (рис. 1.47). У цьому разі кути C і D теж будуть прямими, а паралелограм $ABCD$, отже, — *прямокутником*. Детальніше про прямокутники йтиметься у наступному параграфі.

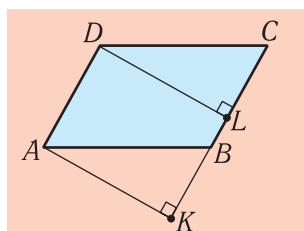


Рис. 1.45

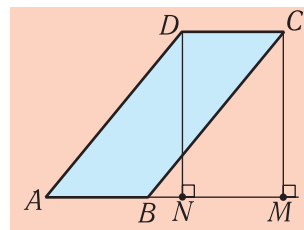


Рис. 1.46

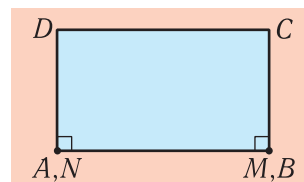


Рис. 1.47



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що кут між висотами паралелограма, проведеними із вершин його тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.

Розв'язання. Нехай у паралелограмі $ABCD$ з вершини його тупого кута D проведені висоти DE і DF (рис. 1.48). Градусну міру гострих кутів A і C позначимо через α . Тоді у прямокутних трикутниках DEA і DFC кути ADE і CDF дорівнюватимуть по $90^\circ - \alpha$. З іншого боку, оскільки сума кутів паралелограма, що прилягають до однієї сторони, дорівнює 180° , то $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$. Отже, $\angle EDF = \angle ADC - \angle ADE - \angle CDF = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Твердження задачі доведено.

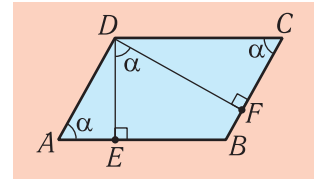


Рис. 1.48



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

2.5. Найпростіші механізми, в основі яких — паралелограм

На рис. 1.49 зображений так званий шарнірний паралелограм. Це — сукупність чотирьох попарно рівних прямолінійних деталей, розміщених в одній площині і скріплених у формі паралелограма так, що відносно точок кріплення вони можуть повертатися. Шарнірні паралелограми використовуються як самостійно, так і як елементи складніших механізмів.

Шарнірним паралелограмом, зокрема, є так звані «паралельні лінійки» — креслярський прилад для проведення паралельних прямих (рис. 1.50, а). Він складається із двох звичайних однакових лінійок AB і DC , з'єднаних за допомогою шарнірів A, B, C, D з двома планками AD і BC однакової довжини. Оскільки, за відповідною ознакою паралелограма, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то у будь-якому положенні механізму лінійки AD і BC будуть паралельними між собою. Це дає змогу легко виконувати побудову паралельних прямих.

Аналогічна ідея, однак уже з кількома шарнірними паралелограмами, втілюється у конструкції відкидних драбин, які застосовуються, наприклад, у пасажирських залізничних вагонах (рис. 1.50, б).

Істотним удосконаленням паралельних лінійок є *пантограф*, що застосовується при виконанні точних креслень, зокрема — для проведення паралельних ліній. Пантограф складається із двох шарнірних паралелограмів (рис. 1.51). Як би не рухати цей механізм у площині креслярської дошки при закріпленому гвинті A , його ланки MN і BC залишатимуться паралельними закріпленому положенню планки AD . Тому креслярська лінійка, закріплена гвинтом у точці C в потрібному напрямі, теж залишатиметься паралельною цьому напрямі.



Рис. 1.49

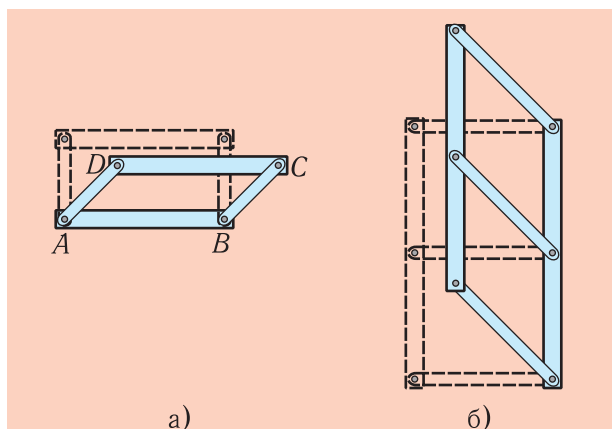


Рис. 1.50

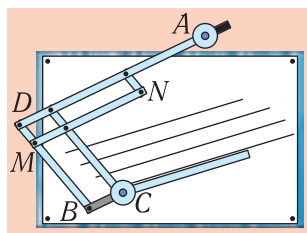


Рис. 1.51

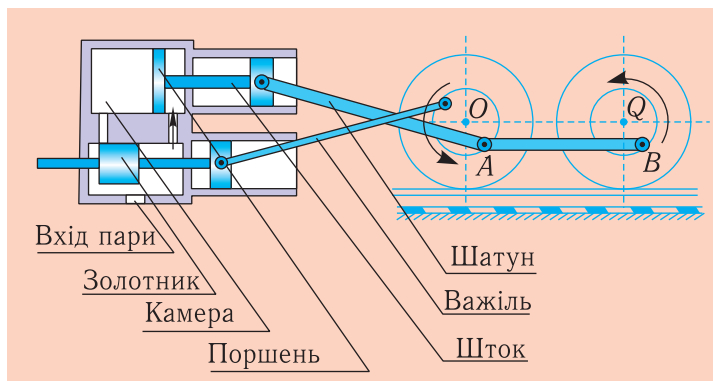


Рис. 1.52

Ще одним механізмом, побудованим на ідеї паралелограма, є жорстка зв'язка двох однакових залізничних коліс за допомогою штанги AB , паралельної лінії центрів коліс OQ (рис. 1.52). За допомогою цього пристрою зусилля від двигуна передається не на одне, а на два ведучих колеса. А саме: поступальний рух поршня за допомогою шатуна перетворюється на обертальний рух першого ведучого колеса, а від нього за допомогою штанги передається й на друге колесо. При цьому протилежні сторони умовного рухомого чотирикутника $OABQ$ залишаються рівними, а, отже, й паралельними. Тому штанга AB весь час зберігає горизонтальне положення.



Перевірте себе

1. Сформулюйте означення паралелограма.
2. Як можна побудувати паралелограм?
3. Які властивості мають кути паралелограма? Доведіть їх. Чи існують інші чотирикутники з такими самими властивостями кутів?
4. Як обґрунтувати, що паралелограм є опуклим чотирикутником?
5. Сформулюйте і доведіть властивості та ознаки паралелограма, пов'язані зі сторонами.
6. Сформулюйте і доведіть властивості та ознаки паралелограма, пов'язані з діагоналями.
7. Як використовуються властивості паралелограма для доведення теореми про висоти трикутника?
8. Наведіть приклади практичного застосування властивостей паралелограма.
9. Що таке висота паралелограма? Як можуть розміщуватися висоти паралелограма, проведені з його вершин?



Вправи і задачі

До пп. 2.1

- 33°.** На рис. 1.53 зображено паралелограм $ABCD$. Назвіть у ньому: а) вершини, протилежну і сусідні для вершини B ; б) сторони, протилежну і сусідні для сторони DC ; в) сторону, паралельну стороні BC ; г) сторону, рівну стороні AD ; ґ) кут, рівний куту C .
- 34°.** На рис. 1.54 зображено декілька паралелограмів, в яких проведені деякі відрізки. Однаковою кількістю рисок або дужок відзначені рівні відрізки

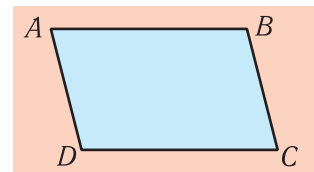


Рис. 1.53

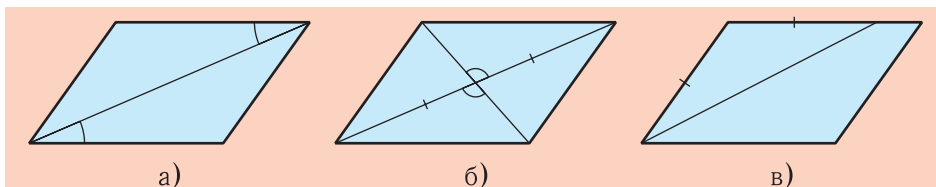


Рис. 1.54

і кути, утворені із цих відрізків. Накресліть ці рисунки в зошиті та відзначте в аналогічний спосіб інші рівні елементи.

- 35°.** Накреслено паралелограм $ABCD$ з гострим кутом A , а потім проведено бісектрису кута A . У яких випадках ця бісектриса перетне сторону BC , а в яких — сторону CD ? Чи може вона пройти через вершину C ? Виконайте відповідні ілюстрації.
- 36°.** Накресліть який-небудь кут, а потім за допомогою двосторонньої лінійки — паралелограм, для якого цей кут був би одним із внутрішніх кутів.
- 37°.** За допомогою двосторонньої лінійки проведіть три паралельні прямі, а потім — ще дві паралельні прямі, які перетинають перші. Скільки при цьому утвориться паралелограмів? Чи будуть серед них такі, які мають нерівні сторони? Якщо будуть, то яке співвідношення між довжинами цих сторін? Яким узагалі може бути співвідношення між довжинами нерівних сторін паралелограма, який в аналогічний спосіб можна побудувати за допомогою двосторонньої лінійки?
- 38°.** Як за допомогою двосторонньої лінійки покрити площину рівними паралелограмами? Якими можуть бути сторони цих паралелограмів? Спробуйте на цій основі створити геометричний орнамент.
- 39°.** Накресліть який-небудь кут A , а потім за допомогою транспортира — паралелограм, для якого цей кут буде одним із внутрішніх кутів. Якими будуть інші кути паралелограма, якщо кут A дорівнюватиме 70° ? Яким може бути співвідношення між сторонами побудованого паралелограма?
- 40°.** Накресліть у зошиті який-небудь трикутник і через кожну його вершину проведіть пряму, паралельну протилежній стороні. Утвориться декілька паралелограмів. Скільки їх буде? Поставте, де потрібно, літери і назвіть ці паралелограми.
- 41°.** У чотирикутнику $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle ABD = \angle BDC$. Доведіть, на підставі означення, що $ABCD$ — паралелограм.
- 42°.** У чотирикутнику $PQRS$ $PQ \parallel SR$, $\angle S + \angle R = 180^\circ$. Доведіть, на підставі означення, що $PQRS$ — паралелограм.
- 43°.** Чи може лише один із кутів паралелограма бути прямим?
- 44°.** Чи може один із кутів паралелограма дорівнювати 30° , а інший — 60° ?
- 45°.** Один із кутів паралелограма дорівнює 56° . Чи можна за цими даними знайти інші його кути?
- 46°.** Чи можуть усі кути паралелограма бути гострими? А — прямими? А — тупими?
- 47°.** Дано трикутник. Чи можуть його кути дорівнювати трьом кутам деякого паралелограма?
- 48°.** Дві сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 7 см. Визначте його периметр.

- 49°. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 110° . Чи можна визначити усі кути цього паралелограма?
- 50°. Чи може різниця двох кутів паралелограма дорівнювати 50° ? А — 90° ? А — 0° ?
- 51°. Точка перетину діагоналей паралелограма віддалена від двох його вершин на відстані 3 см і 5 см. Визначте довжини діагоналей паралелограма.
52. Рівнобедрений трикутник розрізали по висоті, проведеній до основи. Скільки чотирикутників можна скласти з утворених частин? Чи будуть серед них паралелограми?
53. Дано два рівних трикутники з усіма різними сторонами. Скільки різних паралелограмів можна утворити, прикладаючи ці трикутники один до одного рівними сторонами?
54. Паралелограм розрізали вздовж однієї з діагоналей. Скільки нових чотирикутників можна скласти з утворених частин? Чи будуть серед них паралелограми?
55. Дано відрізок. За допомогою двосторонньої лінійки накресліть паралелограм, для якого цей відрізок був би однією з діагоналей. Подумайте, як ці побудови можна використати для поділу заданого відрізка навпіл.
56. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки існує паралелограмів, для яких ці точки є вершинами?
57. Периметр паралелограма дорівнює 60 см. Визначте сторони паралелограма, якщо: а) одна з них дорівнює 12 см; б) одна зі сторін на 4 см більша за іншу; в) одна зі сторін утричі менша від іншої; г) різниця двох сторін дорівнює 8 см; г) сторони відносяться, як 2 : 3.
58. Відношення кутів A і B паралелограма $ABCD$ дорівнює 2 : 3. Визначте ці кути.
59. Бісектриса AM кута A паралелограма $ABCD$ відтинає від паралелограма трикутник з кутом BAM , що дорівнює 27° . Визначте кути паралелограма.
60. Доведіть, що коли в чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$, то $ABCD$ — паралелограм.
61. Доведіть, що коли в чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C$ і $AB \parallel CD$, то цей чотирикутник — паралелограм.
62. Визначте кути паралелограма, діагональ якого дорівнює одній зі сторін і перпендикулярна до неї.
63. Сума двох сторін паралелограма дорівнює 26 см, а його периметр — 60 см. Визначте сторони паралелограма.
64. Паралелограм однією зі своїх діагоналей ділиться на два трикутники, периметр кожного з яких дорівнює 6 см. Визначте довжину цієї діагоналі, якщо периметр паралелограма дорівнює 7 см.

65. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці L . Визначте периметр цього паралелограма, якщо $BM = 5$ см, $MC = 3$ см.
66. Визначте периметр паралелограма, якщо бісектриса одного з його кутів ділить сторону паралелограма на відрізки завдовжки 5 см і 7 см.
67. Бісектриси кутів A і D паралелограма $ABCD$ перетинаються на стороні BC . Визначте сторони паралелограма $ABCD$, якщо його периметр дорівнює 36 см.
68. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 46 см, сторона $AB = 15$ см. Яку сторону паралелограма перетинає бісектриса кута A ?
69. На стороні CD паралелограма $ABCD$ взято таку точку K , що $DK = AD$. Доведіть, що AK — бісектриса кута A .
70. Доведіть, що бісектриси протилежних кутів паралелограма паралельні або належать одній прямій. У якому випадку вони належать одній прямій?
71. Через точку M на основі рівнобедреного трикутника проведені прямі, паралельні його бічним сторонам. Доведіть, що периметр відрізаного ними паралелограма не залежить від розміщення точки M .
72. Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M , а продовження сторони AB — у точці N . Доведіть, що трикутники ADN і MCD — рівнобедрені.
73. Чи може діагональ паралелограма ділити його кути навпіл? Якщо так, то за яких умов це можливо?
74. Доведіть, що протилежні вершини паралелограма містяться на однакових відстанях від прямої, яка проходить через дві інші протилежні вершини.
74. Як побудувати паралелограм за двома протилежними вершинами? Скільки розв'язків має ця задача?
76. Побудуйте паралелограм: а) за двома сторонами і діагоналлю; б) за стороною і двома діагоналями.
77. Відновіть паралелограм, якщо на рисунку збереглася лише одна з його сторін, а також точка перетину діагоналей.
- 78*. Відновіть паралелограм, якщо на рисунку збереглися лише середини двох його суміжних сторін і точка перетину діагоналей.
- 79*. Уявіть собі або виготовте з підручних матеріалів шарнірну модель паралелограма. Чи зможете ви лише за допомогою цієї моделі поділити навпіл відрізок, довільно накреслений на нерозграфленій класній дошці?
- 80*. Через точку B всередині кута A проведіть пряму, відрізок якої з кінцями на сторонах кута ділиться цією точкою навпіл.
- 81*. Доведіть, що чотирикутник є паралелограмом, якщо його протилежні кути попарно рівні.
- 82*. Чому дорівнює відношення сторін паралелограма, якщо бісектриси двох його кутів, що прилягають до однієї зі сторін, перетинаються на протилежній стороні?

- 83°.** Сторони паралелограма відносяться, як 1 : 2. Визначте кути паралелограма, якщо його діагональ ділить один із них у відношенні 1 : 3.
- 84°.** При якому співвідношенні між сторонами паралелограма бісектриси двох його кутів, що прилягають до однієї зі сторін, ділять протилежну сторону на три рівних частини?
- 85°.** $ABCD$ — паралелограм. Ззовні нього побудовані рівносторонні трикутники ABF і BCG . Доведіть, що трикутник DFG — рівносторонній.

До пп. 2.3 – 2.4

- 86.** $ABCD$ — паралелограм, $AE = CF$ (рис. 1.55). Доведіть, що $DEBF$ — теж паралелограм.
- 87.** $ABCD$ — паралелограм, $AM = CN$ (рис. 1.56). Доведіть, що $MBND$ — теж паралелограм.
- 88.** Дано: $ABCD$ — паралелограм, AC — його діагональ, $BM \perp AC$, $DN \perp AC$ (рис. рис. 1.57). Доведіть, що $BM = DN$.

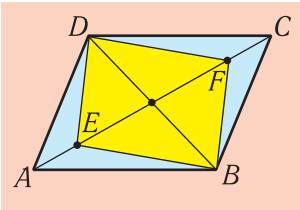


Рис. 1.55

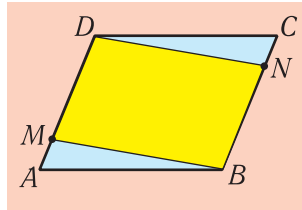


Рис. 1.56

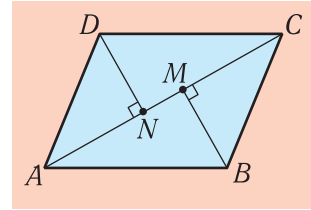


Рис. 1.57

- 89.** $ABCD$ — паралелограм, $AE = AE = CK = CN$ (рис. 1.58). Доведіть, що E, F, N, K — вершини паралелограма.
- 90.** На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено, як показано на рис. 1.59, а), б), рівні відрізки AM, BN, CP, DQ . Доведіть, що точки M, N, P і Q є вершинами паралелограмів.

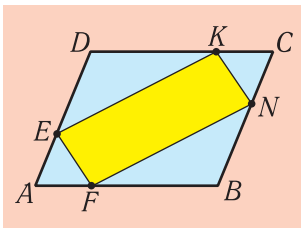


Рис. 1.58

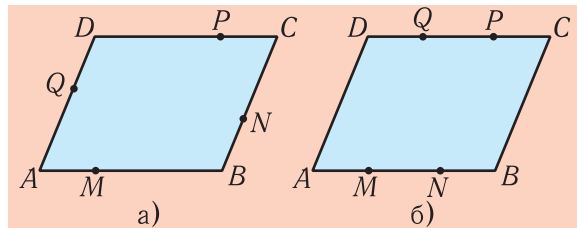


Рис. 1.59

91. На сторонах AB , BC , CD і AD паралелограма $ABCD$ взято точки P , Q , R і S так, що $AP = CR$, а $BQ = DS$ (рис. 1.60). Доведіть, що відрізки PR та QS перетинаються і кожен із них точкою перетину ділиться навпіл.

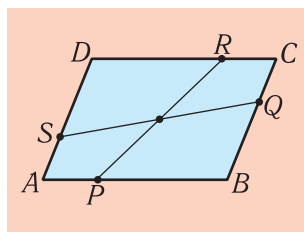


Рис. 1.60

92. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів B і D перетинають діагональ AC у точках P і Q . Доведіть, що точки B , P , D і Q є вершинами паралелограма.
93. Гострий кут паралелограма дорівнює 45° . Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону навпіл. Визначте кути, утворені діагоналлю паралелограма, проведеною з тієї самої вершини, зі сторонами паралелограма.
94. У паралелограмі $ABCD$ з вершини B тупого кута до сторони AD проведено висоту. Зі стороною AB вона утворює кут 42° . Визначте кути паралелограма.
95. З вершини одного з кутів паралелограма проведено бісектрису цього кута та висоту паралелограма. Кут між ними дорівнює 30° . Визначте кути паралелограма.
96. Визначте кути паралелограма, якщо кут між його висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює 30° .
97. Чи може діагональ паралелограма водночас бути і його висотою?
98. Висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 2 см і 3 см та утворюють кут 30° . Визначте сторони паралелограма.
99. Два кути паралелограма відносяться, як 1 : 5. Визначте кути між його висотами, проведеними з однієї вершини.
100. Кути паралелограма відносяться, як 1 : 5. Доведіть, що його висоти удвічі менші від сторін.
- 101*. Доведіть, що середини сторін паралелограма є вершинами іншого паралелограма.
- 102*. На протилежних сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ (рис. 1.61) відкладемо рівні відрізки AB_1 і CD_1 та проведемо прямі B_1C , B_1D , D_1B і D_1A . Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм.
- 103*. На діагоналях паралелограма $ABCD$ взято такі точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , що $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$ (рис. 1.62). Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — теж паралелограм.

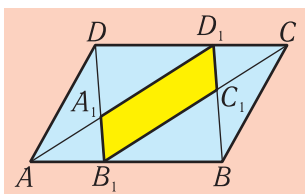


Рис. 1.61

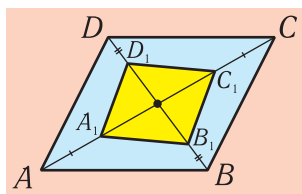


Рис. 1.62

- 104•.** Доведіть, що коли протилежні вершини чотирикутника рівновіддалені від прямих, які проходять через інші вершини, то цей чотирикутник є паралелограмом.
- 105•.** Ззовні паралелограма $ABCD$ з гострим кутом A побудовано рівносторонні трикутники ABM і DCN . Доведіть, що $AMCN$ — паралелограм.
- 106•.** Нехай L і M — середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$ (рис. 1.63). Доведіть, що відрізки AM та CL ділять діагональ BD на три рівні частини.
- 107•.** Точки A і C лежать усередині накресленого кута. Побудуйте паралелограм $ABCD$, вершини B і D якого містилися б на сторонах цього кута.

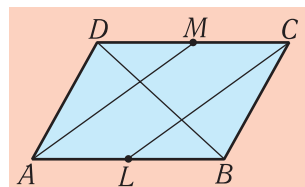


Рис. 1.63

§3. Прямокутник

З усіх форм, яких людина надавала своїм знаряддям, виробам і проектам, найуживанішими, безсумнівно, є прямокутні форми, точніше, *прямокутники*. Прямокутними переважно були у давнину земельні ділянки, вимірювання і відновлення яких, як стверджував «батько історії» Геродот, стало першоджерелом геометрії. Прямокутної форми надавали будівельному каменю, а потім — цеглі, з яких зводили прямокутні ж стіни і прямокутні будівлі. Прямокутними були книги і картини, пізніше світлини й екрани, а тепер — монітори та дисплеї. За зовнішньою простотою цих форм приховується величезний потенціал їхньої функціональності й естетичності.

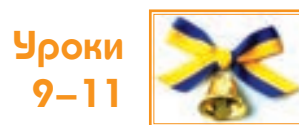
Прямокутники є окремим видом паралелограмів. Як указує сама назва, всі кути прямокутника — прямі.

Означення.

Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рис. 1.64 зображено прямокутник $ABCD$.

Накреслити прямокутник можна за допомогою косинця. Креслимо прямий кут A і на його сторонах



Уроки
9–11



Доменіко ді Мікеліно (?)
(1417–1491).
Алегорія архітектури

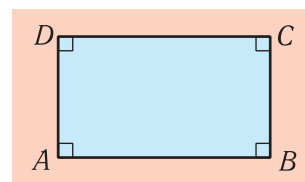


Рис. 1.64



Інститут звуку і зображення у м. Хільверсумі — центрі телеіндустрії Нідерландів (2006 р.). Одночасно офіс, музей та архів аудіо- та відеоматеріалів. Чотири прямокутних фасади цієї будівлі з розмірами $54 \text{ м} \times 26 \text{ м}$ символізують гігантські монітори, розвернуті на всі сторони світу. Кожний такий монітор містить кольорову мозаїку із понад 500 знаменитих кадрів з історії голландського телебачення. Кадри навмисно дещо розмиті, однак знавці легко можуть розпізнати кожен із них. Завдяки цій оригінальній ідеї та її майстерному втіленню звичайна прямокутна будівля стала однією з улюблених візиток країни для туристів з усього світу



Ліворуч. Вертикальний «прямокутник» Національної бібліотека України ім. Володимира Вернадського (1989 р.)
Праворуч. Горизонтальний «прямокутник» Національної бібліотеки Бразилії ім. Леонеля Дімура Брізола (2008 р.)

відкладаємо які-небудь відрізки AB та AD (рис. 1.65). Потім через точку B проводимо пряму b , перпендикулярну до AB , а через точку D — пряму d , перпендикулярну до AD . Нехай C — точка перетину прямих b і d . Тоді $ABCD$ — прямокутник.

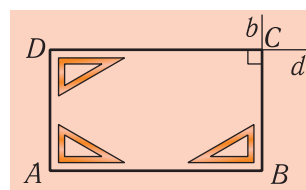


Рис. 1.65

Справді, прямі AB і d , оскільки вони перпендикулярні до однієї прямої AD , паралельні між собою. Одна з них, пряма AB , перетинає пряму b у точці B , тому перетинає пряму b й інша пряма d — нехай у точці C . У чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC — теж паралельні, оскільки вони перпендикулярні до прямої AB . Отже, це — паралелограм. Оскільки у ньому, за побудовою, три кути A , B і D є прямими, тобто дорівнюють по 90° , а сума усіх кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360° , то прямим є й четвертий кут C . Тому $ABCD$ — прямокутник.

Обґрунтовуючи ці побудови, ми фактично довели таку ознаку прямокутника.

Теорема

(ознака прямокутника за кутами).

Якщо у чотирикутнику є три прямі кути, то цей чотирикутник — прямокутник.

Оскільки, за означенням, будь-який прямокутник є паралелограмом, то прямокутники мають усі властивості паралелограмів. Зокрема, їхні протилежні сторони попарно рівні, а діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Водночас, прямокутники мають і свої особливі властивості, які вирізняють їх з-поміж інших паралелограмів. Найчастіше використовується така властивість.

Теорема

(властивість діагоналей прямокутника).

Діагоналі прямокутника рівні.

Доведення. Нехай маємо чотирикутник $ABCD$, у якому проведені діагоналі AC і BD (рис. 1.66).



Леонор Фіні (1907–1996).
Живопис і архітектура
(1938 р.)

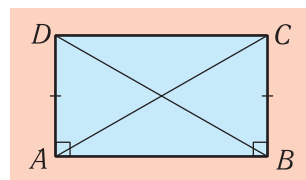


Рис. 1.66

У прямокутних трикутниках ABC і BAD катет AB — спільний, а катети BC і AD рівні — як протилежні сторони прямокутника. Тому ці трикутники рівні за двома катетами. Звідси $AC = BD$. Теорему доведено.

Властивість діагоналей прямокутника можна розглядати як необхідну умову того, що чотирикутник є прямокутником. Не випадково, однією із ключових характеристик прямокутного монітора є його розмір «по діагоналі» (рис. 1.67) (зазвичай вимірюється в дюймах: 1 дюйм = 2,54 см).



Рис. 1.67

Цю властивість часто використовують на практиці. Аби здійснити грубу перевірку чотирикутної форми на «прямокутність», вимірюють її діагоналі (рис. 1.68). Якщо діагоналі виходять не рівними, то це беззаперечно свідчить про те, що форма не є прямокутною.

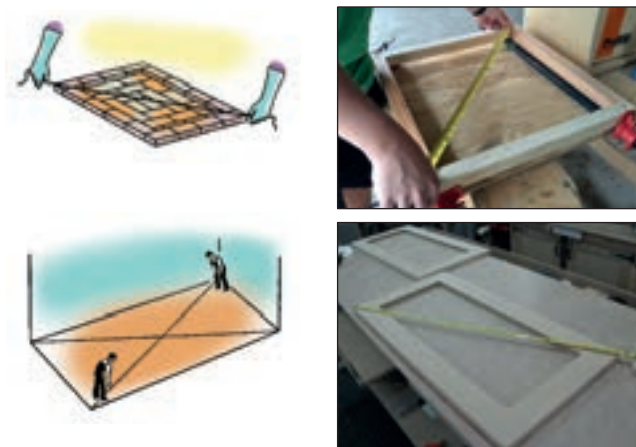


Рис. 1.68



Джіроламо да Сантакроче (?)
(1480–1556).
Алегорія геометрії



Якобо Робусті (Тінторетто)
(1518–1594).
Алегорія геометрії

Якщо ж діагоналі чотирикутника рівні, то це дає підстави сподіватися на те, що це — прямокутник. Однак повної упевненості немає, оскільки рівні діагоналі може мати й не прямокутник (рис. 1.69). Потрібно ще яким-небудь способом перевірити, що цей чотирикутник є паралелограмом.

Отже, *ознакою* прямокутника за участю діагоналей є така теорема.

Теорема

(ознака прямокутника за діагоналями).

Якщо чотирикутник є паралелограмом і його діагоналі рівні, то це — прямокутник.

Доведення. Нехай у паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні (рис. 1.70). Тоді трикутники ADC і BCD рівні за трьома сторонами (сторона DC у них спільна, сторони AC і BD рівні за умовою, а сторони AD і BC — як протилежні сторони паралелограма). Звідси $\angle ADC = \angle BCD$, а оскільки ці кути прилягають до однієї сторони паралелограма і тому в сумі дають 180° , то вони — прямі. Аналогічно доведемо, що прямими є й кути DAB і CBA . Теорему доведено.

Доведена ознака є підставою для такого практичного способу креслення прямокутника із заданими діагоналями і кутом між ними. Креслимо коло, діаметр якого дорівнює потрібній довжині діагоналі, а потім проводимо два діаметри AD і BC під заданим кутом один до одного (рис. 1.71). Сполучивши послідовно кінці цих діаметрів, дістанемо потрібний прямокутник $ABCD$.

Справді, оскільки діагоналі AD і BC побудованого чотирикутника, як діаметри кола, діляться центром кола навпіл, то це — паралелограм, а оскільки вони ще й рівні, то паралелограм є прямокутником.

Зауваження. Уявімо собі, що в описаних щойно побудовах прямокутника $ABCD$ (див. рис. 1.71) один із

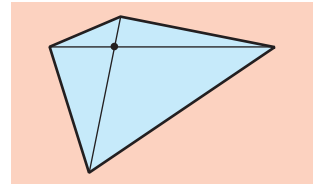


Рис. 1.69

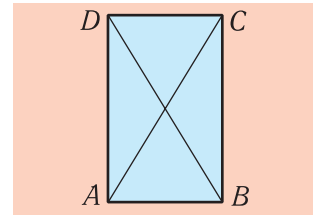


Рис. 1.70

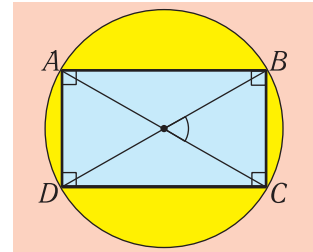


Рис. 1.71

діаметрів AC зафіксований, а інший BD — змінюється. Тоді змінюватимуться і прями кути ABC та ADC , однак їхні сторони весь час проходять через кінці діаметра AC (рис. 1.72).

Про кут з вершиною на колі, сторони якого проходять через кінці діаметра, кажуть, що він *вписаний* у коло і *спирається* на діаметр. Звідси маємо таку теорему.

Теорема

(про вписані кути, що спираються на діаметр).

Усі кути, які вписані у коло і спираються на діаметр, — прямі.

Доведення цієї теореми деякі античні історики приписують легендарному Фалесу. Вони стверджують, що Фалес, коли довів цю теорему, приніс у жертву бика.

На основі теореми про вписані кути, що спираються на діаметр, легко здійснити побудову прямого кута за допомогою циркуля і лінійки. Для цього будують коло і проводять який-небудь із його діаметрів. Тоді будь-який вписаний кут, що спирається на цей діаметр, — прямий. Пізніше (у §13) ми побачимо, як ці побудови можна використати для розв'язування однієї з найвідоміших геометричних задач давнини — про перетворення прямокутника на квадрат із такою самою площею.



Розв'язуємо разом

Задача 1.

Довести таку ознаку прямокутника (за двома протилежними сторонами): чотирикутник, у якого дві протилежні сторони рівні і перпендикулярні до однієї з двох інших сторін, є прямокутником.

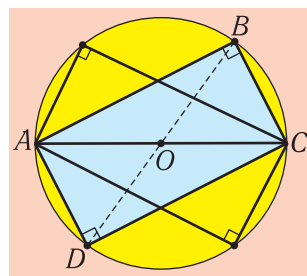


Рис. 1.72



Грецька поштова марка, присвячена Фалесу (1994 р.)



Фалес (праворуч)
і Піфагор (ліворуч).
Фрагмент фрески на фасаді
національного університету
в Афінах

Розв'язання. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони AD і BC рівні та перпендикулярні до сторони AB (рис. 1.73). Відомо, що два перпендикуляри до однієї прямої — паралельні. Тому $AD \parallel BC$. Виходить, що у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони AD і BC рівні і паралельні. Отже, це — паралелограм. У паралелограмі протилежні кути рівні, тому $\angle C = \angle A = 90^\circ$, $\angle D = \angle B = 90^\circ$. Отже, у паралелограмі $ABCD$ усі кути прямі. Тому це — прямокутник. Ознаку доведено.

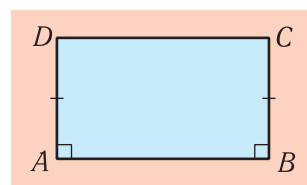


Рис. 1.73

Задача 2.

Через точку A кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AB і AC . Відстані від центра O кола до цих хорд дорівнюють відповідно m і n . Визначити довжини хорд.

Розв'язання. Проведемо $OM \perp AB$ та $ON \perp AC$ (рис. 1.74). Відповідно до умови задачі, $OM = m$, $ON = n$. У чотирикутнику $AMON$ маємо три прямі кути A , M і N . Тому це — прямокутник, а за властивістю протилежних сторін прямокутника, $AM = NO = n$, $AN = MO = m$.

Перпендикуляр, проведений з центра кола до хорди, ділить її навпіл. Тому $AB = 2AM = 2n$, $AC = 2AN = 2m$.

Відповідь. $2n$; $2m$.

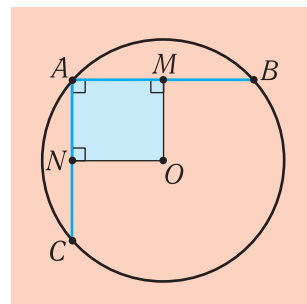


Рис. 1.74

Задача 3.

Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на діагональ, ділить її у відношенні $1 : 3$. Визначити довжину діагоналі, якщо точка її перетину з іншою діагоналлю віддалена від більшої сторони прямокутника на відстань 2 дм.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний прямокутник, у якому сторона AB більша за сторону AD , O — точка перетину його діагоналей (рис. 1.75).

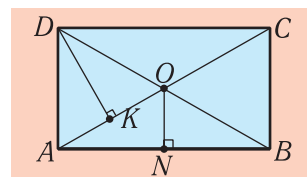


Рис. 1.75

Нехай $DK \perp AC$, а $ON \perp AB$. За умовою задачі $AK : KC = 1 : 3$, $ON = 2$ дм. Потрібно визначити AC .

Нехай $AK = x$. Тоді $KC = 3x$, а $AC = x + 3x = 4x$. Оскільки діагоналі прямокутника точкою перетину

діляться навпіл, то $AO = \frac{1}{2} AC = 2x$. Тому $KO =$

$= AO - AK = 2x - x = x$. Отже, точка K є серединою відрізка OA . Виходить, що висота DK трикутника DAO є його медіаною. Це означає, що цей трикутник рівнобедрений, тобто $DA = DO$. Оскільки, крім цього, $DO = AO$, то трикутник DAO — рівносторонній. Звідси, $\angle DAO = 60^\circ$, а $\angle OAN = 90^\circ - \angle DAO = 30^\circ$.

Відрізок AO є гіпотенузою прямокутного трикутника ANO з гострим кутом OAB , що дорівнює 30° . Тому $AO = 2ON = 2 \cdot 2 = 4$ дм. Отже, $AC = 2AO = 8$ дм.

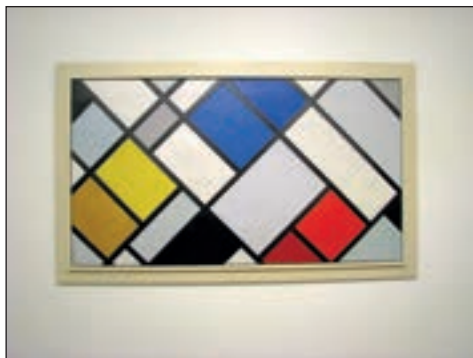
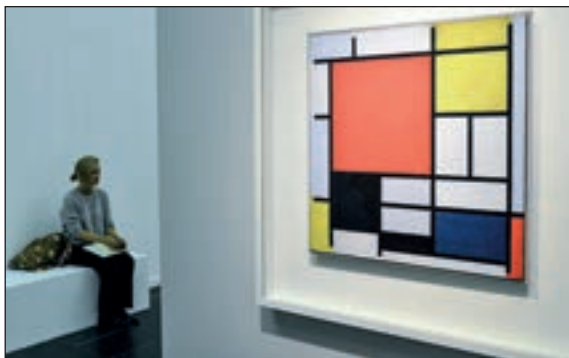
Відповідь. 8 дм.



Іван Марчук (нар. 1936 р.).

Плахта¹⁾ (1966 р.).

Мозаїчне панно на бічній стіні Інституту теоретичної фізики ім. академіка М.М. Боголюбова Національної академії наук України у Києві



Ліворуч. Піт Мондріан (1872–1944). «Композиція з великим червоним квадратом, жовтим, чорним, сірим і синім» (1921 р.).

Праворуч. Тео ван Дусбург (1883–1931). «Контркомпозиція с дисонансами, XVI» (1925 р.).

Обидва художники разом започаткували новий напрямок абстрактного живопису, який дістав назву *неопластицизм*. Вони вважали, що для передачі глибинної гармонії і рівноваги світобудови необхідно вдаватися лише до найпростіших прямокутних геометричних форм. За Мондріаном, лінії цих форм повинні бути лише горизонтальними і вертикальними, однак ван Дусбург допускав і похиле розміщення

¹⁾ Слово «плахта» тут має значення «килим з барвистим декоративним картатим візерунком».



Перевірте себе

1. Що таке прямокутник? Які властивості мають сторони і діагоналі прямокутника? Доведіть їх. Чи є ці властивості характерними лише для цих чотирикутників?
2. Які ознаки прямокутника ви можете сформулювати? Як їх довести?
3. Як можна накреслити прямокутник? Запропонуйте декілька способів.
4. За якими ознаками можна з'ясувати, що даний паралелограм є прямокутником?
5. Яку властивість мають вписані кути, що спираються на діаметр кола?



Вправи і задачі

- 108°.** Накресліть прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см та виміряйте його діагоналі. Чи рівні вони? Побудови виконайте двічі: один раз за допомогою лінійки і косинця, інший — за допомогою лінійки і транспортира. На яких ознаках прямокутника ґрунтуватимуться ваші побудови?
- 109°.** Накресліть прямокутник, діагоналі якого дорівнюють по 8 см, а кут між ними дорівнює 60° . Виміряйте меншу сторону цього прямокутника. Результат перевірте обчисленням.
- 110°.** Як за допомогою креслярських інструментів накреслити прямокутник:
- а) за двома суміжними сторонами;
 - б) за діагоналлю і кутом між діагоналлю та більшою стороною;
 - в) за стороною і діагоналлю;
 - г) за діагоналлю і гострим кутом, утвореним діагоналями?
- 111°.** На рис. 1.76 зображено декілька чотирикутників, один з яких є прямокутником, а інші — близькі до прямокутника. За допомогою вимірювань визначте прямокутник. Запропонуйте стратегію з найменшою кількістю вимірювань.

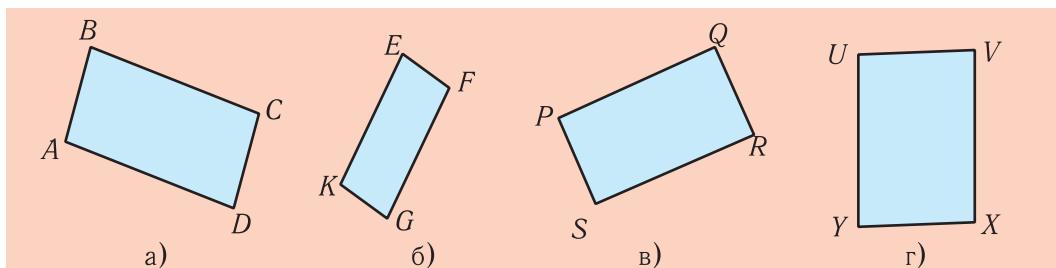


Рис. 1.76

- 112°.** Чи кожен чотирикутник, який має два прямих кути, що прилягають до однієї сторони, є прямокутником? Відповідь проілюструйте рисунком і міркуваннями.
- 113°.** Чи може чотирикутник мати два прямих протилежних кути і не бути прямокутником? Відповідь проілюструйте рисунком і міркуваннями.
- 114°.** Чи кожен чотирикутник, у якому дві протилежні сторони рівні, є прямокутником? Відповідь обґрунтуйте.
- 115°.** Чи кожен чотирикутник з рівними діагоналями є прямокутником? Відповідь обґрунтуйте.
- 116°.** Чотирикутник має прямий кут і дві його протилежні сторони рівні. Чи обов'язково це — прямокутник? Якщо ні, то яку ще умову потрібно додати, аби відповідь була ствердною?
- 117°.** Прямокутник розрізали вздовж діагоналі на два трикутники. Скільки різних інших фігур можна скласти із цих частин, прикладаючи їх одна до одної рівними сторонами? Які ці фігури?
- 118°.** Як розміщуються висоти трикутника, проведені з його вершин?
- 119°.** Для визначення довжини озера у напрямку AB на місцевості за допомогою віх розбили прямокутник $MNPQ$ (рис. 1.77). Якою може бути стратегія цих вимірювань і побудов?
- 120°.** Доведіть таку ознаку прямокутника: якщо у чотирикутнику всі кути рівні, то це — прямокутник.
- 121°.** Доведіть, що у прямокутнику, в якому діагоналі перетинаються під прямим кутом, усі сторони рівні.
- 122.** Доведіть, що обидва чотирикутники, зображені на рис. 1.78, є прямокутниками.
- 123.** У прямокутнику $ABCD$ (рис. 1.79) $\angle 1 = 72^\circ$. Визначте $\angle 2$.
- 124.** У прямокутнику $ABCD$ (рис. 1.79) $\angle 2 = 130^\circ$. Визначте $\angle 1$.

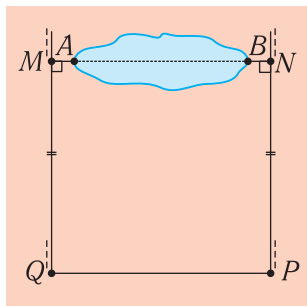


Рис. 1.77

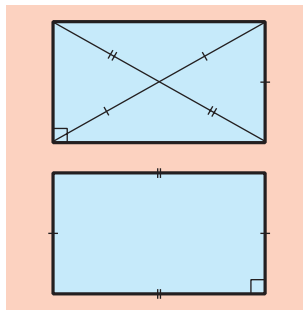


Рис. 1.78

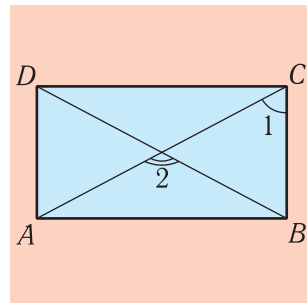


Рис. 1.79

- 125.** У прямокутнику один із кутів, утворених діагоналями, дорівнює 38° . Визначте кути, які утворюють діагоналі зі сторонами прямокутника.

- 126.** Відрізок PQ проходить через точку перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ (рис. 1.80). Доведіть, що $PB = QD$.
- 127.** $ABCD$ — прямокутник, AK і BL — бісектриси відповідно кутів A і B (рис. 1.81). Доведіть, що $AK = BL$.
- 128.** $ABCD$ — прямокутник (рис. 1.82). Доведіть, що $\angle MLB = \angle MNC$.

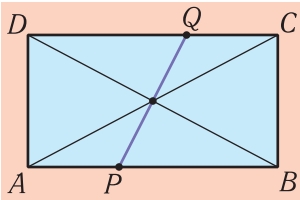


Рис. 1.80

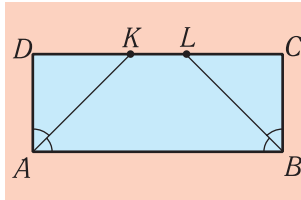


Рис. 1.81

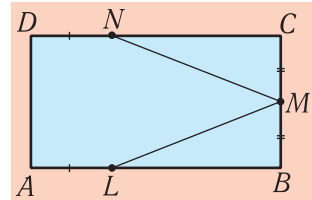
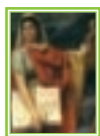


Рис. 1.82

- 129.** Чи є істинними твердження: «Якщо у чотирикутнику є прямий кут, а діагоналі рівні, то це — прямокутник»?
- 130.** Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його суміжних сторін, дорівнюють 4 см і 7 см. Визначте периметр прямокутника.
- 131.** Периметр прямокутника дорівнює 40 см. Визначте сторони прямокутника, якщо одна з них на 8 см більша за іншу.
- 132.** Периметр прямокутника дорівнює 64 см, а його сторони відносяться, як 3 : 5. Визначте ці сторони.
- 133.** У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD посередині у точці M . Доведіть, що BM — бісектриса кута B .
- 134.** У колі проведено два взаємно перпендикулярних діаметри. З деякої точки M кола на ці діаметри опущено перпендикуляри ME та MF . Відомо, що $EF = 7$ см. Визначте діаметр кола.
- 135.** У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , $AC = 12$ см, $\angle CAD = 30^\circ$. Визначте периметр трикутника AOB .
- 136.** Із середини гіпотенузи прямокутного трикутника опущено перпендикуляри на його сторони. Визначте вид чотирикутника, обмеженого цими перпендикулярами і катетами трикутника, а також його діагональ, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 12 см.
- 137.** Діагональ прямокутника дорівнює 12 см і ділить його кут у відношенні 1 : 5. Визначте відстань від вершини прямокутника до діагоналі, яка не проходить через цю вершину.
- 138.** Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, ділить прямий кут у відношенні 3 : 1. Визначте кут між цим перпендикуляром та іншою діагоналлю.

- 139•** Доведіть, що пряма, яка сполучає середини протилежних сторін прямокутника, паралельна іншим його сторонам.
- 140•** Доведіть, що серединний перпендикуляр до сторони прямокутника є водночас серединним перпендикуляром і до протилежної сторони.
- 141•** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника перетинає його сторону під кутом, рівним куту між діагоналями. Визначте цей кут.
- 142•** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону у відношенні 1 : 2. Визначте кути, які діагоналі прямокутника утворюють з його сторонами.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

**Математик Клод Клеро і маркіза дю-Шатле:
історія про перший підручник з геометрії для дітей**

Засновники династії єгипетських царів Птолемеїв — Птолемей I Сотер (правив з 323 по 282 рр. до н. е.) і Птолемей II Філадельф (правив з 281 по 245 рр. до н. е.) — увійшли в історію як царі-просвітителі. Птолемей I заснував в Александрії Мусейон (пристановище муз), до якого скликав учених і митців з усього світу і призначив їм повне утримання за рахунок державної казни, а за правління Птолемея II було завершено будівництво знаменитої Александрійської бібліотеки. Найзнаменитішим з учених Александрійського Мусейону був Евклід (бл. 365 – бл. 300 рр. до н. е.) — автор першого підручника з геометрії, який повністю дійшов до нашого часу.

За однією з легенд, Птолемей I запитав в Евкліда, як швидше опанувати його «Начала геометрії». На що Евклід багатозначно відповів: «У геометрію немає царських доріг». Аби зрозуміти цю дотепну відповідь, потрібно знати, що у давнину існували окремі царські дороги, призначені лише для царів та їхніх урядників. Своєю хитромудрою відповіддю Евклід давав зрозуміти, що шлях у науку один для всіх і що цей шлях спряжений з клопіткою і систематичною працею.



Вінченцо Камуччіні (1771–1844). Птолемей II Філадельф бесідує з ученими Александрійської бібліотеки (1813 р.)

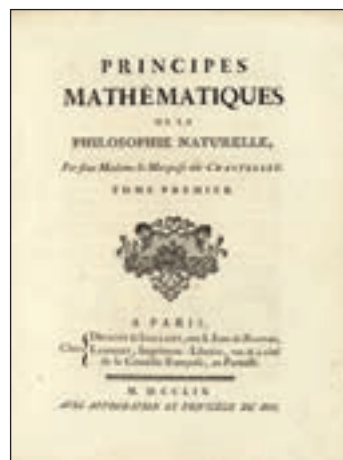
Це, однак, аж ніяк не означає, що не існує способів зробити цей шлях привабливішим і комфортнішим. І в цьому не раз пересвідчувався кожен, кому щастило на хороших учителів або на цікаві підручники.

Маркіза дю-Шатле (1706–1749) (повне ім'я без титулу Емілія Габріель Ле Тонельє де Бретейль) народилася у Парижі в аристократичній родині. Її батько обіймав високе становище при дворі Людовіка XIV. У домі часто збиралися відомі учені і діячі мистецтв. Це був початок тієї епохи, яку пізніше назвали епохою Просвітництва. Дівчина виховалася на її ідеалах. До 12 років вона вже вільно володіла латинською, грецькою, італійською та німецькою мовами і взялася за англійську. Та вирішальним для Емілії став той день, коли батько підвів її до знаменитого ученого і популяризатора науки Фонтенеля (1657–1757). На той час про Фонтенеля говорили навіть у світських салонах завдяки його книзі «Розмови про множинність світів» (1686 р.). Книга була написана у формі діалогів між автором і загадковою маркізою про Землю, Місяць, планети і нерухомі зорі — далекі Сонця зі своїми світами. Емілія одразу ж відчула себе героїнею цієї книги. Схожість стала ще більшою, коли після заміжжя вона успадкувала титул справжньої маркізи. Згодом захоплення наукою перейшло у непоборну пристрасть, і Емілія бере уроки в корифеїв — астронома Мопертюї (1698–1759) та математика Клеро (1713–1765).



- Зліва направо. 1) Нікола де Ларжільєр (1656–1746). Портрет Бернара Лебов'є де Фонтенеля.
 2) Робер Турньєр (1667–1752). Портрет П'єра Луї де Мопертюї (1743 р).
 3) Емілія дю-Шатле за вивченням класиків науки. Портрет невідомого художника із сімейного замку де Бретейль

Проходить зовсім небагато часу, і здібна учениця сама стає вчителькою — тепер уже вона дає уроки з математичних основ ньютоніанської системи світу знаменитому Вольтеру. Вольтер називає її «божественною Емілією» і на фронтисписі своєї книги «Основи філософії Ньютона» (1738 р.) зображає музою, яка відбиває світло істини з небес від Ньютона на його письмовий стіл. Сама ж Емілія у цей час



Ліворуч. Фронтиспіс книги Вольтера «Основи філософії Ньютона» (Амстердам, 1738 р.).

У центрі і праворуч. Обкладинки обох томів і титульна сторінка 1-го тому французького видання «Математичних начал натуральної філософії» Ньютона в перекладі і з коментарями Емілії дю-Шатле (Париж, 1759 р.)

береться за головну працю свого життя — переклад Ньютонових «Математичних начал натуральної філософії». Це була нелегка справа: окрім знання латини, якою були написані «Начала» Ньютона, і предмета потрібно було узгодити різні системи математичних викладок, які тоді існували в Англії і Франції, а також систематизувати й додати нові відомості, що накопичились після Ньютона. На допомогу знову приходить Клеро. Однак робота розтягнулася на роки, і була завершена Клеро уже після передчасної смерті Емілії. Один том оригіналу Ньютонових «Начал» розрісся на два томи перекладу. На сьогоднішній день це — єдиний переклад знаменитої праці французькою мовою.

А хто ж такий був цей загадковий Клеро? — Клод Алексіс Клеро був сином паризького професора математика Жана Батіста Клеро. Основи математики він вивчив під керівництвом батька. Феноменальні здібності дали йому змогу зробити це у дуже ранньому віці: у 10 років він уже опанував «Начала геометрії» Евкліда, у 12 — класичну книгу Лопітала (1661–1704) «Аналіз нескінченно малих для дослідження кривих ліній». У 16 років Клеро вже опублікував власний трактат «Дослідження ліній подвійної кривини», в якому узагальнив метод координат Декарта на простір. За це дослідження французька Академія наук обрала його в академіки, хоча на офіційний статус довелося чекати ще два роки, оскільки статут академії не передбачав звання академіка в такому ранньому віці.

Подальші наукові дослідження Клеро стосувалися в основному геодезії і небесної механіки. Зокрема, він розрахував траєкторію комети Галлея і з точністю до кількох днів передбачив її появу в 1759 р.



Емілія дю-Шатле (бл. 1748 р.). Потрет
Маріанни Луа (1715–1769).
Музей образотворчих мистецтв у Бордо

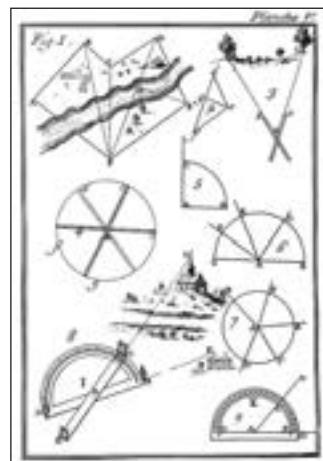
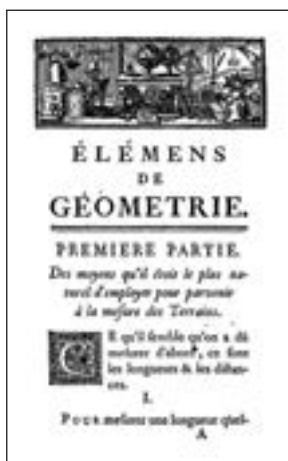
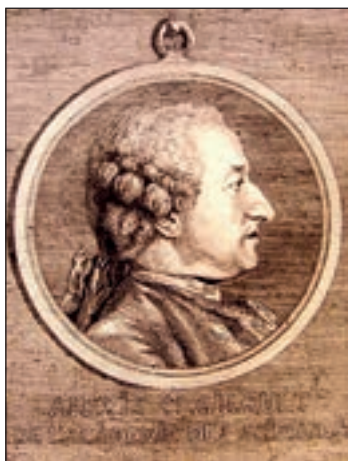


Алексис Клод Клеро. Рисунок Луї Кар-
рожі Кармонтеля (1717–1806).
Музей Конде у замку Шантії

Наприкінці 1730-х років Емілія дю-Шатле звертається до Клеро з несподіваним проханням. Знаючи про педагогічний талант свого вчителя, вона просить його написати підручник з геометрії для її сина. Незважаючи на зайнятість теоретичними дослідженнями, Клеро із захватом взявся за цю справу, можливо, пам'ятаючи про свої дитячі труднощі із опануванням геометрії за Евклідом.

Підручник Клеро під назвою «Елементи геометрії» вперше був опублікований у Парижі в 1741 р. Пізніше він не раз перевидавався і перекладався багатьма мовами. Це був перший підручник з геометрії, написаний не для дорослих, як «Начала» Евкліда та численні їхні удосконалення, а для дітей 12–14 років, які тільки-но починають знайомитися з науковим методом пізнання. Основна педагогічна ідея Клеро полягала в тому, що спосіб і послідовність ознайомлення учнів із геометрією повинні відображати історичний шлях розвитку цієї науки. А оскільки геометрія виникла як наука про вимірювання і побудову найважливіших для практики фігур і тривалий час обходилась без глибоких теоретичних обґрунтувань, то такою вона має бути і при початковому навчанні. «Я мав намір повернутися до того, що, як видається, послужило початком геометрії, і тому намагався викласти її основи у найбільш природний спосіб, тобто, щоб можна було вважати, що саме так здобували знання перші винахідники геометрії», — писав Клеро у передмові до свого підручника.

Педагогічні ідеї Клеро набули нового звучання на початку XX ст., коли навчання математики у школі перетворилося з елітного на обов'язкове. Актуальними вони залишаються й досі.



Лівруч. Клеро. Гравюра (1763 р.). Внизу напис: Алексіс Клеро з Академії наук. У центрі і праворуч. Перша сторінка (після передмови і змісту) та аркуш з рисунками до одного з розділів підручника Клеро «Елементи геометрії» (видання 1753 р.). З метою спрощення книгодрукування у ті часи рисунки часто подавалися не в тексті, а на окремих аркушах, підшитих у кінці книги

§4. Ромб

Уроки
12–13



Прямокутник, який ми вивчали у попередньому параграфі, можна назвати рівнокутним паралелограмом. У цьому параграфі ми вивчатимемо рівносторонній паралелограм.

4.1. Означення ромба і приклади ромбічних форм

Означення.

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ромбом.

Про походження цієї назви розповідається на «сторінках історії» в кінці параграфа.

На рис. 1.83 зображено ромб $ABCD$.

З урахуванням ознак паралелограма, означення ромба можна сформулювати дещо інакше. А саме, ромбом можна назвати чотирикутник, у якого всі сторони рівні. Тобто в означенні можна не вказувати, що

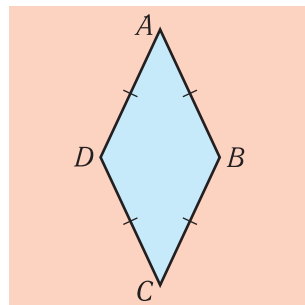


Рис. 1.83

ця фігура є паралелограмом, оскільки такий висновок уже впливатиме з відповідної ознаки. Можна також сказати, що ромб — це паралелограм, у якого рівні дві які-небудь суміжні сторони.

У §2 уже фактично було розглянуто спосіб побудови ромба за допомогою двосторонньої лінійки (див. рис. 1.27, 1.28 та 1.35, 1.36). Інші способи можна дістати з уточнення розглянутих там же загальних способів побудови паралелограма. Зокрема, ромб дістанемо, якщо сумістимо основи двох рівних рівнобедрених трикутників, протилежні вершини яких розміщуються по різні боки від основи (рис. 1.84).

Особливе практичне значення має ромб, який можна скласти із двох рівносторонніх трикутників, тобто ромб з кутами 60° і 120° (рис. 1.85). Існують різні комбінації цих кутів, якими можна замостити

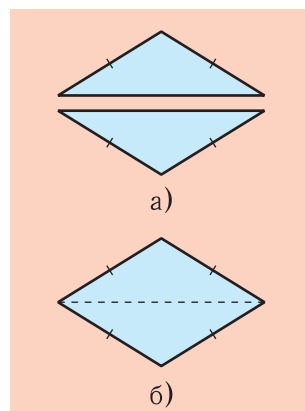


Рис. 1.84

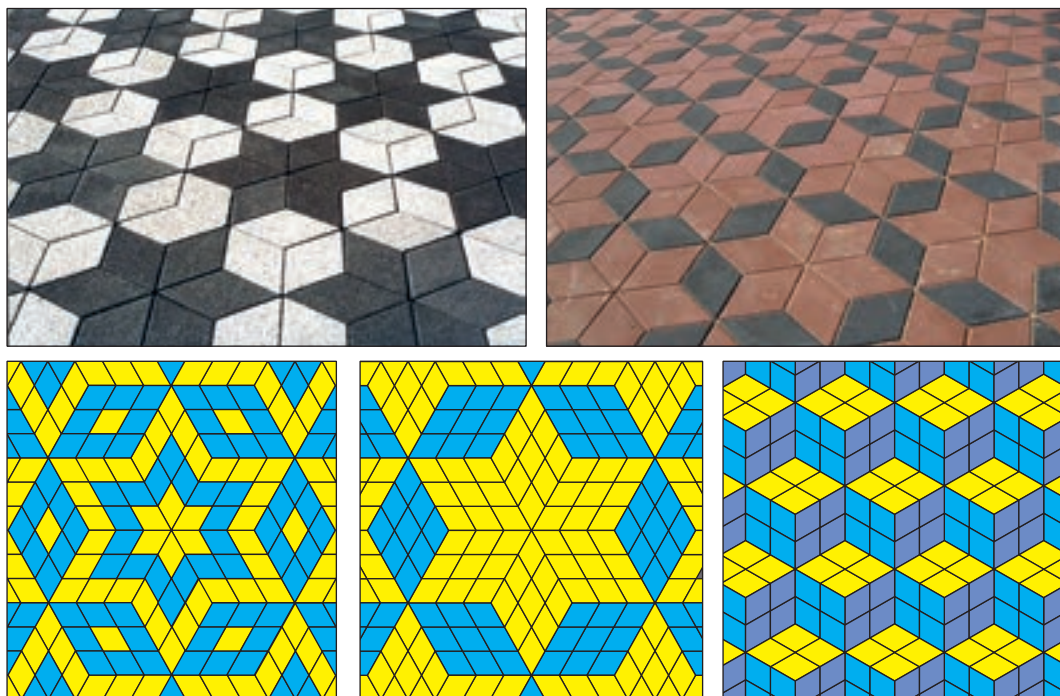


Рис. 1.86

площину довкола однієї точки. Це дає змогу при викладанні плиток або кахлю ромбічної форми легко створювати найрізноманітніші візерунки, а вмілим поєднанням кольорів та відтінків досягати ефектів рельєфності (рис. 1.86).

Узагалі ромб — одна з найуживаніших фігур у дизайні — від великих архітектурних форм до графічного мистецтва, від емблем і значків до біжутерії. Нижче подається низка яскравих прикладів.

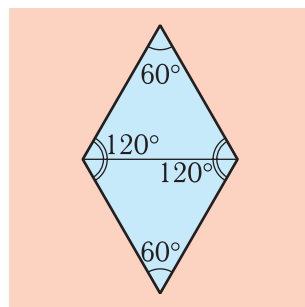


Рис. 1.85



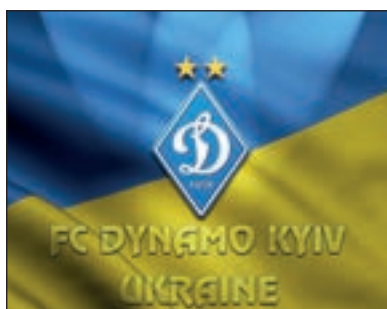
Ліворуч. Будівля-ромб (з 2012 р. офіс видавничої компанії Crain Communications) у Чикаго (США). Зведена у 1984 р. (41 поверх, висота 175 м). Похилий дах цієї споруди, форма якого дала їй неофіційну назву, насправді складається із двох трикутників, однак на відстані вони сприймаються як суцільний ромб. Будівлю не раз знімали у фільмах, її дизайн використовують у відеоіграх.

Праворуч. Штаб-квартира компанії China Steel Corporation у м. Гаосюн (Тайвань). Зведена у 2012 р. (29 поверхів, висота 135 м). Для надання фасаду рельєфності тут ромби «розрізані», а їхні частини розміщені під кутом одна до одної



Аеропорт «Марракеш – Менара» у Марокко (2008 р.). Уважається одним із найкрасивіших у світі. Неповторної краси йому надає мереживо з ромбів, що утворюють фасад і дах будівлі.

Так знайдено унікальне поєднання традиційного місцевого ажурного стилю й динамічних та просторих тенденцій сучасної архітектури



Праворуч. Емблема футбольного клубу «Динамо» (Київ).

У центрі. Нагрудний знак («ромбик») випускника магістратури

Київського національного університету ім. Т. Шевченка.

Ліворуч. Емблема французької автомобільної компанії «Рено» (Renault) на одній із останніх моделей



Ромбічні форми у прикрасах

Віктор Вазарелі (1906–1997).
Rhombus-B

4.2. Властивості та ознаки ромба

Оскільки ромб є окремим видом паралелограма, то він має всі властивості цієї фігури. Зокрема, протилежні кути ромба попарно рівні, а сума кутів, які прилягають до кожної сторони, дорівнює 180° . Із властивостей паралелограма впливає також, що діагоналі ромба перетинаються і кожна з них точкою перетину ділиться навпіл.

Крім цих властивостей, ромб має ще дві важливі властивості, які характерні лише для цієї фігури, тобто є її ознаками.

Теорема

(про властивості діагоналей ромба).

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і кожна з них ділить відповідні кути ромба навпіл.

Доведення. Нехай маємо ромб $ABCD$, O — точка перетину його діагоналей (рис. 1.87). Розглянемо трикутник ABC . За означенням ромба, $AB = BC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений. З іншого боку, за властивістю діагоналей паралелограма, $AO = OC$. Отже, BO — медіана у рівнобедреному трикутнику ABC . Відомо, що медіана рівнобедреного трикутника є одночасно його висотою і бісектрисою. Перше означає, що діагоналі BD і AC

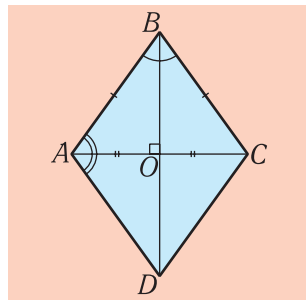
Шарль-Жозеф Натуар
(1700–1777). Аллегорія
архітектури (1740 р.)

Рис. 1.87

взаємно перпендикулярні, а друге — що діагональ BD ділить кут B ромба навпіл.

Розглядаючи аналогічно рівнобедрені трикутники ADC , ABC та CBD , дійдемо висновку, що діагональ BD ділить навпіл і кут D , а діагональ AC — кути A та C . Теорему доведено.

Істинними є й обернені твердження. Вони є ознаками ромба.

Теорема

(ознака ромба за перпендикулярністю діагоналей).

Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то це — ромб.

Доведення. Нехай у паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні, O — точка їхнього перетину (див. рис. 1.87). Тоді прямокутні трикутники AOB і COB рівні за двома катетами (катет BO у них спільний, а катети OA та OC — рівні, оскільки точка O ділить діагональ AC навпіл). З рівності цих трикутників випливає рівність їхніх сторін AB і CB . Отже, у паралелограмі $ABCD$ рівними є дві суміжні сторони. За властивістю сторін паралелограма, звідси випливає, що рівні усі його сторони, тобто, що це — ромб. Теорему доведено.

Наслідок.

Якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є ромбом.

Із цього наслідку випливає дуже простий спосіб для побудови ромба. А саме: взявши будь-які два перпендикулярних відрізки, які перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, та сполучивши послідовно їхні кінці, дістанемо ромб (рис. 1.88).



Соня Делоне. Текстильний орнамент з ромбічною основою

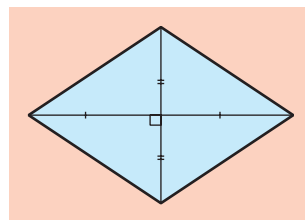


Рис. 1.88

Теорема

(ознака ромба за діленням навпіл кута діагоналлю).

Якщо хоч би одна з діагоналей паралелограма ділить хоча б один із його кутів навпіл, то цей паралелограм є ромбом.

Доведення. Нехай у паралелограмі $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, діагональ BD ділить кут B навпіл, тобто $\angle ABO = \angle CBO$ (рис. 1.89). Оскільки $\angle ABO = \angle CDO$ — як внутрішні різносторонні при паралельних DC і AB та січній DB , то у трикутнику CBD $\angle CBO = \angle CDO$. Отже, цей трикутник є рівнобедреним, і тому $CB = CD$. Звідси випливає, що у паралелограмі $ABCD$ усі сторони рівні. Тому це — ромб. Теорему доведено.

Перпендикулярність діагоналей ромба застосовується у конструкції чотириланкових шарнірних механізмів, які слугують для забезпечення прямолінійного поступального руху. Одним з найпоширеніших таких механізмів є домкрат, схема якого зображена на рис. 1.90. При зменшенні довжини перемички BD «п'ята» C домкрата піднімається вгору, а при збільшенні — опускається вниз. При цьому стержень AC завжди зберігає вертикальне положення, оскільки залишається перпендикулярним до горизонтальної перемички BD . Це випливає з того, що фігура $ABCD$ є ромбом і тому його діагоналі AC і BD — взаємно перпендикулярні.

Фактично та сама геометрична ідея, однак уже з поєднанням декількох ромбів, втілюється в конструкціях підйомників та держаків, приклади яких зображені на рис. 1.91.

Іншим прикладом є механізм так званого відцентрового регулятора, який зіграв винятково важливу роль в епоху парових машин. Цей механізм сконструював видатний шотландський винахідник

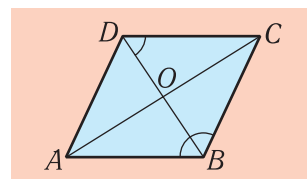


Рис. 1.89

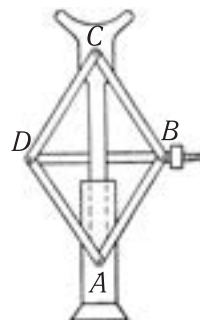


Рис. 1.90

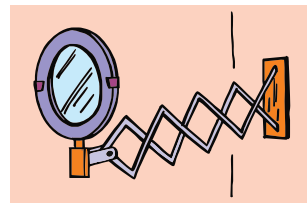


Рис. 1.91

Джеймс Ватт (1736–1819) для регулювання подачі пари у паровій машині. В основі механізму — ромб $ABCD$, вершини A , B , D якого є шарнірами, а вершина C — муфтою, що рухається вздовж стержня AC (рис. 1.92). Стержень AC з'єднаний за допомогою механічної передачі з валом машини і під час роботи здійснює обертальний рух. На продовженні сторін AB та AD ромба закріплені металеві кульки, які при обертанні регулятора під дією сили інерції віддаляються від осі обертання, піднімаючи муфту C . Рух муфти передається на клапан K , який, власне, і регулює подачу пари. Якщо обертання валу занадто велике, то клапан закривається, якщо замале — то відкривається. Вільний рух муфти C по стержню AC забезпечується тим, що діагоналі ромба $ABCD$ взаємно перпендикулярні.



Джеймс Ватт.
Портрет Карла Фредеріка
фон Бреда (1792 р.)

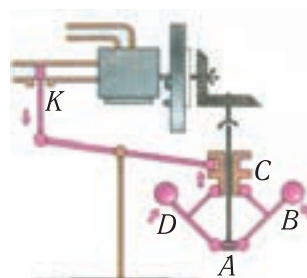


Рис. 1.92



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба, а середини сторін ромба — вершинами прямокутника.

Розв'язання. Нехай K , L , M , N — середини сторін прямокутника $ABCD$ (рис. 1.93, а). Оскільки протилежні сторони прямокутника рівні, то рівні і їхні половини. Отже, $AK = KB = CM = MD$, $AN = ND = CL = LB$. Тому прямокутні трикутники NAK , LBK , LCM , NDM рівні за двома катетами. Звідси випливає рівність їхніх сторін NK , KL , LM , MN . Виходить, що у чотирикутнику $KLMN$ усі сторони рівні. Отже, це — ромб. Перше твердження задачі доведено.

Нехай тепер K , L , M , N — середини сторін ромба $ABCD$ (рис. 1.93,б). Позначимо кут D ромба через α .



Франческо де Мура
(1696–1782).
Алегорія мистецтв (1750 р.)
Рідкісне поєднанням
мистецтв і наук в одному
алегоричному образі

Тоді $\angle A = 180^\circ - \alpha$. Оскільки сторони ромба рівні, то рівні і їхні половини. Отже, трикутники AKN і DNM — рівнобедрені, а кути 1 і 2 при їхніх основах дорівнюють відповідно $\frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \frac{\alpha}{2}$ та $\frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$. Тому $\angle KNM = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ$. Отже, у чотирикутнику $KLMN$ кут N — прямий.

Так само доведемо, що прямими є решта кутів чотирикутника $KLMN$. Отже, це — прямокутник. Друге твердження задачі теж доведено.

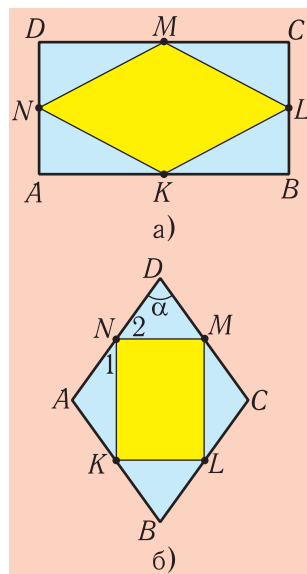


Рис. 1.93



Перевірте себе

1. Що таке ромб? Як можна накреслити ромб?
2. Чи завжди чотирикутник, у якого всі сторони рівні, є ромбом?
3. Які особливі властивості вирізняють ромб з-поміж інших паралелограмів?
4. Сформулюйте та доведіть властивості діагоналей ромба.
5. Сформулюйте та доведіть ознаки ромба. Як можна виконати побудову ромба на основі цих ознак?
6. Наведіть приклади практичних застосувань ромба та поясніть, на яких геометричних властивостях ґрунтуються ці застосування.



Вправи і задачі

- 143°. Накресліть ромб з гострим кутом 30° і стороною 5 см. Проведіть обидві висоти з вершини тупого кута. Визначте вимірюванням, чи рівні вони. Чи узгоджується цей результат із тим, який можна дістати обчисленням?
- 144°. Накресліть ромб з діагоналями 6 см і 8 см та виміряйте його периметр. Як найпростіше одержати потрібний результат?
- 145°. Доведіть, що коли всі сторони чотирикутника рівні, то він є ромбом.
- 146°. Доведіть, що коли суміжні сторони паралелограма рівні, то він є ромбом.
- 147°. Обґрунтуйте, що з будь-яких двох рівних трикутників можна скласти ромб.

148°. Арлекін і Колумбіна (рис. 1.94) — «солодка парочка» у традиційних народних італійських комедійних виставах. За основним сюжетом, який не змінювався впродовж багатьох століть, вони — бідні провінціали, з вигляду простакуваті, однак не без хитрощів, які приїхали до міста у пошуках кращої долі. Класичний їхній одяг обшитий різнокольоровими латками у формі ромбів. Як би ви пояснили саме таку форму латок?



Рис. 1.94

149°. Чи може одна з діагоналей ромба дорівнювати його стороні? А — обидві діагоналі?

150°. Чи існує ромб з рівними діагоналями?

151°. Чи може ромб бути одночасно і прямокутником?

152°. Чи є ромбами чотирикутники, зображені на рис. 1.95, а), б), в)?

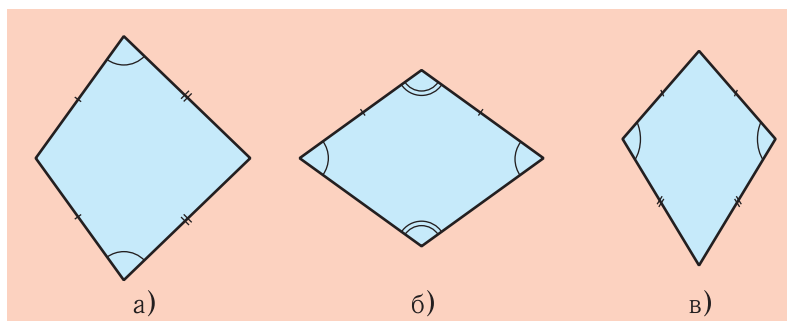


Рис. 1.95

153°. На рис. 1.96, а), б), в), г) чотирикутники $ABCD$ — ромби. Визначте кути x .

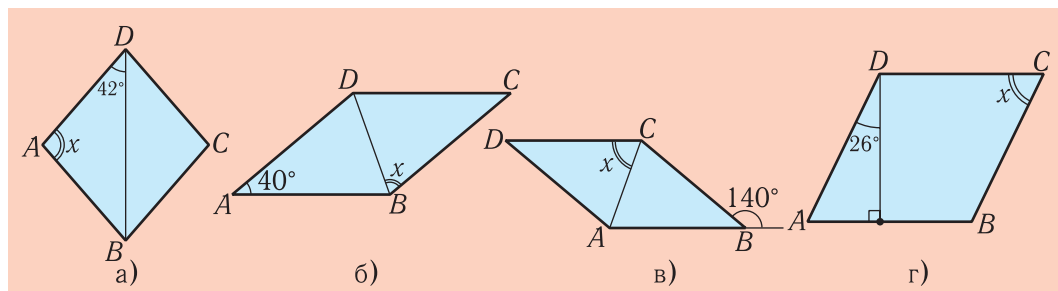


Рис. 1.96

154°. Чи істинним є твердження, що чотирикутник із взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом?

- 155°.** Чи істинним є твердження, що чотирикутник із рівними і взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом?
- 156.** Чи може діагональ ромба бути його висотою?
- 157.** Доведіть, що всі висоти ромба рівні.
- 158.** Доведіть, що паралелограм, у якого всі висоти рівні, є ромбом.
- 159.** Доведіть, що вершина C ромба $ABCD$ рівновіддалена від прямих AB і AD .
- 160.** Доведіть, що точка перетину діагоналей ромба рівновіддалена від його сторін.
- 161.** Доведіть, що коли точка перетину діагоналей паралелограма рівновіддалена від його сторін, то це — ромб.
- 162.** З точки перетину діагоналей ромба опущені перпендикуляри на прямі, які містять його сторони. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника. Чи може цей прямокутник бути квадратом?
- 163.** $ABCD$ — ромб. На прямій AC взяли довільну точку M . Доведіть, що $MB = MD$.
- 164.** Від двох протилежних вершин ромба на усіх його сторонах відкладені рівні відрізки. Доведіть, що кінці цих відрізків є вершинами прямокутника.
- 165.** Визначте периметр ромба, якщо: а) довжина його сторони на 12 см менша від периметра; б) його діагональ дорівнює 6 см і утворює зі стороною кут 60° .
- 166.** Кут між стороною ромба і його діагоналлю дорівнює 15° . Визначте відношення сторони ромба до його висоти.
- 167.** У ромбі висота і менша діагональ, проведені з однієї вершини, утворюють між собою кут 15° . Визначте висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см.
- 168.** Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, ділить його сторону навпіл. Визначте гострий кут ромба та його периметр, якщо менша діагональ ромба дорівнює 7 см.
- 169.** Висота, проведена в ромбі з вершини тупого кута, утворює зі стороною ромба кут 30° . Визначте периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює 5 см.
- 170.** Одна з діагоналей ромба дорівнює стороні. Визначте: а) кути, які діагоналі ромба утворюють з його сторонами; б) кути ромба.
- 171.** Визначте периметр ромба, якщо його гострий кут дорівнює 60° , а діагональ, яка сполучає вершини тупих кутів, — 10 см.
- 172.** Визначте тупий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 8 см, а висота — 1 см.
- 173.** Визначте гострий кут ромба, якщо кути, утворені діагоналями ромба з однією із його сторін, відносяться, як 4 : 5.
- 174.** Накресліть ромб, коли задано: а) сторону і діагональ; б) обидві діагоналі; в) сторону і висоту; г) діагональ і висоту; ґ) діагональ і протилежний їй кут; д) кут і діагональ, що виходить з вершини цього кута.
- 175.** Користуючись лише двосторонньою лінійкою, проведіть серединний перпендикуляр до заданого відрізка (ширина лінійки менша від довжини відрізка).
- 176°.** Користуючись лише двосторонньою лінійкою, поставте перпендикуляр до заданої прямої у заданій на ній точці.

- 177.** У рівносторонній трикутник з периметром P вписано ромб так, що один кут у них спільний і всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. Визначте периметр ромба.
- 178.** У прямокутний трикутник з гострим кутом 60° вписано ромб зі стороною a так, що кут 60° у них спільний, а всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. Визначте менший катет трикутника та його гіпотенузу.
- 179.** Якщо у паралелограмі провести бісектриси кутів, утворених його діагоналями, то точки перетину цих бісектрис зі сторонами паралелограма будуть вершинами ромба (рис. 1.97). Доведіть це.
- 180.** Точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника рівновіддалена від усіх прямих, які містять його сторони. Доведіть, що цей чотирикутник — ромб.
- 181.** Ззовні ромба $ABCD$ побудовано рівносторонній трикутник AKB . Визначте кут CKD .
- 182.** Дві висоти ромба, проведені з вершин його тупих кутів, діляться у відношенні $2:1$. Визначте кути ромба.
- 183.** Чи можливо за допомогою двох прямолінійних розрізів: а) розрізати ромб на три частини, з яких можна скласти прямокутник; б) розрізати прямокутник на три частини, з яких можна скласти ромб?

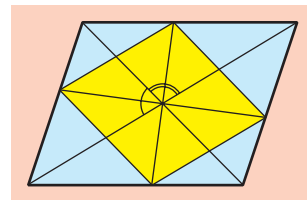
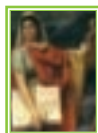


Рис. 1.97



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Звідки пішла назва геометричної фігури «ромб»

Походження назви «ромб» є одним із найзагадковіших у геометрії. З «Етимологічного словника української мови» довідуємося, що це слово утворилося від давньогрецького іменника «ромбос» (ρομβος), пов'язаного із дієсловом «рембоне» (ρεμβοναι) — «блукаю, брожу, тиняюсь», і що колись воно означало «бубон, тамбурин і дзигу». Словники старогрецької мови додають до цього: «кружіння; обертальний рух», «магічний круг» і «веретено». Який же зв'язок міг існувати між цими різнорідними речами, що мали спільну назву «ромбос» і як цей зв'язок відобразився (чи не відобразився) у геометричній фігурі, що називається ромбом?

Найочевидніший зв'язок з веретеном. Веретеном називається дерев'яна паличка, зазвичай не однаково звужена до обох із кінців, на яку намотується нитка під



Рис. 1.98. Веретено без ниток і веретина з напруженими нитками



Рис. 1.99. Зліва направо. 1. В.А. Тропінін (1776–1857). Дівчина з Поділля (Пряля) (1820 р.);
2. Елеутеріо Пальяно (Pagliano) (1826–1903). Пряля (1869 р.);
3. М.В. Бессонов (нар. 1962 р.). Росіянка. Із циклу «Красуні світу» (1991 р.);
4. Гречанка за прядінням. Рисунок на античній вазі

час ручного прядіння (рис. 1.98). Пряля лівою рукою поволі витягує тонесеньке пасмо прядива з мички або кужелю, а правою покручує веретено. Унаслідок обертального руху зсувана частина нитки намотується на веретено, а витягнуте пасмо скручується у її продовження. На рис. 1.99 подано декілька прикладів із численних творів живопису різних часів, які опоетизовують цей прадавній спосіб прядіння і водночас дають змогу сучасній людині збагнути його суть.

Із рисунка видно, що обриси веретена, а особливо з намотаними на нього нитками, справді нагадують ромб. Тому зв'язок грецької назви веретена «ромбос» з геометричним ромбом очевидна.

Цікаво у цьому зв'язку зазначити, що в одній із праць знаменитого Архімеда зустрічається термін «тілесний ромб», яким він називав геометричне тіло із двох конусів, що мають спільну основу. Така фігура ще більше нагадує веретено з намотаними нитками.

Далеко не таким очевидним видається зв'язок між ромбом і дзигю. Археологічні знахідки, а також графічні зображення на предметах і картинах свідчать про те, що дзига — такий самий давній винахід людства, як і веретено. Однак на відміну від веретена, форма якого була майже незмінною в усі часи і в усіх народів (погляньте ще раз на рис. 1.99), дзиги мали найрізноманітніші форми, зазвичай вельми відмінні від сучасної механічної дзиги, що з'явилася у Німеччині наприкінці XIX ст. (До того дзиги заводилися або безпосередньо закручуванням між пальцями, або опосередковано за



Портрет Архімеда французького ученого і письменника Луї Фіґ'є (Luis Figuier) (1881 р.). Внизу — «тілесний ромб» Архімеда



Рис. 1.100

допомогою шнурка, який намотувався у спеціально пророблені на корпусі дзиги рівчачки).

На рис. 1.100 зображені приклади реальних дзиг давніх епох — від дзиги з гробниці давньоєгипетського фараона Тутанхамона (зліва вгорі) — до дзиг елліністичної епохи (у другому ряду). А на рис. 1.101 відтворені репродукції картин, на яких дзиги різних часів зображені на картинах. Як бачимо, спільним у формі усіх цих дзиг є те, що вони звужуються у своїй нижній частині. Цим вони справді певною мірою нагадують ромб, однак чи достатньо цього для назви фігури?

Існує інша версія зв'язку між дзигою і ромбом, яка ґрунтується на іншому тлумаченні слова «дзига». Дзигою можна вважати й примітивну «гуділку», або «ревунку» яка, як свідчать археологічні знахідки (див. рис. 1.102), була поширена по всьому світу з прадавніх часів, а корінними мешканцями Австралії використовується й досі. В англійській мові існує навіть спеціальна назва для цієї гуділки — bull-roarer, що можна перекласти як «бик-ревун», а у французькій мові вживається просто слово «ромб» (rhombe). Така ревунка складається із дерев'яної дощечки завдовжки від 18 до 78 см, форма якої нагадує витягнутий ромб зі співвідношенням діагоналей здебільшого приблизно 3 : 1, до одного з кінців якої прив'язується довга мотузка. Якщо мотузку сильно розкрутити, тримаючи за вільний кінець, то дерев'яна дощечка здійснюватиме одночасно два обертальних рухи і створюватиме доволі сильне гудіння, схоже на ревіння буйвола. Цим користувалися під час проведення найрізноманітніших обрядів, ритуалів, містерій, а також і як засобом для оповіщення (сучасні ж підприємці виготовили непогану, хоча й не зовсім безпечну дитячу іграшку). Зокрема, такою ревункою під час обрядів



Рис. 1.101. Зліва направо і зверху вниз.

1. Рисунок на античній тарелі. Подорожній чоловік і юнак схилилися над дзигію. Чоловік підганяє дзигу нагаєм із трьома джгутами.
- 2–3. Пітер Брейгель Старший (1525–1569). Фрагмент картини-алегорії «Битва Масниці та Посту» (1559 р.) і фрагмент картини «Дитячі розваги» (1560 р.). На передньому плані другого сюжету дівчинка з чотиригранною єврейською дзигію — дрейделем.
4. Жан Батіст Сімеон Шарден (1699–1779). Хлопчик із дзигію (бл. 1735 р.). Крім дзиги, що на столі, ще одна дзига лежить у шухляді.
5. Роберт Едж Пайн (Pine) (1720–1788). Чарльз і Джон Воні (Vaughn) (1788 р.).
6. Фриц Цубер-Бюлер (Zuber-Bühler) (1822–1896). Крути дзигу (фрагмент).
7. Хохловкіна Е. Д. (нар. 1934 р.). Хлопчик із дзигію (фрагмент) (1964 р.).



могли описувати й різноманітні магичні кола, і це пояснює ще одне зі значень давньогрецького слова «ромбос», яке було зазначено на початку цієї розповіді.

Запереченням проти цієї версії може бути те, що досі не знайдено жодного достовірного підтвердження, що ревунок справді були відомі давнім грекам. Мовляв, якби греки справді використовували їх у своїх обрядах, то майже напевне



Рис. 1.102

Ліворуч і в центрі — давні ревушки. Походять, відповідно, з Нової Зеландії (довжина 34 см), Меланезії (довжина 78 см), Нігерії (довжина 52 см) і Франції (довжина 18 см). Перші дві є експонатами Британського музею, четверта знайдена в 1928 р. у відомій археологам усього світу печері La Roche у провінції Дордонь на південному заході Франції). Праворуч. Сучасна дитяча іграшка «ревушка» і спосіб приведення її в дію

зафіксували б це у рисунках, барельєфах і мозаїках, як це вони робили з іншими атрибутами таких дійств, наприклад, з бубном.

Дивовижним чином, але це заперечення підводить нас до найзагадковішого тлумачення слова «ромбос» — як «бубон». Жодної зовнішньої схожості між ромбом і бубоном немає, однак могла існувати схожість у застосуванні ромбоса-ревуна і бубна. Ймовірно, що бубон поширився на всю материкову частину Греції у кінці VI — на початку V ст. до н. е. і прийшов із її північно-східної частини Фракії та малоазійської Фрігії разом із тамтешніми культами бога Діоніса (Вакха) та богині Кібели. Святкування на честь цих богів, які протегували родючості в усіх її формах, супроводжувалися нестримними веселощами і танцями, часто з бубном, який, у такий спосіб, з часом міг просто витіснити колишні примітивні ревушки. Натомість назва ревушки «ромбос» могла ще довго зберігатися, хоча й перейшла на інший предмет — бубон, що виконував ті самі обрядові функції.

У нас залишилося не розібралим останнє тлумачення слова «ромбос» — як «тамбурин». Тут ми змушені торкнутися сфери музикознавства. Словом «тамбурин» часто називають звичайний бубон (частіше двосторонній, ніж односторонній), і тоді його зв'язок з ромбом пояснюється попередніми міркуваннями. Саме це, вочевидь, і передбачається у тому тлумаченні слова «ромбос», яке подається в етимологічному словнику. Однак варто зауважити, що у сучасному трактуванні тамбурин і бубон — це зовсім різні інструменти, головним чином тому, що у тамбурина значно глибший корпус і, відповідно, інше звучання та спосіб гри. Та й з'явився тамбурин не в прадавні часи, як бубон, а в середньовічній Європі (на півдні Франції). У такому разі

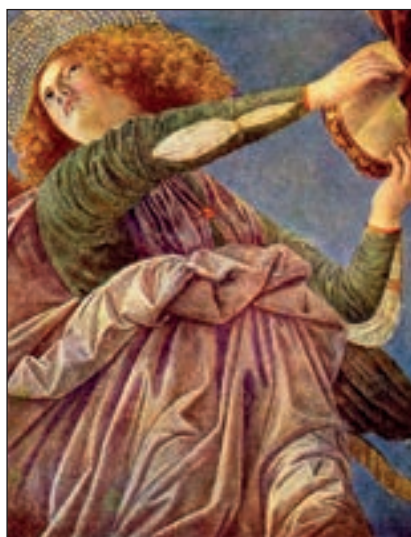


Вгорі. Барельєф «Менада у супроводі сатира» (бл. 450 р. до н. е.).

Внизу ліворуч. Мозаїка «Тріумф Вакха» (III ст. н. е.). На передньому плані вакханка, що грає на бубні (тимпані). Праворуч. Бронзова статуєтка Кібели з неодмінним атрибутом — бубном (II ст. н. е.)

з ромбом у нього може асоціюватися лише зигзагоподібна тятива вздовж корпусу, якою напинаються шкіряні мембрани. Однак оскільки тамбурина не існувало в античний період, коли зароджувалася геометрія, то й не могло існувати цієї підстави для назви геометричної фігури «ромб».

Насамкінець застережемо від абсолютно неправильного трактування зв'язку між ромбом і бубном, який можна знайти у деяких джерелах, зокрема, у російськомовній Вікіпедії. Мовляв, грецьке слово «ромбос» має значення «бубон» тому, що колись бубни були не круглі, а ромбічної або квадратної форми. На підтвер-



Різниця між бубном і тамбурином наочно відображена на цих двох фресках італійського художника Мелоццо да Форлі (1438–1494). Ліворуч ангел грає на бубні, праворуч — на тамбурині.
Дата створення: бл. 1480 р.

дження цієї «здогадки» робиться посилення на назву бубнової масті у гральних картах, яка, нібито, саме через те й позначається ромбиками або квадратами.

У такому поясненні усе неправильно. По-перше, у жодному давньому описі або зображенні ми не знаходимо «ромбічних» бубнів. По-друге, якщо такий бубон і можна виготовити зі шкіряними мембранами (пластик до уваги не беремо, оскільки його у давні часи не було), то зробити це буде значно важче, ніж круглий, оскільки незмірно важче буде досягти рівномірного натягу шкіри у різних напрямках. Та найбільш неправомірна «прив'язка» ромба до бубнової масті у гральних картах. Річ у тім, що масті у гральних картах у різні часи і в різних



Старші карти бубнової масті у традиційному німецькому оформленні (з бубонцями) і змішаному німецько-французькому дизайні (з бубонцями і ромбиками). Останній варіант — для «примирення» двох форм, які існують у Німеччині

країнах називалися і позначалися по-різному, і ця відмінність, особливо у назвах, зберігається й понині. Зокрема, та масть, яка у нас називається бубною, позначається червоним ромбиком або квадратиком лише у так званих французькій та англійській колодах, однак називається вона у них «плиткою» (фр. *carreaux*, англ. *diamonds*). В італійській та іспанській колодах ця масть позначається і називається «монетами» (іт. *denari*, ісп. *ogros*). Тільки у німецькій колоді аналог бубної масті називається «бубонцями» (*Schellen*), але з позначень зрозуміло, що йдеться не про маленькі барабанчики, а про металеві порожнисті кульки з маленькими суцільними кульками всередині для створення дзвону (дзвоники), які ми зараз інколи можемо чути й бачити серед народних музичних інструментів або на святковій упряжі коней. У колишню Російську імперію і на територію сучасної України гральні карти прийшли на початку XVII ст., найімовірніше з Німеччини через посередництво Чехії і Польщі. Чеською мовою бубонці називаються *bubny*, а польською — *dzwonki*. Коли німецька колода була витіснена французькою, німецький значок бубної масті (бубонець) змінився на французький ромбик, а чеське «бубно» так і залишилося.

Отож, зрозуміло, що жодного стосунку до бубна як музичного інструмента з мембранами бубнова масть у гральних картах не має. Тому пов'язувати з нею назву геометричної фігури «ромб» абсолютно безпідставно.

§5. Квадрат

Уроки
14–15



5.1. Означення квадрата і приклади квадратних форм

Паралелограм, який одночасно є і рівнокутним (тобто прямокутником), і рівностороннім (тобто ромбом), називається квадратом. Оскільки прямокутник є паралелограмом, то маємо таке означення квадрата.

Означення.

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

На рис. 1.103 зображений чотирикутник $ABCD$. У ньому всі кути прямі, отже, це — прямокутник. Крім того, у нього всі сторони рівні. Тому це — квадрат.

Слово «квадрат» походить від латинського слова «квадратус» (*quadratus*), що означає «чотирикутний».

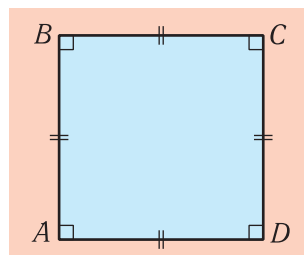


Рис. 1.103

Найвірогідніше, це вказує на те, що квадрат був першою чотирикутною фігурою, яку почали досліджувати давні геометри. Про це, зокрема, красномовно свідчить той факт, що у «Началах геометрії» Евкліда (III ст. до н. е.) при означенні чотирикутних фігур спочатку дається означення квадрата, а вже потім прямокутника, ромба і паралелограма.

Квадрат здавна вважається символом рівноваги. Тому не випадково, що він був і залишається традиційним елементом українських орнаментів і вишивок.

А шотландці на основі квадрата створили неповторний орнамент для шерстяних і бавовняних тканин — тартан, більше відомий у всьому світі як «шотландка». Геометрична простота квадрата дала змогу свого часу механізувати процес ткацтва, зберігши при цьому можливості для урізноманітнення візерунка. Одяг із шотландки і нарядний, і практичний. Навіть шкільна форма з неї виглядає привабливо.

Починаючи із «чорного» і «червоного» квадратів К. Малевича, квадрат став неодмінним атрибутом абстрактного живопису і геометричного дизайну.

В архітектурі квадратні форми використовувалися з прадавніх часів. Зокрема, квадратами були основи єгипетських пірамід, плани святилищ і храмів,



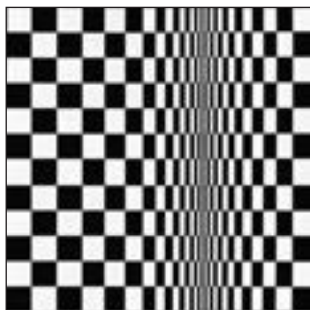
Евклід.
Джерело: «100 портретів
видатних людей»
(Брюссель, 1920 р.)



Квадрат в українському орнаменті. Зліва направо: на вишиванці; на скатертині (обрусі); у фойє Одеської національної бібліотеки



Квадрати на «шотландці»



Квадрати в абстрактному живописі. Зліва направо.

- 1) Бриджет Райлі (нар. 1931 р.). Рух у квадратах;
- 2) Віктор Вазарелі (1906–1997). Павич (1978 р.);
- 3) Соня Делоне (1885–1979). Ритм фарб (1954 р.)

замків і фортець, ринків і площ, житлових будівель і приміщень у них. Серед усього неозорого моря втілених квадратних форм є одна, абсолютно унікальна, аналогів якої у світі більше немає. Це — «Квадратна голова» (La Tête Carrée) у французькому місті Ніцці. Вона зведена у 2002 р. за ідеєю і за безпосередньою участю відомого скульптора і архітектора Саші Сосно (Sacha Sosno) (1937–2013)¹⁾.

¹⁾ До початку війни 1941 р., допоки Саша Сосно проживав з батьками у Латвії, у нього було прізвище Олександр Йозефович Сосновський. Його батько був естонцем, а мати — французькою.



Ліворуч. «Квадратна голова» Саші Сосно
(за нею — муніципальна бібліотека в Ніцці (Франція) (2002 р.).
Праворуч. Саша Сосно. Автопортрет із веб-сайту митця

«Квадратна голова» Сосно є поєднанням скульптурної основи (погруддя, шиї і підборіддя) та архітектурної споруди кубічної форми на місці верхньої частини голови. Вважається ще, що це була перша житлова скульптура у світі (поки не збудували другу того самого скульптора; про це трохи нижче). У ній перебуває адміністрація муніципальної бібліотеки, основні приміщення якої, теж з явними квадратними обрисами, знаходяться неподалік. Загальна висота «Квадратної голови» 26 м, ребро кубічної частини має довжину 15 м. У «шиї» три поверхи, у самій голові — чотири. Уся конструкція виготовлена з алюмінію, сонцезахисні сітки на вікнах теж алюмінієві (через що з вулиці куб видається немовби суцільним).

Безсумнівно, «Квадратна голова» має символічне значення, однак цю символіку кожен може інтерпретувати по-своєму (у цьому й переваги абстрактного мистецтва). Сам вислів «квадратна голова» відомий з XIX ст. Спочатку «квадратними головами» у південній частині Європи глузливо називали іммігрантів з півночі, безпідставно вважаючи, що їхні



Маріо Сіроні (1885–1961).
Архітектор (1933 р.)



«Охоронець» Саші Сосно у Французькій Рів'єрі (м. Кань-сюр-Мер у департаменті Приморські Альпи, Прованс) (2015 р.). Ліворуч — макет, праворуч — «На варті»

антропометричні особливості відповідальні за брак освіченості. Коли ж ситуація з міграцією змінилась на протилежну, вислів переадресувався на будь-які проблеми з освіченістю. І тепер «квадратною» може вважатись не тільки голова з недостатніми знаннями, а й перенасичена зайвою інформацією. Беручи це до уваги, кожен мешканець Ніцци тепер постійно має визначатися, йти йому до бібліотеки, чи не йти. Через те схвальні й несхвальні оцінки «Квадратної голови» серед корінних мешканців розділилися приблизно порівну. Зате кожен турист, котрий опиниться в Приморських Альпах, неодмінно захоче побачити «Ла Тет Каре».

Урахувавши цю обставину, промоутери відомого торгово-розважального комплексу Французька Рів'єра, що на Лазуровому узбережжі, замовили Саші Сосно «щось аналогічне до “Квадратної голови”». Аналогом став «Квадратний охоронець» (Le Gnetteur) (2015 р.) з приблизно такими самими лінійними розмірами. Однак тепер уже квадратною стала шия і підборіддя, в яких розміщені ресторан і бутіки, а верхня частина голови, в якій засідають головні менеджери комплексу, виглядає квадратною лише тоді, якщо дивитися на неї зверху.



Луї Дузет (1834–1924).
Муза архітектури

5.2. Властивості та ознаки квадрата

Оскільки квадрат є одночасно прямокутником і ромбом, то він має усі властивості цих фігур. Зокрема, у квадраті: а) всі кути прямі; б) усі сторони рівні; в) діагоналі перетинаються, рівні, взаємно перпендикулярні, точкою перетину діляться навпіл і ділять навпіл кути квадрата.

Ті властивості, які є ознаками і прямокутника, і ромба, є ознаками квадрата.

Зокрема, ознакою квадрата є така теорема.

Теорема

(ознака квадрата за діагоналями).

Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються, рівні, взаємно перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — квадрат.

На підставі цієї ознаки можна запропонувати простий спосіб креслення квадрата за допомогою циркуля і косинця. А саме: за допомогою циркуля креслимо коло, а за допомогою косинця проводимо два взаємно перпендикулярних його діаметри AC і BD (рис. 1.104); тоді чотирикутник $ABCD$ буде квадратом.

На практиці, зокрема, при розбитті квадратів на місцевості, інколи зручно користуватися такою ознакою.

Теорема

(ознака квадрата за трьома сторонами).

Якщо в чотирикутнику три сторони рівні і дві з них перпендикулярні до третьої, то цей чотирикутник — квадрат.

На рис. 1.105 сторони AB , DC , BC чотирикутника $ABCD$ рівні і перші дві з них перпендикулярні до третьої. Це означає, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат.



Анвін Іваніцький
(нар. 1987 р.). Квадрат.
(Із серії «Геометрія»)
(2012 р.)

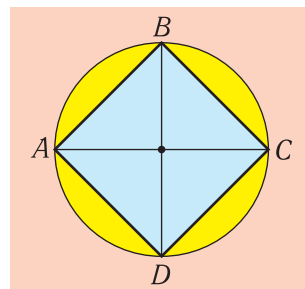


Рис. 1.104

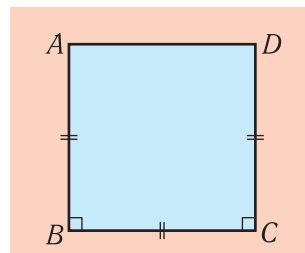


Рис. 1.105

Цим ми завершуємо розгляд часткових видів паралелограмів. Співвідношення між усіма ними яскраво ілюструє кругова діаграма, зображена на рис. 1.106. Вона показує, що множини прямокутників і ромбів є підмножинами множини паралелограмів, а їхнім перетином є множина квадратів.



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що точки перетину бісектрис усіх кутів прямокутника, який не є квадратом, є вершинами квадрата.

Розв'язання. Нехай у прямокутнику $ABCD$ проведено бісектриси усіх його кутів (рис. 1.107). Вони ділять ці кути на частини по 45° . Оскільки прямокутник не є квадратом, то бісектриси не перетинаються в одній точці. Нехай P, Q, S, T — точки їхнього перетину. Розглянемо бісектриси AP і BP , проведені із сусідніх вершин A і B . Оскільки у трикутнику PAB кути при основі AB дорівнюють по 45° , то $\angle P = 90^\circ$, а $PA = PB$. З рівності ж рівнобедрених трикутників ADT та BCQ (за другою ознакою) $AT = BQ$. Оскільки $PT = AP - AT$, а $PQ = BP - BQ$, то $PT = PQ$.

Аналогічно дійдемо висновку, що $\angle TSQ = 90^\circ$ і $ST = SQ$. Очевидно також, що $\angle PTS = \angle PQS = 90^\circ$ — як кути, що є вертикальними з прямими кутами ATD та BQC відповідно.

Отже, $PQST$ — прямокутник, у якому рівні суміжні сторони. Такий прямокутник є квадратом. Твердження задачі доведено.

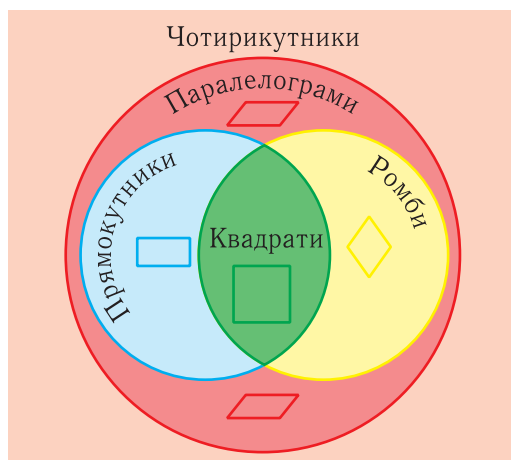


Рис. 1.106

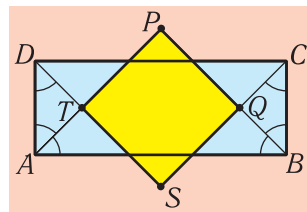


Рис. 1.107



Перевірте себе

1. Що таке квадрат? Чи є ця фігура паралелограмом? А — ромбом? Якщо так, то чим вона відрізняється серед цих фігур?
2. Сформулюйте і доведіть властивості квадрата.
3. Які ознаки квадрата ви можете назвати? Доведіть їх.
4. Які способи креслення квадрата ви можете запропонувати? На чому вони ґрунтуються?



Вправи і задачі

- 184°.** На рис. 1.108 відрізками сполучені множини фігур, з яких одна входить в іншу безпосередньо за означенням. Чи всі потрібні відрізки проведені і чи немає серед них зайвих?
- 185°.** За допомогою лінійки і косинця накресліть квадрат зі стороною 5 см.
- 186°.** За допомогою лінійки і косинця накресліть квадрат з діагоналлю 6 см.
- 187°.** Як накреслити квадрат, якщо задано дві його протилежні вершини?

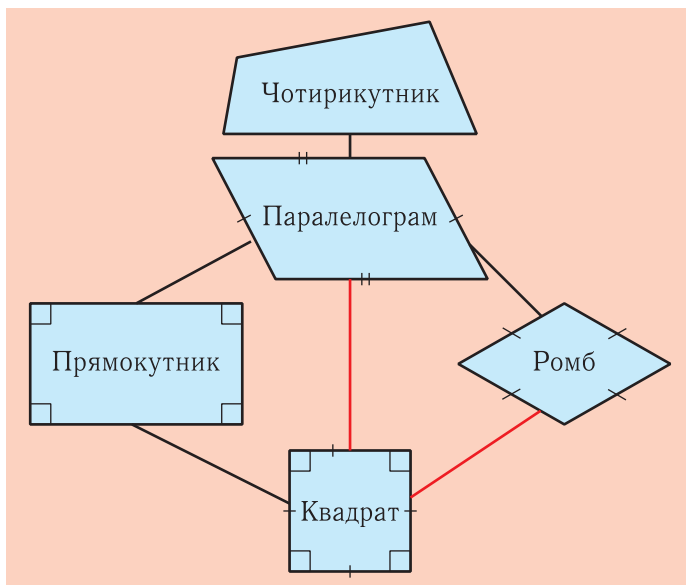


Рис. 1.108

- 188°.** Як накреслити квадрат, якщо задано одну з його вершин і точку перетину діагоналей?
- 189°.** Як накреслити квадрат, якщо задано дві його сусідні вершини? Скільки таких квадратів існує?
- 190°.** Доведіть, що прямокутник, який має дві рівні суміжні сторони, є квадратом.
- 191°.** На рис. 1.109 зображено «Червоний квадрат» Казимира Малевича, створений художником того самого 1915 р., що й більш відомий «Чорний квадрат» (див. стор. 29). Однак з точки зору геометрії між цими двома «квадратами» існує велика різниця (вважається, що художник свідомо вдався до неї, аби надати новому квадрату рухомості). Як ви гадаєте, у чому полягає ця відмінність і як її можна підтвердити за допомогою вимірювання?
- 192.** Доведіть, що прямокутник, у якому діагоналі перпендикулярні, є квадратом.
- 193.** Доведіть, що прямокутник, діагональ якого є бісектрисою його кутів, — квадрат.
- 194.** Як накреслити квадрат, якщо буде задано відрізок, який дорівнює його периметру?
- 195.** Скільки можна побудувати квадратів з вершинами у двох заданих точках?
- 196.** З яких двох рівних трикутників можна скласти квадрат?



Рис. 1.109.

Казимир Малевич. «Червоний квадрат» (1915 р.)

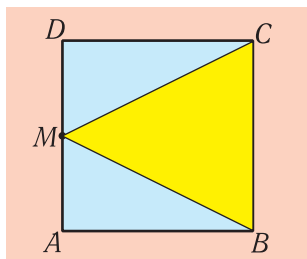


Рис. 1.110

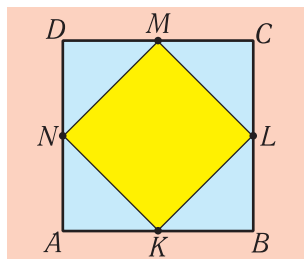


Рис. 1.111

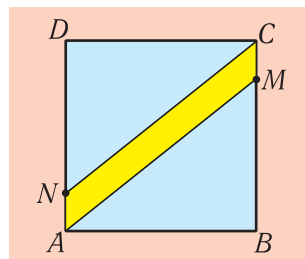


Рис. 1.112

- 197.** У квадраті $ABCD$ задано:
- M — середина сторони AD (рис. 1.110). Доведіть, що $\triangle BMC$ — рівнобедрений;
 - K, L, M, N — середини сторін AB, BC, CD, DA (рис. 1.111). Доведіть, що $KLMN$ — квадрат.
 - $AN = CM$ (рис. 1.112). Доведіть, що $AM \parallel CN$.
- 198.** У квадраті $ABCD$ $AN = DM = CL = BK$ (рис. 1.113). Доведіть, що $KLMN$ — квадрат.

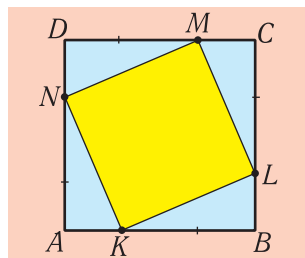


Рис. 1.113

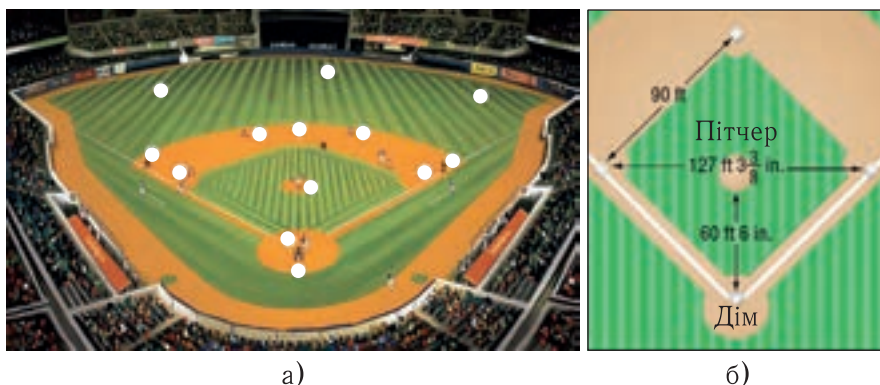


Рис. 1.114

- 199.** Бейсбол у Європі не дуже поширений вид спорту, однак неймовірно популярний на обох американських континентах і в Японії та Китаї. На рис. 1.114, а) зображений загальний вигляд бейсбольного поля і розміщення гравців на ньому. Поле має форму сектора і ділиться на так звану внутрішню зону (інфілд) і зовнішню зону (аутфілд). Інфілд має форму квадрата, сторона і діагональ якого у футах (ft) і дюймах (in) подані на рис. 1.114, б) ($1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$). В середині інфілда позначене місце для гравця, який кидає м'яч (пітчера), а в кутовій вершині (домашній базі) — місце для гравця супротивної команди, який бітою відбиває м'яч (кетчера). Інші деталі гри для задачі не важливі. Питання: чи справді позиція пітчера є центром інфілда, як на загал вважається, тобто — точкою перетину його діагоналей?
- 200.** Діагональ квадрата дорівнює d . Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Чи є обмежений ними чотирикутник квадратом? Чи можете ви визначити його периметр?
- 201.** У прямокутному трикутнику проведено бісектрису прямого кута. Через точку її перетину з гіпотенузою проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, обмежений цими прямими і катетами, є квадратом.
- 202.** На продовженнях сторін квадрата $ABCD$ відкладено рівні відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 (рис. 1.115). Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — теж квадрат.
- 203.** На діагоналях квадрата $ABCD$ відкладено відрізки $AK = CM$ та $BL = DN$ (рис. 1.116). Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — ромб.
- 204.** Діагональ квадрата дорівнює 6 см, а його сторона є діагоналлю іншого квадрата. Чому дорівнює сторона цього іншого квадрата?
- 205.** У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата лежить по одній стороні прямокутника, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата (рис. 1.117). Діагональ квадрата дорівнює 18 см. Визначте сторони прямокутника, якщо вони відносяться, як 1 : 2.

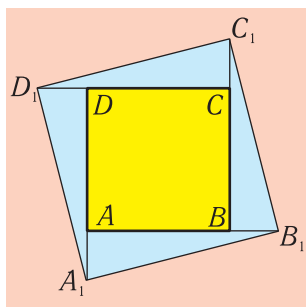


Рис. 1.115

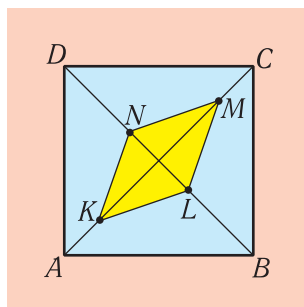


Рис. 1.116

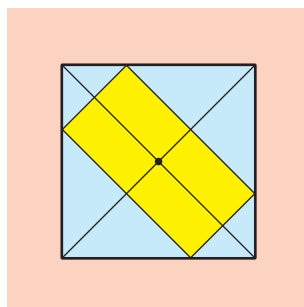


Рис. 1.117

- 206•** Через точку перетину діагоналей квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що точки перетину цих прямих зі сторонами квадрата є вершинами іншого квадрата.
- 207•** З яких чотирьох рівних трикутників можна скласти квадрат? Доведіть, що задача має два розв'язки.
- 208•** Побудуйте квадрат, якщо задано відрізок, який дорівнює різниці між його діагоналлю та стороною.
- 209•** На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати $ACKL$ та $BCMN$ (рис. 1.118). З вершин L і N цих квадратів опущено перпендикуляри LL_1 та NN_1 на пряму AB . Доведіть, що $AB = LL_1 + NN_1$, а також, що трикутник ABC можна скласти з трикутників ALL_1 та BNN_1 .
- 210•** $ABCD$, $BFGC$, $FKLG$ — три рівні квадрати (рис. 1.119). Доведіть, що $\angle CAK + \angle GAK + \angle LAK = 90^\circ$. Скористайтесь для цього додатковими побудовами, відображеними на рисунку.

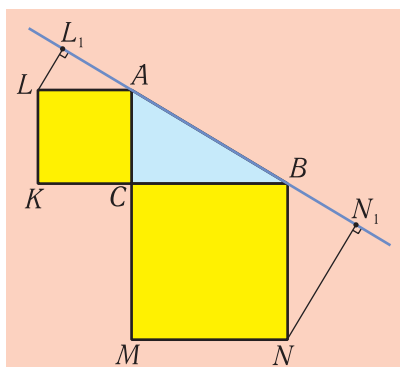


Рис. 1.118

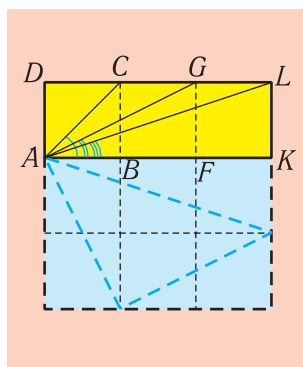


Рис. 1.119

- 211•** На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначені відповідно точки P і Q , для яких $\angle PAQ = 30^\circ$. Визначте $\angle AQD$.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Теон Александрійський і Гіпатія — перше творче об'єднання авторів підручників з математики

На «Сторінках історії» у §3 вже згадувалося про знамениті освітні і культурні заклади античного світу — Александрійський Мусейон і бібліотеку при ньому. Вони були засновані в єгипетській Александрії родоначальниками царської династії Птолемеїв — Птолемеєм I Сотером і Птолемеєм II Філадельфом, що правили Єгиптом з 323 по 245 рр. до н. е. Це були унікальні й незрівнянні ойкуменічні культурні інституції, що проіснували понад 1500 років і вирішальним чином вплинули на розвиток земної цивілізації. Якби список сімох чудес світу формувався не за зовнішніми ознаками, а за їхнім сукупним впливом на людство, то Александрійський Мусейон і його бібліотека поза всяким сумнівом були б на першому місці. Їхнє духовне світло світило далі і спрямовувало корабель цивілізації куди правильніше, ніж «чудесний» Александрійський маяк.

Утримання Мусейону і бібліотеки, у тому числі й повний пансіон для учених, здійснювалося з державної казни. Навіть після смерті Клеопатри у 30 р. н. е. — останньої представниці династії Птолемеїв — і завоювання Єгипту римлянами цей порядок не був порушений. Важкі часи наступили лише в кінці IV — на початку V ст. у зв'язку з переходом Єгипту під юрисдикцію Константинополя і утвердженням у ньому християнства як державної релігії. Утиски і переслідування язичників



Ліворуч. Агора з Мусейоном і бібліотекою в античній Александрії (сучасна реконструкція). Праворуч. Отто фон Корвін-Вержбицький (1812–1886). Рисунок-реконструкція інтер'єру Александрійської бібліотеки



Ліворуч. Александрійський маяк (сьоме «чудо» світу). Зруйнований у XIV ст. внаслідок землетрусу. Рисунок за реконструкцією 1909 р. німецького археолога Германа Тірша (1874–1939). Праворуч. Відроджена Александрійська бібліотека. Розмір похилого даху, що нагадує сонячний годинник і спускається до землі з висоти 7 поверху, сумірний з величиною футбольного поля (діаметр 160 м). Бібліотека уведена в експлуатацію у 2002 р. за підтримки ЮНЕСКО, Японії та низки арабських країн. Фонди жертвували установи й приватні особи з усього світу

нерідко супроводжувалися занедбанням і нищенням культурної спадщини. Повну руїну приніс 641 р., коли Єгипет завоювали араби і перенесли столицю в Каїр.

У різні часи в Мусейоні вели наукові дослідження учені, які тепер віднесені до класиків науки — Евклід, Ератосфен, Аристарх, Птолемей, Діофант. Не менш важливу місію виконували й численні «коментатори», які укладали тексти сучасних їм і давніх авторів та надавали їм форму, зручну для навчання, словом, — писали підручники. У багатьох випадках твори античних учених дійшли до нашого часу саме завдяки тому, що їх прокоментували і доповнили коментатори. Серед найвідоміших коментаторів в аннали історії увійшли Теон Александрійський (бл. 335–бл. 405) та його донька Гіпатія (бл. 370–415).

Достеменно відомо, що Теон Александрійський написав фундаментальні коментарі до «Великої математичної побудови астрономії» (більш відомої під арабською назвою «Альмагест») Клавдія Птолемея, а також до «Начал геометрії» та «Оптики» Евкліда. Гіпатії приписують утрачені коментарі до «Конічних перерізів» Аполлонія та «Арифметики» Діофанта.

Уважається, що деякі свої коментарі, зокрема, до «Начал геометрії» Евкліда, Теон і Гіпатія писали разом. Примітно, що європейська наука до XIX ст. послуговувалася саме їхньою версією цієї праці. Лише у 1808 р. французький дослідник Франсуа Пейрар (1760–1822) віднайшов у бібліотеці Ватикану більш ранню версію «Начал» Евкліда, яка дещо відрізняється від «теонівської».

На відміну від свого батька, Гіпатія не була «кабінетним» ученим. Вона була філософом, послідовником знаменитого Платона і так само, як її великий духовний



Розворот найстарішого рукопису «Начал геометрії» Евкліда в редакції Теона Александрійського.

Саме ця редакція була основою для усіх друкованих видань «Начал» до середини XIX ст.

й основою усіх підручників з геометрії упродовж 1500 років

учитель, займалася публічним викладанням філософії. Її лекції збирали натовпи захоплених слухачів, серед яких були і язичники, і християни, і навіть юдеї. Сам префект, глава світської влади, намісник імператора, був серед її шанувальників. Гіпатію називали «перевтіленням Платоном», а за її розум і красу порівнювали з богинями Афіною та Афродітою.

Однак часи змінювалися, одна епоха витісняла іншу. Окрім світської влади, в особі префекта, утверджувалася церковна влада в особі патріарха. Розпалювався неминучий конфлікт між ними. Суперництво між можновладцями підбурило релігійних фанатиків, які оголосили Гіпатію не тільки язичницею, а й віщункою та чаклункою. Вони вистежили й жорстоко вбили її. Це був один із тих зловісних злочинів проти людяності, причини і обставини яких залишаються вічною загадкою для нащадків.

За браком реальних фактів існують різні правдоподібні версії цієї трагедії. У різні часи вони надихали митців на художні твори про Гіпатію. Починаючи з XVIII ст., регулярно



Ліворуч. Збірка творів Олесь Бердника «Лабіринт мінотавра» з однойменною повістю, в основу якої покладені духовні пошуки Гіпатії (видавництво «Веселка», 1990 р.).

Праворуч. Елберт Грін Хаббарт (1856—1815). Гіпатія (1916 р.). Ілюстрація до сюжету «Гіпатія» в «Маленьких подорожах Хаббарта до осель великих Учителів» (Hubbard's Little Journeys to the Homes of Great Teachers)



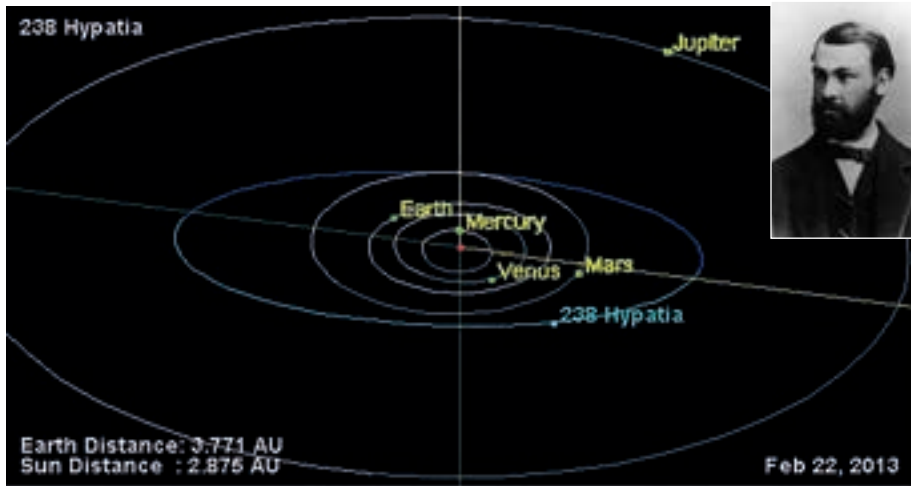
Рафаель Санті. Афіньська школа. Фреска (Ватикан, 1511 р.). На фрагменті праворуч у центрі — Гіпатія; біля неї стоїть філософ Парменід; сидить з книгою — Піфагор

з'являються вірші, поеми, есеї, п'єси і романи. І щоразу за всіма картинами, фактами, гіпотезами і здогадками вимальовувався осяйний образ дивовижної жінки з античного світу, яка вперше стала врівень з чоловіком у царині науки.

Одним із таких творів є чудова повість-легенда українського письменника-фантаста і правозахисника Олесь Бердника (1926–2003) «Гіпатія» (1972 р.), пізніше перейменована на «Лабіринт мінотавра». Мінотавр — у грецькій міфології, чудовисько з головою бика і тулубом людини, яке жило під землею у спеціально збудованому Дедалом лабіринті, щоби воно не могло з нього вибратися. «Лабіринтом мінотавра» у повісті Олесь Бердника називаються усі марновірні, несправедливі, насильницькі, здириницькі і підступні установами між людьми, які заважають їм досягти вищого призначення синів і доньок Прометея. Від своїх духовних учителів Гіпатія довідується, що шлях, який веде до виходу із цього лабіринту, пролягає через знання і самовіддане служіння істині. І це стає основним лейтмотивом її



Карди із фільму «Агора». Гіпатія з батьком і вчителем Теоном Александрійським



Розміщення астероїда 238 Нуратія відносно Сонця і планет на 22 лютого 2013 р.

У правому верхньому куті фото В.К. Кнорре початку 1870-х років

лекцій у Мусейоні, що, врешті рещт, призводить до смертельного конфлікту із силами зла.

Образ Гіпатії не раз надихав художників. На відомій фресці Рафаеля «Афінська школа» художник зобразив її в образі своєї музи і мадонни Маргарити Форнарини, з якої пізніше писав і знамениту «Сикстинську мадонну». Гіпатія тут — єдина жінка. Вона стоїть самотньо і гордо, в оточенні найвідоміших учених античності на чолі з Платоном і Аристотелем.

У 2009 р. іспанський режисер Алехандро Аменабар зняв касовий фільм «Агора», в якому відобразив свою версію хроніки життя Гіпатії. У кадрах цього фільму присутній і батько Гіпатії — Теон; інших портретів цього ученого у нас немає.

На честь Гіпатії названий астероїд (238 Нуратія), відкритий у 1884 р. українським і німецьким астрономом Віктором Карловичем Кнорре (1840–1919)¹⁾. На честь Теона Александрійського названий кратер на Місяці.

Із глибин віків долинають до нас дві сентенції Гіпатії, які звучать як її духовний заповіт людству:

«Краще думати і припускатися помилок, аніж зовсім не думати»;

«Найстрашніше — видавати марновірство за істину».

¹⁾ В.К. Кнорре народився і тривалий час жив та працював у Миколаєві.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§6. Дельтоїд

Якщо у чотирикутника протилежні сторони попарно рівні, то це — паралелограм.

Означення.

Чотирикутник, у якого попарно рівні суміжні сторони, називається дельтоїдом.

У паралелограмі всі кути менші від 180° , тому цей чотирикутник опуклий. У дельтоїді один із кутів може бути й більшим за 180° . Тому ці чотирикутники бувають як опуклими, так і неопуклими. На рис. 1.120 зображено опуклий дельтоїд $ABCD$, а на рис. 1.121 — неопуклий. В обох цих дельтоїдах рівні суміжні сторони AB і AD , а також суміжні сторони CB і CD .

Окремими видами дельтоїда є ромб і квадрат.

Назва «дельтоїд» у перекладі з грецької мови буквально означає «схожий на дельту», тобто на велику літеру Δ (дельта) з грецького алфавіту. Назва ж цієї літери утворилася від слова «дельта», яке означає ареал гирла великої річки, що розгалужується на рукави. Зокрема, у Греції з давніх-давен знали про велику дельту Нілу. Дельтоїди справді нагадують цю форму.

Із речей, близьких для школярів, форму дельтоїда мають повітряні змії.

Втім, у сучасній англomовній літературі термін «дельтоїд» уживається лише для неопуклих дельтоїдів (поряд з терміном *dart*, який дослівно означає «стріла», «жало»). Можливо, підставою є те, що форму неопуклих дельтоїдів зазвичай мають дельтаплани — легкі (як правило, безмоторні) літальні апарати. Опуклі ж дельтоїди у Великобританії називають «кайтами» (*kite*), а в США — «діамантами» (*diamond*). Основні значення слова *kite* — «коршун», «повітряний змій», тому зв'язок з формою опуклого дельтоїда тут очевидний. Основне ж значення слова *diamond* — «алмаз». Природний монокристал алмазу зазвичай має форму двох рівних чотирикутних пірамід із суміщеними основами.

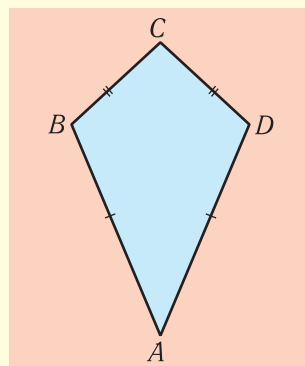


Рис. 1.120

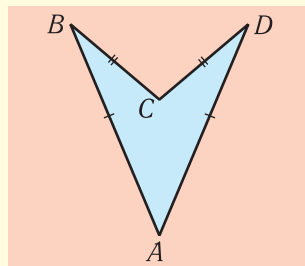


Рис. 1.121



Форми дельтоїда. Зліва направо. 1) Дельта Ніла (зображення на основі фотографії із космосу); 2) Дельтаплан; 3) Повітряний змій

Але під час ювелірної огранки один із гострих кутів зрізують, і внаслідок цього обриси отриманого діаманта теж стають схожими на опуклий дельтоїд.

Дельтоїд можна утворити за допомогою двох рівнобедрених трикутників з рівними основами, сумістивши ці основи. Якщо при цьому трикутники розмістяться по різні сторони від спільної основи, то утвориться опуклий дельтоїд (рис. 1.122), а якщо з одного боку — то неопуклий (рис. 1.123).

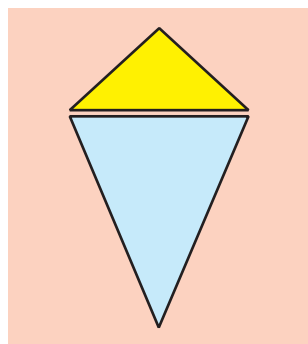


Рис. 1.122

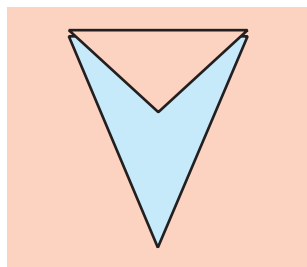


Рис. 1.123



Ліворуч. Найбільш поширена природна форма монокристалу алмазу з обрисом у вигляді ромба.

Праворуч. Алмаз після огранки (діамант) з обрисом, близьким до опуклого дельтоїда

Для утворення дельтоїда можна взяти і будь-які два рівні трикутники. Якщо сумістимо рівні сторони цих трикутників, то, залежно від величин прикладених кутів, дістанемо або опуклий (рис. 1.124), або неопуклий дельтоїд (рис. 1.125).

Теорема

(властивості дельтоїда).

У будь-якому дельтоїді, який не є ромбом, кути між нерівними сторонами рівні, а кути між рівними сторонами — нерівні. Діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні, а одна

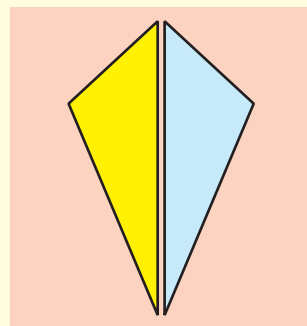


Рис. 1.124

з них є бісектрисою нерівних кутів і сама, або її продовження, ділить навпіл іншу діагональ.

Доведення. Нехай маємо довільний дельтоїд $ABCD$ (опуклий чи неопуклий), який не є ромбом, O — точка перетину прямих, на яких лежать його діагоналі (рис. 1.126). Оскільки у трикутниках ABC і ADC $AB = AD$, $BC = DC$ (за означенням), AC — спільна сторона, то, за третьою ознакою, вони рівні. Тому $\angle ABC = \angle ADC$, тобто кути B і D між нерівними сторонами дельтоїда рівні.

З рівності тих самих трикутників ABC і ADC випливає, що $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle DCA$. Отже, діагональ AC справді ділить нерівні кути A і C навпіл.

Якщо припустимо, що рівними є й кути A і C дельтоїда, то матимемо, що в трикутнику BAC рівними є кути BAC та BCA . Тоді це — рівнобедрений трикутник, і в ньому $AB = BC$. Отже, дельтоїд $ABCD$ є ромбом, що суперечить умові теореми. Отже, кути A і C між рівними сторонами нерівні.

Розглянемо, нарешті, рівнобедрений трикутник ABD . Як щойно доведено, AO — його бісектриса, тому вона є висотою і медіаною. Отже, $AC \perp BD$, $BO = OD$, тобто діагоналі дельтоїда справді перпендикулярні і одна з них, або її продовження, ділить навпіл іншу. Теорему доведено.

Як бачимо, властивості дельтоїда багато в чому аналогічні до властивостей ромба. Очевидні аналогії існують і між ознаками цих фігур за їхніми діагоналями.

Теорема

(ознака дельтоїда).

Якщо у чотирикутнику діагоналі взаємно перпендикулярні і одна з них, або її продовження, ділить навпіл іншу, то цей чотирикутник — дельтоїд.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ точка O — перетин прямих, на яких лежать діагоналі, самі ці прямі взаємно перпендикулярні і $BO = OD$ (див. рис. 1.126). Тоді у трикутнику ABD висота AO є медіаною. Отже, цей трикутник — рівнобедрений. Тому $AB = AD$. З аналогічних причин рівнобедреним є трикутник CBD , отже, $CB = CD$. Тому, відповідно до означення, $ABCD$ — дельтоїд, що й треба було довести.

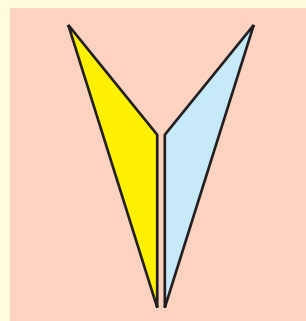


Рис. 1.125

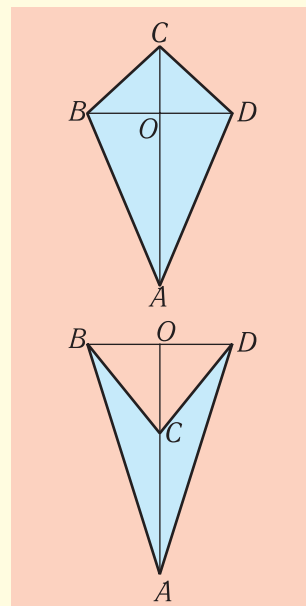


Рис. 1.126

З доведеної ознаки випливає простий спосіб для побудови дельтоїда за діагоналями. Взявши за діагоналі два довільні взаємно перпендикулярні відрізки AC і BD , один з яких або його продовження ділить навпіл інший, і сполучивши послідовно їхні кінці, дістанемо дельтоїд $ABCD$ (див. рис. 1.126). Якщо діагоналі перетинаються, то дельтоїд буде опуклим, якщо ні, — то неопуклим.

На рис. 1.127 зображена діаграма, яка наочно ілюструє співвідношення між множинами дельтоїдів різних видів.

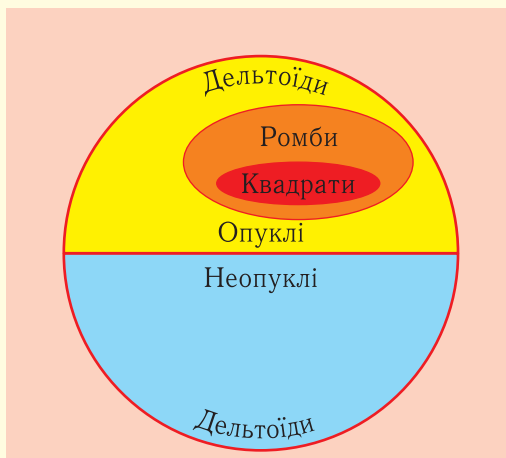


Рис. 1.127



Перевірте себе

1. Дайте означення дельтоїда. Як пояснюється назва цієї фігури?
2. Як можна скласти дельтоїд із трикутників? Чи існують неопуклі дельтоїди?
3. Сформулюйте і доведіть відомі вам властивості дельтоїда.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку дельтоїда за діагоналями. Як на основі цієї ознаки можна здійснити побудову дельтоїда?
5. Яких відомих вам форм може набувати дельтоїд в окремих випадках? А — яких не може?



Вправи і задачі

- 212°.** Паралелограм розрізали вздовж діагоналі на два трикутники. Чи завжди з них можна скласти дельтоїд? За яких умов одержаний дельтоїд буде опуклим?
- 213°.** На рис. 1. 128 зображене заощення площини (паркет) за допомогою дельтоїдів. Чому дорівнюють їхні кути?

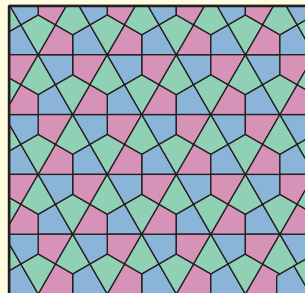


Рис. 1.128

- 214°.** Сума двох нерівних сторін дельтоїда дорівнює 16 см. Визначте периметр дельтоїда. Чи можна знайти його сторони?
- 215°.** Чи може опуклий дельтоїд мати: 1) тільки один гострий кут; 2) два рівних гострих кутів; 3) два нерівних гострих кутів; 4) три рівних гострих кутів; 5) три гострих кутів, з яких два рівні; 6) три нерівних гострих кутів?
- 216°.** Чи може опуклий дельтоїд мати: 1) тільки один прямий кут; 2) два прямих кутів; 3) три прямих кутів?
- 217°.** Чи може опуклий дельтоїд мати: 1) тільки один тупий кут; 2) два рівних тупих кутів; 3) два нерівних тупих кутів; 4) три рівних тупих кутів (які тоді межі для їхніх величин?); 5) три тупих кутів, з яких два рівні; 6) три нерівних тупих кутів?
- 218°.** Чи може сума кутів, які прилягають до кожної сторони дельтоїда, дорівнювати 180° ?
- 219°.** Доведіть, що у дельтоїді з двома прямими протилежними кутами (такий дельтоїд називається *двопрямокутним*) один із нерівних протилежних кутів гострий, а інший — тупий.
- 220.** Величина кожного з двох протилежних кутів дельтоїда дорівнює 105° . Діагональ, яка сполучає вершини цих кутів, ділить їх у відношенні 3 : 4. Визначте два інших куту дельтоїда.
- 221.** З'ясуйте, опуклий чи неопуклий дельтоїд, якщо різниця двох його протилежних кутів на 20° більша за суму двох інших протилежних кутів.
- 222.** Периметр дельтоїда дорівнює 20 см, а його сторони відносяться, як 3 : 2. Визначте сторони дельтоїда.
- 223.** Сума двох нерівних сторін дельтоїда дорівнює 16 см, а їхня різниця — 4 см. Визначте сторони дельтоїда.
- 224.** Одна зі сторін дельтоїда більша за іншу на 8 см, а периметр дельтоїда дорівнює 120 см. Визначте сторони дельтоїда.
- 225.** Периметр дельтоїда дорівнює 16, а добуток довжин усіх його сторін — 225. Визначте сторони дельтоїда.
- 226.** На рис. 1.129 $BC = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AB \neq BC$. Доведіть, що $ABCD$ — дельтоїд.
- 227.** На рис. 1.130 $AB = BD = AD$, $OB = OC = OD$. Доведіть, що $ABCD$ — дельтоїд.
- 228.** На рис. 1.131 $AB = AD$, $AC \perp BD$, $AO \neq OC$. Доведіть, що $ABCD$ — дельтоїд.

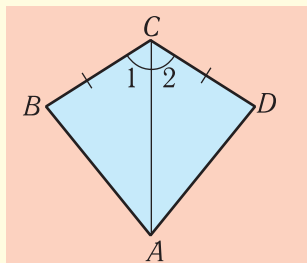


Рис. 1.129

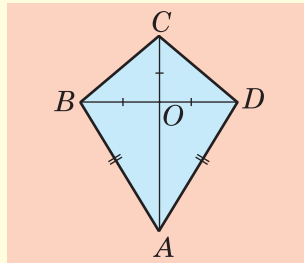


Рис. 1.130

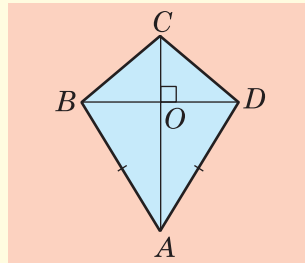


Рис. 1.131

229. На сторонах кута MAN позначено точки B, D, K і L так, що $AB = AD, BK = DL$ (рис. 1.132). Відрізки BL і DK перетинаються у точці C . Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — дельтоїд.

230. Середини сторін дельтоїда послідовно сполучені відрізками. Доведіть, що утворений чотирикутник — прямокутник. Чи може цей прямокутник бути квадратом?

231. Різниця двох протилежних кутів дельтоїда дорівнює величині меншого з них, а їхня сума на 90° менша від суми двох інших протилежних кутів. Визначте кути дельтоїда.

232*. Одна з діагоналей дельтоїда дорівнює його меншій стороні, а кути, утворені діагоналями з більшою стороною, відносяться, як $2 : 7$. Визначте кути дельтоїда.

233*. Доведіть, що сума кутів, які прилягають до більшої сторони дельтоїда, менша від 180° .

234*. Доведіть, що сума кутів, які прилягають до меншої сторони дельтоїда, більша за 180° .

235*. З однієї точки до кола проведено дві дотичні. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є ця точка, точки дотику дотичних з колом і центр кола, є двопрямокутним дельтоїдом (або квадратом).

236*. Чи може в неопуклому дельтоїді сума трьох менших кутів дорівнювати більшому четвертому куту?

237*. У дельтоїді проведено відрізки, які сполучають середини протилежних сторін. Доведіть, що ці відрізки перетинаються на одній з діагоналей дельтоїда і діляться точкою перетину навпіл.

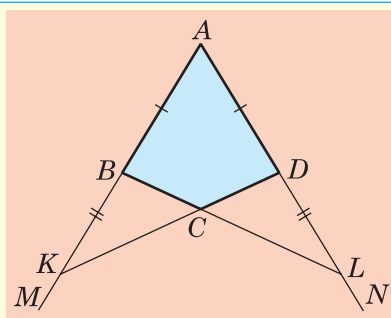


Рис. 1.132

§7. Трапеція

7.1. Означення трапеції і приклади реальних трапецеїдальних форм

Уроки
16–19



Майже усі окремі види чотирикутників, які ми досі вивчали, — паралелограми, прямокутники, ромби, квадрати — мають по дві пари паралельних сторін. Зараз приступаємо до вивчення чотирикутників, у яких є лише одна пара паралельних сторін. Такі чотирикутники називаються трапеціями. Про походження цієї назви розповідається на «Сторінках історії» у кінці параграфа.

Означення.

Трапецією називається чотирикутник, у якому дві сторони паралельні, а дві інші — не-паралельні. Паралельні сторони трапеції називаються її основами, а непаралельні — бічними сторонами.

На рис. 1.133 зображено різні форми трапецій з основами AB і DC та бічними сторонами AD і BC .

Трапецеїдальні форми мають дуже широкий ужиток. Нижче подаються приклади. Найбільше вражають грандіозні архітектурні споруди.

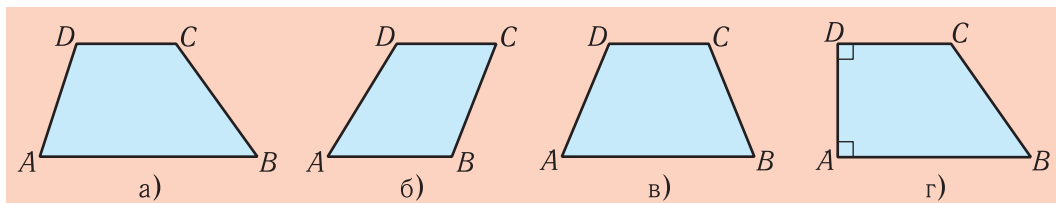
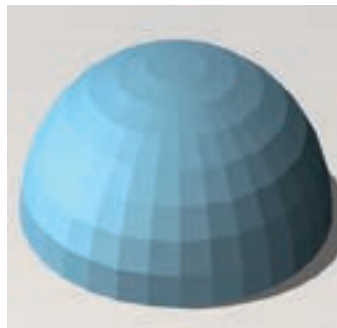


Рис. 1.133



«Діамантовий будинок» (8 поверхів) в адміністративній столиці Малайзії м. Путраджай (2009 р.). Тут знаходиться штаб-квартира національної енергетичної комісії. У 2012 р. організація АСЕАН преміювала проект за інтегративним показником з енергозбереження та екологічності.

Будівля має форму зрізаної піраміди з трапецеїдальними гранями, що й робить її схожою на справжній діамант



Ліворуч. Вежа Тайпей-101 у Тайвані. 101 поверх, висота 509 м. Третя за висотою споруда світу.

Зведена у 1999 р. Вигляд кожної грані складається із поставлених одна на одну трапецій.

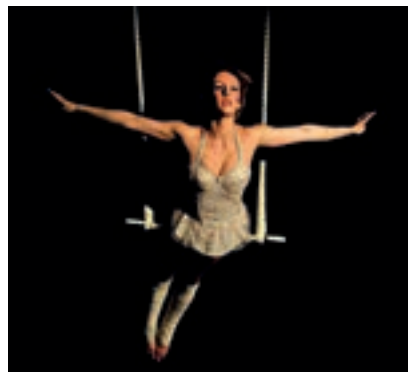
У центрі. Вежа світового фінансового центру у Шанхаї (Китай). Висота 492 м. Четверта за висотою споруда світу. Зведена у 2008 р. Найхарактернішою рисою є трапецеїдальна діафрагма на вершині.

Праворуч. Трапецеїдальний каркас для зведення сферичного купола

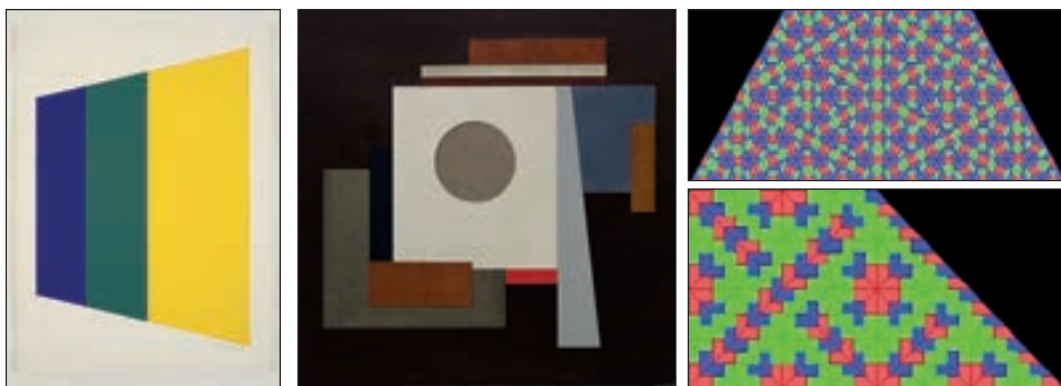
Трапеції є зручним засобом розмовної мови для опису найрізноманітніших речей — від циркових «трапецій» до фасонів одягу та аксесуарів.

Не забувають про трапецію й дизайнери та художники-абстракціоністи.

Як бачимо, у геометричній палітрі реальності трапеція є важливим елементом.



Зліва направо: 1) цирковий номер на «літаючій трапеції» («трапецією» у цирку називають спортивний снаряд, який складається із металевої перекладини (грифа) та прив'язаних до неї двох довгих канатів або тросів, що кріпляться під куполом цирку); 2—3) фасон одягу «трапеція» — з прямим розширенням донизу; 3) сумки-«трапеції»



Зліва направо: 1) Піт Хедгард (Peter Hedegaard). Трапеція (1970 р.);
2) Джейсон Блекмор (Jason Blackmore). Конструкт із сірою трапецією (2013 р.);
3) паркеті із прямокутних і рівнобедрених трапецій

7.2. Найпростіші властивості трапеції

З означення трапеції випливає, що її основи є протилежними сторонами. Справді, внаслідок паралельності (рис. 1.134) основи не мають спільної вершини, а сторони чотирикутника, які не мають спільної вершини, називаються протилежними.

Бічні сторони трапеції утворюють іншу пару протилежних сторін.

Основи трапеції не можуть бути рівними. Справді, якби вони були рівними, то, за відповідною однокою паралелограма, такий чотирикутник мав би ще дві паралельні сторони, а це суперечить означенню трапеції.

Часто більшу основу трапеції заради зручності називають *нижньою* основою, а меншу — *верхньою*. Звісно, ці назви умовні. Як показують наведені вище ілюстрації, «верхня» основа реальної трапеції може розміщуватися внизу, а «нижня» — вгорі.

Кути, що прилягають до бічної сторони трапеції (див. рис. 1.134), є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, які містять основи, та січній, що містить бічну сторону. Тому, за властивістю

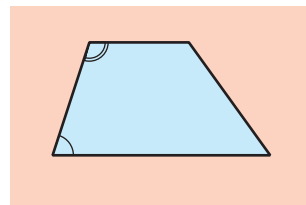


Рис. 1.134

паралельних прямих, сума цих кутів дорівнює 180° . Звідси випливає, що кожен кут трапеції менший від 180° . А тому цей чотирикутник є опуклим, а його діагоналі перетинаються (рис. 1.135).

Якщо один із кутів трапеції прямий (рис. 1.136), то прямим є й інший кут, який прилягає до тієї самої бічної сторони.

Означення.

Трапеція, що має два прямих кути, називається прямокутною.

Більше двох прямих кутів трапеція мати не може, бо тоді це був би прямокутник, а прямокутник має дві пари паралельних сторін.

Означення.

Висотою трапеції називається будь-який із перпендикулярів, опущених з будь-якої точки однієї з основ на пряму, що містить іншу основу.

На рис. 1.137 зображені висоти DE , CF і MN трапеції $ABCD$, проведені з точок меншої основи.

Усі висоти трапеції рівні між собою — як перпендикуляри між паралельними прямими, що містять основи.

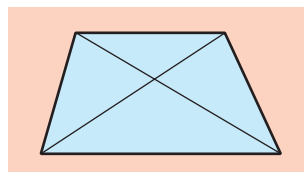


Рис. 1.135

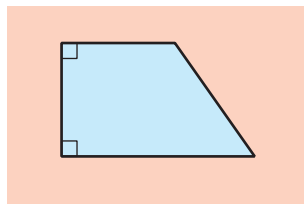


Рис. 1.136

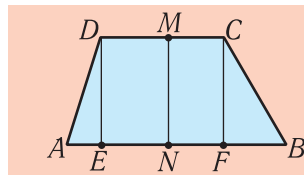


Рис. 1.137



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що бісектриса кута трапеції відтинає від протилежної основи або від її продовження відрізок, рівний бічній стороні трапеції.

Розв'язання. Нехай у трапеції $ABCD$ з основами AB і DC проведено бісектрису AF кута A

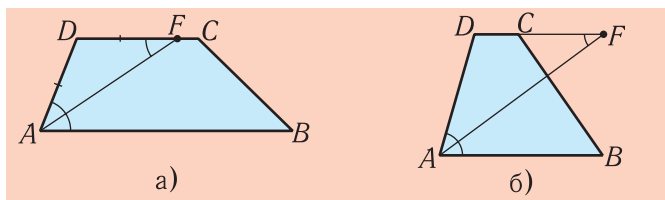


Рис. 1.138

(рис. 1.138, а), б); тут зображено два можливих випадки розміщення точки F — на основі DC та на її продовженні). За означенням бісектриси, $\angle DAF = \angle FAB$, а за властивістю паралельних прямих, перетнутих січною, $\angle FAB = \angle AFD$. Отже, $\angle DAF = \angle AFD$. Звідси випливає, що трикутник DAF — рівнобедрений, а DA та DF — його бічні сторони. Отже, $DF = DA$. Твердження задачі доведено.

Наслідок.

Якщо бісектриса кута трапеції проходить по її діагоналі, то одна з основ трапеції дорівнює бічній стороні, прилеглій до цього кута (рис. 1.139).

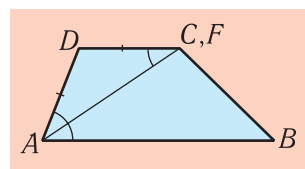


Рис. 1.139

7.3. Рівнобічна трапеція

Означення.

Трапеція, в якій бічні сторони рівні, називається *рівнобічною* або *рівнобедреною*.

На рис.1.140 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$; у ній бічні сторони AD і BC рівні між собою.

Теорема

(про властивості рівнобічної трапеції).

У рівнобічній трапеції:

- кути при основі рівні;*
- сума протилежних кутів дорівнює 180° ;*
- діагоналі рівні;*
- відрізки діагоналей від точки їхнього перетину до кожної з основ попарно рівні.*

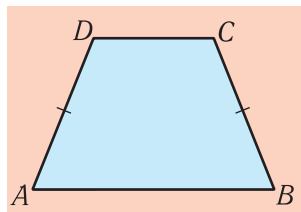


Рис. 1.140

Доведення. а) Нехай маємо рівнобічну трапецію $ABCD$, у якій AB і DC — відповідно нижня і верхня основи, AD і BC — бічні сторони ($AD = BC$) (рис. 1.141). Проведемо висоти DE і CF . Дістанемо прямокутні трикутники AED та BFC , які рівні за катетом ($DE = CF$) і гіпотенузою ($AD = BC$). Тому рівні і їхні гострі кути A і B , які є кутами трапеції при нижній основі. Відомо, що $\angle A + \angle D = 180^\circ$ і $\angle B + \angle C = 180^\circ$. Звідси $\angle D = 180^\circ - \angle A$, $\angle C = 180^\circ - \angle B$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $\angle D = \angle C$. Перше твердження теореми доведено.

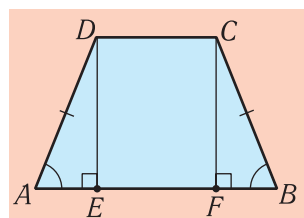


Рис. 1.141

б) За властивістю кутів, які прилягають до бічної сторони трапеції, $\angle A + \angle D = 180^\circ$. А за щойно доведеним, $\angle A = \angle B$. Звідси $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Аналогічно доводимо, що $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

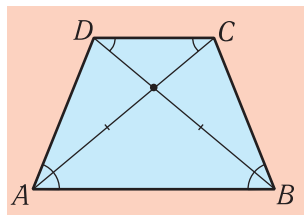


Рис. 1.142

в) Нехай тепер у рівнобічній трапеції $ABCD$ проведено обидві діагоналі AC і BD (рис. 1.142). Розглянемо трикутники DAB та CBA . Вони рівні за першою ознакою (сторона AB у них спільна, $DA = CB$ за умовою, $\angle A = \angle B$ за доведенням у п. а). З рівності цих трикутників випливає рівність відрізків DB і CA , що й треба було довести.

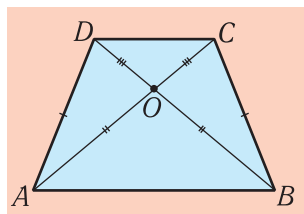


Рис. 1.143

г) Нехай O — точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 1.143). З рівності тих самих трикутників DAB і CBA випливає рівність їхніх відповідних кутів DBA та CAB . Звідси виходить, що трикутник OAB — рівнобедрений, а OB та OA — його бічні сторони. Оскільки вони рівні між собою, а за вже доведеним $DB = CA$, то рівними є й відрізки OD та OC . Теорему доведено повністю.

Наслідок.

Прямокутна трапеція не може бути рівнобічною.

Доведення. Якби прямокутна трапеція була рівнобічною, то кути при кожній з її основ були б прямими. Отже, це був би прямокутник.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Кожна із зазначених у щойно доведених теорем властивостей виконується лише для рівнобедрених трапецій, тобто є ознакою цих фігур.

Теорема

(ознаки рівнобічної трапеції).

Якщо для трапеції виконується яка-небудь із таких властивостей:

- а) кути при одній з основ рівні;
 - б) сума протилежних кутів дорівнює 180° ;
 - в) діагоналі рівні;
 - г) відрізки діагоналей від точки їхнього перетину до однієї з основ рівні,
- то така трапеція є рівнобічною.

Доведення. а) Нехай у трапеції $ABCD$ кути A і B при більшій основі рівні (див. рис. 1.141) (якби було вказано, що рівні кути при меншій основі, то звідси все одно випливало б, що рівні й кути при більшій основі, оскільки суми кутів, які прилягають до кожної бічної сторони, дорівнюють по 180°). Провівши висоти DE та CF , дістанемо рівні прямокутні трикутники AED та BFC (за катетом: $DE = CF$ та гострим кутом: $\angle A = \angle B$). Звідси $AD = BC$, що й треба було довести.

б) Нехай у трапеції $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (див. рис. 1.140). За властивістю трапеції $\angle B + \angle C = 180^\circ$. Звідси, $\angle A = \angle B$. Тоді за доведеним у п. а), трапеція $ABCD$ — рівнобічна.

в) Нехай тепер у трапеції $ABCD$ рівні діагоналі AC і BD (рис. 1.144). Провівши висоти DE і CF , дістанемо прямокутні трикутники AFC та BED , які рівні за катетом ($DE = CF$) та гіпотенузою ($AC = BD$). Звідси $\triangle CAF = \triangle DBE$. Розглянемо тоді трикутники ABD та BAC . Вони рівні за першою ознакою. Звідси $BD = AC$, що й треба було довести.

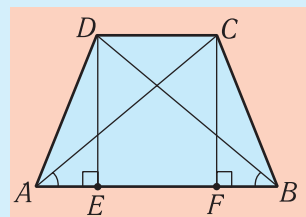


Рис. 1.144

г) Нехай, нарешті, у трапеції $ABCD$ рівними є відрізки діагоналей OA та OB від точки їхнього перетину O до однієї з основ (див. рис. 1.143). Тоді трикутник OAB — рівнобедрений. Звідси $\angle OAB = \angle OBA$.

За властивістю паралельних прямих, $\angle OCB = \angle OAB$, $\angle ODC = \angle OBA$. Отже, $\angle OCB = \angle ODC$. Тому рівнобедреним є й трикутник ODC . Звідси $OC = OD$. Виходить, що діагоналі AC і BD складаються із двох пар відповідно рівних відрізків. Отже, вони рівні. Тому, за доведеним у п. в), трапеція $ABCD$ — рівнобічна. Теорему доведено.



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що у рівнобічній трапеції висота, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки, довжини яких дорівнюють піврізниці та півсумі довжин основ.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у якій $AD = BC$, DC — її менша основа, DE і CF — висоти, проведені з кінців цієї основи (рис. 1.145). Тоді $DEFC$ — прямокутник, і тому $EF = DC$.

Прямокутні трикутники AED та BFC рівні за катетом ($DE = CF$, як висоти трапеції) та гіпотенузою ($AD = BC$, як бічні сторони рівнобічної трапеції). Звідси $AE = BF$. Отже, $AE + BF = 2AE$. З іншого боку $AE + BF = AB - EF = AB - DC$. Отже, $2AE = AB - DC$, і тому $AE = \frac{1}{2}(AB - DC)$.

Далі знаходимо:

$$BE = AB - AE = AB - \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(AB + DC).$$

Твердження задачі доведено.

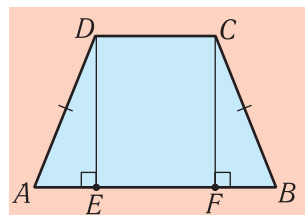


Рис. 1.145

7.4. Середня лінія трапеції

Означення.

Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На рис. 1.146 MN — середня лінія трапеції $ABCD$.

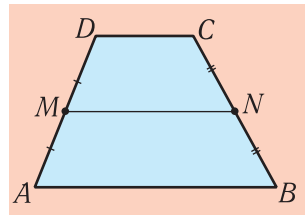


Рис. 1.146

Теорема*(про середню лінію трапеції).**Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їхній півсумі.*

Доведення. Нехай MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 1.147), тобто $AM = MD$, $BN = NC$. Проведемо через точку N пряму KL , паралельну бічній стороні AD . Нехай K , L — точки її перетину відповідно з прямими AB і DC . Розглянемо трикутники NKB та NLC . Вони рівні за другою ознакою ($NB = NC$, за означенням середньої лінії. $\angle KNB = \angle LNC$, як вертикальні, $\angle NBK = \angle NCL$, як внутрішні різносторонні при паралельних AB і DC та січній KL). З рівності цих трикутників випливає рівність відрізків NK та NL .

За побудовою, чотирикутник $AKLD$ — паралелограм. У ньому M — середина сторони AD , N — середина сторони KL . А оскільки $AD = KL$, то $AM = KN$, $MD = NL$. Тоді за відповідною ознакою, чотирикутники $AKNM$ та $MNLD$ є паралелограмами. Тому $MN \parallel AK$ і $MN \parallel DL$. Це також означає, що $MN \parallel AB$ і $MN \parallel DC$. Перше твердження теореми доведено.

З рівності трикутників NKB та NLC випливає також рівність відрізків KB та LC . А з того, що чотирикутники $AKNM$ та $MNLD$ паралелограми, випливає рівність відрізків AK , MN та DL . Отже,

$$MN = AB - KB \text{ і } MN = DC + KB.$$

Додавши почленно ці рівності, дістанемо:

$$2MN = AB + DC,$$

або

$$MN = \frac{AB + DC}{2}.$$

Теорему доведено.

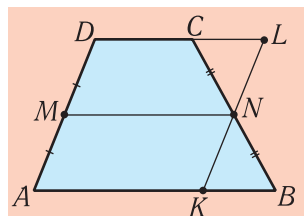


Рис. 1.147



Найбільша піраміда майя, відома як «Ель Кастільйо» («Замок») (м. Чічен-Ітца у Мексиці). Зведена близько 800 р. н. е. Її висота 25 м. В основі піраміди лежить квадрат зі стороною 55,5 м. Бічні грані піраміди мають форму рівнобічних трапецій



Житловий будинок і готель у м. Вінья дель Мар у Чилі. За свою форму, що нагадує мексиканські піраміди, споруда дістала назву «Едіфісіо Майя», тобто «Будинок Майя»

Наслідок.

Якщо через середину бічної сторони трапеції провести пряму, паралельну основам, то вона поділить навпіл іншу бічну сторону трапеції.

Доведення. Нехай M — середина бічної сторони AD трапеції $ABCD$, а пряма MP паралельна основам AB і DC (рис. 1.148). Через середину N бічної сторони BC проведемо пряму MN . Відповідно до доведеної теореми, пряма MN теж буде паралельною основам трапеції. Але, за аксіомою про паралельні прямі, через точку M можна провести лише одну пряму, паралельну прямій AB . Тому пряма MP збігається з прямою MN , тобто проходить через середину бічної сторони BC . Твердження наслідку доведено.

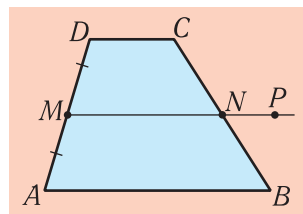


Рис. 1.148

**Розв'язуємо разом****Задача**

(із давньовавильонського математичного тексту II тис. до н. е.). Основи трапеції дорівнюють 1 лікоть і 4 лікті. Кожну з бічних сторін трапеції поділено на три рівні частини, а точки поділу, взяті по порядку від однієї з основ, сполучені відрізками. Які довжини цих відрізків?

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція, у якій основи DC і AB дорівнюють відповідно 1 лікоть і 4 лікті (рис. 1.149). Нехай точки P, R ділять бічну сторону AD на три рівні частини, а точки Q, S так само ділять бічну сторону BC . Потрібно визначити довжини відрізків PQ і RS .

Доведемо спочатку, що відрізки PQ і RS паралельні основам трапеції. Для цього проведемо прямі PM і RN , паралельні основам AB і DC (вважаємо, що точки M, N належать прямій BC). Дістанемо трапеції $ABNR$ та

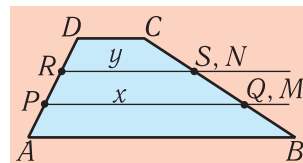


Рис. 1.149

$DPMC$, у яких, за наслідком з теореми про середню лінію трапеції, M — середина бічної сторони NB , а N — середина бічної сторони CM . Отже, точки M і N ділять відрізок BC на три рівних частини, тобто збігаються відповідно з точками Q і S . Цим ми довели, відрізки PQ і RS справді паралельні основам трапеції $ABCD$.

За наслідком з теореми про середню лінію трапеції, PQ — середня лінія трапеції $ABSR$, а RS — середня лінія трапеції $PQCD$. Позначивши їхні довжини у ліктях відповідно через x , y , за властивістю середньої лінії трапеції матимемо:

$$x = \frac{y+4}{2}; \quad y = \frac{1+x}{2}.$$

Звідси $y = 2x - 4$, $x = 2y - 1$. Підставивши значення x із другої рівності у першу, після спрощення дістанемо: $3y = 6$. Отже, $y = 2$ (лікті). Тоді $x = 2y - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ (лікті).

Відповідь. 2 лікті і 3 лікті.



Давньовавильонський храм Етеменанки (шумерійською «Дім основи неба і землі») — прообраз біблійної «Вавильонської вежі» (VII ст. до н. е.). Реконструкція. Яруси трапецеїдальної частини споруди ділять її бічні сторони на рівні відрізки

7.5. Середня лінія трикутника

Уявімо собі, що кінці D і C однієї з основ трапеції $ABCD$ (рис. 1.150) необмежено зближаються один з одним. У граничному положенні вони сумістяться (рис. 1.151), а трапеція $ABCD$ перетвориться на трикутник ABC . Тоді середня лінія MN трапеції стане відрізком, який сполучає середини двох сторін трикутника. Такий відрізок називається середньою лінією трикутника.

Означення.

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Такі міркування дають змогу з теореми про властивість середньої лінії трапеції вивести теорему про середню лінію трикутника.

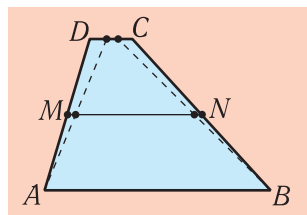


Рис. 1.150

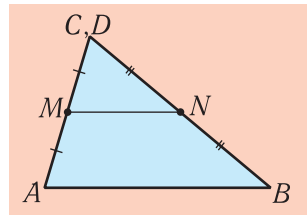


Рис. 1.151

Теорема

(про середню лінію трикутника).

Середня лінія трикутника, яка сполучає середини бічних сторін, паралельна основі і дорівнює її половині.

Середня лінія MN трикутника ABC , зображеного на рис. 1.151, паралельна стороні AB і дорівнює її половині.



Анвін Іваницький. Трикутник.
(Із серії «Геометрія»)
(2012 р.)

Наслідок.

Якщо через середину бічної сторони трикутника провести пряму, паралельну основі, то вона поділить навпіл іншу бічну сторону.



Розв'язуємо разом

Задача 1.

Чи може середня лінія трапеції проходити через точку перетину її діагоналей?

Розв'язання. Припустимо, що у трапеції $ABCD$ з основами AB і DC середня лінія MN проходить через точку O перетину діагоналей (рис. 1.152).

Тоді, за наслідком з теореми про середню лінію трикутника, пряма MO ділитиме сторони DB і CA трикутників DAB і CAB навпіл. Отже, точка O ділитиме навпіл кожен з діагоналей чотирикутника $ABCD$. За відповідною ознакою паралелограма, це означає, що $ABCD$ — паралелограм, а це суперечить умові. Отже, середня лінія трапеції за жодних умов не може проходити через точку перетину діагоналей.

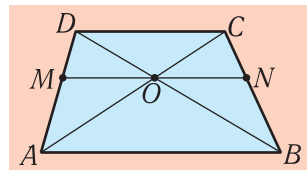


Рис. 1.152

Задача 2.

Довести, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання. Нехай маємо довільний чотирикутник $ABCD$, P , Q , R , S — середини його сторін (рис. 1.153). Провівши діагональ AC , матимемо, що PQ і SR — середні лінії у трикутниках BAC і DAC . За теоремою про середню лінію трикутника, вони паралельні стороні AC і рівні її половині. Отже, вони паралельні і рівні між собою. Тоді, за відповідною ознакою, $PQRS$ — паралелограм. Твердження задачі доведено.

Задача 3.

Довести, що коли відрізок, який сполучає середини протилежних сторін чотирикутника, дорівнює півсумі двох інших сторін, то цей чотирикутник — трапеція або паралелограм.

Розв'язання. Нехай маємо чотирикутник $ABCD$, у якому відрізок MN , що сполучає середини сторін AD і BC , дорівнює півсумі сторін AB і DC (рис. 1.154). Нехай P — середина діагоналі AC . Тоді MP — середня лінія трикутника ADC , а PN — середня лінія трикутника CAB . Отже,

$$MP = \frac{1}{2} DC, \quad PN = \frac{1}{2} AB.$$

Виходить, що $MP + PN = \frac{1}{2}(DC + AB)$, тобто

$MP + PN = MN$. А це означає, що точка P належить відрізку MN . Отже, сторони AB і DC чотирикутника $ABCD$ паралельні цьому відрізку, а тому й паралельні між собою. Тому $ABCD$ — трапеція або паралелограм.

Зауваження. Можна уточнити, коли саме чотирикутник $ABCD$ буде паралелограмом. Для цього мають збігатися середини P і Q його діагоналей. А оскільки точка Q теж належить відрізку MN , то це буде тоді і тільки тоді, коли відрізок MN проходить через точку перетину діагоналей (рис. 1.155).

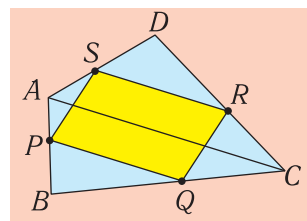


Рис. 1.153

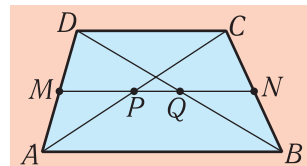


Рис. 1.154

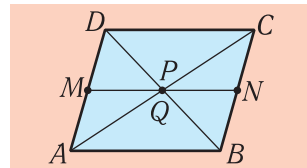


Рис. 1.155

7.6. Чотирикутна «геометрична палітра»

Ми завершили вивчення усіх найважливіших окремих видів чотирикутників і можемо впорядкувати підсумкову «геометричну палітру» із цих фігур. Вона зображена на рис. 1.156. Тут кожному виду чотирикутників відведена своя комірка. Якщо якийсь чотирикутник може належати до двох видів, то відповідні комірки мають спільну частину. Якщо комірки розміщені окремо, то це означає, що не існує чотирикутників, які належать до кожної з них.

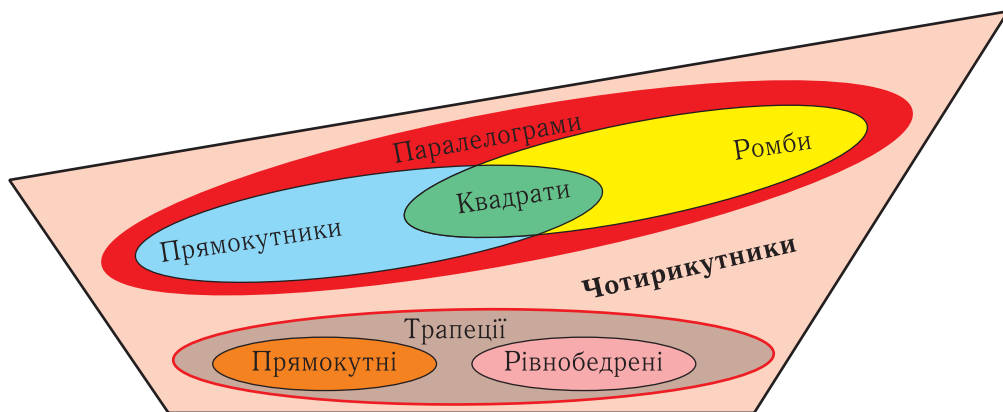


Рис. 1.156



Перевірте себе

1. Дайте означення трапеції. Як називаються сторони трапеції? Що таке висота трапеції?
2. Чому дорівнює сума кутів трапеції, прилеглих до її бічної сторони?
3. Які трапеції називаються прямокутними і які — рівнобедреними?
4. Які властивості має рівнобічна трапеція? Які з них є ознаками рівнобічної трапеції? Доведіть їх.
5. Що таке середня лінія трапеції? Які властивості вона має? Доведіть їх.
6. Що таке середня лінія трикутника? Які властивості вона має? Як вони впливають із властивості середньої лінії трапеції?
7. Назвіть усі відомі вам окремі види чотирикутників та проілюструйте якою-небудь діаграмою співвідношення між їхніми множинами.



Вправи і задачі

До пп. 7.1 – 7.3

- 238°.** Накресліть прямокутну трапецію з бічною стороною 3 см та основами 4 см і 7 см. Проведіть висоту з вершини тупого кута. Виміряйте висоту і гострий кут трапеції. Визначте ці самі величини обчисленням і порівняйте результати.
- 239°.** Накресліть рівнобічну трапецію з нижньою основою 8 см, кутом при цій основі 60° і бічною стороною 6 см. Визначте верхню основу за допомогою вимірювання і за допомогою обчислення. Чи збігаються результати?
- 240°.** Накресліть рівнобедрений трикутник з основою 4 см і кутом при основі 75° . Потім відріжте від нього менший трикутник, провівши пряму, паралельну основі, на відстані 3 см від неї. Визначте вид одержаної трапеції. Чи збігаються результати, які дає безпосереднє вимірювання, з тими, що дають теоретичні міркування?
- 241°.** Чи можуть основи трапеції бути рівними?
- 242°.** У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD паралельні. Чи впливає звідси, що цей чотирикутник — трапеція?
- 243°.** Чи можуть протилежні кути трапеції бути рівними?
- 244°.** Чи можуть два протилежних кути трапеції бути гострими? А — прямими?
- 245°.** Чи можуть три кути трапеції бути прямими?
- 246°.** Чи завжди сума кутів при меншій основі трапеції більша за суму кутів при більшій основі?
- 247°.** Два кути трапеції дорівнюють 50° і 145° . Визначте інші кути.
- 248°.** У рівнобічній трапеції висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 26 см. Визначте меншу основу трапеції.
- 249°.** Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 60° , а бічна сторона — 10 см. Визначте більшу основу трапеції, якщо менша її основа має довжину 13 см.
- 250°.** За яких умов висота рівнобічної трапеції дорівнює піврізниці основ?
- 251°.** На рис. 1.157 зображено два причільні віконця, що мають форму прямокутних трапецій з рівними сторонами і кутами. Чи можна переставити їх місцями?
- 252°.** На рис. 1.158 зображено кілька схем гаптування у формі «трапеція». Чи можете ви пояснити геометричні принципи, які лежать у їхній основі?



Рис. 1.157



Рис. 1.158

- 253.** На рис. 1.159 зображено кілька схем укладки тротуарної плитки у формі «трапеція». Які геометричні принципи і факти лежать у їхній основі?

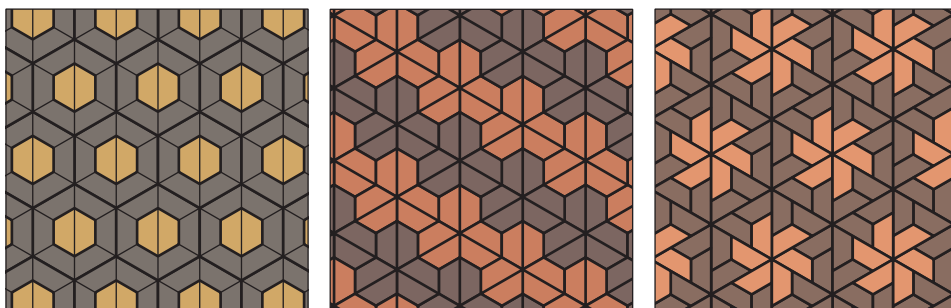


Рис. 1.159

- 254.** Чи можуть кути A , B , C , D трапеції $ABCD$ відноситися, як $3 : 7 : 2 : 5$?
- 255.** У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel DC$) $BM = MC$ (рис. 1.160). Доведіть, що $BN = DC$.
- 256.** У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel DC$) (рис. 1.161) $OD = OC$. Доведіть, що трапеція рівнобічна.
- 257.** У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel DC$) AM і DN — бісектриси відповідно кутів A і D (рис. 1.162). Доведіть, що $AM \perp DN$.

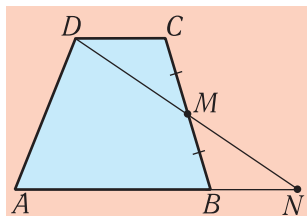


Рис. 1.160

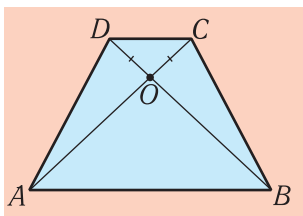


Рис. 1.161

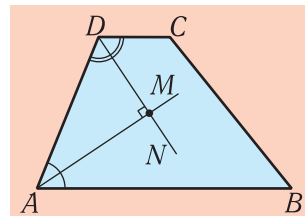


Рис. 1.162

- 258.** За якої умови діагональ трапеції є бісектрисою її кута?
- 259.** У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою прямого кута при більшій основі. Визначте відношення основ, якщо гострий кут трапеції дорівнює 45° .
- 260.** Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а гострий кут, який лежить проти цієї діагоналі, дорівнює 50° . Визначте інші кути трапеції, якщо її менша основа дорівнює другій бічній стороні.
- 261.** У трапеції $ABCD$ з основами AB і DC проведено $CK \parallel AD$ (рис. 1.163). Використовуючи цю побудову, доведіть, що коли трапеція рівнобічна, то $\angle A = \angle B$. Доведіть, що й навпаки, якщо $\angle A = \angle B$, то трапеція $ABCD$ — рівнобічна.
- 262.** Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Визначте гострий кут трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює меншій основі.
- 263.** Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 45° . Висота трапеції дорівнює меншій основі. Чому дорівнює відношення основ трапеції?
- 264.** У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів. Визначте меншу основу трапеції, якщо більша основа дорівнює 23 см, а периметр — 59 см.
- 265.** Доведіть, що коли середина однієї з основ трапеції рівновіддалена від кінців іншої основи, то трапеція рівнобічна. Чи істинне обернене твердження?
- 266.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 5 см, а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Визначте висоту трапеції.
- 267.** Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 50 см. Бісектриса тупого кута трапеції відтинає від неї ромб і ділить більшу основу навпіл. Визначте гострий кут і більшу сторону трапеції.
- 268.** Висота рівнобічної трапеції вдвічі менша від її бічної сторони. Визначте гострий кут трапеції.
- 269.** Визначте периметр рівнобічної трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60° , а основи дорівнюють 13 см і 37 см.
- 270.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 20 см, а тупий кут дорівнює 135° . Визначте висоту трапеції.
- 271.** У прямокутній трапеції основи дорівнюють 5 см і 10 см, а один із кутів дорівнює 120° . Визначте довжину меншої діагоналі.
- 272.** Доведіть, що коли бісектриси кутів при одній з основ трапеції перетинаються на іншій її основі, то довжина цієї іншої основи дорівнює сумі довжин бічних сторін трапеції.
- 273.** У прямокутній трапеції $ABCD$ $\angle B = 45^\circ$, $AB = a$, а серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає пряму AD у точці K . Визначте DK .
- 274.** Побудуйте трапецію, коли задано:
- а) основу, обидві бічні сторони та кут між основою і однією з бічних сторін;
 - б) основу, висоту і обидві діагоналі;

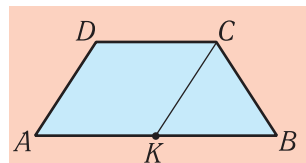


Рис. 1.163

- в) обидві основи і обидві бічні сторони;
- г) обидві основи і обидві діагоналі;
- ґ) обидві основи, висоту і діагональ;
- д) обидві основи, бічну сторону і діагональ;
- е) обидві бічні сторони, висоту і діагональ.

До пп. 7.4 – 7.5

- 275°.** Визначте середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 см і 14 см.
- 276°.** Діагональ трапеції ділить середню лінію на частини, довжини яких дорівнюють 5 см і 13 см. Визначте основи трапеції.
- 277°.** Як відносяться основи трапеції, якщо її діагоналі ділять середню лінію на три рівних відрізки?
- 278°.** Одна з основ трапеції дорівнює 9 см, а середня лінія на 2 см менша від іншої основи. Визначте невідому основу.
- 279°.** Визначте основи трапеції, якщо вони відносяться, як 1 : 3, а середня лінія дорівнює 12 см.
- 280°.** Середня лінія трапеції дорівнює 7 см, а одна з основ — 12 см. Визначте іншу основу трапеції.
- 281°.** Усі середні лінії трикутника рівні. Визначте вид трикутника.
- 282°.** Дві середні лінії трикутника рівні і перпендикулярні. Визначте вид трикутника.
- 283°.** У трикутнику ABC MN — середня лінія (рис. 1.164). На продовженні сторони BC взято точку D і проведено відрізок AD . У якому відношенні пряма MN ділить цей відрізок?
- 284°.** Точка O — середина гіпотенузи прямокутного трикутника. Відстані від точки O до катетів трикутника дорівнюють відповідно a і b . Визначте ці катети.
- 285°.** MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 1.165). Доведіть, що вона ділить навпіл будь-який відрізок AD , що сполучає вершину A з точкою D на протилежній стороні.

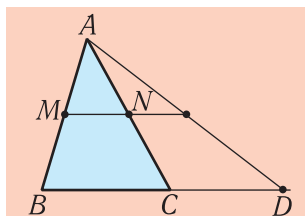


Рис. 1.164

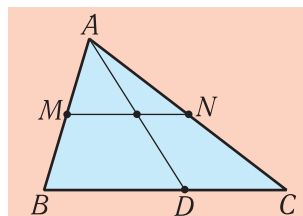


Рис. 1.165

- 286.** Різниця відрізків, на які діагональ трапеції ділить її середню лінію, дорівнює 10 см, а їхнє відношення дорівнює 5 : 3. Визначте основи трапеції.
- 287.** У трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів, а одна з них ділить середню лінію на відрізки 7 см і 12 см. Визначте периметр трапеції.

- 288.** Доведіть, що довжина відрізка, який сполучає середини діагоналей трапеції, дорівнює піврізниці її основ.
- 289.** Кінці відрізка, розміщеного по один бік від прямої, віддалені від неї на відстані a і b . Визначте відстань від середини відрізка до цієї прямої.
- 290.** Визначте радіус кола, якщо кінці його діаметра віддалені від однієї з дотичних до кола на відстані 7 см і 19 см.
- 291.** Доведіть, що будь-який відрізок з кінцями на основах трапеції ділиться її середньою лінією навпіл.
- 292.** Доведіть, що висота, проведена з вершини тупого кута рівнобічної трапеції, ділить більшу основу на відрізки, один з яких дорівнює середній лінії трапеції.
- 293.** У рівнобедреній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Основи трапеції відносяться, як 3 : 5, а її периметр дорівнює 98 см. Визначте довжину середньої лінії.
- 294.** Через середину M бічної сторони AD трапеції $ABCD$ проведено пряму, паралельну основам. Ця пряма перетинає іншу бічну сторону трапеції у точці N . Через вершину D проведено пряму DK , паралельну BC (K — точка її перетину з більшою основою AB). Визначте основи трапеції, якщо $MN = 7$ см, $AK = 4$ см.
- 295.** Висота рівнобічної трапеції дорівнює h , середня лінія — m , а гострий кут — 45° . Визначте основи трапеції.
- 296.** Діагональ трапеції перпендикулярна до її основ. Тупий кут, який прилягає до більшої основи, дорівнює 120° , а бічна сторона, прилегла до нього, — 10 см. Визначте довжину середньої лінії трапеції, якщо її більша основа дорівнює 17 см.
- 297.** Тупий кут прямокутної трапеції дорівнює 120° . Визначте її середню лінію, якщо менша діагональ трапеції і більша бічна сторона дорівнюють по a .
- 298*.** Кожну бічну сторону трапеції поділили на: а) три рівні частини; б) чотири рівні частини і відповідні точки поділу сполучили відрізками прямих. Визначте довжини цих відрізків, якщо основи трапеції дорівнюють 2 см і 8 см.
- 299*.** Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Доведіть, що середня лінія такої трапеції дорівнює її висоті. Навпаки, якщо у рівнобічній трапеції середня лінія дорівнює висоті, то діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Доведіть.
- 300*.** Доведіть, що бісектриси двох кутів трапеції, які прилягають до однієї бічної сторони, перетинаються на середній лінії трапеції або на її продовженні.
- 301*.** Дано трапецію $ABCD$ з основами AB і DC (рис. 1.166), K — точка перетину бісектрис кутів, суміжних із кутами A і D , L — точка перетину бісектрис

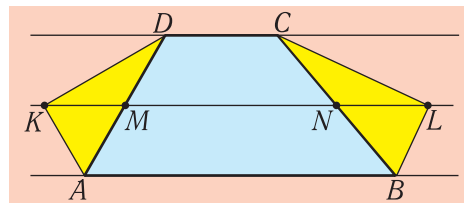
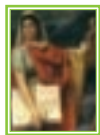


Рис. 1.166

кутів, суміжних із кутами B і C . Доведіть, що довжина відрізка KL дорівнює півпериметру трапеції $ABCD$.

- 302*.** Задано чотирикутник $ABCD$. Розглядається чотирикутник $KLMN$ з вершинами у середині сторін чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $KLMN$ діляться точкою перетину навпіл. Яким буде чотирикутник $KLMN$, якщо чотирикутник $ABCD$: а) прямокутник; б) ромб; в) квадрат; г) рівнобічна трапеція? За яких умов чотирикутник $KLMN$ буде: прямокутником, ромбом, квадратом? Визначте периметр чотирикутника $KLMN$, якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ дорівнюють l і m .
- 303*.** Пряма відтинає від рівностороннього трикутника трапецію, яка діагоналями ділиться на чотири рівнобедрених трикутники. Визначте кут між діагоналями трапеції.
- 304*.** Три сторони трапеції рівні між собою. Коло, діаметром якого є більша основа, ділить бічну сторону трапеції навпіл. Визначте кути трапеції.
- 305*.** Коло, діаметром якого є менша основа трапеції, дотикається до більшої основи і ділить навпіл кожен з діагоналей трапеції. Визначте кути трапеції.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Про походження назви «трапеція»

Слово «трапеція» утворене від давньогрецького слова «трапеза» — «стіл» (у церковнослов'янській мові — також «обід, вечеря за столом»). Слово «трапеза» має два корені: «тетра» — «чотири», і «пеца» — «нога» (звуки $-e$ і $-t$ при з'єднанні випадають). Отже, буквально воно означає «чотириногий». Що ж спільного могло бути між трапеціями і чотириногими столами, коли ті здавна були прямокутними?

Найбільш правдоподібне таке пояснення: схожість виникає тоді, коли ми дивимося на прямокутний стіл звіддалік, особливо якщо лінія очей паралельна двом сторонам стільниці. Тоді ці сторони видаються нам паралельними, а дві інші — немовби сходяться, і тому вся стільниця виглядає як трапеція. Дуже наочно ці «перспективні» ефекти видно на картинах і світлинах. Цікаво, що на середньовічних картинах, зокрема, в іконописі, застосовувалася як пряма, реалістична, перспектива, при якій паралельні сторони сходяться вглиб картини, так і обернена, містична, коли сторони сходяться до переднього плану. Обернена перспектива суперечить реальному зоровому сприйняттю і тому фактично була особливою формою середньовічного абстракціонізму.



Дві ранньосередньовічні мозаїки на старозаповітний сюжет «Авраам і три ангели (Гостинність Авраама)». Праворуч — на центральному нефі базилики Санта-Марія Маджоре у Римі (V ст.).

Ліворуч — у церкві Сан-Вітале у Равенні, Італія (547 р.).

В обох мозаїках стіл зображений в оберненій перспективі

Якщо ж дивитися на прямокутний стіл із довільного положення, то він може видаватися будь-яким чотирикутником. Цим, вочевидь, і керувався Евклід, називаючи у своїх «Началах геометрії» трапеціями довільні чотирикутники. Читаємо на 3-й сторінці цієї великої книги:

«Із чотиристоронніх фігур квадратом є та, яка і рівностороння, і прямокутна, прямокутником — та, яка прямокутна, але не рівностороння, ромбом — рівно-



Дві пізньосередньовічні картини на євангельський сюжет «Вечеря в домі Симона-фарисея».

Ліворуч. Твір невідомого автора з Альгау, Німеччина (1470-і рр.).

Праворуч. Картина Дірка Баутса (1415–1475) (1440-і рр.).

У першій картині стіл зображений в оберненій перспективі, у другій — в прямій



Посідоній



Прокл Діодох

стороння, але не прямокутна, паралелограмом — у якій протилежні сторони і кути рівні. Решту чотирикутників називатимемо трапеціями».

У теперішньому значенні термін «трапеція» вперше вживали такі авторитетні учені античного світу, як Посідоній (135–51 до н. е.), більше відомий як учитель Ціцерона, та Прокл Діодох (412–485), який створив ґрунтовні коментарі до «Начал геометрії» Евкліда.

§8. Вписані та описані чотирикутники

Уроки
20–22



8.1. Означення і приклади вписаних та описаних чотирикутників

Практичні потреби вписування фігур у коло та описування їх навколо кола вперше з'явилися в період пізньої античності та раннього середньовіччя, коли виник новий стиль християнської аркової та купольної архітектури. До того для таких задач існували лише загально-філософські та світоглядні мотиви. Коло здавна вважалося найдовершенішою фігурою, своєрідним ідеалом і символом досконалості, тому вписування і описування фігур було способом виокремлення тих із них, які певною мірою наближаються до цієї досконалості. Детальніше про це, а також про інші мотиви вписування та описування фігур йдеться на «Сторінках історії» у кінці параграфа.

Означення вписаних та описаних чотирикутників цілком аналогічні до означень вписаних і описаних трикутників, відомих із 7 класу.



Алегорія геометрії.
Вілла д'Есте в Тіволі (Італія)
(середина XVI ст.)

Означення.

Чотирикутник називається *вписаним* у коло, якщо всі його вершини лежать на колі або таке коло, яке проходить через усі його вершини, можна провести. При цьому саме це коло називається *описаним* навколо чотирикутника.

На рис. 1.167 зображено чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло. Інакше можна сказати, що навколо чотирикутника $ABCD$ *описане* коло.

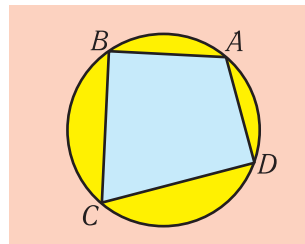


Рис. 1.167

Означення.

Чотирикутник називається *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола або коло, яке дотикається до усіх сторін, можна провести. При цьому саме це коло називається *вписаним* у чотирикутник.

На рис. 1.168 зображено чотирикутник $ABCD$, описаний навколо кола; точки K, L, M, N є точками дотику його сторін. Інакше можна сказати, що у чотирикутник $ABCD$ *вписане* коло.

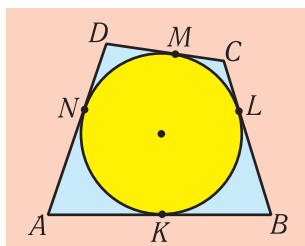


Рис. 1.168

Відомо, що навколо будь-якого трикутника завжди можна описати коло і що центр цього кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін (пригадайте, що серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка). Звісно, центр кола, описаного навколо чотирикутника, теж є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін. Однак для довільно взятого чотирикутника серединні перпендикуляри до сторін уже не завжди перетинаються в одній точці. Тому описати коло навколо чотирикутника можна не завжди.

Наприклад, неможливо описати коло навколо паралелограма $ABCD$, який не є прямокутником (рис. 1.169), оскільки серединні перпендикуляри a, b до його протилежних сторін AB і CD паралельні і тому не мають спільної точки. Якщо ж паралелограм $ABCD$ буде прямокутником (рис. 1.170), то серединні

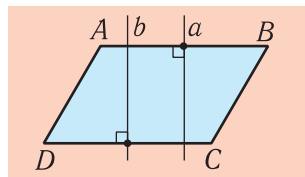


Рис. 1.169

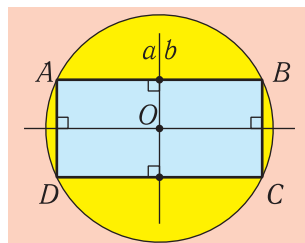


Рис. 1.170

перпендикулярні a , b до сторін AB і CD збігатимуться, і так само збігатимуться серединні перпендикулярні до сторін AD і BC . Тому існуватиме спільна точка O усіх цих чотирьох серединних перпендикулярів — центр кола, описаного навколо прямокутника.

Про трикутник також відомо, що в нього завжди можна вписати коло і що центр цього кола є точкою перетину бісектрис усіх його кутів (оскільки бісектриса кожного кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від його сторін, а центр вписаного кола рівновіддалений від сторін). Центр кола, вписаного в опуклий чотирикутник, теж має бути спільною точкою бісектрис його кутів. Однак для чотирикутника така спільна точка не завжди існує. Тому вписати коло можна не в кожний чотирикутник. Наприклад, неможливо вписати коло в жоден паралелограм $ABCD$, який не є ромбом (рис. 1.171), оскільки бісектриси b і d його протилежних кутів B і D паралельні і тому не мають спільних точок. Якщо ж паралелограм $ABCD$ буде ромбом (рис. 1.172), то бісектриси b і d збігатимуться (оскільки міститимуть діагональ BD), і так само збігатимуться бісектриси кутів A і C . Тому існуватиме спільна точка O усіх цих чотирьох бісектрис — центр кола, вписаного в ромб.

Неважко також зрозуміти, що неможливо вписати коло в жоден неопуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 1.173). Справді, будь-яке коло, яке дотикається до сторін BA і BC його неопуклого кута B , не належить чотирикутнику, а тому не може дотикатися до сторін DA і DC .

Для неопуклого чотирикутника не існує й описаного кола, однак довести це складніше; ми зробимо це трохи згодом (у п. 8.4).

Узагалі, виведення ознаки описаного чотирикутника складніше, ніж вписаного. Це навіть потребує введення нового поняття вписаного кута та з'ясування способів вимірювання таких кутів. Про це йтиметься у п. 8.3.

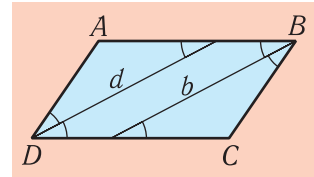


Рис. 1.171

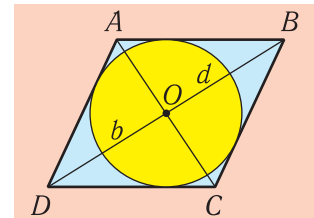


Рис. 1.172

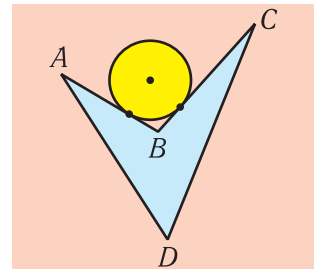


Рис. 1.173

8.2. Властивість та ознака описаних чотирикутників

Теорема*(властивість описаних чотирикутників).**Якщо у чотирикутник можна вписати коло, то суми його протилежних сторін рівні між собою.*

Доведення. Нехай в опуклий чотирикутник $ABCD$ вписано коло, а K, L, M, N — точки його дотику до сторін AB, BC, CD та AD (див. рис. 1.168). Відомо, що відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні між собою. Тому $AK = AN$, $BK = BL$, $DM = DN$, $CM = CL$. Додавши почленно ці рівності, матимемо:

$$(AK + BK) + (DM + CM) = (AN + DN) + (BL + CL).$$

Звідси

$$AB + DC = AD + BC.$$

Отже, сума протилежних сторін AB і DC описаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі протилежних сторін AD і BC . Теорему доведено.

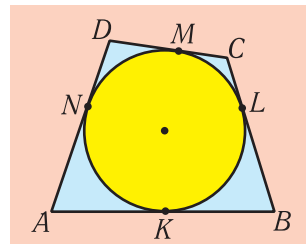


Рис. 1.168

Теорема*(ознака описаних чотирикутників).**Якщо суми протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.*

Доведення. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ сума протилежних сторін $AB + DC$ дорівнює сумі протилежних сторін $AD + BC$ (див. рис. 1.168). Доведемо, що в такий чотирикутник можна вписати коло.

Побудуємо коло, вписане в кути A і D , і доведемо, що це коло буде вписаним і в чотирикутник $ABCD$ (рис. 1.174). Оскільки центр O побудованого кола рівновіддалений від сторін кутів A і D , то він належить бісектрисам цих кутів. Нехай K і M — точки дотику цього кола з променями AB та DC .

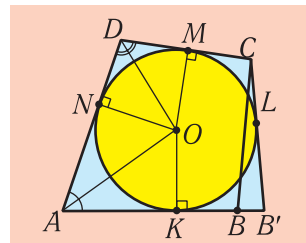


Рис. 1.174

Зі згаданої вже властивості дотичних випливає, що $AK + DM = AN + DN = AD$. Тому очевидно, що обидві точки K і M одночасно не можуть лежати на продовженнях сторін AB і DC чотирикутника, бо тоді вже сама одна сторона AD була б більшою за суму сторін AB і DC , а за умовою сума двох сторін $AD + BC$ дорівнює сумі $AB + DC$.

Нехай, наприклад, точка M належить стороні DC . Проведемо з точки C дотичну до кола, яка відмінна від CD , і позначимо через B' точку її перетину з променем AB . Для завершення доведення достатньо показати, що точки B і B' збігаються.

Застосувавши вже доведену властивість до описаного чотирикутника $AB'CD$, матимемо:

$$AB' + DC = AD + B'C.$$

А за умовою,

$$AB + DC = AD + BC.$$

Відніmemo почленно від першої рівності другу (при $AB' > AB$) або від другої першу (при $AB' < AB$). Одержимо, що в обох цих випадках

$$|AB' - AB| = |B'C - BC|,$$

тобто

$$BB' = |B'C - BC|.$$

А це суперечить нерівності для сторін трикутника CBV' . Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, точки B і B' збігаються, а тому існує коло, вписане у чотирикутник $ABCD$. Теорему доведено.



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що коли в трапецію можна вписати коло, то кожна її бічну сторону видно із центра цього кола під прямим кутом.



Жуль Бланшар (1832–1916).
Наука (1882 р.).
Скульптура перед
паризькою мерією

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — задана трапеція, AD і BC — її бічні сторони, O — центр вписаного кола (рис. 1.175). Потрібно довести, що кути AOD та BOC прямі.

Точка O рівновіддалена від сторін кутів A і D , отже, належить бісектрисам цих кутів. Тому

$$\angle OAD = \frac{1}{2} \angle A, \quad \angle ODA = \frac{1}{2} \angle D.$$

Додавши почленно ці рівності, маємо:

$$\angle OAD + \angle ODA = \frac{1}{2} (\angle A + \angle D) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Виходить, що у трикутнику AOD сума двох кутів дорівнює 90° . Тоді третій кут AOD є прямим.

Аналогічно доведемо, що кут BOC теж є прямим. Твердження задачі доведено.

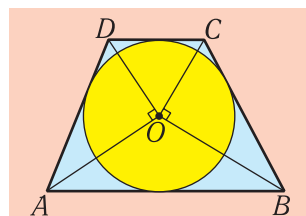


Рис. 1.175

8.3. Вписані та центральні кути

Означення.

Гострий плоский кут з вершиною на колі називається *вписаним* у коло, якщо його сторони перетинають це коло. Про дугу кола, яка належить вписаному куту, кажуть, що вона *стягує* цей кут, або що вписаний кут на неї *спирається*.

На рис. 1.176, а), б) зображені плоскі кути, позначені через BAC , які вписані у коло. Вони спираються на дугу BC . Інколи кажуть, що вони спираються і на хорду BC .

Означення.

Плоский кут з вершиною у центрі кола, називається *центральною кут* цього кола, або просто *центральною кут*. Про дугу кола, яка належить центральному куту, кажуть,

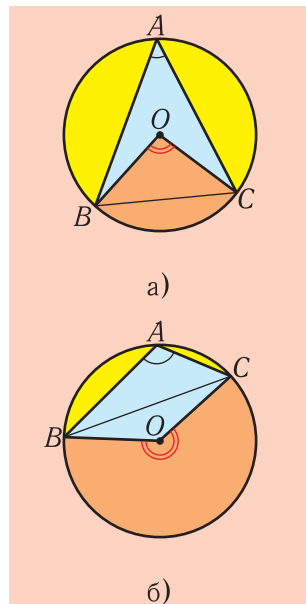


Рис. 1.176

що вона *стягує* цей кут, або що центральний кут на неї *спирається*.

Градусна міра центрального кута приймається за градусну міру дуги, яку він стягує. Інакше це виражається так: градусна міра дуги визначається градусною мірою центрального кута, який її стягує.

На рис. 1.176, а), б) дужками відзначені центральні кути, які спираються на дугу AB . На першому з них градусна міра центрального кута і, відповідно, дуги, на яку він спирається, менша від 180° , на другому — більша за 180° .

Оскільки величини плоских кутів змінюються в межах від 0° до 360° , то в таких самих межах змінюються і величини центральних кутів, і градусні міри дуг. При цьому вважається, що міру 360° має все коло.

Градусну міру дуги позначають значком $\cup$ (читається: «дуга»), записуючи, наприклад, $\cup BC = \angle BOC$ (рис. 1.176).

Теорема

(про вимірювання вписаних кутів).

Вписаний кут дорівнює половині відповідного йому центрального кута.

Доведення. Нехай BAC — заданий вписаний кут, BOC — відповідний йому центральний кут. Можливі наступні три характерних випадки розміщення точки O відносно кута BAC :

- 1) точка O належить одній зі сторін кута BAC , наприклад, стороні AC (рис. 1.177);
- 2) точка O лежить всередині кута BAC (рис. 1.178);
- 3) точка O лежить зовні кута BAC (рис. 1.179).

У першому випадку сполучимо відрізком точку O з точкою B . Дістанемо рівнобедрений трикутник OAB (сторони OA і OB рівні як радіуси). Тому його кути A і B рівні. Центральний кут BOC є зовнішнім



Георгій Курасов
(нар. 1958 р.).
Танок

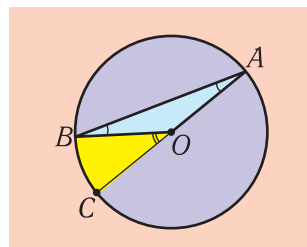


Рис. 1.177

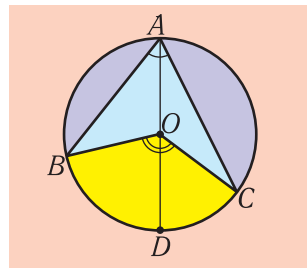


Рис. 1.178

для трикутника OAB , тому він дорівнює сумі кутів A і B , або, що те ж саме, двом кутам A :

$$\angle BOC = 2\angle A.$$

Звідси $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC$, що й треба було довести.

Другий і третій випадки зводяться до першого, якщо провести діаметр AD . Тоді у другому випадку

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC,$$

а в третьому —

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD.$$

Якщо ж врахувати уже доведене, то у другому випадку матимемо:

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}\angle DOC = \\ &= \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOC) = \frac{1}{2}\angle BOC,\end{aligned}$$

а в третьому:

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{1}{2}\angle BOD - \frac{1}{2}\angle COD = \\ &= \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle COD) = \frac{1}{2}\angle BOC.\end{aligned}$$

Отже, в усіх випадках вписаний кут BAC дорівнює половині відповідного йому центрального кута BOC . Теорему доведено.

Якщо взяти до уваги, що градусна міра центрального кута дорівнює градусній мірі дуги, яку він стягує, то доведену теорему про вимірювання вписаних кутів можна сформулювати так: *вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається*.

Наслідок 1.

Кожен вписаний кут, який спирається на діаметр (або на півколо), є прямим (рис. 1.180).

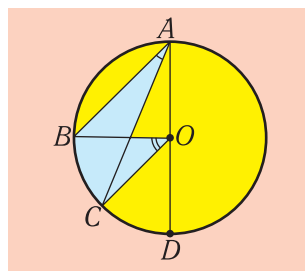


Рис. 1.179



Хуан Паломіно Бернабе (1692–1777). Аллегорія геометрії

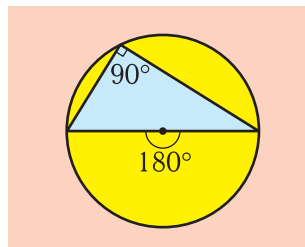


Рис. 1.180

Справді, у цьому разі відповідний центральний кут є розгорнутим, тобто дорівнює 180° . Вписаний кут дорівнює половині від цієї величини, тобто 90° .

Наслідок 2.

Усі вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні між собою.

Це впливає з того, що усім таким кутам відповідає один і той самий центральний кут. При цьому, якщо дуга буде меншою від півкола (меншою від 180°) (рис. 1.81), то відповідні вписані кути будуть гострими, якщо ж більшою (рис. 1.82), — то тупими.



Розв'язуємо разом

Задача 1.

Дві хорди кола перетинаються. Довести, що кожен два вертикальні кути, які при цьому утворюються, вимірюються половиною суми дуг, що розміщені між їхніми сторонами.

Розв'язання. Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці M (рис. 1.183). Проведемо хорду AD . Кут $\angle AMC$ є зовнішнім для трикутника AMD . За властивістю зовнішнього кута,

$$\angle AMC = \angle MAD + \angle MDA.$$

А за теоремою про вимірювання вписаних кутів,

$$\angle MAD = \frac{1}{2} \cup BD, \quad \angle MDA = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Тому

$$\angle AMC = \frac{1}{2} \cup BD + \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} (\cup BD + \cup AC).$$

Твердження задачі доведене.

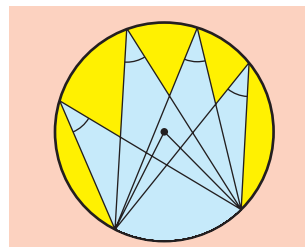


Рис. 1.181

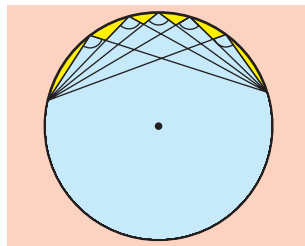


Рис. 1.182

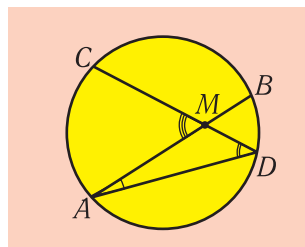


Рис. 1.183

Задача 2.

Кожна зі сторін кута перетинає коло у двох точках. Довести, що цей кут вимірюється половиною різниці дуг, розміщених між його сторонами.

Розв'язання. Нехай сторони кута M перетинають коло відповідно у точках A, B і C, D (рис. 1.184). Проведемо хорду AD . Кут ADC є зовнішнім для трикутника ADM . Тому

$\angle ADC = \angle DAM + \angle AMD$. Звідси $\angle AMD = \angle ADC - \angle DAM$. За теоремою про вимірювання вписаних кутів, маємо:

$$\angle AMD = \frac{1}{2} \cup AC - \frac{1}{2} \cup BD = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup BD).$$

Твердження задачі доведене.

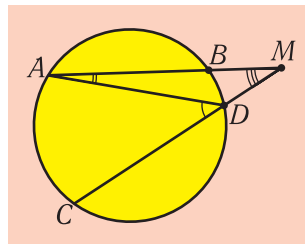


Рис. 1.184



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Задача 3.

Через точку кола проведено дотичну і хорду. Довести, що кожен із двох кутів, які при цьому утворюються, вимірюється половиною дуги, розміщеної між його сторонами.

Розв'язання. Нехай через точку A кола проведено дотичну MN і хорду AB (рис. 1.185). Проведемо діаметр AD і хорду DB . За властивістю дотичної, $\angle NAD = 90^\circ$, а за наслідком з теореми про вимірювання вписаних кутів, $\angle ABD = 90^\circ$. Якщо ми від кожного із цих кутів віднімемо один і той самий кут DAB , то перша різниця дасть кут NAB , а друга — кут ADB (оскільки у прямокутному трикутнику ABD сума гострих кутів дорівнює 90°), і вони будуть рівними. Отже,

$$\angle NAB = \angle ADB = \frac{1}{2} \cup AB.$$

$$\text{Тоді } \angle MAD = 180^\circ - \angle NAB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ - \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} (360^\circ - \cup AB) = \frac{1}{2} \cup ADB.$$

Твердження задачі доведене.

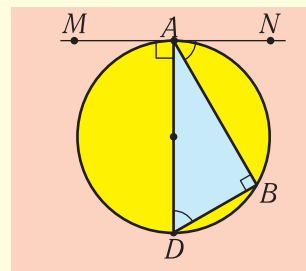


Рис. 1.185

8.4. Властивість та ознака вписаних чотирикутників

Теорема

(властивість вписаних чотирикутників).

Якщо навколо чотирикутника можна описати коло, то суми його протилежних кутів дорівнюють по 180° .

Доведення. Нехай навколо чотирикутника $ABCD$ описано коло (рис. 1.186). Розглянемо протилежні кути A і C . Вони вписані в коло. Тому, відповідно до теореми про вимірювання вписаних кутів,

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup DCB, \quad \angle C = \frac{1}{2} \cup DAB.$$

Отже,

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup DCB + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Сума усіх кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Тому

$$\angle B + \angle D = 360^\circ - (\angle A + \angle C) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1

Будь-який чотирикутник, навколо якого можна описати коло, є опуклим.

Це випливає з того, що суми протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнюють по 180° . Отже, кожен із цих кутів менший від 180° , а тому чотирикутник є опуклим.

Теорема

(ознака вписаних чотирикутників).

Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то навколо цього чотирикутника можна описати коло.

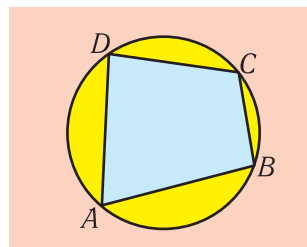


Рис. 1.186



Бог-геометр, що створює Землю. Мініатюра з рукописного видання XV ст. поеми лотаринзького ченця XIII ст. Готьє де Метца «Картина світу»

Доведення. Нехай у чотирикутника $ABCD$ сума протилежних кутів A і C дорівнює 180° . Доведемо, що тоді навколо цього чотирикутника можна описати коло.

Припустимо, що це не так. Тоді коло, описане навколо трикутника ABD , не проходить через вершину C чотирикутника $ABCD$.

Точка C може розміщуватися або всередині побудованого кола (рис. 1.187, а), або ззовні нього (рис. 1.187, б). Нехай E — точка перетину цього кола з прямою BC , відмінна від точки B .

Розглянемо чотирикутник $ABED$. Відповідно до вже доведеної властивості:

$$\angle A + \angle E = 180^\circ.$$

А за умовою:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ.$$

Отже, $\angle E = \angle C$. Але цього не може бути, бо тоді прямі DE і DC були б паралельними, маючи при цьому спільну точку D (для них указані кути є відповідними при січній CE). Це протиріччя свідчить про те, що зроблене припущення неправомірне. Отже, коло, описане навколо трикутника ABD , проходить також і через вершину C , тобто є описаним навколо чотирикутника $ABCD$. А оскільки навколо трикутника ABD завжди можна описати коло, то завжди можна описати коло й навколо чотирикутника $ABCD$. Теорему доведено.

Наслідок.

Навколо будь-якої рівнобічної трапеції можна описати коло. І навпаки, якщо навколо трапеції можна описати коло, то така трапеція — рівнобічна.

Це випливає з того, що для рівнобічних трапецій, і тільки для таких трапецій, суми протилежних кутів дорівнюють по 180° .

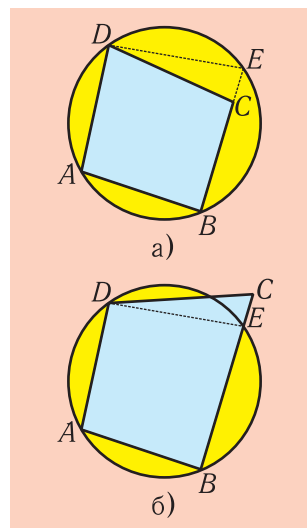


Рис. 1.187



Бог-Творець.

Ілюстрація з «Історичної Біблії» Гіяра де Мулена (Париж, середина XIV ст.)



Перевірте себе

1. Коли чотирикутник називається описаним навколо кола, а коли — вписаним у коло?
2. У які відомі вам окремі види чотирикутників можна вписати коло? Навколо яких чотирикутників можна описати коло?
3. Яку властивість мають усі описані чотирикутники? Чи мають цю властивість ще якісь інші чотирикутники?
4. Сформулюйте ознаку описаних чотирикутників.
5. Сформулюйте означення вписаного кута і відповідного йому центрального кута.
6. Сформулюйте теорему про вимірювання вписаних кутів.
7. Як запроваджується градусна міра для колових дуг? Як вимірюються відповідні їм вписані кути?
8. Які характерні особливості мають чотирикутники, навколо яких можна описати коло? Чи мають ці особливості які-небудь інші чотирикутники?
9. Навколо яких трапецій можна описати коло?
10. Чи можна описати коло навколо неопуклого чотирикутника? Чому?



Вправи і задачі

- 306°. Накресліть який-небудь вписаний чотирикутник та виміряйте за допомогою транспортира його кути. Знайдіть суми протилежних кутів. Чи велика між ними різниця?
- 307°. Накресліть який-небудь описаний чотирикутник та виміряйте лінійкою його сторони. Знайдіть суми протилежних сторін. Чи велика між ними різниця?
- 308°. Чи можна вписати коло у квадрат? А — описати?
- 309°. Чи можна вписати коло у прямокутник? Обґрунтуйте свою відповідь.
- 310°. Чи можна описати коло навколо ромба? Обґрунтуйте свою відповідь.
- 311°. Три послідовні сторони описаного чотирикутника дорівнюють відповідно 13 см, 17 см і 15 см. Визначте четверту сторону.
- 312°. Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 12 см. Визначте периметр цього чотирикутника.
- 313°. Обґрунтуйте на основі властивості та ознаки описаного чотирикутника, що в ромб можна вписати коло, а в прямокутник, який не є квадратом, та у паралелограм, який не є ромбом, — не можна.

140 Розділ І. Чотирикутники

- 314°.** Чи можна вписати коло у чотирикутник, послідовні сторони якого дорівнюють:
 а) 9 см, 8 см, 15 см, 16 см;
 б) 10 см, 20 см, 60 см, 40 см?
- 315.** Довжини трьох послідовних сторін описаного чотирикутника відносяться, як $2 : 3 : 5$, а його периметр дорівнює 84 см. Визначте довжину кожної сторони цього чотирикутника.
- 316.** Чи можна вписати коло у чотирикутник, якщо довжини його послідовних сторін відносяться, як:
 а) $1 : 3 : 5 : 2$; б) $2 : 5 : 4 : 1$;
 в) $6 : 7 : 9 : 10$; г) $12 : 13 : 10 : 9$?
- 317°.** Визначте величину кута α у кожному з випадків, зображених на рис. 1.188.
 O — центр кола.

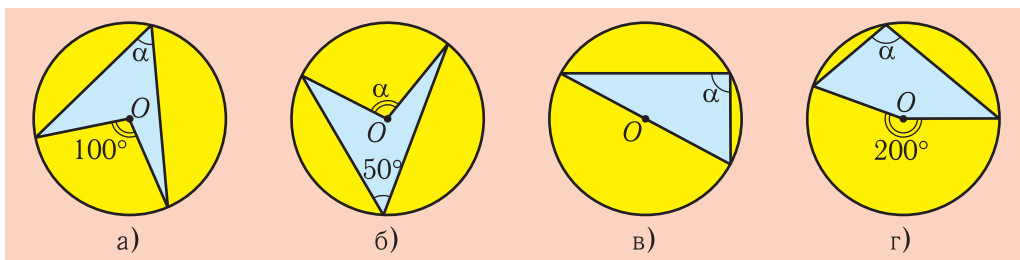
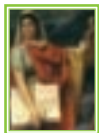


Рис. 1.188

- 318°.** Визначте градусну міру кута, вписаного у коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює: а) 54° ; б) 160° ; в) 180° ; г) 270° .
- 319°.** Визначте градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: а) 15° ; б) 65° ; в) 90° ; г) 152° .
- 320°.** Визначте градусну міру вписаного кута, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює: а) 48° ; б) 190° ; в) 240° .
- 321°.** Визначте градусну міру дуги, якщо вписаний кут, який спирається на цю дугу, дорівнює: а) 35° ; б) 80° ; в) 110° .
- 322.** Навколо трикутника ABC , в якому $\angle A = 56^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, описано коло. Визначте градусні міри дуг, на які вершини трикутника ділять це коло.
- 323.** Точки A , B , C ділять коло на три дуги AB , BC , AC , градусні міри яких відносяться, як $5 : 6 : 9$. Визначте кути трикутника ABC .
- 324.** Точки D і F лежать на колі по різні боки від хорди AB . Відомо, що $\angle ADB = 85^\circ$. Визначте $\angle AFB$.
- 325.** Хорда ділить коло у відношенні $5 : 13$. Визначте величини вписаних кутів, які спираються на цю хорду.

- 326.** Доведіть, що градусні міри дуг, які містяться між двома паралельними хордами, рівні.
- 327.** Доведіть, що градусні міри дуг, які містяться між хордою і паралельною їй дотичною, рівні.
- 328.** Хорди AB і CD рівні і паралельні. Доведіть, що або хорда AD , або хорда AC є діаметром.
- 329.** Доведіть, що кут між дотичною до кола і хордою, проведеною через точку дотику, вимірюється половиною дуги, яка лежить усередині даного кута.
- 330.** Доведіть, що кут між дотичною і січною, проведеними до кола із зовнішньої точки, вимірюється піврізницею дуг, розміщених між ними.
- 331.** Доведіть, що кут між двома дотичними, проведеними до кола з однієї точки, вимірюється піврізницею дуг, визначених точками дотику.
- 332.** Дві точки ділять коло у відношенні $5 : 7$. Визначте кут між дотичними до кола, що проходять через ці точки.
- 333.** Доведіть, що з будь-якої точки, взятої поза колом, його діаметр видно під гострим кутом, а з будь-якої точки, взятої всередині кола, — під тупим. Уважається, що взята точка не належить прямій, яка містить діаметр.
- 334.** Доведіть, що коли точки C і D лежать з одного боку від прямої AB і при цьому $\angle ACB = \angle ADB$, то точки A, B, C, D належать одному колу.
- 335.** Доведіть, що коли точки C і D лежать по різні боки від прямої AB і при цьому $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$, то точки A, B, C, D належать одному колу.
- 336°.** Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, у якому: а) $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 136^\circ$; б) $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 116^\circ$?
- 337°.** Навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Визначте кути C і D , якщо $\angle A = 86^\circ$, $\angle B = 128^\circ$.
- 338.** Кути A, B, C чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, відносяться, як $2 : 5 : 7$. Визначте їхні величини, а також величину кута D .
- 339.** Доведіть, що у вписаному чотирикутнику $ABCD$:
а) $\angle ABD = \angle ACD$; б) $\angle CAD = \angle CBD$.
- 340.** Доведіть, що кут A вписаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює куту, суміжному з кутом C .
- 341.** Доведіть, що коли діагоналі вписаного чотирикутника рівні, то це — рівнобічна трапеція.
- 342°.** Доведіть, що коли навколо трапеції можна описати коло і в неї можна вписати коло, то кожна бічна сторона трапеції дорівнює середній лінії.
- 343°.** Доведіть, що прямі, які сполучають середини дуг, що стягуються протилежними сторонами вписаного чотирикутника, взаємно перпендикулярні.
- 344°.** Побудуйте точку, з якої два заданих паралельних відрізки LM і PQ видно під заданими кутами α і β відповідно.

- 345•.** Побудуйте трикутник за основою, протилежним кутом та медіаною, проведеною до основи.
- 346•.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом та радіусом вписаного кола.



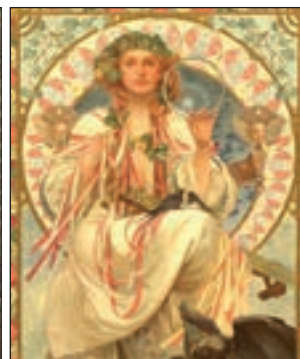
СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Коло — мірило досконалості в геометрії і композиційний елемент в образотворчому мистецтві

Коло відносили до основних геометричних фігур від самого зародження геометрії як теоретичної науки. Вже серед перших теорем, доведення яких приписують ще легендарному мудрецю Фалесу (VI ст. до н. е.), знаходимо теорему про те, що діаметр кола ділить коло на дві рівні частини. А Евклід, який жив майже трьома століттями пізніше від Фалеса, до п'яти основних вимог для побудови найпростіших фігур відносив вимогу про побудову кола з будь-яким центром і будь-яким радіусом. У своїх «Началах геометрії» він присвятив винятково колу цілий розділ, а в наступному розділі ретельно описав властивості вписаних і описаних прямокутних фігур.

Попри це ми не маємо вагомих свідчень про те, що коло відігравало істотну роль у практичному житті тієї епохи. То чим тоді пояснити таку увагу до нього у геометрії?

Причина полягає у тому, що в ту епоху, а потім і далі — аж до кінця XVI ст., геометрія вважалася передовсім сходинкою до досягнення вищої мудрості — філософії і теології. Відповідно до цієї мети, у геометрії в першу чергу вивчали ті



- Зліва направо. 1) Гравюра із книги німецького філософа і алхіміка Міхаеля Майєра (1568–1622) «Тікаюча Аталанта» (1617 р.). Гравюра супроводжувалася підписом: «Помісти чоловіка і жінку в круг, потім у квадрат, потім у трикутник, знову опиши коло, і ти дістанеш Філософський Камінь»; 2) Рафаель Санті. Мадонна Конестабіле (1508 р.); 3) «Славія» (1908 р.). Картина чеського художника Альфонса Мухи (1860–1939)

геометричні фігури, які пов'язувалися з ідеалом. Ідеальними фігурами, передовсім, уважалися пряма і коло, які абсолютно незмінні у своїй сутності, оскільки будь-яка їхня частина може накладитися на будь-яку іншу шляхом вільного ковзання вздовж усієї лінії. При цьому коло навіть має істотні переваги перед прямою. По-перше, воно хоч і безкінечне, тобто не має ні початку, ні кінця (такою ж є і пряма), але обмежене в просторі, і тому розум може легко досягнути його цілком. А по-друге, по колах рухаються об'єкти, які, як уважалося, є найбільш наочним виявом божественної космічної гармонії — це зорі на небосхилі. Тому коло вважалося абсолютним мірилом досконалості. І це переконання ще більше утвердилося у пізній античний період і на початку середньовіччя, коли поруч з астрономією з'явилася астрологія. Каскадами вписувань і описувань фігур у кола і навколо них намагалися розгадати таїну буття, або, як тоді казали, знайти «філософський камінь».



Проекти і будівлі (сучасний вигляд) двох шедеврів християнської архітектури.

Ліворуч. Собор святої Софії у Константинополі (Стамбулі). Архітектори Ісидор Мілетський та Анфимій Тралльський (537 р. н. е.).

Праворуч. Каплиця-ротонда біля церкви Сан П'єтро ін Монторіо в Римі. Архітектор Донато Браманте (1502 р.)

Ці, з теперішнього погляду, наївні і марні пошуки усе ж не пройшли безслідно. Вони дали багато продуктивних ідей для майбутніх природничих наук, а ідея втілення утаємниченого змісту в особливому поєднанні вписаних і описаних фігур відродилася через кілька століть в образотворчому мистецтві, коли з'явився так званий абстрактний живопис. І навіть у класичному живописі художники часто вдаються до різноманітних експериментувань з колом для підсилення емоційного або смислового впливу своїх картин.

Інше джерело інтересу до вписаних і описаних геометричних фігур пов'язане з розвитком архітектури, особливо після появи нового типу аркової і купольної архітектури, в якій коло стає одним із найважливіших структурних елементів. Пізніше коло перейшло у замкову і палацову архітектуру, у паркове і фортифі-

каційне будівництво. Новітні технології і будівельні матеріали забезпечили для нього ще ширші сфери застосування.



Внутрішній вигляд і купол над портиком каплиці Пацці біля базиліки Санта-Кроче у Флоренції, яку вважають вершиною архітектури раннього Відродження. Проект архітектора, художника і математика Філіппо Брунеллескі (1471 р.)



Бібліотека у Бірмінгемі (Англія) (2013 р.)



Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу I

Довільні чотирикутники

1. а) Чи можна побудувати чотирикутник з усіма гострими кутами?
б) Чи можна побудувати чотирикутник, у якого два кути прямі, а два — гострі?
2. а) Визначте кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 3, 5, 6. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?
б) Сума та різниця двох кутів чотирикутника дорівнюють відповідно 120° і 20° , а два інших кути відносяться, як 1 : 5. Визначте величини усіх кутів. Опуклий чи неопуклий цей чотирикутник?

Прямокутник і квадрат

3. а) Бісектриси кутів A і B прямокутника $ABCD$ перетинаються у точці M , яка лежить на стороні CD . Доведіть, що точка M — середина сторони CD .
б) У прямокутнику $ABCD$ $AB = 2AD$. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів A і B належить стороні DC .
4. а) Сума відстаней від точки перетину діагоналей прямокутника до двох суміжних сторін дорівнює 24 см. Одна зі сторін прямокутника на 6 см більша за іншу. Визначте ці сторони.
б) Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60° . Визначте відстань від точки перетину діагоналей до більшої сторони прямокутника, якщо діагональ прямокутника дорівнює 10 см.
5. а) У трикутнику ABC $\angle A = 15^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. До сторони AB проведено медіану $CM = 3$ см. Визначте сторону AB .
б) У трикутнику ABC $\angle A = 25^\circ$. До сторони AB проведено медіану $CM = \frac{1}{2}AB$. Визначте AB .
6. а) Бісектриси двох суміжних кутів прямокутника ділять його сторону на три рівних відрізки, кожен з яких має довжину 5 см. Визначте периметр прямокутника.
б) Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ перетинаються у точці L . Доведіть, що бісектриса LM трикутника LAD дорівнює половині сторони BC прямокутника.
7. а) У прямокутнику $ABCD$ $\angle ACB = 60^\circ$. З вершини D до діагоналі AC проведено перпендикуляр DN . Визначте відношення $AM : CM$.

- б) У прямокутнику кут між діагоналями дорівнює 60° . У якому відношенні перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника до його діагоналі, ділить цю діагональ?
- 8*. а) Діаметри AB і CD кола взаємно перпендикулярні. З точки M кола опущено перпендикуляри MP і MQ на діаметри AB і CQ . Визначте відстань між точками P і Q , якщо $AB = 8$ см.
- б) У прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C вписуються усі можливі прямокутники $CLXM$, вершини L, X, M яких лежать на сторонах. Визначте, при якому положенні точки X довжина відрізка LM буде найменшою.
9. а) Доведіть, що прямокутник, діагоналі якого ділять його кути навпіл, є квадратом.
- б) У прямокутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинають сторони BC і AD відповідно у точках L і M . Доведіть, що чотирикутник $ABLM$ — квадрат.
10. а) Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є ромбом, обмежують квадрат.
- б) У прямокутнику $ABCD$ сторона $BC = 2AB$; M, N — середини сторін AD і BC ; P — точка перетину відрізків CM і DN , Q — точка перетину відрізків AN і BM . Доведіть, що $MPNQ$ — квадрат.
11. а) У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, дві сусідні вершини якого лежать на гіпотенузі трикутника, а дві інші — на катетах. Визначте периметр квадрата, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 9 см.
- б) У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата лежить одна вершина прямокутника, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата. Визначте периметр прямокутника, якщо відношення його сторін дорівнює $1 : 5$, а діагональ квадрата дорівнює 24 см.
12. а) У прямокутнику $ABCD$ бісектриси кутів ABD і DAC — взаємно перпендикулярні. Доведіть, що цей прямокутник є квадратом.
- б) У прямокутнику $ABCD$ бісектриси кутів ABD і ACD перетинаються під кутом 45° . Доведіть, що цей прямокутник є квадратом.
- 13*. а) На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати $AKLC$ і $CMNB$. Прямі KL і MN перетинаються в точці Q . Доведіть, що $QC \perp AB$.
- б) У прямокутному трикутнику ABC сума катетів дорівнює q . На гіпотенузі AB ззовні трикутника побудовано квадрат. Із його центра O опущено перпендикуляри OL та OM відповідно на сторони CB і CA кута C . Визначте периметр чотирикутника $OLCM$.

Паралелограм і ромб

14. а) Визначте кути паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 160° .
- б) Визначте кути паралелограма, якщо два з них відносяться, як $3 : 7$.

15. а) Периметр паралелограма дорівнює 24 см. Визначте сторони паралелограма, якщо одна з них на 2 см більша за іншу.
б) Периметр паралелограма дорівнює 32 см. Визначте сторони паралелограма, якщо дві з них відносяться, як 3 : 5.
16. а) На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки BL і DM . Доведіть, що чотирикутник $ALCM$ — паралелограм.
б) На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AL і CM . Доведіть, що чотирикутник $BLDM$ — паралелограм.
17. а) Бісектриса гострого кута паралелограма ділить протилежну сторону у відношенні 2 : 3, беручи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 28 см. Визначте його сторони.
б) Бісектриси кутів A і D паралелограма перетинаються у точці, яка лежить на стороні BC . Визначте сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.
18. а) Один із кутів паралелограма на 40° більший за інший. Визначте кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута.
б) Два кути паралелограма відносяться, як 2 : 7. Визначте кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута.
19. а) $ABCD$ — паралелограм. Ззовні нього побудовані квадрати $ABPQ$ і $BCLM$. Доведіть, що $DQ \perp DL$.
б) $ABCD$ — паралелограм. Ззовні нього побудовані рівносторонні трикутники ABK і BCL . Доведіть, що трикутник DKL — рівносторонній.
20. а) Точка перетину діагоналей паралелограма, периметр якого дорівнює 32 см, рівновіддалена від сторін паралелограма. Визначте сторони паралелограма.
б) Точка перетину діагоналей паралелограма рівновіддалена від прямих, на яких лежать сторони паралелограма, одна з яких дорівнює 5 см. Визначте периметр паралелограма.
21. а) У паралелограмі відрізок, який сполучає точки перетину діагоналей із серединою сторони, перпендикулярний до цієї сторони. Доведіть, що цей паралелограм є прямокутником.
б) Діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівнобедрених трикутники. Доведіть, що цей паралелограм є прямокутником.
22. а) Визначте кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 20° .
б) Визначте кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, відношення яких дорівнює 2 : 3.
23. а) У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинають сторони BC і AD відповідно у точках L і M . Доведіть, що $ABLM$ — ромб.

б) Через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено пряму, перпендикулярну до діагоналі DB . Ця пряма перетинає сторони BC і DA паралелограма відповідно у точках L і M . Доведіть, що $BLDM$ — ромб.

24. а) Побудуйте ромб за стороною і висотою.
б) Побудуйте ромб за гострим кутом і більшою діагоналлю.

Трапеція

25. а) Визначте вид трапеції, в якій сума протилежних кутів дорівнює 180° .
б) Визначте кути рівнобічної трапеції, якщо її протилежні кути відносяться, як $1:3$.
26. а) У трапеції $ABCD$ основи AD і BC . Діагональ AC є бісектрисою кута BAD , $\angle ACD = 65^\circ$, $AC = AD$. Визначте кути трапеції.
б) У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC $\angle BCA = \angle BDA$. Доведіть, що ця трапеція рівнобічна.
27. а) У рівнобічній трапеції бісектриса тупого кута паралельна бічній стороні. Визначте периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють 20 см і 16 см.
б) Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 8 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута трапеції. Визначте кути трапеції, якщо її периметр дорівнює 20 см.
28. а) У трапеції три сторони рівні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Визначте кути трапеції.
б) Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює більшій основі. Кут між діагоналями трапеції дорівнює 70° . Визначте кути трапеції.
29. а) Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 15 см. Визначте відрізки, на які більшу основу ділить висота трапеції, проведена з вершини тупого кута.
б) У рівнобічній трапеції довжини відрізків, на які висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу, відносяться, як $2:1$. Визначте відношення основ трапеції.
30. а) У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 4 см. Визначте периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 30° .
б) У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її довжина удвічі більша за меншу основу. Визначте кути трапеції.
31. а) Бічну сторону трапеції поділено на 6 рівних частин. Із точок поділу проведено паралельні основам відрізки до перетину з іншою бічною стороною трапеції. Найбільший і найменший із цих відрізків дорівнюють відповідно 8 см і 4 см. Визначте основи трапеції.
б) Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівних частин. Із точок поділу проведено відрізки, паралельні основам, до перетину з іншою бічною стороною. Довжини двох більших із цих відрізків дорівнюють 7 см і 10 см. Визначте основи трапеції.

32. а) Середня лінія трапеції дорівнює 12 см, а основи відносяться, як 1 : 7. Визначте відстань між серединами діагоналей трапеції.
б) Діагоналі трапеції ділять середню лінію на три відрізки, один із яких дорівнює сумі двох інших. Визначте відношення основ трапеції.
- 33*. а) Доведіть, що коли у рівнобічній трапеції бісектриси кутів перетинаються в одній точці, то бічна сторона трапеції дорівнює її середній лінії.
б) Доведіть, що коли у рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює середній лінії, то бісектриси усіх кутів перетинаються в одній точці.
34. а) Визначте вид трикутника, якщо дві його середні лінії рівні між собою і утворюють кут 60° .
б) Визначте вид трикутника, якщо дві його середні лінії взаємно перпендикулярні і рівні.
35. а) Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін прямокутника.
б) Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є середини сторін ромба.
36. а) У трикутник ABC вписано ромб $AKLM$ так, що вершини K, L, M належать відповідно сторонам $AB = 14$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см. Визначте відрізки BL і CL .
б) У трикутник ABC вписано ромб $A EFG$ так, що вершини E, F, G лежать відповідно на сторонах AC, BC і AB . Периметр трикутника ABC дорівнює 55 см, а відрізки BF і FC — відповідно 12 см і 8 см. Визначте сторони AB і AC .
37. а) Точки K, L — середини сторін AB і BC ромба $ABCD$. Відрізки DK і DL перетинають діагональ AC у точках M і N . Визначте довжину відрізка MN , якщо $AC = 27$ см.
б) У паралелограмі $ABCD$ вершина D сполучена із серединою M сторони AB . У якому відношенні: а) діагональ AC ділить відрізок DM ; б) відрізок DM ділить діагональ AC ?
- 38*. а) Медіани AM і BM трикутника ABC перетинаються в точці G під прямим кутом. Доведіть, що $AB = CG$.
б) Дві медіани трикутника рівні між собою. Доведіть, що трикутник — рівнобедрений.
- 39*. а) Точки M і N — середини відповідно сторін AD і DC паралелограма $ABCD$. Визначте, у якому відношенні точка перетину відрізків BN і CM ділить кожен із цих відрізків.
б) У паралелограмі $ABCD$ на сторонах AD і DC вибрано відповідно точки P і Q так, що $AP : PD = 1 : 2$, $DQ : QC = 1 : 1$. Визначте, в якому відношенні точка перетину відрізків CP і BQ ділить кожен із них.



Іван Фірсов (бл. 1733 — 1785). «Юний живописець».
Подібність — один із основоположних принципів у мистецтві й науці

Розділ II

Подібність трикутників

Уроки
23–25



Окрім рівності, геометричні форми часто характеризують поняттям подібності. Основним мотивом для цього є те, що подібні форми дуже поширені в природі. Майже усі живі істоти, рослини, мінерали у різні періоди свого буття (росту, розквіту, старіння) зберігають основні риси своєї форми, які й дають змогу вирізнити їх серед інших видів і між собою. Помітивши це, людина й сама здавна створює подібні форми. Їх ми бачимо серед посуду, знарядь праці, одягу, житлових споруд, храмів, машин тощо. На підставі цього, зокрема, ведуть мову про різні стилі в одязі, в архітектурі, образотворчому та ужитковому мистецтві, дизайні. Інколи вдаються навіть до символічного втілення грандіозних подібних форм. Яскравими прикладами можуть бути Капітолій у Вашингтоні і Гавані, споруди головного корпусу Московського університету і культурно-мистецького центру у Варшаві, Сенатська площа у Санкт-Петербурзі і центральна площа у Полтаві. Абсолютно подібними на свої реальні прообрази є іграшкові та виставкові моделі технічних засобів (автомобілів, літаків, кораблів, локомотивів тощо). Аналогічні моделі створюються і для архітектурних споруд. Унікальним у цьому відношенні є «Парк Світу» в Пекіні (відкритий у 1993 р.), в якому зібрані зменшені копії найвизначніших споруд усіх часів і народів.



Зменшені моделі Ейфелевої і Пізанської веж у «Парку Світу» (Пекін, КНР)



Ліворуч. Капітолій у Вашингтоні (The Capital). Приміщення конгресу США (1811 р.).
Праворуч. Капітолій у Гавані (El Capitolio). Конгрес-центр, міністерства,
Академія наук республіки Куба (1929 р.)

Як же формалізувати інтуїтивні уявлення про подібні форми у точному геометричному означенні? Перше, що спадає на думку, це — взяти за основу пропорційність розмірів подібних фігур. Проте вже найпростіший аналіз показує, що цього недостатньо. Наприклад, сторони одного паралелограма можуть бути рівно удвічі меншими від сторін іншого, але самі ці фігури дуже далекими від того, аби їх уважати подібними (рис. 2.1). Отже, принаймні потрібна ще рівність відповідних кутів розмірів (рис. 2.2).

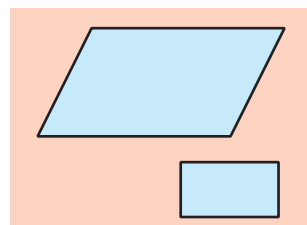


Рис. 2.1

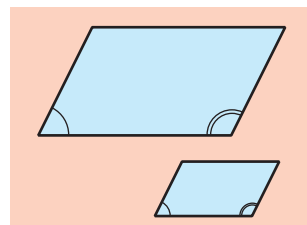


Рис. 2.2

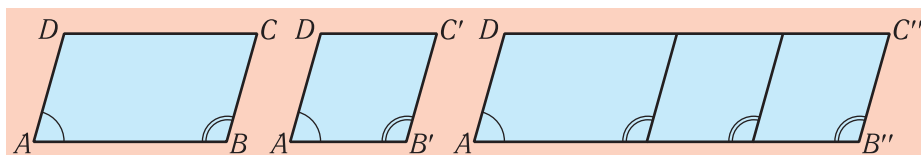


Рис. 2.3

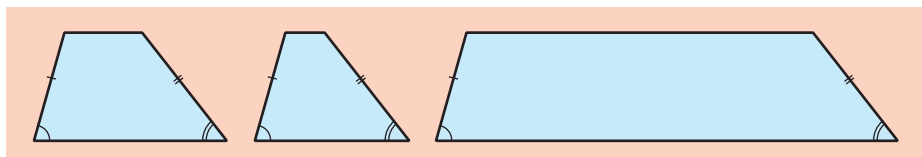


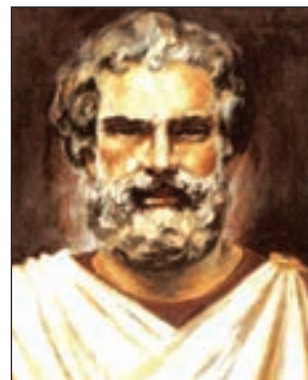
Рис. 2.4

фігури. Ще наочніше це видно на прикладі трапецій (рис. 2.4).

Отже, для подібних фігур повинні одночасно виконуватися обидві умови — і пропорційність відповідних лінійних розмірів, і рівність відповідних кутів.

Але чи можливо без логічного протиріччя поєднати ці вимоги? — Звісно, спочатку цю ідею належить випробувати на найпростіших фігурах, що мають і лінійні, і кутові розміри, тобто на трикутниках. Цьому й присвячений основний зміст другого розділу.

Однак спочатку потрібно провести певну підготовчу роботу, розглянувши пропорційні відрізки на сторонах кута. Основним результатом цього розгляду буде теорема, яку пов'язують з ім'ям легендарного грецького мудреця Фалеса Мілетського.



Фалес Мілетський.
Живописна реконструкція
за античним бюстом

§9. Теорема Фалеса

9.1. Від теорем про середню лінію трикутника і трапеції до теореми Фалеса

Наслідок з теореми про середню лінію трикутника (див. с. 115) можна сформулювати інакше. А саме: якщо на одній стороні кута C послідовно відкласти два рівних відрізки CM і MA , а потім через точки M і A провести паралельні прямі, які перетинають іншу сторону, нехай у точках N і B відповідно, то відрізки CN і NB теж будуть рівними (рис. 2.5).

Або коротше: якщо дві паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній стороні

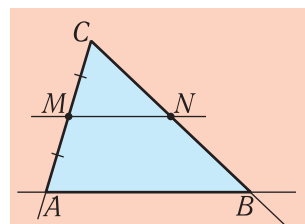


Рис. 2.5

два рівних відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на іншій стороні кута.

Сформульоване у такому вигляді твердження можна значно узагальнити. У результаті одержується теорема, яку пов'язують з ім'ям легендарного Фалеса Мілетського.

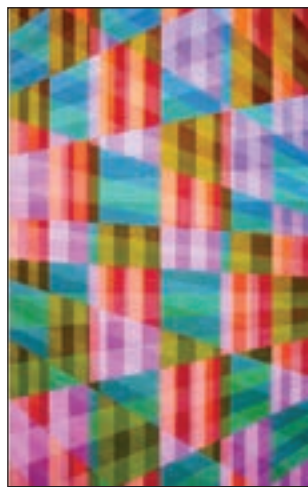
Теорема (Фалеса).

Якщо деяка кількість паралельних прямих, які перетинають сторони кута, відтинають на одній з них рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на іншій стороні кута.

Доведення. Нехай сторони кута ACB перетинають паралельні прямі $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$ (рис. 2.6) і при цьому $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$. Потрібно довести, що тоді $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots$.

Розглянемо трапецію $A_1B_1B_3A_3$. За наслідком з теореми про середню лінію трапеції, пряма A_2B_2 ділить відрізок B_1B_3 навпіл, тобто $B_1B_2 = B_2B_3$. Розглянемо трапецію $A_2B_2B_4A_4$. За тим самим наслідком з теореми про середню лінію трапеції $B_2B_3 = B_3B_4$. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$. Продовжуючи ці міркування й далі, дійдемо висновку, що всі відрізки, які відтинаються на стороні CB , рівні між собою. Теорему доведено.

Якщо рівні відрізки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ відкласти на одній зі сторін кута ACB таким чином, щоб і відрізок CA_1 мав ту саму довжину (рис. 2.7), то тоді



Антоніо Марра (нар. 1959 р.).
Дві композиції в стилі
оп-арту (2010-і роки)

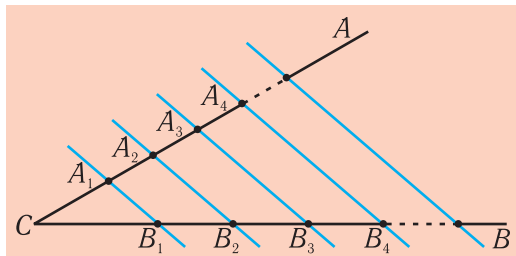


Рис. 2.6

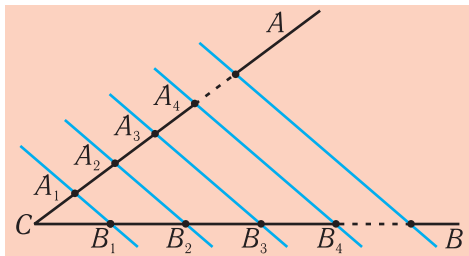


Рис. 2.7

й відрізок CB_1 матиме таку довжину, як і відрізки B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_4 , Це впливає з того, що пряма A_1B_1 , яка ділить навпіл бічну сторону CA_2 трикутника CA_2B_2 , ділить навпіл також і бічну сторону CB_2 .

На цьому ґрунтується простий спосіб розв'язування такої важливої практичної задачі на побудову: заданий відрізок поділити на n рівних частин.

Нехай, наприклад, відрізок PQ потрібно поділити на три рівні частини (рис. 2.8). Проведемо з кінця P який-небудь промінь, який не належить прямій PQ , і відкладемо від його початку послідовно три рівних відрізки PA_1 , A_1A_2 та A_2A_3 . Потім проведемо пряму A_3Q та прямі A_1B_1 і A_2B_2 , паралельні прямій A_3Q . Тоді, як впливає з теореми Фалеса, точки B_1, B_2 перетину цих прямих з відрізком PQ будуть шуканими, тобто поділять його на три рівні частини.

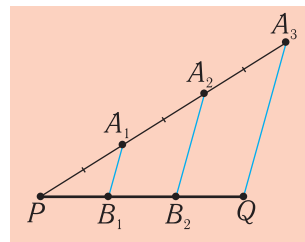


Рис. 2.8

9.2. Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки)

Назву доведеної у попередньому пункті теореми підказала давня легенда. За цією легендою легендарний грецький мудрець Фалес, коли перебував у Єгипті, вразив тамтешніх жерців і навіть самого фараона тим, що виміряв висоту найвищої зі знаменитих пірамід. Звісно, про безпосереднє вимірювання не могло бути й мови, бо висота піраміди сягала майже 150 м (не даремно ж, ці піраміди вважалися одним із семи чудес світу!). Фалес скористався тінню. Легенда сповіщає, що він вибрав день і час, коли довжина його власної тіні дорівнювала зросту: у цей момент висота піраміди повинна дорівнювати довжині відкинutoї нею тіні. (Зрозуміло, що довжину тіні потрібно було відряховувати від середньої точки квадратної основи піраміди (рис. 2.9) і що «закрита» її частина дорівнює половині ширини основи, яку легко виміряти безпосередньо).

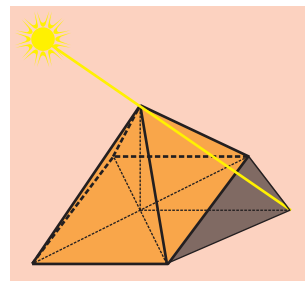


Рис. 2.9

Прискіпливіший аналіз цієї легенди показує, що вимірювання Фалеса насправді мали бути складнішими. Відомо, що знамениті єгипетські піраміди зорієнтовані своїми гранями строго за сторонами світу — тобто на схід – захід та північ – південь. Тому для визначення «прихованої» частини тіні від піраміди необхідно було проводити спостереження опівдні. Але в цей час висота тіні рідко коли дорівнює висоті предмета, який її відкидає. Тому найімовірніше, що Фалес скористався не рівністю висот і тіней предметів, яка буває дуже рідко, а пропорційністю між ними, яка виконується завжди. Останнє означає, що висоти OA та OB двох предметів та довжини їхніх тіней OA_1 та OB_1 (рис. 2.10) утворюють пропорцію, тобто $\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}$. А звідси невідома висота $OB = OA \cdot \frac{OB_1}{OA_1}$ виражалася через величини OA , OA_1 , OB_1 , які можна визначити безпосереднім вимірюванням.

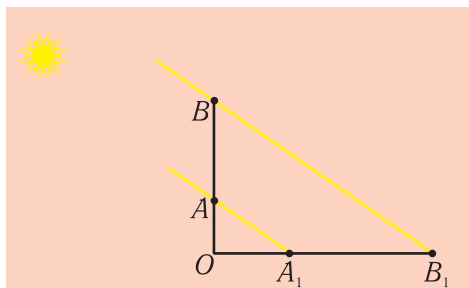
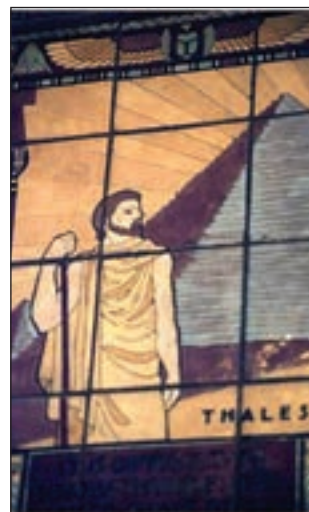


Рис. 2.10

Що ж до вказаної пропорційності між висотами предметів і довжинами їхніх тіней, то вона ґрунтується на таких двох фундаментальних фактах: на паралельності сонячних променів, що формують контур тіні, і на узагальненій теоремі Фалеса.



Мозаїчне панно «Фалес» у Головні читальній залі Філософської бібліотеки в університеті Лос-Анджелеса (1929 р.). На дошці вигравіруваний вислів, що приписується Фалесу: «Пізнати себе важко, давати поради іншим — легко»

Теорема

(узагальнена теорема Фалеса, або теорема про пропорційні відрізки).

Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, які при цьому утворюються на одній зі сторін кута, пропорційні відповідним відрізкам на іншій його стороні.

Доведення. Доведення теореми розіб'ємо на кілька етапів, які відповідають різним випадкам розміщення двох відрізків на стороні кута.

1. Нехай сторони кута O перетинають дві паралельні прямі AA_1 та BB_1 (рис. 2.11). Доведемо, що

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}.$$

Припустимо, що $OB > OA$ і запишемо відношення $\frac{OA}{OB}$ у вигляді десяткового дробу $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, де $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ — відповідні десяткові знаки (цифри). Тоді

$$\begin{aligned} OA &= OB \cdot 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = \\ &= OB \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \dots \right) = \\ &= \frac{OB}{10} + \frac{OB}{100} + \frac{OB}{1000} + \dots + \dots \end{aligned}$$

Це означає, що відрізок OA містить a_1 десятих частин відрізка OB , a_2 — сотих частин відрізка OB , a_3 — тисячних тощо.

Відкладемо послідовно усі ці частини на відрізку OA і проведемо через їхні кінці прямі, паралельні прямим AA_1 та BB_1 . Дістанемо відповідні частини на відрізку OA_1 . За теоремою Фалеса, одній десятій частині відрізка OA відповідатиме $\frac{1}{10}$ частина відрізка

OA_1 , a_1 десятим — a_1 десятих відрізка OA_1 , одній сотій частині відрізка OA відповідатиме $\frac{1}{100}$ частина

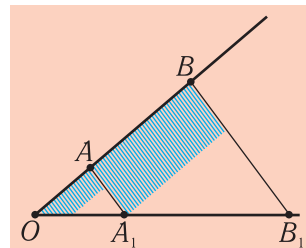


Рис. 2.11



Антоніо Марра.

Ще одна композиція в стилі оп-арту (2011 р.)

відрізка OA_1 , а a_2 сотим — a_2 сотих відрізка OA_1 , і т. д. Отже,

$$\begin{aligned} OA_1 &= \left(a_1 \cdot \frac{OB_1}{10} + a_2 \cdot \frac{OB_1}{100} + a_3 \cdot \frac{OB_1}{1000} + \dots \right) = \\ &= OB_1 \left(a_1 \cdot \frac{1}{10} + a_2 \cdot \frac{1}{100} + a_3 \cdot \frac{1}{1000} + \dots \right) = \\ &= OB_1 \cdot 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \end{aligned}$$

Тоді $\frac{OA_1}{OB_1} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, тобто $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA}{OB}$, що

й треба було довести.

2. Доведемо, що $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$.

Виконаємо з пропорцією $\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}$ послідовно

такі алгебраїчні перетворення:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OA_1};$$

$$\frac{OB}{OA} - 1 = \frac{OB_1}{OA_1} - 1;$$

$$\frac{OB - OA}{OA} = \frac{OB_1 - OA_1}{OA_1};$$

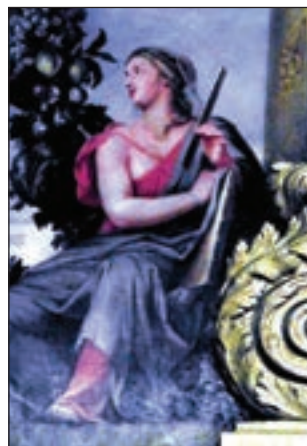
$$\frac{AB}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1};$$

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}.$$

Доведення завершено.

3. Нехай тепер сторони кута O перетинають довільні паралельні прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 (рис. 2.12). Доведемо, що

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$



Алегорія геометрії в королівській залі Меркурія у Версальському палаці (Франція, XVII ст.)



Алегорія алгебри в одній з галерей Ватикану (XVI ст.)

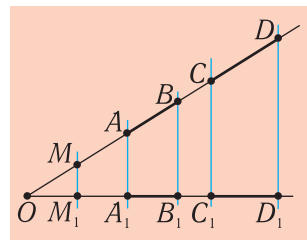


Рис. 2.12

Проведемо $MM_1 \parallel AA_1$. Тоді, за уже доведеним, матимемо:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{OM}{OM_1}; \quad \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{OM}{OM_1}.$$

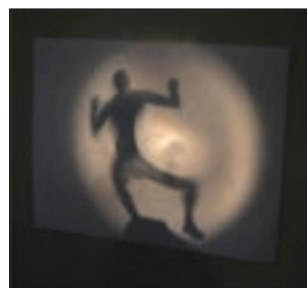
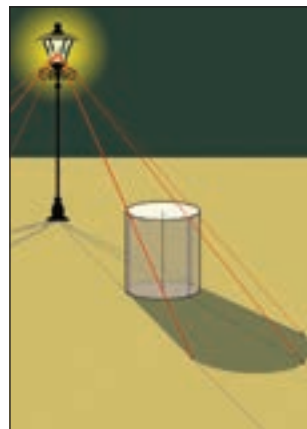
$$\text{Звідси } AB = A_1B_1 \cdot \frac{OM}{OM_1}, \quad CD = C_1D_1 \cdot \frac{OM}{OM_1}.$$

Поділивши почленно першу з цих рівностей на другу, дістаємо:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$

Теорему доведено повністю.

На довершення міркувань стосовно походження теореми Фалеса, варто відзначити виняткову важливість паралельності сонячних променів. Як свідчать прості спостереження за штучним освітленням за допомогою факела, свічки, ліхтаря тощо, при якому світлові промені не паралельні, пропорційність між висотами предметів і розмірами їхніх тіней зазвичай не виконується. Навіть більше, при певних розміщеннях відносно джерела світла, тіні від менших предметів можуть бути навіть довшими, ніж від більших. Геніальність Фалеса проявилася найбільшою мірою саме у здогадці про паралельність сонячних променів.



Непропорційність висот предметів та їхніх тіней при штучному освітленні



Розв'язуємо разом

Задача 1.

На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ взяті точки M і N так, що $AM : MD = CN : NB = 3 : 1$ (рис. 2.13). У якому відношенні прямі AN і CM ділять діагональ DB ?

Розв'язання. Оскільки $AD = BC$, $AM = \frac{3}{4}AD$, $CN = \frac{3}{4}BC$, то $AM = CN$. Отже, за відповідною ознакою $ANCM$ — паралелограм, тобто $AN \parallel MC$. Звідси випливає, що прямі AN і MC відтинають на сторонах кута ADB пропорційні відрізки: $DL : LK = DM : MA = 1 : 3$. Аналогічно одержимо, що й $BK : KL = 1 : 3$. Отже, прямі AN і CM ділять діагональ DB у відношенні $1 : 3 : 1$.

Відповідь. $1 : 3 : 1$.

Задача 2.

Заданий відрізок поділити на декілька частин, що знаходяться між собою у заданому відношенні.

Розв'язання. Нехай, наприклад, відрізок PQ потрібно поділити на 3 частини, довжини яких пропорційні заданим відрізкам p, q, r (рис. 2.14, а).

Проведемо з точки P довільний промінь l , що не містить PQ , і відкладемо на ньому від початку P послідовно відрізки $PA_1 = p$, $A_1A_2 = q$ та $A_2A_3 = r$ (рис. 2.14, б). Потім проведемо пряму A_3Q та прямі A_1B_1 та A_2B_2 , паралельні прямій A_3Q . Тоді точки B_1, B_2 — шукані точки поділу, тобто $PB_1 : B_1B_2 : B_2Q = p : q : r$. Це безпосередньо впливає з узагальненої теореми Фалеса.

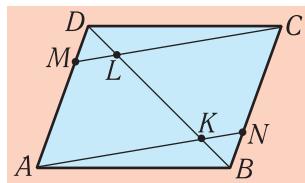


Рис. 2.13

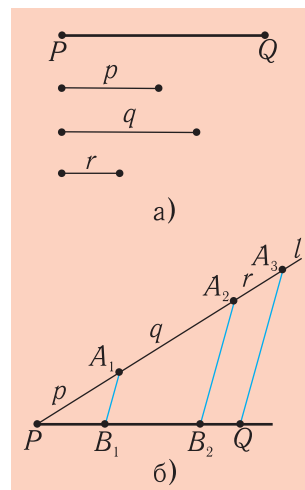


Рис. 2.14

9.3. Застосування теореми Фалеса для трикутника

Властивість бісектриси трикутника

Теорема

(про властивість бісектриси трикутника).

Бісектриса кута трикутника, проведена до основи, ділить її на частини, пропорційні прилеглим бічним сторонам.

Навпаки, якщо відрізок, який виходить з вершини трикутника, ділить його основу на частини,

що пропорційні прилеглим бічним сторонам, то цей відрізок є бісектрисою трикутника.

Доведення. Нехай AA_1 — бісектриса трикутника ABC (рис. 2.15). Відкладемо на продовженні сторони BA відрізок AD , рівний стороні AC , та сполучимо точки D і C .

За побудовою трикутник ADC — рівнобедрений. Отже, його кути при основі DC рівні між собою. Кут BAC є зовнішнім кутом трикутника ADC . Отже, він дорівнює сумі щойно згаданих кутів при основі DC . Тоді половина A_1AC кута BAC дорівнює куту ACD . Рівні кути A_1AC та ACD є внутрішніми різносторонніми для прямих AA_1 і DC та січної AC . Отже, ці прямі паралельні. Тому на основі узагальненої теореми Фалеса:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AD}.$$

А враховуючи, що $AD = AC$, звідси одержуємо:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC},$$

що й треба було довести.

Істинність оберненого твердження впливає з того, що на відрізку BC існує єдина точка A_1 , яка ділить його у відношенні, що дорівнює відношенню прилеглих бічних сторін. А за доведеним, такою точкою є кінець бісектриси, проведеної з протилежної вершини. Теорему доведено повністю.

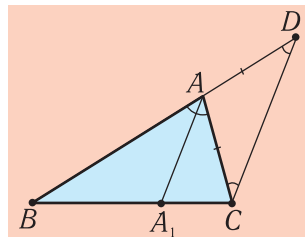


Рис. 2.15



Василь Кандинський
(1866–1944).

Різнобарвність у трикутнику
(1927 р.)



Розв'язуємо разом

Задача 1.

У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута. У якому відношенні вона ділить іншу діагональ, якщо основи трапеції дорівнюють 6 см і 9 см?

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — задана прямокутна трапеція з прямими кутами A і D , у якій діагональ CA є бісектрисою тупого кута C , O — точка перетину її діагоналей (рис. 2.16). Потрібно визначити відношення $DO : OB$.

$\angle DCA = \angle CAB$ — як внутрішні різносторонні при паралельних DC та AB і січній AC . За означенням бісектриси $\angle DCA = \angle ACB$. Отже, $\angle CAB = \angle ACB$. Звідси випливає, що трикутник BAC — рівнобедрений, отже, $CB = AB = 9$ см.

CO — бісектриса трикутника CBD . Тому за властивістю бісектриси $DO : OB = DC : CB = 6 : 9 = 2 : 3$.

Відповідь. $2 : 3$.

Задача 2.

Довести таку властивість бісектриси зовнішнього кута трикутника: якщо бісектриса AA_1 зовнішнього кута CAL трикутника ABC перетинає продовження протилежної сторони BC у деякій точці A_1 (рис. 2.17), то відношення $A_1B : A_1C$ відстаней від цієї точки до кінців сторони BC дорівнює відношенню $AB : AC$ прилеглих бічних сторін.

Розв'язання. Проведемо $CD \parallel AA_1$. Тоді матимемо: $\angle ACD = \angle CAA_1$; $\angle CDA = \angle A_1AL$. Тому $\angle ACD = \angle CDA$, а звідси $AC = AD$. За теоремою Фалеса, $A_1B : A_1C = AB : AD = AB : AC$. Твердження задачі доведено.

Властивість медіан трикутника

У будь-якому трикутнику можна провести три медіани. Якщо виконати рисунок доволі точно, то всі медіани неодмінно пройдуть через одну точку (рис. 2.18). До того ж, кожна з них цією точкою поділиться у цілком певному відношенні. Виявляється, що це не випадково, а справджується така теорема.

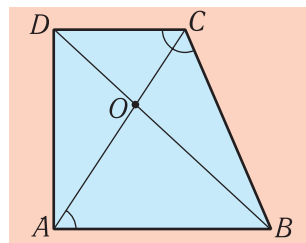


Рис. 2.16

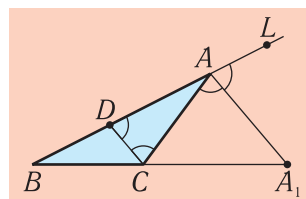


Рис. 2.17

Теорема

(про перетин медіан трикутника).

Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці і кожна з них цією точкою ділиться у відношенні $2 : 1$, беручи від вершини трикутника.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC проведено всі три медіани AK , BM і CN (рис. 2.19). Розглянемо спочатку медіани AK і BM та знайдемо, у якому відношенні точка G їхнього перетину ділить медіану AK .

Для цього проведемо $KL \parallel BM$. Тоді за теоремою Фалеса, застосованою до кута C , матимемо: $CL = LM$ (оскільки $CK = KB$). Отже, виходить, що $AM = 2ML$. Звідси за узагальненою теоремою Фалеса, застосованою до кута CAK , $AG = 2GK$. Отже, медіана BM ділить медіану AK у відношенні $2 : 1$, беручи від вершини A .

Аналогічно можна показати, що й медіана CN перетинає медіану AK у такій точці G' , яка ділить її у відношенні $2 : 1$, беручи від вершини A . Звісно, це означає, що точка G' збігається з точкою G , оскільки на відрізку існує лише одна точка, яка ділить його у певному відношенні. Отже, усі три медіани перетинаються в одній точці G .

Так само можна довести, що й інші медіани точкою G діляться у відношенні $2 : 1$. Теорему доведено.

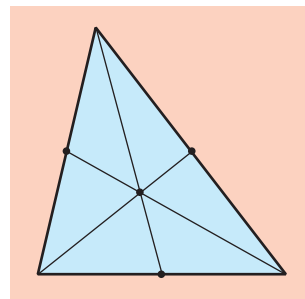


Рис. 2.18

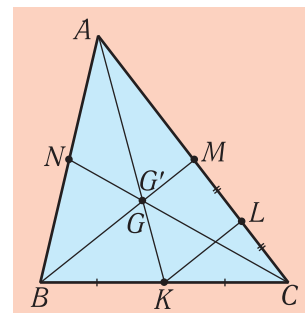


Рис. 2.19



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Теорема Менелая

Розглянуте доведення теореми про перетин медіан трикутника можна розвинути до розв'язання більш загальної проблеми.

Звернімо увагу ще раз на рис. 2.19. Визначення положення точки G' перетину медіан трикутника ABC на медіані AK можна уявляти як знаходження точки



Менелай Александрійський

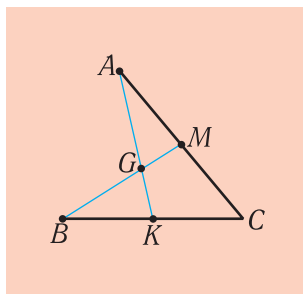


Рис. 2.20

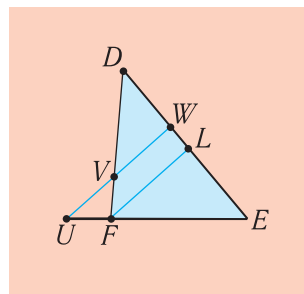


Рис. 2.21

перетину прямої BM зі стороною AK трикутника AKC за умови, що сторону AC ця пряма ділить навпіл, а продовження сторони CK перетинає у такій точці B , для якої $\frac{CB}{BK} = \frac{2}{1}$ (рис. 2.20).

Узагальненням цього спостереження є така задача. Нехай пряма UW ділить сторону трикутника DE у відомому відношенні $\frac{DW}{WE}$, а продовження сторони EF — у такій точці U , для якої відоме відношення $\frac{EU}{UF}$ (рис. 2.21). У якому відношенні $\frac{FV}{VD}$ ця пряма ділить сторону FD трикутника?

Можна також uważати відомими відношення $\frac{DW}{WE}$ та $\frac{FV}{VD}$, а шуканим відношення $\frac{EU}{UF}$, або відомими відношення $\frac{EU}{UF}$ та $\frac{FV}{VD}$, а шуканим — відношення $\frac{DW}{WE}$. Загалом, питання можна поставити так: з'ясувати, яка залежність існує між відношеннями $\frac{DW}{WE}$, $\frac{EU}{UF}$, $\frac{FV}{VD}$.

Відповідь на це запитання дає теорема Менелая, названа на честь давньогрецького математика та астронома Менелая Александрійського (І ст. н. е.), який її відкрив.

Теорема (Менелая).

Нехай пряма перетинає сторони DE та DF трикутника DEF відповідно у точках W і V , а продовження сторони EF — у точці U . Тоді виконується рівність:

$$\frac{DW}{WE} \cdot \frac{EU}{UF} \cdot \frac{FV}{VD} = 1. \quad (*)$$

Навпаки, якщо для трьох точок U, V, W , узятих по одній на двох вказаних сторонах трикутника і на продовженні третьої сторони, виконується рівність (), то ці точки лежать на одній прямій.*

Доведення. Проведемо $FL \parallel UW$ (L належить стороні DE трикутника). За узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{EU}{UF} = \frac{EW}{WL}$, $\frac{FV}{VD} = \frac{LW}{WD}$. Тому ліва частина рівності (*) дорівнює

$$\frac{DW}{WE} \cdot \frac{EW}{WL} \cdot \frac{LW}{WD} = 1,$$

що й треба було довести.

Нехай тепер виконується рівність (*). Припустимо, що точки U, V, W не лежать на одній прямій. Проведемо тоді пряму UV і побудуємо точку W' її перетину зі стороною DE трикутника. Відповідно до уже доведеного,

$$\frac{DW'}{W'E} \cdot \frac{EU}{UF} \cdot \frac{FV}{VD} = 1. \quad (**)$$

Поділивши рівності (*) і (**) почленно одна на одну, легко з'ясовується, що

$$\frac{DW'}{W'E} = \frac{DW}{WE}.$$

А це означає, що точки W' і W ділять сторону DE в одному й тому самому відношенні, беручи від кінця D . Отже, вони збігаються. Теорему доведено повністю.

Зокрема, якщо $\frac{DW}{WE} = \frac{1}{1}$, $\frac{EU}{UF} = \frac{2}{1}$ (як у випадку з доведенням теореми про перетин медіан трикутника), то за теоремою Менелая:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{FV}{VD} = 1.$$

Звідси:

$$\frac{FV}{VD} = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж, наприклад, $\frac{DW}{WE} = \frac{2}{3}$, $\frac{FV}{VD} = \frac{1}{4}$, то для відношення $\frac{EU}{UF}$ матимемо рівність:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{EU}{UF} \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Звідси:

$$\frac{EU}{UF} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1}.$$

Отже, $UF = 5EF$.



Перевірте себе

1. Сформулюйте теорему Фалеса. Як вивести цю теорему з теореми про середню лінію трапеції?
2. Опишіть спосіб застосування теореми Фалеса для поділу відрізка на рівні частини.
3. У чому полягає, власне, узагальнення в узагальненій теоремі Фалеса? В який спосіб цю теорему міг застосовувати сам Фалес? Доведіть узагальнену теорему Фалеса.
4. Сформулюйте теореми про властивості бісектриси і медіан трикутника. Як застосовується узагальнена теорема Фалеса для доведення цих теорем?



Вправи і задачі

- 1°. Сторони кута O перетинають паралельні прямі AC та BD (рис. 2.22); $OA = 8$, $OC = 4$, $AB = 2$. Визначте відрізок OD .
- 2°. Сторони кута O перетинають паралельні прямі AK , BL і CM (рис. 2.23); $OK = 4$, $KL = 5$, $LM = 1$. Визначте відношення: а) $OA : AB$; б) $OA : OC$; в) $BC : AB$; г) $OC : AC$.
- 3°. Сторони кута O перетинають паралельні прямі AD , BE , CF (рис. 2.24); $OA = 2$; $OD = 3$; $AB = 4$; $EF = 9$. Визначте відрізки DE і BC .

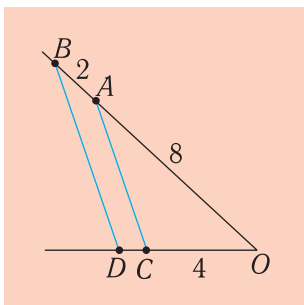


Рис. 2.22

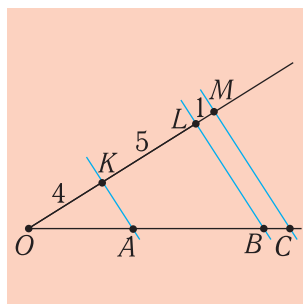


Рис. 2.23

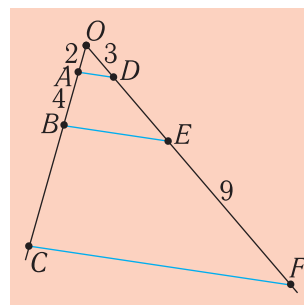


Рис. 2.24

- 4°. Сторони кута O перетинають паралельні прямі AB і CD (точки A і C лежать на одній стороні кута, а B і D — на іншій). Визначте: а) OD , якщо $OA = 8$ см, $OC = 12$ см, $AB = 10$ см;

- б) OA , якщо $OA + OC = 21$ см, $OB = 12$ см, $OD = 16$ см;
 в) OC , якщо $OB : OD = 3 : 5$, $AC = 12$ см.
5. Прямі BC і DE перетинають сторони кута A . Чи паралельні ці прямі, якщо:
 - а) $AB : BD = 3 : 4$, $AC = 12$ см, $AE = 28$ см;
 - б) $AB : AD = 7 : 13$, $AC = 28$ см, $CE = 20$ см?
 6. Сторони кута перетинають дві непаралельні прямі. Чи можуть вони утворити на сторонах кута пропорційні відрізки?
 7. Прямі BB_1 і CC_1 вирізають на сторонах кута O пропорційні відрізки, тобто $OB : OC = OB_1 : OC_1$. Доведіть, що прямі BB_1 і CC_1 паралельні.
 8. Два послідовно відкладені відрізки AB і BC однієї прямої пропорційні двом послідовно відкладеним відрізкам A_1B_1 і B_1C_1 іншої прямої, тобто $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$. Чи впливає звідси, що прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 обов'язково паралельні?
 9. Бічну сторону трикутника поділено на 5 рівних частин і через точки поділу проведено прямі, паралельні основі. Визначте відрізки цих прямих, що розміщуються всередині трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см.
 - 10*. У трикутнику ABC проведено медіану AM і поділено її точкою K у відношенні $8 : 3$, беручи від точки A (рис. 2.25). Потім знайдено точку L перетину прямої CK зі стороною AB трикутника. Визначте відношення відрізків AL і LB .
 - 11*. У трикутнику ABC (рис. 2.26) дано: $AM : MC = 4 : 5$; $AN : NC = 3 : 2$. Визначте відношення $BL : LN$ і $CL : LM$.

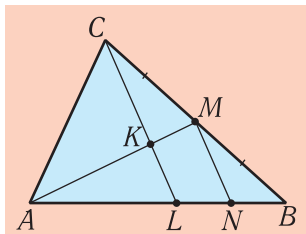


Рис. 2.25

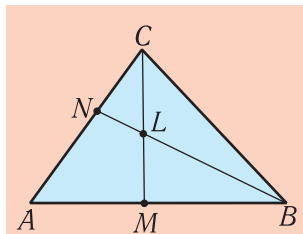


Рис. 2.26

12. Поділіть заданий відрізок: а) на чотири рівних частини; б) на п'ять рівних частин.
13. Поділіть заданий відрізок у відношеннях: а) $1 : 2$; б) $2 : 3$.
14. Заданий відрізок PQ поділіть на чотири частини, відношення яких дорівнює: $1 : 3 : 2 : 4$.
15. Задано три відрізки a , b і c . Поділіть: а) відрізок a у відношенні $b : c$; б) відрізок b у відношенні $c : a$.
16. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до бічної сторони.

17. Побудуйте трикутник за основою і двома медіанами, проведеними до бічних сторін.
- 18°. У трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 та CC_1 . Визначте відношення $BA_1 : A_1C$ та $AB : BC_1$, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см.
- 19°. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Визначте відрізки, на які ділить більшу сторону бісектриса протилежного до неї кута.
- 20°. BL — бісектриса трикутника ABC . Визначте сторону BC , якщо $AB = 16$ см, $AL : LC = 8 : 5$.
21. Різниця бічних сторін трикутника дорівнює 2 см, а бісектриса ділить основу на відрізки завдовжки 5 см і 6 см. Визначте бічні сторони.
22. Точка L належить стороні BC трикутника ABC . Чи є AL бісектрисою трикутника, якщо:
- а) $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $BC = 18$ см, $BL = 8$ см;
б) $AB = 10$ см, $AC = 16$ см, $BL : LC = 5 : 7$?
23. На стороні AB трикутника ABC позначено таку точку L , що $AL : LB = CA : CB$. Чи впливає звідси, що CL — бісектриса трикутника ABC ?
24. Чи може одна з бісектрис трикутника проходити через середину іншої?
25. У трикутник ABC вписано ромб $AKLM$ так, що точки K, L, M належать відповідно сторонам AB, BC та AC . Визначте відрізки, на які точка L ділить сторону BC , якщо $AB = 14$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см.
26. Сторони трикутника дорівнюють 9 см, 12 см і 14 см. Коло з центром на більшій стороні дотикається до двох менших сторін. На які частини центр кола ділить більшу сторону?
27. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні $13 : 4$, беручи від вершини. Визначте основу трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 39 см.
28. AL — бісектриса трикутника ABC , у якому $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Через точку L проведено пряму LM , паралельну AB (M — точка її перетину зі стороною AB). Визначте відрізки AM та CM .
- 29°. Доведіть, що коли дві бісектриси трикутника рівні, то трикутник рівнобедрений.
30. Чи може середня лінія трикутника проходити через точку перетину його медіан?
31. Доведіть, що точка перетину медіан рівностороннього трикутника віддалена від його вершин удвічі далі, ніж від сторін.
- 32°. Дано трикутник, у якому позначено середини двох його сторін. Як за допомогою однієї лінійки побудувати середину третьої сторони?
- 33°. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC медіани перетинаються у точці G . Відстань $AG = 4$ см. Визначте відстань від середини бічної сторони трикутника до його основи.

- 34.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB медіана AM дорівнює 18 см і утворює кут 30° з основою. Визначте висоту трикутника, проведену з вершини C .
- 35.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Визначте відстань від точки перетину його медіан до вершини прямого кута.
- 36.** Відстань від точки перетину медіан рівнобедреного трикутника до його основи дорівнює 6 см. Визначте бічну сторону трикутника, якщо кут, протилежний основі, дорівнює 120° .

§10. Подібні трикутники

Уроки
26–29



10.1. Означення і базова властивість подібних трикутників

Означення.

Два трикутники називають *подібними*, якщо їхні кути відповідно рівні, а сторони, які лежать проти рівних кутів (такі сторони називають відповідними), пропорційні.

Пропорційність сторін означає пропорційність їхніх довжин.

Нагадаємо, що дві пари чисел a, b і c, d називаються пропорційними, якщо рівні їхні відношення $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, тобто виконується пропорція:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Враховуючи це, означення подібних трикутників можна перефразувати так. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ називаються подібними, якщо у них

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

а також

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

На рис. 2.27 зображено два подібних трикутники ABC та $A_1B_1C_1$.

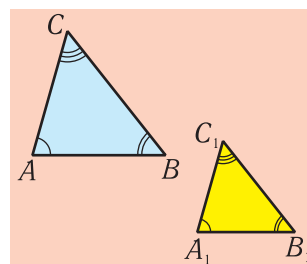


Рис. 2.27

Подібність трикутників позначають за допомогою спеціального значка $\sim$, записуючи, наприклад, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Існує також домовленість про те, що при такому записі кут A рівний куту A_1 , кут B — куту B_1 , а кут C — куту C_1 . Отже, якщо буде записано, що $\triangle ABC \sim \triangle B_1C_1A_1$, то це свідчитиме вже зовсім про інші рівності кутів і відношень сторін, а саме, що $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle C_1$, $\angle C = \angle A_1$ і $\frac{B_1C_1}{AB} = \frac{C_1A_1}{BC} = \frac{B_1A_1}{AC}$.

Як завжди у геометрії, коли означають нове відношення між фігурами, потрібно пересвідчитися у тому, що фігури з таким відношенням справді можуть існувати. Це називається *перевіркою означення на математичну коректність*.

Отже, доведемо, що подібні (але не рівні) трикутники справді існують.

Візьмемо для цього будь-який трикутник ABC і через довільну точку C_1 його сторони AC проведемо пряму C_1B_1 , паралельну стороні CB (рис. 2.28). Одержаний у такий спосіб трикутник $A_1B_1C_1$ буде подібний трикутнику ABC .

Справді, кут A у цих трикутників спільний, а внаслідок паралельності прямих B_1C_1 і BC $\angle B_1 = \angle B$ (як відповідні при січній AB) і $\angle C_1 = \angle C$ (як відповідні при січній AC). Отже, трикутники мають відповідно рівні кути.

Далі, за узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. Отже, для завершення доведення коректності означення потрібно показати, що яке-небудь із відношень $\frac{AB}{AB_1}$ чи $\frac{AC}{AC_1}$ дорівнює відношенню $\frac{BC}{B_1C_1}$.

Проведемо $C_1D \parallel AB$ (рис. 2.29). Тоді за тією самою узагальненою теоремою Фалеса, але тепер уже

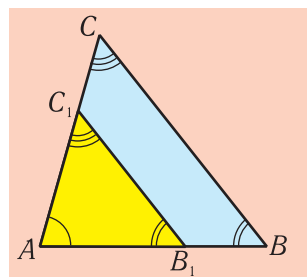


Рис. 2.28

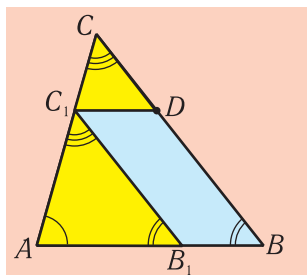


Рис. 2.29

застосованою до кута C , $\frac{AC}{AC_1} = \frac{BC}{BD}$. Залишається зауважити, що чотирикутник B_1BDC_1 — паралелограм, і тому $BD = B_1C_1$. Отже, $\frac{AC}{AC_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, що й треба було довести.

У процесі проведеного обґрунтування фактично доведено твердження, дуже важливе для подальшого. Зважаючи на це, ми виділимо його окремо і назвемо базовою теоремою про подібні трикутники.

Теорема

(базова теорема про подібні трикутники).

Якщо трикутник перетнути прямою, паралельною якій-небудь його стороні, то новий трикутник, відрізаний цією прямою, буде подібним даному.

На рис. 2.28 пряма B_1C_1 паралельна стороні BC трикутника ABC . Згідно з доведеним, вона відтинає від цього трикутника новий трикутник AB_1C_1 , який подібний трикутнику ABC .

Спільну величину k відношень $\frac{AB_1}{AB}$, $\frac{B_1C_1}{BC}$, $\frac{AC_1}{AC}$ відповідних сторін подібних трикутників ABC і AB_1C_1 називають *коефіцієнтом подібності* цих трикутників.

Очевидно, що коли трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності k , то й трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC , але з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{k}$.

Окремим випадком подібності трикутників є їхня рівність. Коефіцієнт подібності у цьому разі дорівнює одиниці ($k = 1$).



Вгорі. Поштова марка до 100-ліття від дня народження видатного польського математика Вацлава Серпінського (1882–1969).

Внизу — фігура, що називається «хустинкою Серпінського». Вона утворюється так. У плоскому рівносторонньому трикутнику проводяться середні лінії і обмежена ними (синя) частина вилучається. Потім те саме робиться з кожним із 3-х «кутових» трикутників і вилучаються наступні три (червоні) трикутники. Далі вилучаються зелені, білі, жовті... трикутники. «Хустинка Серпінського» була побудована у 1915 р. і стала одним з перших прикладів фракталів (від лат. fractus — «подрібнений»). Фракталами називаються фігури, дрібніші частини яких подібні на самі ці фігури. Інтенсивний розвиток фрактальної геометрії розпочався в кінці XX ст. завдяки ефективним застосуванням в комп'ютерній графіці — для стискання зображень. Підставою стало те, що у будь-якій невеликій частині фрактала фактично міститься інформація про нього всього

10.2. Ознаки подібності трикутників

Перша ознака подібності трикутників

Теорема

(перша ознака подібності трикутників — за двома сторонами і кутом між ними).

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні.

Доведення. Нехай у трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ і $\angle A = \angle A_1$ (рис. 2.30). Потрібно довести, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, тобто, що всі кути цих трикутників відповідно рівні, а сторони, які лежать проти рівних кутів, пропорційні.

Якщо $A_1B_1 = AB$, то з пропорції $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ випливатиме, що $\frac{A_1C_1}{AC} = 1$, і отже, $A_1C_1 = AC$. Тоді трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ будуть рівними за двома сторонами і кутом між ними, а тому й подібними.

Якщо ж $A_1B_1 \neq AB$, то один із цих відрізків, AB чи A_1B_1 , менший від іншого. Нехай меншим є відрізок A_1B_1 . Відкладемо тоді його на більшій стороні AB від точки A ; нехай $AB_2 = A_1B_1$, і проведено $B_2C_2 \parallel BC$ (рис. 2.31). Тоді за узагальненою теоремою Фалеса матимемо, що

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC}, \text{ або } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AC_2}{AC}.$$

Але оскільки за умовою $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$, то $\frac{AC_2}{AC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Звідси $AC_2 = A_1C_1$. Отже, трикутник AB_2C_2 рівний трикутнику $A_1B_1C_1$.

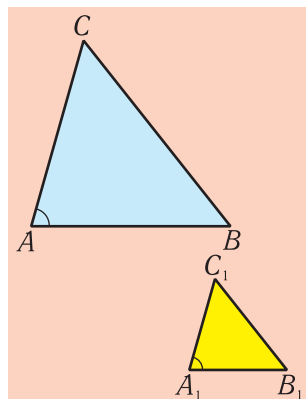


Рис. 2.30

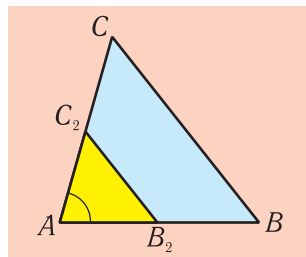


Рис. 2.31

З іншого боку, за базовою теоремою про подібні трикутники, $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Тому $\angle B_2 = \angle B$, $\angle C_2 = \angle C$ і виконуються пропорції:

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}.$$

Звідси, враховуючи рівність трикутників AB_2C_2 і $A_1B_1C_1$, дістаємо: $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Теорему доведено.

Наслідок

(ознака подібності прямокутних трикутників — за катетами).

Якщо катети одного прямокутного трикутника пропорційні катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники подібні.

Твердження наслідку випливає з того, що кути між катетами у прямокутних трикутниках прямі, а отже, рівні між собою.



Подібні прямокутні трикутники «на даху»

Друга ознака подібності трикутників

Теорема

(друга ознака подібності трикутників — за двома кутами).

Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, а $\angle B = \angle B_1$ (рис. 2.32). Потрібно довести, що тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Оскільки сума кутів у будь-якому трикутнику дорівнює 180° , то з рівностей кутів A і A_1 та B і B_1 випливає, що кути C і C_1 теж рівні. Отже, для доведення теореми залишається довести пропорційність відповідних сторін трикутників ABC та $A_1B_1C_1$.

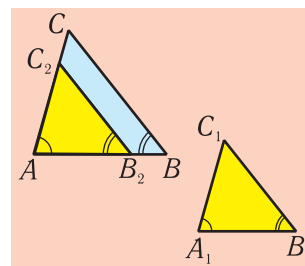


Рис. 2.32

Як і при доведенні першої ознаки, можна вважати, що якась зі сторін AB чи A_1B_1 менша від іншої. Нехай $A_1B_1 < AB$. Відкладемо тоді відрізок A_1B_1 на відрізку AB від точки A ; нехай $AB_2 = A_1B_1$, і проведемо $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Утворений при цьому кут AB_2C_2 буде відповідним з кутом B при паралельних BC та B_2C_2 і січній AB , отже, рівним йому. А оскільки $\angle B = \angle B_1$, то кут AB_2C_2 дорівнює куту B_1 . У зв'язку з цим трикутники $A_1B_1C_1$ та AB_2C_2 будуть рівними за стороною ($A_1B_1 = AB_2$) та прилеглими до неї кутами.

З іншого боку, за базовою теоремою про подібні трикутники, $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$. Тому

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Підставляючи у ці рівності замість сторін трикутника AB_2C_2 рівні їм сторони трикутника $A_1B_1C_1$, дістанемо:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

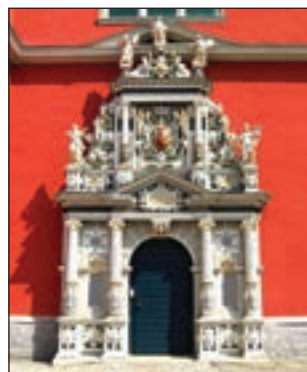
Теорему доведено.

Наслідок

(друга ознака подібності прямокутних трикутників — за гострими кутами).

Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники подібні.

Твердження наслідку випливає з того, що прямокутні трикутники містять прямі кути, які теж є рівними між собою.



Вгорі. Головний портал бібліотеки (у 1592—1810 рр. — університету) в німецькому місті Хельмштедті (Нижня Саксонія) зі скульптурною групою «Вільні мистецтва» («Artes Liberales»).
Внизу. Фрагмент «Муза Геометрії»



Розв'язуємо разом

Задача 1.

Довести, що у будь-якому паралелограмі висоти, проведені до суміжних сторін, обернено пропорційні цим сторонам.

Розв'язання. Нехай у паралелограмі $ABCD$ проведено висоти DE і BF до суміжних сторін AB та AD (рис. 2.33, а).

Прямокутні трикутники AED та AFB мають спільний гострий кут A . Тому, за другою ознакою подібності прямокутних трикутників, вони подібні. Звідси $\frac{BF}{DE} = \frac{AB}{AD}$, що й треба було довести.

Задача 2.

Довести, що у будь-якій трапеції точка перетину діагоналей, точка перетину продовжень бічних сторін та середини обох основ лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай маємо трапецію $ABCD$ з основами AB і DC і в ній: O — точка перетину діагоналей, Q — точка перетину продовжень бічних сторін, M — середина основи AB (рис. 2.33, б). Позначимо через N і N_1 відповідно точки перетину з прямою DC прямих OM та QM . Для доведення твердження задачі достатньо показати, що точки N і N_1 збігаються із серединою відрізка DC . Тоді прямі OM та QM , маючи дві спільні точки M і N , збігатимуться. А це й означатиме, що всі чотири точки O , Q , M і N лежать на одній прямій.

Розглянемо трикутники OAM та OCN . У них відповідні кути A і C , а також M і N рівні, як внутрішні різносторонні при паралельних AB і DC та відповідно



П'єр Франческо Мола
(1612–1666).
Евклід з учнем

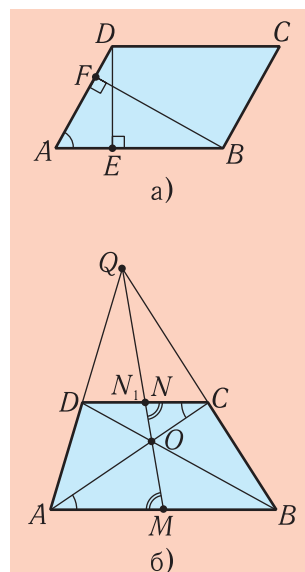


Рис. 2.33

січних AC і MN . За другою ознакою ці трикутники подібні, і тому $\frac{ON}{OM} = \frac{CN}{AM}$.

Розглядаючи в аналогічний спосіб подібні трикутники OBM та ODN , дійдемо висновку, що $\frac{ON}{OM} = \frac{DN}{BM}$.

Оскільки ліві частини в обох одержаних пропорціях рівні, то рівні й праві: $\frac{CN}{AM} = \frac{DN}{BM}$. Звідси, враховуючи, що $AM = BM$, виводимо, що й $CN = DN$, тобто, що точка N справді є серединою основи DC .

Далі так само розглядаємо подібні трикутники QAM і QDN_1 та QBM і QCN_1 . У підсумку дістанемо пропорції: $\frac{QN_1}{OM} = \frac{DN_1}{AM}$; $\frac{QN_1}{QM} = \frac{CN_1}{BM}$. Із них $\frac{DN_1}{AM} = \frac{CN_1}{BM}$, отже, $DN_1 = CN_1$. Виходить, що точка N_1 теж є серединою відрізка DC , тобто збігається з точкою N . Твердження задачі доведено.

Третя ознака подібності трикутників

Теорема

(третья ознака подобности трикутників — за трьома сторонами).

Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 2.34) усі три пари відповідних сторін пропорційні, тобто

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}. \quad (*)$$

Потрібно довести, що тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Відповідно до означення подібних трикутників, для цього потрібно довести рівність відповідних кутів цих трикутників, тобто, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Як і при доведенні перших двох ознак, виконаємо такі додаткові побудови: вважаючи, що $A_1B_1 < AB$,



Титульна сторінка 1-го тому 6-томного топографічного атласу «Міст Земного Світу» (Civitates Orbis Terrarum), виданого в Кельні у 1572 р.

Фігури біблійного Каїна (праворуч), який, за «Старим Заповітом», заснував перше поселення, та античної богині мудрості Афіни, що уважалася покровителькою містобудування, символізують шлях людства від варварства до цивілізованості. На п'єдесталі — Велика Праматір (Magna Mater), що символізує мудрість, знання і навчання. В руках у неї атрибути архітектурного ремесла — ватерпас, циркуль і кутник

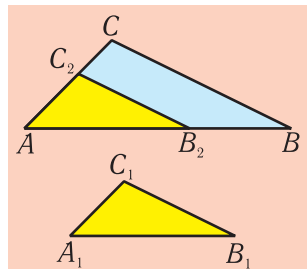


Рис. 2.34

відкладемо на стороні AB від точки A відрізок $AB_2 = A_1B_1$ та проведемо $B_2C_2 \parallel BC$. Дістанемо трикутник AB_2C_2 , який, за базовою теоремою про подібні трикутники, подібний трикутнику ABC . Тому, зокрема,

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{AC_2}{AC}. \quad (**)$$

Порівнюючи пропорції (*) з пропорціями (**), бачимо, що відношення $\frac{A_1B_1}{AB}$ та $\frac{AB_2}{AB}$ у них рівні. Тому рівними є й усі інші відношення. Зокрема,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B_2C_2}{BC}, \quad \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{AC_2}{AC}.$$

Звідси, $B_1C_1 = B_2C_2$, $A_1C_1 = AC_2$.

Виходить, що у трикутниках $A_1B_1C_1$ і AB_2C_2 рівні всі три пари відповідних сторін. Тому ці трикутники рівні. Отже, $\angle A_1 = \angle A$. Тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою. Теорему доведено.

З а у в а ж е н н я. Звернемо увагу, що при доведенні усіх трьох ознак подібності трикутників проводилася одна й та сама додаткова побудова. А саме, на одній зі сторін більшого трикутника від його вершини відкладалася відповідна їй сторона меншого трикутника і через її кінець проводилася пряма, паралельна стороні більшого трикутника. У результаті одержувалося два подібних трикутники, один із яких *рівний* меншому трикутнику.



Фронтиспіс одного з випусків трактату із цивільної архітектури німецького архітектора та математика Леонарда Крістофа Штурма (1669–1719), виданого в Аугсбурзі у 1720–21 рр.

Богиня мудрості Мінерва, спустившись на хмарі, вручає Архітектурі циркуль і кутник. Скульптура приміряє їй на голову корону королеви мистецтв. За цим схвально спостерігає Малярство. На передньому плані за розрахунком сидить Математика. Біля неї Путті, котрий за допомогою циркуля рисує геометричний орнамент. Інший Путті з цікавістю за цим спостерігає



Перевірте себе

1. Сформулюйте означення подібних трикутників. Які ідеї наштовхують на це означення?
2. Як можна накреслити два подібних, але не рівних трикутники?
3. Сформулюйте властивість, яка є базовою при доведенні ознак подібності.
4. Сформулюйте ознаки подібності. Опишіть основну ідею, яка застосовується при доведенні цих ознак.
5. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.



Вправи і задачі

- 37°.** На рис. 2.35 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Вказано також довжини окремих сторін. Визначте x та y .
- 38°.** Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Сторони AB , BC і AC трикутника ABC дорівнюють відповідно 20 см, 18 см і 15 см. Сторона A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 10 см. Чому дорівнюють сторони A_1B_1 і B_1C_1 ?
- 39°.** Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Сторони AB , BC і AC трикутника ABC дорівнюють відповідно 20 см, 15 см і 12 см. Коефіцієнт подібності трикутників дорівнює 2,5. Визначте периметр трикутника $A_1B_1C_1$.
- 40°.** Сторони одного трикутника дорівнюють 8 см, 6 см і 5 см. Менша сторона іншого трикутника, подібного даному, дорівнює 2,5 см. Визначте решту сторін другого трикутника.
- 41°.** Сторони одного трикутника дорівнюють 3,5 см, 4 см, 8 мм. Більша сторона другого трикутника, подібного даному, дорівнює 6 см. Визначте решту сторін другого трикутника.
- 42°.** Сторони даного трикутника — 12,6 см, 16,5 см і 18 см. Визначте сторони трикутника, подібного даному, якщо його менша сторона дорівнює більшій стороні даного трикутника.
- 43°.** У трикутнику ABC $AB = 16,2$ см, $BC = 24,3$ см, $AC = 32,7$ см. Визначте сторони трикутника $A_1B_1C_1$, подібного даному, якщо сторона A_1B_1 цього трикутника відповідна стороні AB першого трикутника та: а) більша за цю сторону на 10,8 см, б) менша від цієї сторони на 5,4 см.
- 44°.** Доведіть, що два трикутники, які подібні одному і тому ж третьому трикутнику, подібні.
- 45°.** Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Чи впливає з цього, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$? Чому?
- 46°.** У подібних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = 30^\circ$, $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $B_1C_1 = 3$ см. Чому дорівнюють кут A_1 і сторона A_1B_1 ?
- 47°.** У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 8$ см. Визначте решту сторін обох трикутників.
- 48°.** У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см. Визначте решту сторін обох трикутників.
- 49.** Діагоналі трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть подібність трикутників BCO і DAO .

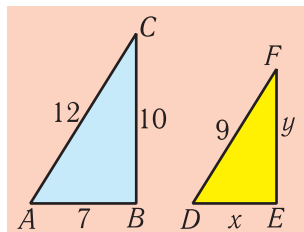


Рис. 2.35

50. Гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює 30° , а іншого — 60° . Чи подібні ці трикутники?
51. Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо вони мають рівні тупі кути?
52. Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо вони мають: а) прямі кути; б) рівні гострі кути?
53. Доведіть подібність рівнобедрених трикутників, які мають рівні кути при вершинах, протилежних основам.
54. У двох рівнобедрених трикутниках кути між бічними сторонами рівні. Бічна сторона й основа одного трикутника відповідно дорівнюють 17 см і 10 см; основа іншого дорівнює 8 см. Визначте його бічну сторону.
- 55°. Доведіть, що всі рівносторонні трикутники подібні.
56. Доведіть, що периметри подібних трикутників відносяться, як їхні відповідні сторони.
57. Сторони трикутника дорівнюють 0,8 см, 1,6 см і 2 см. Визначте сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 5, 5 см.
58. Периметр одного трикутника становить $\frac{11}{13}$ від периметра подібного йому трикутника. Різниця двох відповідних сторін дорівнює 1 см. Визначте ці сторони.
59. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC , перетинає його сторону AC у точці A_1 , а сторону BC — у точці B_1 . Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.
60. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC , ділить його сторону AC у відношенні $m : n$, беручи від вершини C . В якому відношенні вона ділить сторону BC ?
61. У трикутнику ABC проведено відрізок DE , паралельний стороні AC (кінець D відрізка лежить на стороні AB , а кінець E — на стороні BC). Визначте AD , якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см і $DE = 15$ см.
62. Побудуйте різносторонній трикутник і проведіть пряму, паралельну одній із його сторін так, щоб коефіцієнт подібності даного і відрізаного трикутників дорівнював: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$.
63. У трикутнику проведено всі середні лінії. Скільки при цьому утворилося трикутників, подібних даному?
64. Чи подібні два трикутники, якщо їхні сторони мають довжини:
а) 2 см, 3 см, 4 см і 3 см, 4 см, 5 см;
б) 3 см, 4 см, 6 см і 9 см, 14 см, 18 см;
в) 2 см, 4 см, 3 см і 10 мм, 15 мм, 20 мм?
65. За даними, зображеними на рис. 2.36, а–г), знайдіть подібні трикутники та поясніть, чому вони подібні.

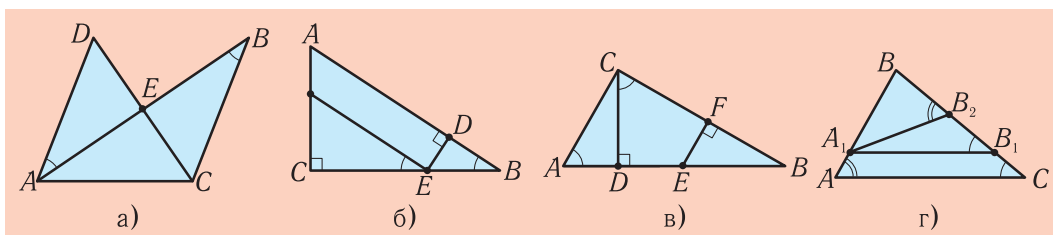


Рис. 2.36

66. На одній зі сторін кута A відкладено відрізки $AB = 5$ см та $AC = 16$ см. На іншій стороні цього ж кута відкладено відрізки $AD = 8$ см і $AF = 10$ см. Чи будуть подібними трикутники ACD і ABF ? Відповідь обґрунтуйте.
67. На сторонах AC і AB трикутника ABC взято точки K і P так, що $AKP = \angle B$. Доведіть, що трикутники AKP і ABC подібні.
- 68*. Доведіть, що в подібних трикутниках відношення відповідних сторін дорівнює відношенню відповідних: 1) висот; 2) бісектрис; 3) медіан.
69. Між пунктами A і B знаходиться болото. Щоб знайти відстань між A і B , позначили поза болотом довільну точку C , виміряли відстані $AC = 600$ м і $BC = 400$ м, а також $\angle ACB = 62^\circ$. Накресліть план у масштабі $1 : 10\,000$ та знайдіть з його допомогою відстань між пунктами A і B .
70. Аби визначити на місцевості відстань AB між двома пунктами, один з яких (B) недоступний, можна виконати побудови, відображені на рис. 2.37. Визначте відстань AB , якщо $AC = 150$ м, $DF \parallel AB$, $DF = 16$ м, $CD = 18$ м.
71. На рис. 2.38, а–в) показано, як можна різними способами визначити ширину AB річки, побудувавши на місцевості подібні трикутники. Поясніть у кожно-

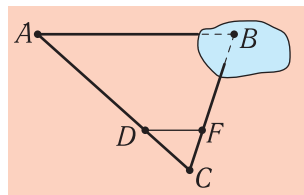


Рис. 2.37

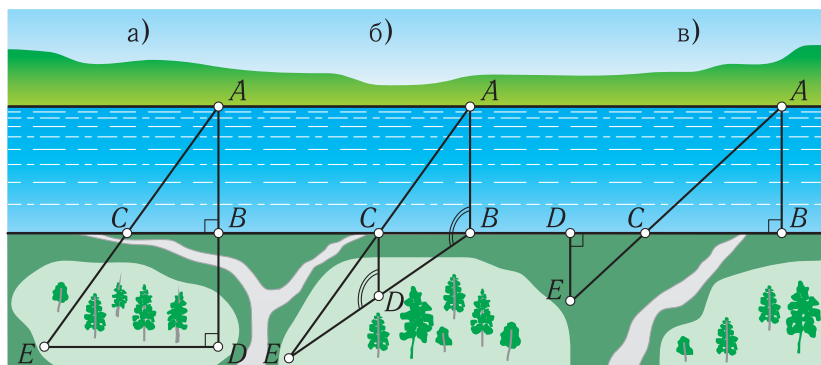


Рис. 2.38

му із зображених випадків виконані побудови, а також укажіть усі величини, які потрібно виміряти. Проведіть вимірювання на плані та визначте ширину річки, якщо кожен із рисунків виконаний у масштабі 1 : 1000.

- 72.** Спостерігач, який дивиться з точки A (рис. 2.39), бачить кінець жердини C і точку D верхньої частини щогли DF на одній прямій. Яка висота щогли, якщо $AF = 60$ м, $AB = 6$ м, $BC = 3$ м?
- 73.** Учень хоче виміряти висоту дерева, користуючись лінійкою завдовжки 15 см (рис. 2.40). На стовбурі він позначив точку, яка знаходиться на висоті 1,5 м від землі. Відійшовши від дерева на 9 м, учень простягає перед собою руку з лінійкою (лінійка розміщена вертикально) та встановлює лінійку так, щоб вона закривала собою дерево від верхівки до вибраної на стовбурі позначки. Потім він вимірює відстань AB від ока до лінійки (наприклад, за допомогою мотузки) та обчислює висоту H дерева за формулою: $H = 9 \cdot \frac{15}{AB} + 1,5$.

Обґрунтуйте правильність цієї формули. У яких одиницях потрібно вимірювати відстань AB ? У яких одиницях тоді буде виміряна висота дерева? Якою буде висота дерева, якщо $AB = 20$ см?

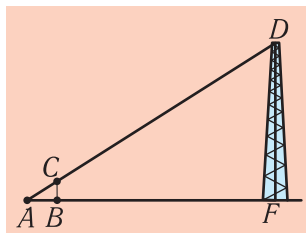


Рис. 2.39

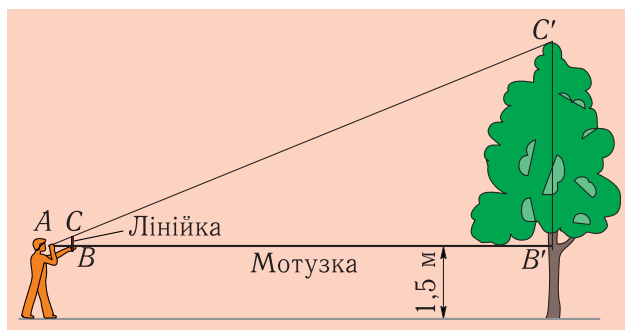


Рис. 2.40

- 74.** Чи може пряма, яка не паралельна жодній стороні трикутника, відтинати від нього трикутник, подібний даному?
- 75.** Чи може медіана трикутника розбивати його на два нерівних, але подібних трикутників?
- 76.** Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі цього трикутника відтинає від нього трикутник, подібний до нього.
- 77.** Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Проведено нерівні висоти AM і BN . Доведіть, що трикутники AMC і ABN подібні.
- 78.** У трикутнику ABC з гострим кутом C проведено висоти AE і BD . Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

79. Доведіть, що коли сторони одного трикутника відповідно перпендикулярні до сторін іншого трикутника, то такі трикутники подібні.
80. Дано гострокутний трикутник ABC . Проведено висоти AA_1 і BB_1 . Скільки при цьому утворилося подібних трикутників?
- 81*. Дано трикутник ABC . Проведено висоти AA_1 і BB_1 , які перетинаються в точці H . Доведіть, що $A_1H \cdot AA_1 = BA_1 \cdot CA_1$, $B_1H \cdot BB_1 = CB_1 \cdot AB_1$.
- 82*. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 , BB_1 , CC_1 . Визначте кути трикутника $A_1B_1C_1$ через кути трикутника ABC .
- 83*. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 , BB_1 , CC_1 . Доведіть, що бісектриси трикутника $A_1B_1C_1$ лежать на висотах трикутника ABC .
- 84*. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC і протилежним кутом 36° проведено бісектрису AD .
- 1) Доведіть подібність трикутників ABC і CAD .
- 2) Визначте основу трикутника ABC , якщо його бічна сторона дорівнює b .
- 85*. Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C перетинає пряму AB в точці D . Доведіть, що $AD : BD = AC : BC$.
86. На продовженні сторони AC трикутника ABC (за точку C) взято таку точку D , що $\angle BDC = \angle ABC$. Відомо, що $AB = 13$ см, $BC = 8$ см, $BD = 10$ см. Визначте AC .
87. Діагоналі трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть подібність трикутників BCO і DAO .
88. Визначте відношення відрізків діагоналі трапеції, на які вона розбивається іншою діагоналлю, якщо основи трапеції відносяться, як $m : n$.
89. Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції, ділить одну з основ у відношенні $m : n$. У якому відношенні вони ділять іншу основу?
90. Лінія, паралельна основам трапеції, ділить одну з бічних сторін у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить іншу бічну сторону?
91. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E . Визначте сторони трикутника AED , якщо $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см.
- 92*. Діагоналі трапеції перетинаються в точці O , а продовження бічних сторін — в точці Q . Доведіть, що пряма OQ ділить основи трапеції навпіл.
- 93*. Продовження бічних сторін трапеції перетинаються під прямим кутом. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини основ, дорівнює піврізниці цих основ.
94. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E лежить на стороні BC . Визначте сторону ромба, якщо $AB = c$, $AC = b$.
- 95*. Периметр паралелограма дорівнює 70 см, а його висоти — 3 см і 4 см. Визначте сторони паралелограма.
- 96*. У трикутник з основою 12 см і висотою 4 см вписано прямокутник з відношенням сторін 5 : 9. Більша основа прямокутника лежить на основі трикутника,

а вершини прямокутника, які не належать цій основі, — на бічних сторонах трикутника. Визначте сторони прямокутника.

- 97°** У даний ромб впишіть квадрат так, щоб на кожній стороні ромба розміщувалася одна вершина квадрата.
- 98°** Побудуйте трикутник за двома кутами та: а) бісектрисою; б) медіаною; в) висотою, проведеними з вершини третього кута.
- 99°** Побудуйте трикутники за двома кутами і радіусами: а) описаного; б) вписаного кола.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§11. Приклади практичних застосувань подібності трикутників

11.1. Ділильний циркуль

Ділильний (або пропорційний) циркуль (рис. 2.41) — це креслярський прилад, який використовують тоді, коли потрібно багато разів ділити відрізки на рівні частини. Він складається із двох однакових ніжок, скріплених за допомогою гвинта. Уздовж ніжок зроблені прорізи, в яких гвинт може вільно рухатися. Ніжки циркуля можна розводити і зводити, повертаючи їх довкола гвинта. Будь-яке взаємне положення ніжок можна зафіксувати. Уздовж розрізів на ніжках нанесені шкали, за допомогою яких встановлюється потрібне співвідношення частин.

Принцип застосування ділильного циркуля покажемо на прикладі. Нехай відрізок AB потрібно поділити на три рівні частини (див. рис. 2.41). Закріпимо гвинт ділильного циркуля у такій точці O , щоб співвідношення частин обох ніжок дорівнювало $1 : 3$, тобто $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{1}{3}$. Потім розхилимо більші частини ніжок на відстань AB . Тоді відстань A_1B_1 між протилежними вістрями становитиме $\frac{1}{3}$ від довжини відрізка AB . Справді, оскільки за першою

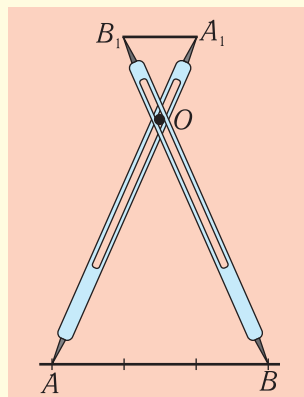


Рис. 2.41

ознакою трикутники OAB і OA_1B_1 подібні, то $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{1}{3}$.

Після цього залишається лише повернути циркуль і тричі відкласти відрізок A_1B_1 на відрізку AB .

Зрозуміло, що ділильний циркуль можна застосувати не тільки для поділу відрізків на цілу кількість рівних частин, а й для поділу їх у будь-якому раціональному відношенні. Для цього гвинт O у цьому відношенні повинен ділити його ніжки.

11.2. Побудова поперечного масштабу

На підставі базової властивості подібних трикутників легко розв'язується така важлива для креслярської практики задача: для заданого відрізка AB побудувати відрізки, які дорівнюють величині $\frac{n}{10}AB$ для всіх $n = 1, 2, 3, \dots, 9$.

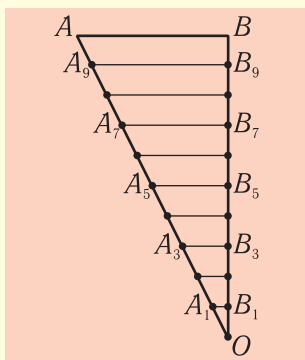


Рис. 2.42

Задачу розв'язують так. Проводять з точки B довільний промінь і відкладають на ньому послідовно десять рівних відрізків $BB_9, B_9B_8, B_8B_7, \dots, B_3B_2, B_2B_1, B_1O$ довільної довжини (рис. 2.42). Потім точку O сполучають з точкою A , а через кінці $B_9, B_8, \dots, B_1$ відкладених відрізків проводять відрізки, $B_9A_9, B_8A_8, \dots, B_1A_1$, паралельні відрізку AB , до перетину з прямою AO . Ці відрізки й будуть шуканими. А саме, відрізок A_1B_1 матиме довжину $\frac{1}{10}AB$, відрізок A_2B_2 — довжину

$\frac{2}{10}AB$, і т. д., відрізок A_9B_9 — довжину $\frac{9}{10}AB$.

Справді, оскільки усі трикутники OA_nB_n подібні трикутнику OAB , то $\frac{AB}{OB} = \frac{A_nB_n}{OB_n}$. Звідси $A_nB_n = \frac{OB_n}{OB} \cdot AB = \frac{n}{10} \cdot AB$.

Описані побудови є ключовими при влаштуванні так званих *поперечних масштабів*, що застосовуються при складанні планів і карт місцевості та при користуванні ними.

Узагалі *масштабом* називають відношення відстаней між будь-якими двома точками на плані чи карті до відстані між відповідними їм точками на місцевості. Якщо, наприклад, відстань між точками A, B на карті дорівнює 1 см, а на місцевості їм відповідають пункти A', B' , віддалені один від одного на відстань 10 км, то масштаб цієї карти дорівнює відношенню $AB : A'B'$, тобто $1 : 1\,000\,000$ (нагадаємо, що $1\text{ км} = 1\,000\text{ м} = 100\,000\text{ см}$).

Іноколи масштаб в означеному сенсі називають *числовим масштабом*.

Окрім числового масштабу, на картах і планах часто наносять і так званий *лінійний масштаб*.

Лінійний масштаб — це відрізок з нанесеними на ньому поділками і вказівками «ціни» кожної такої поділки. Фактично — це своєрідна вимірنا лінійка (звідси і назва «лінійний масштаб»), тільки нанесені на ній поділки вказують не фактичну відстань між поділками, наприклад, у сантиметрах, а ті відстані, які цим поділкам відповідають у реальності. Крім цього, в лінійному масштабі проміжки між сусідніми поділками зазвичай не ділять на дрібніші частини, а замість цього зліва від початку відліку розміщують один, поділений на частини, одиничний відрізок (рис. 2.43).

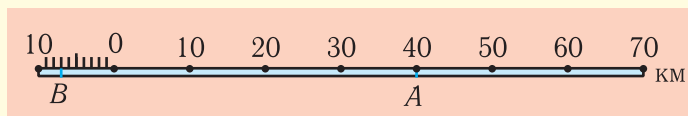


Рис. 2.43

Користуються лінійним масштабом так. Якщо потрібно визначити реальну відстань між двома пунктами, позначеними на карті як A і B , то спочатку одну ніжку вимірювального циркуля ставлять у точку A , а іншу — у точку B . Потім фіксують цей розхил циркуля і ставлять його ніжки на лінійний масштаб так, щоб одна з них розмістилася справа від 0 на якій-небудь великій поділці, а інша — зліва від 0 на дрібній поділці або в самій точці 0. Тоді велика поділка вкаже кругле число кілометрів, а мала — відповідну частину одного такого круглого числа.

Наприклад, якщо ніжки циркуля відзначають на лінійному масштабі точки A і B , як показано на рис. 2.43, то шукана відстань AB дорівнюватиме $40 + 7 = 47$ (км).

Недоліком лінійного масштабу є відносно невисока точність вимірювань, оскільки цей масштаб дає змогу визначати лише цілу кількість нанесених на малій шкалі дрібних одиниць вимірювання. Наприклад, масштаб зображений на рис. 2.43, дає змогу визначати відстань лише з точністю до 1 км. Якщо ж потрібно забезпечити точніші вимірювання, то застосовують згаданий уже вище *поперечний масштаб*.

Сама назва цього масштабу доволі умовна. Вона вказує на те, що він розміщується не вздовж однієї лінії, як лінійний масштаб, а ще й «поперек» неї. Практично у ньому міститься декілька лінійних масштабів, скомпонованих спеціальним чином.

Будують поперечний масштаб так. На лінійному масштабі KL , як на основі будується який-небудь прямокутник $KLMN$ (рис. 2.44). Бічні сторони KN і LM цього прямокутника діляться на десять рівних частин і через точки поділу проводяться відрізки, паралельні основі KL . Потім будується лінійний масштаб на стороні NM , ідентичний з тим, що є на стороні KL , тільки позначки 0, 1, 2, ..., 9 для дрібніших одиниць вимірювання зсувають на одиницю вліво. Нарешті, точки

відрізків NM та KL з однаковими числовими позначками сполучають відрізками. Поперечний масштаб готовий.

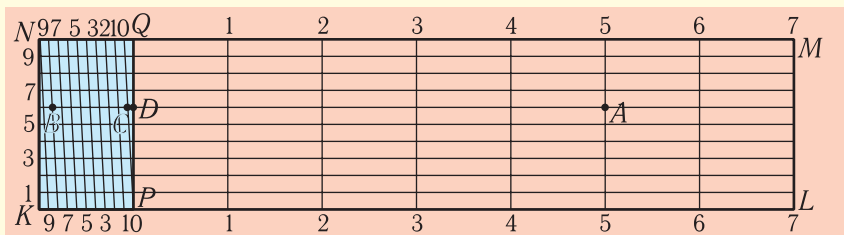


Рис. 2.44

Застосування цього масштабу ґрунтується на тому, що відрізки паралельних прямих, розміщених між іншими паралельними, справа і зліва від прямої PQ , відповідно рівні між собою, а також на тому, що відрізки, розміщені всередині трикутника з вершиною P та основою QO дорівнюють $\frac{n}{10}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 9$) від довжини основи QO (порівняйте з рис. 2.42).

Користуються поперечним масштабом так. Зафіксований розхил циркуля, що визначає відстань між пунктами A і B на карті, переносять на масштаб так, щоб обидві ніжки розмістилися на одній горизонталі, причому ліва ніжка на певній вертикалі справа від прямої PQ , а права — строго на косій лінії зліва від PQ . Тоді шукана довжина відрізка AB визначатиметься сумою довжин відрізків AD , BC і CD . У випадку, зображеному на рис. 2.44, це становить $5 + 0,7 + 0,06 = 5,76$ від прийнятої масштабної одиниці.

Для визначення реальної відстані між пунктами, позначеними на карті як A і B , залишається цю величину помножити на «ціну» масштабної одиниці. Наприклад, якщо ця ціна становить 10 км, то шукана реальна відстань дорівнює $5,76 \cdot 10 = 57,6$ км.



Рис. 2.45

Зрозуміло, що поперечний (а також і лінійний) масштаби дають змогу розв'язувати й обернену задачу, тобто за даними реальними відстанями між відповідними пунктами визначати відповідні їм відстані для позначення пунктів на карті. Щоправда для цього необхідно залучити ще й кутові вимірювання.

Поперечний масштаб інколи ще зображають на звичайних шкільних транспортирах (рис. 2.45), і ви, мабуть, його бачили. Тепер уже знатимете, для чого і як він використовується.

11.3. Розв'язання практичних задач на місцевості¹⁾

Вимірювання висот

Спосіб, винайдений знаменитим Фалесом для визначення висоти єгипетських пірамід, який ми розглянули на початку цього розділу, застосовується і в значно буденніших справах, а саме — для вимірювання висот поодиноких предметів, наприклад, дерев, веж, будівель.

Нехай дерево AB відкидає тінь BC , а жердина A_1B_1 , поставлена вертикально, — тінь B_1C_1 (рис. 2.46). Світлові промені AC та A_1C_1 паралельні, отже, утворюють рівні кути ACB та $A_1C_1B_1$ з горизонтальною площиною. Крім цього, кути ABC та $A_1B_1C_1$ — прямі. Тому прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні. Звідси

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC},$$

і, отже, шукана висота $AB = A_1B_1 \cdot \frac{BC}{B_1C_1}$. Таким чином,



Рис. 2.46

для її визначення достатньо виміряти висоту жердини A_1B_1 та довжини тіней BC і B_1C_1 , а потім провести відповідні елементарні обчислення.

Проте, на практиці не завжди все так «ідеально», як у теорії. По-перше, у похмурі дні тіні немає, по-друге, краї тіні, особливо від дерев, розмиті. А по-третє, тіні може не бути зовсім, або її неможливо виміряти. Саме з останньою ситуацією стикнулися герої роману Жуль Верна «Таємничий острів», коли в них виникла потреба виміряти висоту BC плато над рівнем моря (рис. 2.47). Універсальний спосіб, до якого вдаються в таких випадках — візування, тобто проведення уявних зорових променів.

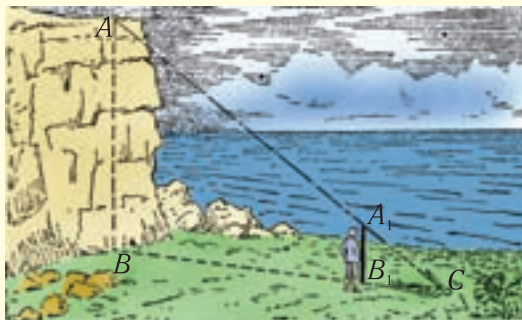


Рис. 2.47

У випадку, описаному Ж. Верном, для проведення візування потрібно лягти на землю так, щоб верх A_1 вертикальної жердини A_1B_1 закривав верхню точку A плато. Тоді можна вести мову про два подібних прямокутних трикутних трикутники A_1B_1C і ABC зі спільним кутом C (точка C уособлює точку зору). А з по-

¹⁾ Подані у цьому пункті ілюстрації запозичені з книги: Я.І. Перельман. Захоплююча геометрія/Переклад і редакція В.О. Тадеєва. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2008.

дібності цих трикутників, як і в попередньому випадку, дістанемо потрібну формулу для розрахунку: $AB = A_1B_1 \cdot \frac{BC}{B_1C}$.

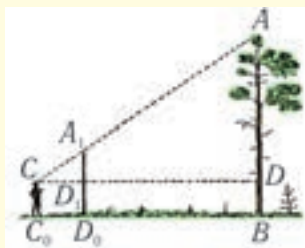


Рис. 2.48

Незважаючи на очевидну простоту, цей спосіб має істотну незручність — необхідність лягати на землю і проводити візування лежачи. Проте незначною видозміною можна позбутися цієї незручності. Потрібно взяти вертикальну жердину A_1D_0 , яка вища за ваш зріст і відійти з нею від предмета AB на таку відстань C_0B , щоб з точки зору C верхівка A закривалася верхньою точкою A_1 жердини (рис. 2.48). При цьому за допомогою помічника потрібно позначити такі точки D і D_1 на предметі та жердині, в яких їх зустрічає горизонтальний промінь зору. Тоді знову матимемо подібні трикутники ADC і $A_1D_1C_1$, з яких

$$AD = A_1D_1 \cdot \frac{CD}{CD_1}.$$

До одержаної за цією формулою величини AD потрібно додати висоту DB , рівну зросту того, хто проводив візування.

Суттєво інший спосіб для визначення висоти реалізується в конструкції висотоміра, яким колись користувалися лісівники. Але й він ґрунтується на візуванні та подібності трикутників.

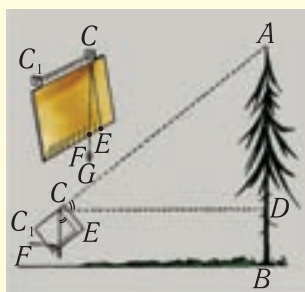


Рис. 2.49

Найпростіший висотомір складається із прямокутної дощечки, двох діоптрів C_1, C (пластинок з отворами для візування), а також важка G на нитці, закріпленій у точці C (для надання дощечці вертикального розміщення та зняття показів візування). Схему приладу та спосіб його застосування зображено на рис. 2.49.

Діоптри C_1, C розміщують на одній прямій з верхівкою A дерева і фіксують відстань EF , яку вказує нитка важка G . Обчислення висоти AD проводять на основі подібності прямокутних трикутників CAD та CFE , що мають рівні гострі кути ACD та FCE (ці кути доповнюють один і той самий кут ECD до 90°):

$$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{AD}; \quad AD = CD \cdot \frac{FE}{CE}.$$

Оскільки ширина CE дощечки відома, то все вимірювання зводиться до вимірювання відстані CD та зняття показів FE на шкалі висотоміра. Для зручності цю

шкалу градуюють так, щоб вона показувала відношення $k = \frac{FE}{CE}$. Тоді, знявши цей показ, множать його на відстань CD і таким чином одразу знаходять висоту AD . Для одержання остаточного результату залишається додати до AD відстань DB , що дорівнює зросту людини.

Ще один цікавий спосіб для вимірювання висоти можна реалізувати за допомогою дзеркала. Дзеркало D кладуть горизонтально на такій відстані BD від предмета AB , щоб з точки зору C бачити його верхівку A (рис. 2.50). Оскільки, за законом оптики, кут падіння ADB світлового променя AD дорівнює куту CDE відбиття, то прямокутні трикутники ABD і CED подібні. Звідси $\frac{CE}{AB} = \frac{ED}{BD}$, і тому шукана висота $AB = CE \cdot \frac{BD}{ED}$.

Спільним недоліком усіх розглянутих способів є те, що жоден з них неможливо застосувати тоді, коли незручно або неможливо підійти до основи предмета для визначення відстані до нього. На рис. 2.51, а) зображено одну з можливих схем вимірювання у такій проблемній ситуації. Застосовується кутник із двома прямими кутами (рис. 2.51, б), відношення сторін a і b якого дорівнює $2 : 1$, а сторони a і c рівні.

З подібності трикутників ADC_1 і $A_1D_1C_1$ та ADC_2 і $A_2D_2C_2$ маємо:

$$C_1D = \frac{C_1D_1}{A_1D_1} \cdot AD = AD;$$

$$C_2D = \frac{C_2D_2}{A_2D_2} \cdot AD = 2AD.$$

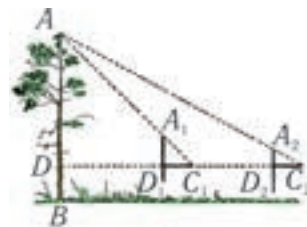
Віднявши від другої рівності першу, дістанемо: $C_2D - C_1D = AD$. Звідси $AD = C_1C_2$.

Отже, цим способом можна виміряти потрібну висоту AD , не підходячи до предмета ближче, ніж на цю висоту.

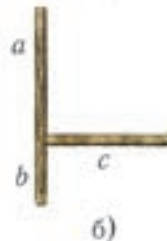
Замість кутника для розв'язання цієї ж задачі можна скористатися дзеркалом, розміщуючи його у двох точках D і D' (рис. 2.52).



Рис. 2.50



а)



б)

Рис. 2.51

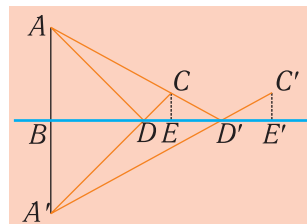


Рис. 2.52

З подібності трикутників ABD і CED , а також трикутників ABD' і CED' маємо пропорції $AB : CE = BD : ED$ та $AB : CE = BD' : ED'$. Звідси

$$BD = AB \cdot \frac{ED}{CE}; \quad BD' = AB \cdot \frac{ED'}{CE}.$$

Віднявши ці рівності, дістаємо:

$$BD' - BD = AB \cdot \frac{ED' - ED}{CE};$$

$$AB = CE \cdot \frac{BD' - BD}{ED' - ED} = \frac{DD'}{ED' - ED}.$$

Тепер уже всі дані, необхідні для обчислення за цією формулою, можна визначити безпосереднім вимірюванням.

Вимірювання відстаней

На сторінках цього підручника вже не раз згадувалося ім'я Фалеса. З-поміж інших важливих геометричних відкриттів Фалесу приписують доведення другої ознаки рівностей трикутників — за стороною і прилеглими до неї кутами. Прямих свідчень, що Фалес справді довів цю ознаку, немає, однак існує легенда, яка дає підстави приписувати це відкриття саме Фалесу.

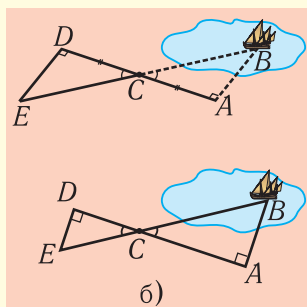


Рис. 2.53

Згідно з легендою, Фалес запропонував простий спосіб для визначення відстаней до кораблів у морі.

Спосіб міг бути таким. Нехай корабель B спостерігається з точки A (рис. 2.53, а). Провішуємо (за допомогою віх) на березі пряму AC , перпендикулярну до напрямку AB , і відкладаємо на ній послідовно два рівні відрізки AC і CD . Потім з точки D провішуємо пряму, перпендикулярну до AD , і знаходимо на ній таку точку E , з якої точку C видно на контурі корабля B . Тоді відстань DE дорівнюватиме шуканій відстані AB .

Це безпосередньо впливає з рівності прямокутних трикутників ABC та DEC (за катетом і гострими кутами ACB та DCE , які є вертикальними). Відстань DE визначається безпосереднім вимірюванням.

Проте практично реалізувати такий спосіб можна хіба що на рівнинній і вільній від дерев і будівель місцевості. Адже довжини сторін трикутника DEC мають бути дуже великими. У зв'язку з цим історики вважають, що Фалес насправді будував не рівні, а подібні трикутники ABC та DEC (рис. 2.53, б), і тоді другий з них може мати й невеликі розміри. А шукана відстань AB визначиться з пропорції: $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC}$;

$$AB = AC \cdot \frac{DE}{DC}. \quad (*)$$

Цю давню ідею можна застосувати і для інших вимірювань на місцевості, якщо їх не можна провести безпосередньо. Наприклад, — для вимірювання ширини великої річки. Спосіб цілком зрозумілий з рис. 2.54. Подібні прямокутні трикутники ABC та DEC розбиваються так, щоб пряма AD проходила паралельно берегу. Тоді для визначення шуканої ширини FB потрібно від величини AB , що визначається за формулою (*), відняти відстань AF , виміряну безпосередньо.

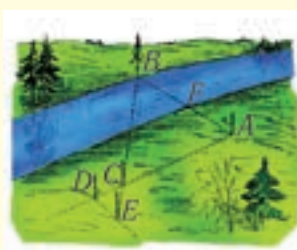


Рис. 2.54



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§12. Приклади теоретичних застосувань подібності трикутників

12.1. Пропорційні відрізки у крузі

Використання властивостей подібних трикутників дає змогу встановити низку цікавих властивостей кола і круга. Обмежимося лише декількома, але дуже важливими прикладами.

Теорема

(про властивість відрізків хорд, що перетинаються).

Якщо через точку, розміщену всередині круга, провести декілька хорд, то добуток відрізків кожної з них, на які їх ділить взята точка, дорівнює одній і тій самій величині.

Доведення. Нехай P — задана точка всередині круга, а AB і CD — дві які-небудь хорди, проведені через цю точку (рис. 2.55). Для доведення теореми достатньо показати, що $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. Тоді для будь-якої іншої хорди, проведеної через точку P , відповідний добуток частин теж дорівнюватиме $AP \cdot PB$, отже, всі ці добутки будуть рівними між собою.

Розглянемо трикутники PAD і PBC . Їхні кути рівні, оскільки спираються на одну й ту саму дугу BMD . Так само рівними є й кути D і B , оскільки вони спирають-

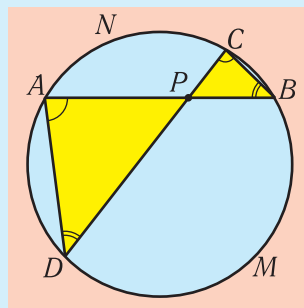


Рис. 2.55

ся на одну й ту саму дугу ANC . За другою ознакою трикутники подібні. Тому $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA}$. Добуток крайніх членів цієї пропорції дорівнює добутку середніх членів: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Теорему доведено.

Теорема

(про властивість дотичної і січної, проведених до круга з однієї точки).

Якщо з точки, розміщеної ззовні круга, провести до круга січну і дотичну, то добуток відрізка січної на його зовнішню частину дорівнюватиме квадрату відрізка дотичної.

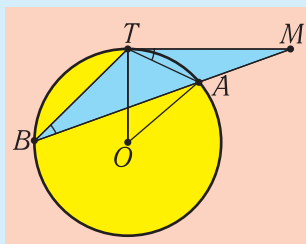


Рис. 2.56

Точніше твердження цієї теореми означає наступне. Нехай із зовнішньої точки M до круга проведемо відрізок січної MB (нехай MA — його зовнішня частина) і дотичну MT (T — точка дотику). Тоді $MA \cdot MB = MT^2$ (рис. 2.56).

Доведення. Розглянемо трикутники MAT і MTB зі спільним кутом M . Доведемо, що у цих трикутниках рівні також кути MTA і MBT .

Кут MBT є вписаним і тому дорівнює половині відповідного йому центрального кута TOA : $\angle MBT = \frac{1}{2} \angle TOA$.

Далі, оскільки за властивістю дотичної, радіус OT перпендикулярний до дотичної MT , то $\angle MTA = 90^\circ - \angle OTA$. З іншого боку, оскільки $\triangle OTA$ — рівнобедрений, то $\angle OTA = \angle OAT$. Тому $\angle TOA = 180^\circ - 2\angle OTA = 2(90^\circ - \angle OTA) = 2\angle MTA$. Отже, $\angle MTA = \frac{1}{2} \angle TOA$. Порівнюючи цей вираз з вище одержаним для $\angle MBT$, дістаємо, що й справді $\angle MTA = \angle MBT$.

З доведеного випливає, що трикутники MAT і MTB подібні (за двома кутами). Тому

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}.$$

Звідси дістаємо потрібну рівність:

$$MT^2 = MA \cdot MB.$$

Теорему доведено.

12.2. Теорема Птолемея

Теорема

(Птолемея про вписаний чотирикутник).

У чотирикутнику, вписаному в коло, сума добутоків протилежних сторін дорівнює добутку діагоналей.

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (рис. 2.57). Потрібно довести, що

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD. \quad (*)$$

Із двох кутів ADB і CDB один не перевищує іншого. Припустимо, що $\angle ADB \geq \angle CDB$. Відкладемо тоді $\angle ADP = \angle CDB$. Дістанемо трикутник ADP , подібний трикутнику BDC (кути A і B у них теж рівні, оскільки спираються на одну й ту саму дугу DC). Звідси $\frac{BC}{AP} = \frac{BD}{AD}$, і тому

$$AD \cdot BC = AP \cdot BD. \quad (1)$$

Крім цього, подібними будуть і трикутники CDP та BDA (у них кути B і C спираються на одну й ту саму дугу AD , а кути зі спільною вершиною D складаються з рівних частин). Звідси $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{PC}$, і тому:

$$AB \cdot CD = PC \cdot BD. \quad (2)$$

Додавши почленно одержані рівності (1) і (2), матимемо:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = (AP + PC) \cdot BD.$$

Врахувавши, нарешті, що $AP + PC = AC$, звідси дістанемо потрібну рівність (*). Теорему доведено.

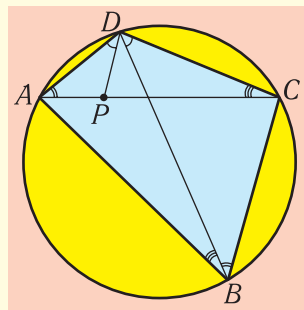


Рис. 2.57

12.3. Медіани і центр мас трикутника

Зараз застосуємо властивості подібних трикутників для доведення теореми про медіану трикутника, яка дає змогу запропонувати цікаву фізичну інтерпретацію для точки перетину медіан.

Теорема

(про медіану трикутника).

Медіана трикутника, проведена до його основи, ділить навпіл усі відрізки з кінцями на бічних сторонах, які паралельні основі.

Доведення. Нехай AM — медіана трикутника ABC , проведена до його основи BC , а LN — довільний відрізок з кінцями на бічних сторонах AB і AC ,

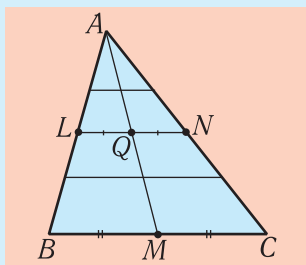


Рис. 2.58

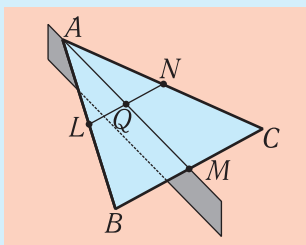


Рис. 2.59

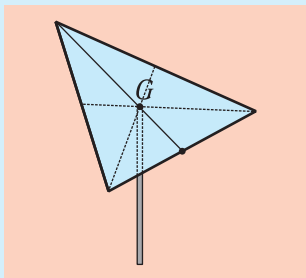


Рис. 2.60

який паралельний основі BC (рис. 2.58). Нехай Q — точка перетину відрізків AM і LN . Потрібно довести, що $LQ = QN$.

За базовою теоремою про подібні трикутники, $\triangle AQN \sim \triangle AMC$, а $\triangle ALQ \sim \triangle ABM$. Звідси $\frac{AM}{AQ} = \frac{MC}{QN}$,

$\frac{AM}{AQ} = \frac{BM}{LQ}$. Оскільки ліві частини цих рівностей рівні,

то рівні й праві: $\frac{MC}{QN} = \frac{BM}{LQ}$. А оскільки $MC = BM$, то

звідси випливає, що $QN = LQ$. Теорему доведено.

Доведеній теоремі про медіану трикутника можна надати цікавої фізичної інтерпретації. Уявімо собі, що плоский трикутник реалізований у вигляді тонкої однорідної пластики, наприклад, металевої. Ми можемо уявляти також, що ця пластина складається з великої кількості дуже тонких прямолінійних смужок LN , паралельних основі BC . Кожна із цих смужок ділиться медіаною AM навпіл. Тому якщо покласти трикутник медіаною AM на ребро горизонтальної рівної лінійки (рис. 2.59), то всі відрізки LN перебуватимуть у стані рівноваги. Отже, у стані рівноваги перебуватиме й весь трикутник ABC .

Те саме матимемо й тоді, коли в аналогічний спосіб розмістимо пластинку відносно якої-небудь іншої медіани. Отже, точка G перетину медіан матиме ту властивість, що коли трикутник підперти у ній вертикальною опорою (рис. 2.60), то він перебуватиме у стані рівноваги.

У зв'язку із цим точку G перетину медіан називають ще центром мас, або центром ваги трикутника.

12.4. Пряма Ейлера

У п. 2.2 було доведено, що три прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці (ця точка називається ортоцентром трикутника). У п. 9.3 було доведено, що медіани трикутника перетинаються в одній точці (центрі ваги). Ще з 7-го класу відомо, що таку саму властивість мають бісектриси трикутника (точка їхнього перетину є центром вписаного кола) та серединні перпендикуляри

до сторін (точка перетину яких є центр описаного кола). Усі разом ці точки — ортоцентр, центр мас, а також центри вписаного та описаного кола — називаються *примітними* точками трикутника.

У загальному випадку всі примітні точки різні. Лише для правильного трикутника усі вони збігаються. Точки перетину медіан і бісектрис завжди лежать усередині трикутника, а центр описаного кола та ортоцентр можуть розміщуватися як усередині, так і ззовні трикутника (а для прямокутного трикутника — на його сторонах).

Цікавий факт щодо взаємного розміщення примітних точок трикутника відкрив у XVIII ст. видатний швейцарський математик Леонард Ейлер. З'ясувалося, що у випадку, коли трикутник не є рівностороннім, центр його ваги G , центр описаного кола O і ортоцентр H завжди лежать на одній прямій, причому точка G — між точками O та H і вдвічі ближче до точки O , ніж до точки H : $GH = 2GO$ (рис. 2.61). Доведемо цю видатну *теорему Ейлера*.

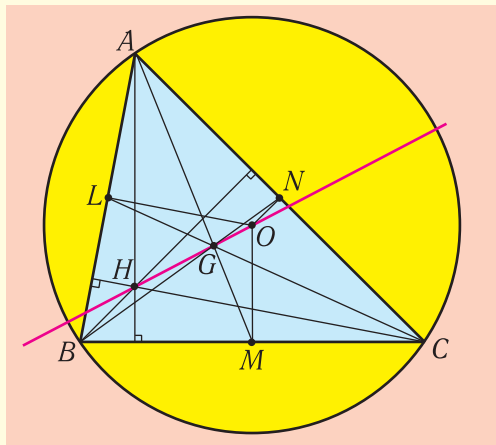


Рис. 2.61

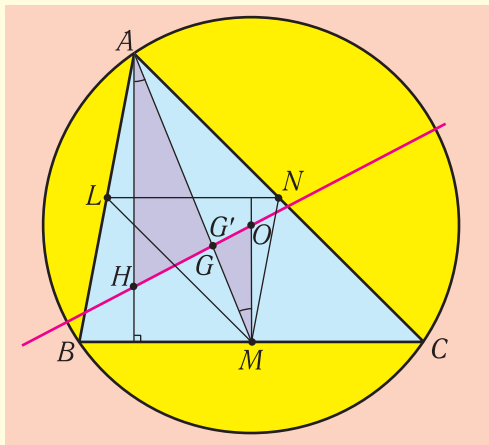


Рис. 2.62

Нехай L, M, N — середини сторін даного трикутника ABC (рис. 2.62). Сторони трикутника MLN є середніми лініями трикутника ABC , отже, вони удвічі менші за відповідні сторони трикутника ABC . Інакше кажучи, сторони трикутників ABC і MNL пропорційні із коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{1}{2}$. Отже, ці трикутники подібні.

Серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC містять висоти трикутника MNL . Отже, точка O є ортоцентром трикутника MNL .

У подібних трикутниках ABC і MNL відношення відрізків відповідних висот дорівнює відношенню відповідних сторін (строге доведення цього доволі очевидного факту подається у п. 12.6). Отже, $\frac{MO}{AH} = \frac{1}{2}$.

Нехай G' — точка перетину медіани AM з прямою HO . У трикутниках AHG' і MOG' кути при спільній вершині G' рівні як вертикальні, а кути при вершинах A і M — рівні, як внутрішні різносторонні при паралельних AH і MO та січній AM . Тому ці трикутники подібні. Отже, $\frac{MG'}{AG'} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2}$.

Враховуючи властивість медіан трикутника, звідси випливає, що G' — точка перетину медіан заданого трикутника ABC , тому вона збігається з точкою G . Тоді з подібності тих самих трикутників AHG та MOG , випливає, що й $\frac{GO}{GH} = \frac{1}{2}$.

Теорему доведено

Пряма, на якій лежать точки H , G , O , називається *прямою Ейлера* для трикутника ABC .

12.5. Коло дев'яти точок

Розміщенням на одній прямій точок H , G , O властивості висот і медіан трикутника не обмежуються. На початку XIX ст. декілька відомих математиків, зокрема, французькі математики Ж.В. Понселе (1788–1867) і Ш.Ж. Бріаншон (1785–1864), а також німецький математик К.В. Фейєрбах (1800–1834), незалежно один від одного відкрили ще дві неймовірно чудові властивості.

1. Основи медіан трикутника, основи його висот і середини відрізків висот від вершин до точки їхнього перетину лежать на одному колі (колі 9-ти точок).
2. Центр кола дев'ятьох точок лежить на прямій Ейлера якраз посередині між ортоцентром і центром описаного кола.

Інколи в літературі перше із цих тверджень без достатніх підстав називають теоремою Ейлера, а коло 9-ти точок — колом Ейлера.

Видатному німецькому філософу і математику XVII ст. Готфріду Вільгельму Лейбніцу (1646–1716) приписують вислів: «Були б теореми, а довести легко». Наведені твердження дуже вдало ілюструють цю думку класика математики: тепер їх можуть довести й школярі.

Нехай при збереженні позначень рисунків 2.61–2.62, A_1 , B_1 , C_1 — основи висот трикутника ABC , H_1 , H_2 , H_3 — відповідно середини відрізків AH , BH та CH , Q — центр кола k , описаного навколо трикутника LMN (рис. 2.63). Для доведення першого твердження потрібно показати, що на цьому колі лежать:

1) основи висот A_1, B_1, C_1 ;

2) точки H_1, H_2, H_3 .

Розглянемо чотирикутник A_1LMN . Оскільки LN — середня лінія трикутника ABC , то вона паралельна BC . Отже, A_1LMN — трапеція. MN — теж середня лінія трикутника ABC , тому $MN = \frac{1}{2} AB$. Сторона A_1L дорівнює

$\frac{1}{2} AB$, оскільки це — медіана прямокутного

трикутника AA_1B , проведена до гіпотенузи AB . Тому $MN = A_1L$. Таким чином, A_1LMN — рівнобедрена трапеція. Відомо, що навколо такої трапеції можна описати коло. Отже, точка A_1 лежить на тому самому колі k , що проходить через точки L, M, N .

Так само доведемо, що й основи B_1 та C_1 інших висот належать колу k .

Розглянемо, далі, чотирикутник H_1LMN . LH_1 — середня лінія у трикутнику ABH , тому $LH_1 \parallel BB_1$. LM — середня лінія у трикутнику ABC , тому $LM \parallel AC$. Але $BB_1 \perp AC$, тому $LH_1 \perp LM$. Отже, $\angle MLH_1 = 90^\circ$. Так само доведемо, що $\angle MNH_1 = 90^\circ$. Оскільки, таким чином, у чотирикутнику H_1LMN суми протилежних кутів дорівнюють по 180° , то навколо нього можна описати коло. І це буде те саме коло k , яке проходить через точки L, M, N . Його центром буде середина Q відрізка H_1M — спільної гіпотенузи прямокутних трикутників MLH_1 та MNH_1 , а тому M і H_1 — діаметрально протилежні точками кола k .

Аналогічно доведемо, що на колі k лежать і точки H_2, H_3 і що точка Q — середина відрізків H_2N та H_3L .

Виходить, що на колі k справді лежать усі 9 точок: $L, M, N; A_1, B_1, C_1$ та H_1, H_2, H_3 . Перше твердження доведено.

Оскільки, як доведено, вершини трикутника MNL є діаметрально протилежними до вершин трикутника $H_1H_2H_3$, то при повороті першого з них на 180° відносно точки Q дістанемо другий. Зрозуміло, що тоді ортоцентр O першого суміститься з ортоцентром H другого. А це означає, що й точки H і O одержуються одна з одної у результаті цього повороту. Отже, вони лежать на одній прямій з точкою Q по різні боки і на однаковій відстані від цієї точки. Друге твердження теж доведено.

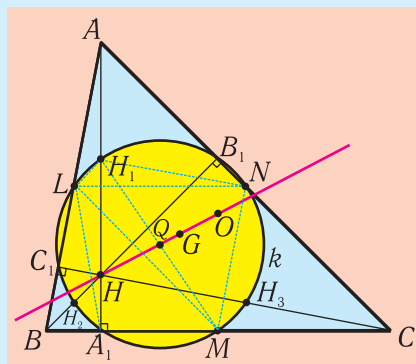


Рис. 2.63

12.6. Пропорційність медіан, бісектрис і висот у подібних трикутниках

Теорема

(про пропорційність відповідних відрізків у подібних трикутниках).

Відношення медіан, бісектрис і висот подібних трикутників, що виходять з відповідних вершин, дорівнюють відношенню відповідних сторін (тобто коефіцієнту подібності).

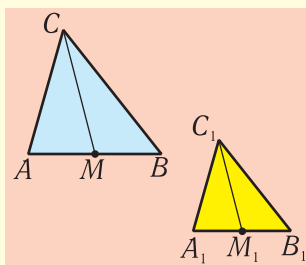


Рис. 2.64

Доведення. 1. Нехай CM і C_1M_1 — медіани, проведені у подібних трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$ (рис. 2.64). Доведено, що $\frac{C_1M_1}{CM} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

З подібності трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ випливає, що $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB}$. Оскільки M — середина AB , а M_1 — середина A_1B_1 , то $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{\frac{1}{2}A_1B_1}{\frac{1}{2}AB} = \frac{A_1M_1}{AM}$. Отже, $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1M_1}{AM}$.

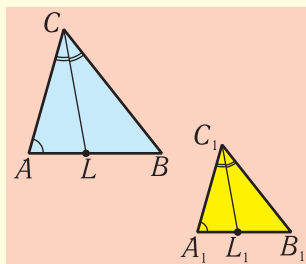


Рис. 2.65

А оскільки, крім цього, $\angle A = \angle A_1$, то за першою ознакою $\triangle ACM \sim \triangle A_1C_1M_1$. Звідси й випливає пропорція $\frac{C_1M_1}{CM} = \frac{A_1C_1}{AC}$, яку потрібно було довести.

2. Нехай тепер CL і CL_1 — бісектриси, проведені у подібних трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$ з відповідних вершин C і C_1 (рис. 2.65).

З подібності трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ випливає рівність їхніх відповідних кутів A та A_1 , а також C та C_1 . З іншого боку, оскільки бісектриси CL і C_1L_1 ділять навпіл рівні кути C і C_1 , то $\angle ACL = \angle A_1C_1L_1$. Отже, трикутники ACL та $A_1C_1L_1$ подібні за двома кутами.

Звідси $\frac{C_1L_1}{CL} = \frac{A_1C_1}{AC}$, що й треба було довести.

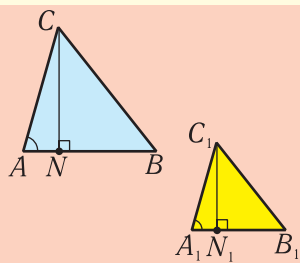


Рис. 2.66

3. Нехай, нарешті, CN і C_1N_1 — відповідні висоти у подібних трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$, проведені з відповідних вершин C і C_1 (рис. 2.66). Як і в попередніх випадках, з подібності трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ випливає рівність їхніх відповідних кутів A та A_1 . Виходить, що у прямокутних трикутниках ANC та $A_1N_1C_1$

рівні гострі кути. Тому, за відповідною ознакою, ці трикутники подібні. Звідси $\frac{C_1N_1}{CN} = \frac{A_1C_1}{AC}$, що й треба було довести. Теорему доведено повністю.

Наслідок

У подібних трикутниках відношення відрізків медіан (бісектрис, висот), на які вони діляться точкою перетину, теж дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

Доведемо для прикладу це твердження для висот (доведення в інших випадках проводиться аналогічно). Нехай H — точка перетину висот AK і CN у трикутнику ABC , а H_1 — точка перетину відповідних висот A_1K_1 і C_1N_1 у подібному до ABC трикутнику $A_1B_1C_1$ (рис. 2.67).

З подібності трикутників ANC і $A_1N_1C_1$ випливає, що $ACH = A_1C_1H_1$. Аналогічно, з подібності трикутників AKC і $A_1K_1C_1$ випливає, що $CAH = C_1A_1H_1$. Тому трикутники AHC і $A_1H_1C_1$ подібні за двома кутами. Звідси

$$\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{C_1H_1}{CH} = \frac{A_1C_1}{AC},$$

що й треба було довести.

Доведену теорему часто застосовують при розв'язанні задач на побудову, у яких задано відношення певних відрізків. Розглянемо приклад.

Задача.

Побудувати трикутник ABC за даним кутом A , висотою $AN = h$ та відношенням сторін $AB : AC$, що дорівнює $c : b$, де h , b і c — задані відрізки.

Розв'язання. Спочатку побудуємо трикутник AB_1C_1 за сторонами b , c та кутом A між ними (рис. 2.68). Потім проведемо висоту AN_1 цього трикутника і на промені AN_1 відкладемо заданий відрізок $AN = h$. Нарешті, через точку N проведемо пряму BC , паралельну прямій B_1C_1 . Тоді трикутник ABC буде шуканим.

Справді, у ньому буде заданий кут A , задана висота $AN = h$, а за базовою властивістю подібних трикутників, відношення сторін $AB : AC$ дорівнюватиме відношенню відрізків $c : b$.

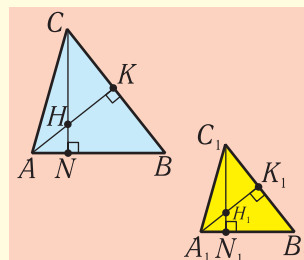


Рис. 2.67

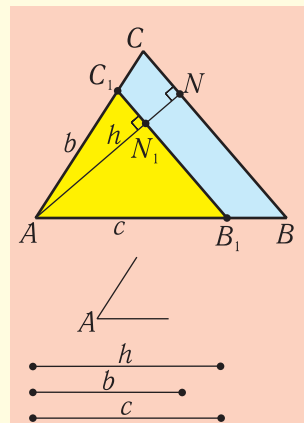
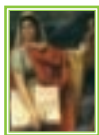


Рис. 2.68



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Леонард Ейлер (1707–1783)



Леонард Ейлер



Йоганн Бернуллі

Леонарду Ейлеру незмірно поталанило на самому початку життєвого шляху. Ще під час навчання у «молодшому філософському класі» (що відповідав теперішній гімназії) на його надзвичайні математичні здібності звернув увагу професор Базельського університету Йоганн Бернуллі — представник знаменитої швейцарської родини науковців і природодослідників Бернуллі. Йоганн Бернуллі займався з Леонардом у себе вдома по суботах, пропонуючи для студіювання найважчі математичні книги. Через тиждень учень спочатку звітував про прочитане, а потім отримував необхідні консультації з метою усунення «темних» плям у прочитаному, а насамкінець — завдання на наступний тиждень. Така форма роботи захоплювала Леонарда. Пізніше він писав: «Причому це в такій мірі досягало поставленої мети, що коли професор усував переді мною одну з перешкод, то після цього одразу ж зникало десяток інших, а це, зрозуміло, є найкращий метод аби досягти помітних успіхів у математичних науках». Під керівництвом Йоганна Бернуллі молодий Ейлер досяг вершин тогочасної математичної науки і був готовий розпочати власні математичні дослідження. Йому потрібні були лише умови для роботи.

Ці такі прості необхідні й достатні умови були забезпечені не на батьківщині Ейлера. Й усе своє подальше життя він провів за її кордонами — спочатку у Петербурзі (з 1727 р. по 1741 р.), потім у Берліні (по 1766 р.), нарешті — знову, і тепер уже назавжди, — у Петербурзі.

Виняткові умови, які створювалися для Ейлера-ученого, особливо у Петербурзі, сприяли і якості, і кількості його наукових досліджень. Він незмірно збагатив і розширив усі існуючі на той час напрямки математики, окремі з них створив фактично одноосібно (наприклад, усю сучасну тригонометрію), а деякі відкриття були належно поціновані вже після його смерті. Більшість його праць навдивовижу сучасні навіть за формою, оскільки саме Ейлеру ми завдячуємо значною кількістю математичних символів, які застосовуються у сучасній математиці. «Ейлер повів за собою наступні покоління і навчив їх думати й писати так, як думав і писав сам», — писав про нього наш великий співвітчизник М.В. Остроградський.



Завдання для повторення та проведення контрольної роботи до розділу II

1. а) Сторони трикутника відносяться, як $3 : 6 : 7$. Визначте сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 32 см.
 б) Периметри подібних трикутників відносяться, як $5 : 7$, а сума їхніх менших сторін дорівнює 48 см. визначте сторони обох трикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює $3 : 7 : 8$.
2. а) У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A проведено висоти BM (точка M належить стороні AD) і CN (точка N належить продовженню сторони AB). Доведіть подібність трикутників AMB і CNB .
 б) У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A проведено висоти BM (точка M належить стороні DC) і CN (точка N належить продовженню сторони AD). Доведіть подібність трикутників BMC і CND .
3. а) Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються у точці Q . Менша основа BC дорівнює 5 см, AB дорівнює 7 см, BQ дорівнює 6 см. Визначте більшу основу трапеції.
 б) Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці P . Більша основа AD дорівнює 26 см, CD дорівнює 9 см, CP дорівнює 4 см. Визначте меншу основу трапеції.
4. а) Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а діагоналі — 15 см, 20 см. Визначте відрізки, на які кожна діагональ ділиться точкою перетину.
 б) Точка перетину діагоналей трапеції ділить одну з діагоналей на відрізки 5 см і 9 см. Визначте основи трапеції, якщо їхня різниця дорівнює 8 см.
5. а) Висоти паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см, а його периметр — 64 см. Визначте сторони паралелограма.
 б) Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см, а його периметр — 44 см. Визначте сторони паралелограма.
6. а) Основи й висота трапеції відповідно дорівнюють 3 см, 5 см і 15 см. Визначте відстані від точки перетину діагоналей трапеції до прямих, на яких лежать її основи.
 б) Відношення відстаней від точки перетину діагоналей трапеції до прямих, які містять основи, дорівнює $3 : 5$. Різниця основ дорівнює 6 см. Визначте ці основи.



Спостереження астрономів за допомогою найпростіших кутомірних інструментів породило ідею про вимірювання центральних кутів за допомогою відповідних їм хорд у колі. Пізніше ця ідея трансформувалася в означення тригонометричних функцій, які розглядаються у цьому розділі

Розділ III

Розв'язування прямокутних трикутників

Рівність кутів та пропорційність сторін у подібних трикутниках свого часу наштовхнула користувачів геометрії, передовсім астрономів, на ідею характеристики кутів за допомогою відношень відповідних їм сторін.

Подивіться на рис. 3.1. Трикутники ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2 мають спільний кут A та паралельні протилежні йому сторони. Вони подібні за двома кутами. Тому відношення

$$\frac{BC}{AC}, \frac{B_1C_1}{AC_1}, \frac{B_2C_2}{AC_2}$$

рівні одному й тому самому значенню k . Якщо змінити величину кута A , змістивши його сторону AB у яке-небудь інше положення AD , то зміняться й відповідні відношення

$$\frac{DC}{AC}, \frac{D_1C_1}{AC_1}, \frac{D_2C_2}{AC_2},$$

оскільки $DC \neq BC$, однак між собою вони все одно будуть рівними.

Отже, відношення $k = \frac{BC}{AC}$ при вибраному напрямку сторони BC однозначно визначає величину кута A . Тому якби скласти таблицю відповідності між кутами A і числами k , то нею можна було

Уроки
30–36

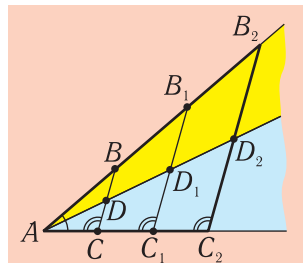


Рис. 3.1

б скористатися завжди, коли виникне потреба у визначенні кута A за відомими сторонами AC і BC (або, навпаки, — за кутом A та однією зі сторін AC чи BC визначати іншу сторону зі співвідношень $BC = kAC$ та $AC = \frac{1}{k}BC$).

Виявилось, що найпростіше розрахувати такі таблиці у тому разі, якщо кут C взяти прямим. У результаті подальшого розгортання цієї ідеї виник новий напрям геометричних досліджень, який дістав назву «тригонометрія», тобто «вимірювання трикутників». Це відбулося значно пізніше «золотого» античного періоду геометрії — у Середні віки. Спочатку цю ідею розвивали арабські учені, а з початком Відродження її підхопили і європейці. Однак базовими елементами залишалися ті самі співвідношення у прямокутному трикутнику, які були відкриті ще в античну епоху.

Із них ми й розпочнемо цей розділ.



Мартін Шаффнер
(1478–1548).

Фрагмент «Геометрія»
із фрески «Алегорія математики» (1533 р.)

§13. Пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

13.1. Середні пропорційні і середні геометричні у прямокутному трикутнику

Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C і гіпотенузою AB (рис. 3.2). Позначимо його катети BC і AC відповідно через a і b , а гіпотенузу через c . Гострий кут A позначимо через α ; тоді кут B дорівнюватиме $90^\circ - \alpha$.

Проведемо у прямокутному трикутнику ABC висоту CH з вершини прямого кута C на гіпотенузу AB і позначимо $CH = h$. Відрізки BH , AH позначимо відповідно через a_1 , b_1 і назовемо *проекціями* катетів a , b на гіпотенузу.

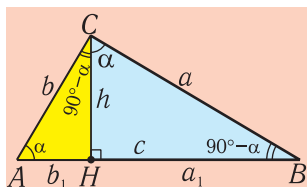


Рис. 3.2

У прямокутному трикутнику AHC гострий кут ACH теж дорівнюватиме $90^\circ - \alpha$, а у прямокутному трикутнику CHB гострий кут HCB матиме величину $90^\circ - (90^\circ - \alpha)$, тобто α . Отже, усі три прямокутні трикутники ACB , AHC і CHB мають відповідні рівні гострі кути. Тому вони подібні. Записуючи відношення відповідних катетів трикутників AHC і CHB , а також катета і гіпотенузи трикутників CHB і ACB та AHC і ACB , дістанемо такі три пропорції:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{h} &= \frac{h}{b_1}; \\ \frac{a_1}{a} &= \frac{a}{c}; \\ \frac{b_1}{b} &= \frac{b}{c}.\end{aligned}\quad (*)$$

У першій з них відрізок h є середнім членом, у другій середнім членом є відрізок a , а в третій — відрізок b . У зв'язку з цим кажуть, що висота h , проведена до гіпотенузи, є *середнім пропорційним* між проекціями a_1 і b_1 катетів на гіпотенузу (або відрізками гіпотенузи), а катети a і b — відповідно *середніми пропорційними* між гіпотенузою c і своїми проекціями a_1 та b_1 на гіпотенузу.

Частіше, проте, співвідношення (*) записують в іншому вигляді. А саме:

$$h^2 = a_1 \cdot b_1; \quad a^2 = a_1 \cdot c; \quad b^2 = b_1 \cdot c. \quad (**)$$

Або:

$$h = \sqrt{a_1 \cdot b_1}; \quad a = \sqrt{a_1 \cdot c}; \quad b = \sqrt{b_1 \cdot c}. \quad (***)$$

Беручи до уваги відомі формули для площі квадрата і прямокутника, рівність $h^2 = a_1 \cdot b_1$ можна тлумачити так: площа квадрата зі стороною h дорівнює площі прямокутника зі сторонами a_1 і b_1 (рис. 3.3). Із цієї рівності випливає, що сторона h квадрата більша за менший і менша від більшого з відрізків a_1 , b_1 . Тому число h , що виражається



Анрі Бобран (1603–1667).
Портрет Марії
де ла Тремуїль, герцо-
гині Саксен-Йенської
(1632–1682) в образі музи
Геометрії (1662 р.)

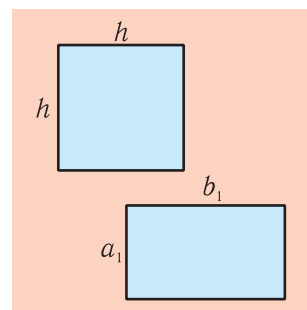


Рис. 3.3

рівністю $h = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$, називається *середнім геометричним* додатних чисел a_1 і b_1 .

Використовуючи цей останній термін, одержані факти, що виражаються рівностями (*), (**) і (***), формулюють у вигляді такої теореми.

Теорема

(про пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику).

Висота прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, дорівнює середньому геометричному між відрізками, на які вона розбиває гіпотенузу, а кожен катет — середньому геометричному між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.



Ця теорема має цікавий наслідок для геометричних побудов. На її підставі легко побудувати квадрат, який рівновеликий (тобто має таку саму площу) з даним прямокутником. У давнину ця задача вважалася дуже важливою і називалася задачею про *квадратуру* прямокутника. Вважалося, що з усіх прямокутників квадрат є найдосконалішою фігурою і тому дає найповніше уявлення про величину обмеженої ним площі.

Нехай задано прямокутник зі сторонами p і q (рис. 3.4, а) і потрібно побудувати рівновеликий йому квадрат. Якщо невідому сторону квадрата позначимо через x , то з рівності $x^2 = p \cdot q$ матимемо, що задача зводиться до побудови відрізка x за формулою $x = \sqrt{p \cdot q}$, тобто до побудови середнього геометричного між відрізками p і q .

Відкладемо відрізки p і q на одній прямій від деякої точки H по різні боки від неї: $HA = q$, $HВ = p$ (рис. 3.4, б). Потім на відрізок AB як на діаметрі побудуємо коло (а достатньо й півкола) і поставимо в точці H перпендикуляр до AB . Продовживши його до точки C перетину з колом, матимемо шуканий відрізок: $x = CH$.



Віньєтка з титульної сторінки «Словника французької архітектури з XI по XVI ст.» (1854 р.) видатного французького архітектора та історика архітектури Ежена Ледюка (1814–1879).

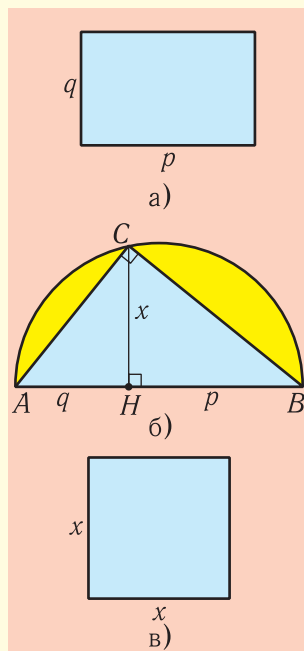


Рис. 3.4

Це випливає з того, що кут ACB є вписаним у коло і спирається на його діаметр, а тому він прямий. Отже, трикутник ACB — прямокутний, і в ньому CH є висотою, проведеною до гіпотенузи. Тому $CH^2 = p \cdot q$. Отже, квадрат зі стороною $x = CH$ (рис. 3.4, в) — шуканий.

Побудову відрізка x можна виконати й дещо інакше. Відкладемо відрізки p і q на одній прямій з одного боку від деякої точки A : $AN = q$, $AB = p$ (рис. 3.5). Якщо $p > q$, то будуємо півколо на відрізку AB і ставимо в точці H перпендикуляр до AB . Якщо C — точка перетину цього перпендикуляра з півколом, то $AC = \sqrt{p \cdot q}$. Отже $x = AC$.

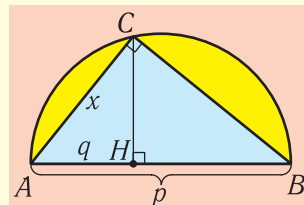


Рис. 3.5

13.2. Теорема Піфагора

Найважливішим наслідком з теореми про пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику є знаменита теорема Піфагора. В часи Піфагора вчення про подібність ще не було досконалим, тому цю теорему доводили на іншому підґрунті — за допомогою перетворення фігур у рівновеликі їм інші фігури (про це ви зможете прочитати на «Сторінках історії» у кінці підручника на с. 303). Тому вміння доводити теорему Піфагора свідчило про неабияку обізнаність у царині геометрії. Тепер ми маємо змогу довести цю теорему простіше.



Піфагор. Фреска в одній з галерей Ватикану. Ім'я Піфагора вигравіруване на синій табличці на постаменті

Теорема (Піфагора).

Квадрат гіпотенузи с прямокутного трикутника дорівнює сумі квадратів його катетів a і b :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доведення. Нехай у прямокутному трикутнику ABC a , b — катети, c — гіпотенуза, a_1 , b_1 — проекції катетів на гіпотенузу (рис. 3.6). За формулами (**), $a^2 = a_1 \cdot c$, $b^2 = b_1 \cdot c$.

Додавши почленно ці рівності, дістанемо: $a^2 + b^2 = a_1 \cdot c + b_1 \cdot c = (a_1 + b_1)c = c \cdot c = c^2$. Теорему доведено.

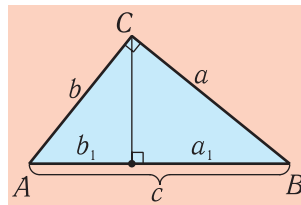


Рис. 3.6

Наслідок

Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за кожен з його катетів.

Справді, з рівності $c^2 = a^2 + b^2$ випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, а звідси, що $c > a$ і $c > b$.

З урахуванням того, що числом x^2 виражається площа квадрата зі стороною x , теорему Піфагора можна сформулювати так: *сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі.*

Геометрична фігура, яка ілюструє цей факт (рис. 3.7), в учнівському середовищі здавна жартома називається «піфагоровими штаними», які буцімто «рівні, як не поверни».

Серйозно цей каламбур ніхто не сприймає, а ось розуміння суті теореми Піфагора здавна вважається ознакою доволі високого рівня освіченості. Зокрема, герої знаменитого роману Жуль Верна «Від Землі до Місяця» всерйоз розглядали «піфагорові штани» як засіб для наведення контактів із селенітами (мешканцями Місяця). Якщо розбити такі гігантські «штани» у степу й освітити прожекторами, то вважалося, що селеніти, побачивши їх із Місяця, запропонують у відповідь щось аналогічне.

Що ж до справжнього значення теореми Піфагора для геометрії, то нам його ще належить оцінити в майбутньому, але на дві обставини можемо звернути увагу вже зараз.

1. Теорема Піфагора безпосередньо вказує на спосіб перетворення двох квадратів в один, рівновеликий їм за площею квадрат. А саме, побудувавши прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів, ми на гіпотенузі цього трикутника можемо побудувати квадрат, рівновеликий двом заданим (рис. 3.8)

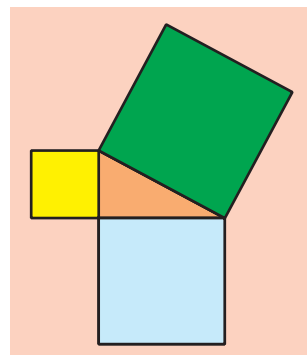


Рис. 3.7

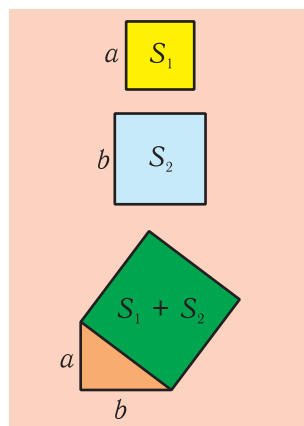


Рис. 3.8

2. Теорема Піфагора опосередковано вказує на спосіб розбиття прямих кутів на місцевості. Є свідчення про те, що саме цим способом користувалися давні єгиптяни (рис. 3.9). Він полягає у тому, щоб побудувати (наприклад, за допомогою мотузки) трикутник, сторони a , b і c якого перебувають у залежності $c^2 = a^2 + b^2$. Тоді кут, який лежатиме проти найбільшої сторони c , буде прямим. І це справді так, бо обернена теорема Піфагора теж істинна.



Рис. 3.9

Теорема

(Піфагора, обернена).

Якщо для трикутника зі сторонами a , b , c виконується рівність $c^2 = a^2 + b^2$, то такий трикутник є прямокутним з гіпотенузою c .

Доведення. Поряд із заданим трикутником зі сторонами a , b , c , які задовольняють рівність $c^2 = a^2 + b^2$, розглянемо ще один трикутник — прямокутний з катетами a і b (рис. 3.10). У цьому другому трикутнику, за доведеною вже прямою теоремою Піфагора, квадрат гіпотенузи дорівнює $a^2 + b^2$, тобто c^2 , а сама гіпотенуза, отже, — c . Тому обидва трикутники рівні за трьома сторонами. Отже, кут між сторонами a , b у заданому трикутнику теж прямий. Теорему доведено.

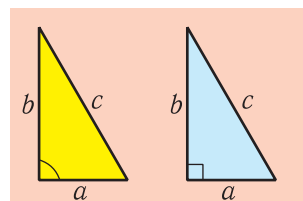


Рис. 3.10

Трійки цілих чисел (a, b, c) , якими виражаються сторони прямокутних трикутників, тобто які задовольняють рівність $c^2 = a^2 + b^2$, називаються *піфагоровими трійками*. Піфагорових трійок чисел — безліч. Найпростішою є трійка $(3, 4, 5)$. Прямокутний трикутник із такими сторонами називають *єгипетським*, оскільки вважається, що його використовували у Давньому Єгипті для побудови прямих кутів на місцевості. Далі в порядку зростання чисел ідуть такі піфагорові трійки: $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$; $(9, 40, 41)$, $(33, 56, 65)$, $(36, 77, 85)$.



Єгипетська геометрія.
Фреска у палаці Лінареса
в Мадриді (кінець XIX ст.)



Розв'язуємо разом

Задача.

Профіль двосхилого даху повинен мати форму прямокутного трикутника ABC з основою $AB = 20$ м і прямим кутом ACB між схилами (рис. 3.11). Проекція N гребеня C на основу має бути віддаленою від одного з її країв на відстань $AN = 5$ м. Визначити з достатньою точністю висоту CN даху над його основою, а також довжини CA і CB його схилів.

Розв'язання. Скористаємося формулою, що виражає катет прямокутного трикутника через гіпотенузу і його проекцію на гіпотенузу. Матимемо: $AC^2 = AN \cdot AB = 5 \cdot 20 = 100$ (м²). Звідси $AC = \sqrt{100} = 10$ (м).

Далі з прямокутного трикутника ANC за теоремою Піфагора знаходимо: $CN^2 = AC^2 - AN^2 = 10^2 - 5^2 = 75$. Звідси $CN = \sqrt{75} \approx 8,66$ (м).

Нарешті, з прямокутного трикутника CNB за теоремою Піфагора визначаємо: $CB^2 = CN^2 + NB^2 = 75 + (20 - 5)^2 = 300$ (м²). Звідси $CB = \sqrt{300} \approx 17,32$ (м).

Відповідь. 10 м; $\approx 8,66$ м; $\approx 17,32$ м.

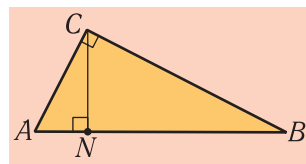


Рис. 3.11



Алегорія геометрії в палаці Фернана Нуньеса в Мадриді (початок XIX ст.)

13.3. Перпендикуляри і похилі

Нагадаємо, що відрізок з одним кінцем на даній прямій, який перпендикулярний до цієї прямої, називається *перпендикуляром* до прямої. Той кінець перпендикуляра, який належить даній прямій, називається *основою* перпендикуляра. На рис. 3.12, для прикладу, зображено перпендикуляр AB до прямої a , точка B — основа цього перпендикуляра.

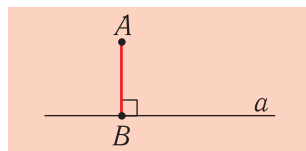


Рис. 3.12

Натомість відрізок з одним кінцем на даній прямій, який не є перпендикуляром до неї, називається *похилою* до цієї прямої. Кінець похилої, що належить прямій, називається *основною* похилої. Відстань між основами перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки до прямої, називається *проекцією* похилої на дану пряму. На рис. 3.13 AB — перпендикуляр до прямої a , AC та AD — похилі до неї, а BC і BD — проекції цих похилих.

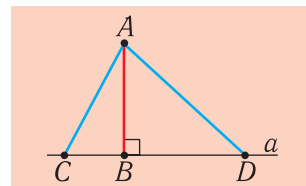


Рис. 3.13

З однієї точки до прямої можна провести один перпендикуляр і скільки завгодно похилих.

Теорема

(про співвідношення між перпендикуляром і похилими до прямої).

Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, менший від будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до цієї прямої.

Доведення. Нехай з точки A до прямої a проведено перпендикуляр AB і похилу AM (рис. 3.14). У результаті утворюється прямокутний трикутник ABM , у якому AB — катет, а AM — гіпотенуза. За наслідком з теореми Піфагора, $AB < AM$. Теорему доведено.

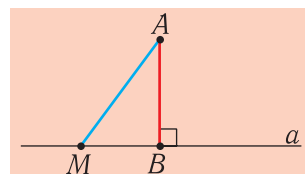


Рис. 3.14

Зазначимо, що доведена властивість є підставою для прийняття відомого з 7 класу означення: **відстанню від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму.**

Теорема

(про співвідношення між похилими та їхніми проекціями на пряму).

Проекція похилої завжди менша від самої похилої. Рівні похилі, проведені до прямої з однієї точки, мають і рівні проекції, більша похила має більшу проекцію.

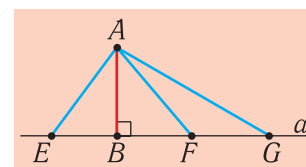


Рис. 3.15

Навпаки, похилі, які проведені до прямої з однієї точки і мають рівні проекції, рівні між собою, а більшу проекцію має більша похила.

Доведення. Нехай з точки A до прямої a проведено перпендикуляр AB і декілька похилих AE , AF , AG (рис. 3.15). У результаті утворюються прямокутні трикутники ABE , ABF , ABG . Проведені похилі є гіпотенузами цих трикутників, а їхні проекції — катетами. Оскільки катет менший від гіпотенузи, то проекція похилої завжди менша від самої похилої.

Припустимо, що похилі AE і AF рівні між собою. Тоді за теоремою Піфагора для їхніх проекцій маємо: $BE^2 = AE^2 - AB^2$, $BF^2 = AF^2 - AB^2$. Звідси $BE^2 = BF^2$, а тому $BE = BF$. Отже, рівні похилі мають рівні проекції. Навпаки, оскільки $AE^2 = AB^2 + BE^2$, $AF^2 = AB^2 + BF^2$, то якщо рівні проекції BE і BF , то $AE^2 = AF^2$, тобто рівні й самі похилі: $AE = AF$.

Нехай, нарешті, похила AG більша за похилу AF . Тоді з трикутників ABG та ABF за теоремою Піфагора: $BG^2 = AG^2 - AB^2$, $BF^2 = AF^2 - AB^2$. Звідси $BG^2 > BF^2$, тобто $BG > BF$. Отже, більша похила має і більшу проекцію. Навпаки, $AG^2 = BG^2 + AB^2$, $AF^2 = BF^2 + AB^2$, а тому якщо $BG > BF$, то $AG^2 > AF^2$, тобто $AG > AF$. Отже, більшу проекцію має більша похила. Теорему доведено.



Розв'язуємо разом

Задача.

З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться, як 2 : 3, а довжини їхніх проекцій дорівнюють 2 см і 7 см. Визначити довжини цих похилих.



Луїджі Креспі (1708–1779). Портрет юнака, можливо, Фердинандо Джіні (1759 р.). Внизу — фрагмент з геометричними рисунками (Палаццо Комунале в Болоньї, Італія).

Картина відображає пріоритети аристократичної молоді середини XVIII ст. У правій руці юнак тримає книгу поета й історика Людовіко Савіолі «Монте Ліцео». На полиці видно збірку творів Петрарки, романтичну повість Саннадзаро «Аркадія» та «Записки Болонської Академії». На столику лежать списані аркуші з геометричними рисунками. Один із рисунків ілюструє теорему Піфагора

Розв'язання. Нехай AB і AD — задані похилі, $BC = 2$ см і $DC = 7$ см — їхні проекції (рис. 3.16). Оскільки більший похилій відповідає більша проекція, то $AB : AD = 2 : 3$.

Нехай $AB = 2x$, $AD = 3x$, де x — невідомий коефіцієнт пропорційності. Тоді з прямокутних трикутників ACB і ACD за теоремою Піфагора послідовно знаходимо:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (2x)^2 - 2^2 = 4x^2 - 4;$$

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 = (3x)^2 - 7^2 = 9x^2 - 49.$$

Оскільки обидва вирази, одержані для AC^2 , при шуканому x повинні мати однакові значення, то $9x^2 - 49 = 4x^2 - 4$. Звідси $5x^2 = 45$, $x^2 = 9$, $x = 3$.

Отже, $AB = 2x = 2 \cdot 3 = 6$ (см), $AD = 3x = 3 \cdot 3 = 9$ (см).

Відповідь. 6 см, 9 см.

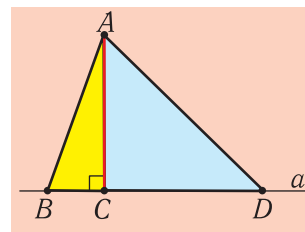


Рис. 3.16



Перевірте себе

1. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи. Які безпосередні наслідки з неї випливають?
2. Що таке середнє пропорційне і середнє геометричне двох відрізків (чисел)? Опишіть можливий спосіб побудови середнього геометричного відрізка за допомогою креслярських інструментів.
3. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора. Яке геометричне тлумачення їй можна надати?
4. Чи справджується обернена теорема Піфагора? Якщо так, то у чому вона полягає і як її довести?
5. Що таке піфагорові трійки чисел?
6. Сформулюйте означення перпендикуляра і похилої до прямої. Які властивості вони мають? Доведіть ці властивості.



Вправи і задачі

До пп. 13.1 – 13.2

- 1°. Визначте висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 3 см і 12 см.
- 2°. Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Визначте гіпотенузу.
3. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Визначте катети трикутника.
4. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а проекція іншого катета на гіпотенузу — 12 см. Визначте гіпотенузу.
5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Визначте висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.
6. Виразіть довжини проекцій катетів на гіпотенузу через довжини a і b самих катетів.
7. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні до її бічних сторін, а основи дорівнюють 5 см і 13 см. Визначте висоту та бічну сторону трапеції.
8. Перпендикуляр, опущений з точки перетину діагоналей ромба на його сторону, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Визначте діагоналі ромба, а також його висоту.
9. Точка дотику кола, вписаного у рівнобічну трапецію, ділить її бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Визначте радіус кола та основи трапеції.
- 10°. Визначте гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: а) 6 см і 8 см; б) 9 см і 12 см; в) 10 см і 24 см.
- 11°. Визначте невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його відомий катет та гіпотенуза дорівнюють відповідно: а) 9 см і 15 см; б) 8 см і 17 см; в) 24 см і 26 см.
- 12°. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Визначте периметр трикутника.
13. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а сума катетів — 7 см. Визначте катети трикутника.
14. Визначте катети прямокутного трикутника, якщо вони відносяться, як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 20 см.
15. Різниця катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гіпотенуза — 25 см. Визначте периметр трикутника.
16. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 13 см. Визначте сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.

17. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Визначте гіпотенузу трикутника.
18. Чи можуть довжини усіх сторін прямокутного трикутника виражатися цілими непарними числами?
- 19°. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів його вимірів.
20. Бисектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см. Визначте периметр трикутника.
21. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а основа — 16 см. Визначте висоту трикутника, проведену до основи.
22. Визначте: а) сторону рівностороннього трикутника, якщо його висота дорівнює 8 см; б) висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює $2a$.
23. Чому дорівнює сторона квадрата, якщо його діагональ дорівнює a ?
24. Сторони прямокутника дорівнюють 60 см і 91 см. Чому дорівнює його діагональ?
25. Чи можна з круглого листа жерсті з діаметром 1,5 м вирізати квадрат зі стороною 1 м?
26. Визначте сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють: а) 6 см і 8 см; б) 16 см і 30 см; в) 24 см і 70 см.
27. Визначте діагоналі ромба, якщо вони відносяться, як 3 : 4, а сторона ромба дорівнює 25 см.
28. Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 6, а висота, проведена до основи, — 16 см. Визначте сторони трикутника.
29. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 14 см, а бічна сторона дорівнює 5 см. Визначте висоту трапеції.
30. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона дорівнює 13 см. Визначте діагональ трапеції.
31. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 17 см, а висота — 8 см. Визначте середню лінію трапеції.
32. Основа AB рівнобічної трапеції $ABCD$ ділиться висотою DE на відрізки завдовжки 5 см і 16 см. Бічна сторона трапеції дорівнює 13 см. Визначте діагональ трапеції.
33. У колі з радіусом 10 см проведено хорду завдовжки 16 см. Через центр кола проведено пряму, перпендикулярну до хорди; нехай M — точка перетину цієї прямої з хордою, а N — з колом. Визначте довжину відрізка MN .
34. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить один із катетів на відрізки 3 см і 9 см. Визначте інший катет та гіпотенузу трикутника.
35. Доведіть, що коли діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні, то $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

36. Доведіть, що трикутники зі сторонами:

а) 7 см, 24 см і 25 см;

б) 1 см, $\sqrt{2}$ см, $\sqrt{3}$ см;

в) $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$, $2ab$ ($a > b > 0$)

є прямокутними.

37. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см, а висота, проведена до гіпотенузи, — 12 см. Визначте катети трикутника.

38. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Визначте відрізки гіпотенузи, на які її ділить висота, проведена з вершини прямого кута.

39. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 12 см і ділить гіпотенузу на відрізки, різниця яких дорівнює 7 см. Визначте катети трикутника.

40°. Бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу у відношенні $p : q$. Визначте, у якому відношенні ділить гіпотенузу проведена до неї висота.

41°. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а медіана, проведена до одного з катетів, — 15 см. Визначте менший катет трикутника.

42°. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 1 см і 4 см, беручи від основи трикутника. Визначте цю основу.

43°. У рівнобічну трапецію вписано коло, радіус якого дорівнює 12 см. Бічна сторона трапеції дорівнює 25 см. Визначте основи трапеції.

44°. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см, а відстань між їхніми центрами — 13 см. Визначте довжину відрізка спільної дотичної з кінцями у точках дотику, якщо кола лежать по один бік від дотичної.

45°. Побудуйте відрізки, довжини яких виражаються формулами $x = \sqrt{2bc}$ та $y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, де a і b — задані відрізки.

До пп. 13.3

46°. Довжини перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки до прямої, дорівнюють відповідно 6 см і 10 см. Визначте довжину проекції похилої.

47°. Довжина похилої та її проекція на пряму дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Визначте довжину перпендикуляра до прямої, проведеного з тієї самої точки.

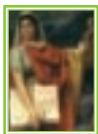
48. За якої умови проекція похилої удвічі менша за саму похилу?

49°. Точка знаходиться на відстані 5 см від прямої. З цієї точки до прямої проведено похилу, яка утворює з прямою кут 45° . Визначте проекцію похилої на пряму.

50°. З точки до прямої проведено дві рівні похилі. Відстань між їхніми основами дорівнює 18 см. Визначте проекції похилих на дану пряму.

51. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з похилих має довжину 13 см, а її проекція на пряму дорівнює 12 см. Інша похила утворює з прямою кут 30° . Визначте її довжину.

- 52.** З точки, розміщеної на відстані 5 см від прямої, проведено до цієї прямої дві похилі. Довжина однієї з похилих дорівнює 13 см, а інша похила утворює з прямою кут 45° . Визначте відстань між основами похилих.
- 53.** З однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Визначте довжину перпендикуляра, якщо довжини похилих дорівнюють 41 см і 50 см, а довжини їхніх проєкцій на пряму відносяться, як 3 : 10.
- 54.** Точки A і B лежать по різні боки від прямої на відстанях 2 см і 3 см від неї. Визначте відстань між проєкціями цих точок на пряму, якщо довжина відрізка AB дорівнює 13 см.
- 55.** З однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Доведіть, що різниця квадратів похилих дорівнює різниці квадратів їхніх проєкцій.
- 56.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 15 см і 16 см. Визначте проєкції найбільшої і найменшої сторін трикутника на пряму, яка містить середню сторону.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

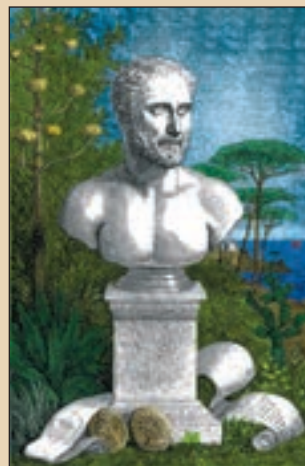
Довкола теореми Піфагора

1. Піфагор і піфагорійці

Постать Піфагора — одна з найлегендарніших і найзагадковіших в усій інтелектуальній історії людства. Існує легенда, що своє ім'я він одержав уже в зрілому віці за свою виняткову мудрість, і що походить воно від слова «піфія»: так називали жрицю-оракула у знаменитому храмі бога Аполлона в Дельфах.

Водночас достеменних фактів про життя Піфагора відомо дуже мало. Лише з уривчастих свідчень окремих істориків, філософів та літераторів пізніших епох можна скласти мерехтливу мозаїку земних днів цієї легендарної людини.

Народився Піфагор близько 580 р. до н.е. на острові Самос біля узбережжя Малої Азії. Через це його часто називають ще Піфагором Самоським. Батько Піфагора на ім'я Мнесарх був вихідцем зі знаменитого, але збіднілого роду. І хоча йому доводилося трудитися простим каменерізом, він вважав за обов'язок дати кмітливому синові належну освіту. Ні університетів, ні



Символічний бюст Піфагора



Піфагор у єгипетських
жерців



Школа Піфагора в Кротоні

інших подібних навчальних закладів тоді ще не було, зате звичаєм серед знатних людей було посилати своїх дітей навчатися мудрості на Схід — до єгипетських жерців та вавилонських халдеїв. Зрештою, найчастіше це поєднувалося зі звичайним купецьким ремеслом. Тож цілком можливо, що юний Піфагор розпочинав із цього.

Більше 20 років Піфагор провів у Єгипті і, мабуть, зніс там чимало труднощів, перш ніж тамтешні жерці посвятили його «у дивовижне мистецтво чергування чисел, хитромудрі правила геометрії, науку про зорі та медицину».

Та ось Єгипет завойовує перський цар Камбіз, і Піфагор стає полоненим-рабом. Проте чутки про його виняткову мудрість сприяють швидкому визволенню, а згодом — і навчанню утаємниченій мудрості у вавилонських магів.

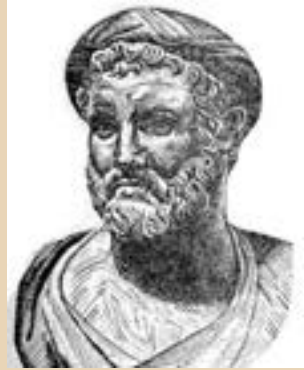
Це тривало ще 12 років. Майже напевне, що в цей час Піфагор був посвячений у вірування індійських брахманів, бо дуже багато рис з його філософії, зокрема, вчення про переселення душ, несуть на собі відбиток цих вірувань. Дуже сумнівно, щоб ця посвята відбулася в самій Індії. Певніше, індійські брахмани теж були тоді у Вавилонії.

Повернувшись на батьківщину в «золотому» 40-річному віці, Піфагор узявся за омріяне удосконалення суспільного устрою на засадах загального блага, справедливості та розумного управління посвячених в утаємничену мудрість. На ці заклики гаряче відгукнулася аристократична молодь, і в Піфагора невдовзі з'явилося багато однодумців та послідовників. Звісно, одночасно виник і величезний спротив консервативних політичних сил. Тому для практичної реалізації своїх задумів Піфагору з його однодумцями довелося тікати у грецькі колонії на півдні Італії. Саме там, у Кротоні, й утворився керований Піфагором морально-політичний і науковий союз — піфагорійське братство. В одному з найдавніших свідчень про Піфагора, яке відноситься до IV ст. до н.е., читаємо, що він «настільки славою... перевершив інших, що вся молодь хотіла вважати себе його учнями, і старші теж більше воліли бачити своїх дітей в навчанні у нього, ніж за заняттями домашніми справами».

Проголосивши суспільну гармонію метою своєї практичної (політичної) філософії, піфагорійці займалися активним пошуком першоджерел цієї гармонії. У цьому, за їхніми переконаннями, могла допомогти наука чисел (арифметика), наука вимірювання (геометрія) і наука космосу (астрономія). З початками цих

наук Піфагор ґрунтовно ознайомився на Сході, а за їхній розвиток із завзяттям взялися послідовники Піфагора по всій Греції.

Одна із легенд сповіщає, що одного разу, проходячи повз кузню, Піфагор почув навдивовижу гармонійне звучання декількох молотів, якими ковалі, обковуючи розпечене залізо, вдаряли по ковадлу. Зацікавившись причиною цієї гармонії, Піфагор зважив молоти, і з'ясував, що їхня вага пропорційна цілим числам. Аналогічні результати дало й вимірювання струн, які при однаковому натязі та одночасному звучанні утворюють гармонічні (консонантні) співзвуччя. Саме це нібито й наштовхнуло Піфагора на думку про те, що природа підкоряється числовим закономірностям і навіть ви-
значається числами. «Все є число» — ось та крилата фраза піфагорійців, в якій сконцентрована глибинна суть їхньої філософії природи та суспільства. Тому вивчення чисел піфагорійці вважали метою і засобом для справжнього пізнання. Тому зрозуміло, якого нищівного удару зазнала ця доктрина після відкриття несумірних відрізків, відношення яких неможливо було виразити за допомогою цілих чисел. Після цього наукові інтереси піфагорійців змістилися з арифметики на геометрію. Відтак весь подальший розвиток грецької математики відбувався уже під знаком геометрії.



Піфагор у східному вбранні

Найважливішим з геометричних відкриттів, яке приписується Піфагору, була знаменита теорема Піфагора про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Цілком можливо, що про саме це співвідношення Піфагор дізнався ще під час свого перебування у Вавилоні, де, як свідчать давні клинописні математичні тексти, воно було відоме принаймні за 1 000 років до Піфагора. Проте безсумнівно, що строге логічне доведення цієї теореми знайшли таки у школі Піфагора.

Піфагорійці першими довели і дуже важливу теорему про суму кутів трикутника, а також першими почали застосовувати метод доведення «від супротивного» (так, зокрема, вони довели твердження про несумірність сторони та діагоналі квадрата). А ще вони розробили саму структуру математичної теорії, в основі якої лежить декілька основних (первісних) положень (пізніше їх назвали аксіомами та постулатами), а всі інші факти виводяться з них логічним шляхом. За цієї схемою розгортаються усі сучасні математичні і природознавчі теорії.

Усі мотиви дослідницької діяльності й суспільної поведінки піфагорійців підпорядковувалися їхньому глобальному уявленню про світ як про високовпорядкований, організований і структурований космос. Навіть сам термін «космос», який у звичайній розмовній грецькій мові мав значення лише як «прикраса» та

«пристойність», в теперішніх значеннях «всесвіт» та «найвища упорядкованість» теж ввели піфагорійці. Вони ж першими висунули гіпотезу про те, що Земля має форму кулі і разом з іншими планетами рухається по своїй сфері навколо певного «центрального вогню». Через 1 000 років після піфагорійців це уявлення великий Коперник з вдячністю назвав передісторією своєї геліоцентричної системи.

2. Індуське доведення теореми Піфагора

У молодості Піфагор навчався мудрості у східних країнах, і тому цілком ймовірно, що саме там він і довідався про цю теорему. Можливо також, що Піфагор перейняв у східних мудреців лише рецепт, а його доведення знайшов сам. Зрештою, невідомо, і яким саме було це доведення. Збереглася лише легенда про те, що на знак вдячності богам за своє відкриття Піфагор здійснив гекатомбу, тобто приніс у жертву сотню биків.

До нашого часу дійшло прекрасне доведення теореми Піфагора давніх індуських математиків. Воно ґрунтується лише на декількох найпростіших геометричних фактах: формулі для площі квадрата; рівності прямокутних трикутників, що мають рівні катети, і теоремі про суму кутів трикутника. Ось воно.

Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з катетами $BC = a$ і $AC = b$ та гіпотенузою $AB = c$ (рис. 3.17). Побудуємо два рівних квадрати $CDEF$ зі сторонами завдовжки $a + b$. На сторонах першого візьмемо точки A, B, K, L так, щоб $CB = DK = EL = FA = a$ (рис. 3.18), а на сторонах другого — точки A, N, M, P так, щоб $CA = FN = MD = PC = b$ (рис. 3.19). Потім у першому квадраті проведемо відрізки AB, BK, KL і LA , а в другому — відрізки AM, PN та AN і PM . У результаті дістанемо розбиття кожного квадрата на декілька фігур, серед яких у кожному випадку матимемо по чотири рівних, а тому й однакових за площею прямокутних трикутників з катетами a і b . Якщо відкинути ці трикутники, то залишки теж матимуть однакові площі. Абсолютно очевидно, що у першому квадраті цим залишком є чотирикутник $ALKB$, а в другому квадраті — два квадрати $QMEN$

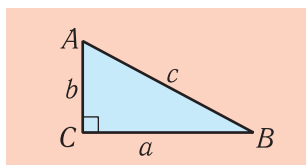


Рис. 3.17

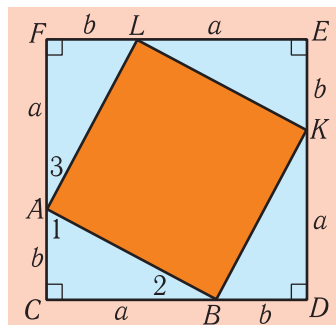


Рис. 3.18

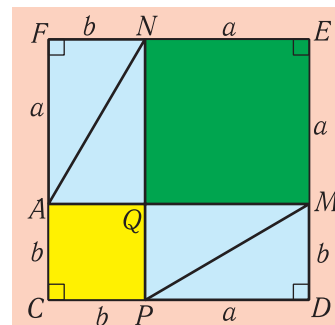


Рис. 3.19

та $ACPQ$ зі сторонами a і b . Усі сторони чотирикутника $ALKB$ рівні між собою (адже це — гіпотенузи рівних прямокутних трикутників), а кути — прямі. Наприклад, оскільки $\angle 3 = \angle 2$, а $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, то й $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$; звідси $\angle LAB = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 90^\circ$. Аналогічно доводимо, що $\angle ALK = \angle LKB = \angle KBA = 90^\circ$. Виходить, що $ALKB$ — квадрат. Отже, площа квадрата $ALKB$ дорівнює сумі площ квадратів $QMEN$ та $ACPQ$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$, що й треба було довести.

3. Від теореми Піфагора до теореми Ферма

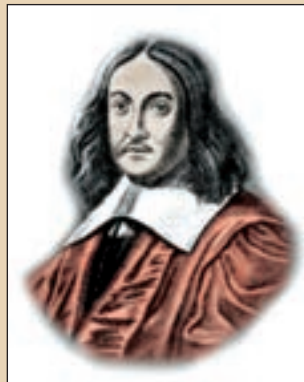
У 1621 р. французький поет і математик-аматор Гаспар Клод Баше де Мезіріак (1581–1638) видав власний переклад з грецької на латину «Арифметики» античного математика Діофанта Александрійського. Один із примірників цього видання привернув увагу іншого любителя математики, П'єра Ферма (1601–1665), якого пізніше зарахують до числа найвизначніших математиків усіх епох. За освітою й професією Ферма був юристом і навіть обіймав високі адміністративні посади у Тулузі. Але весь свій вільний час він віддавав улюбленому заняттю — математиці.

Сам П'єр Ферма не написав жодної наукової праці, а всі його феноменальні відкриття ставали відомими завдяки листам до видатних учених, його сучасників, — Паскаля, Декарта, Мерсенна, Валліса. А ще Ферма полюблив записувати свої міркування прямо на полях книжок, які опрацьовував. Особливою «увагою» у нього користувалася Діофантова «Арифметика». У 1670 р., вже після смерті П'єра Ферма, цю книжку, разом з численними зауваженнями вченого, перевидав його старший син Самюель. Так розпочалася одна з найвідоміших інтриг в історії математики.

У другому розділі «Арифметики» Діофанта під номером 8 розв'язується така задача: «Подати квадрат даного натурального числа a у вигляді суми квадратів інших натуральних чисел». Отже, йдеться, очевидно, про пошук піфагорових трійок чисел $(x; y; z)$, для яких $z^2 = x^2 + y^2$. Ознайомившись із розв'язанням цієї задачі, запропонованим Діофантом, Ферма робить на полях помітку, яка більше 350 років не давала спокою як видатним математикам, так і численним простим шанувальникам цієї науки. Ось її зміст: «Але на противагу цьому, не можна



Гаспар Клод Баше
де Мезіріак



П'єр Ферма

розкласти ні куб на два куби, ні четвертий степінь на два четверті, ні взагалі жоден інший степінь, більший квадрата, на два однойменні степені. Я знайшов для цього воістину чудесне доведення, але ці поля занадто вузькі, аби його можна було тут помістити».

Твердження, яке формулює Ферма, пізніше дістало назву *Великої теореми Ферма*. Ця теорема стверджує, що рівняння з трьома невідомими x , y , z :

$$z^n = x^n + y^n$$

не має розв'язків у натуральних числах при жодному $n > 2$. Тобто, при жодному натуральному $n > 2$ не існує жодного набору натуральних чисел x , y , z , для яких справджується рівність: $z^n = x^n + y^n$. Виходить, що значення $n = 2$ є винятковим, бо рівняння $z^2 = x^2 + y^2$ не тільки має розв'язки у натуральних числах, але й має нескінченну кількість таких розв'язків, — це піфагорові трійки, якими виражаються сторони прямокутних трикутників.

В одному зі своїх листів Ферма таки виклав своє доведення винайденої ним теореми для показника $n = 4$. Як пізніше з'ясувалося, для цього випадку теорема Ферма доводиться найпростіше. Чи дійсно знав Ферма доведення теореми у загальному випадку, а чи тільки лукавив, інтригуючи нащадків?



Леонард Ейлер

А може сподівався, що знайдене доведення для часткового випадку вдасться легко поширити на загальний випадок? Найпевніше за все, — саме сподівався.

Для $n = 5$ теорему вдалося довести лише через 100 років опісля найавторитетнішому математику XVIII ст. Леонарду Ейлеру, якого за його феноменальні обчислювальні здібності французький енциклопедист Жан Д'Аламбер (1717–1783) називав «дияволом в людській подобі». Пізніше іншими математиками були одержані доведення для всіх n у межах першого десятка, потім — у межах сотні, тисячі, сотень тисяч. Проте в загальному випадку теорема Ферма так і залишалася недоведеною майже до кінця XX ст. На початок 90-х рр. XX ст. доведення були одержані для усіх $n < 4\,000\,000$.



Пауль Вольфскель

Увага до Великої теореми Ферма значно зросла після того, як у 1908 р. було оприлюднено заповіт німецького лікаря-офтальмолога Пауля Вольфскеля (1856–1906). Цим заповітом засновувалася премія у розмірі 100 000 німецьких марок за доведення теореми Ферма. Згідно з положенням про премію, доведення мало бути обов'язково опубліковане, схвалене Королівським науковим товариством, а після публікації повинно минути не менше 2-х років.

Цікаво, що сам лікар Вольфскель, незважаючи на професію, тривалий час, щоправда безрезультатно, займався доведенням Великої теореми Ферма. А захо-

пився він нею, відвідавши якось лекцію сімдесятирічного берлінського професора Ернста Куммера (1810–1893), якому вдалося довести теорему Ферма для всіх $n < 100$ (за це йому було присуджено навіть премію Паризької Академії наук).

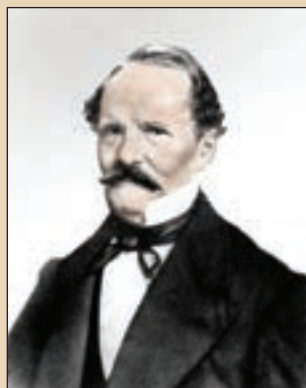
Розруха та інфляція у Німеччині після першої світової війни майже знецінили премію Вольфскеля. Лише пізніше економічне зростання повернуло їй певну частку початкової вартості. Але жоден грошовий вимір уже не міг зрівнятися з престижністю самого звання лауреата, тобто автора доведення Великої теореми Ферма.

Віковий штурм неприступної інтелектуальної фортеці завершився лише у кінці ХХ ст. У червні 1993 р. світ облетіла сенсаційна звістка: Велику теорему Ферма доведено! Автором доведення став сорокарічний на той час математик з Принстонського університету (США) Ендрю Вайлс. Щоправда, ще рік йому знадобилося на те, аби усунути окремі неточності, на які вказали колеги-математики. Тому остаточною датою доведення теореми Ферма вважається 1994 р.

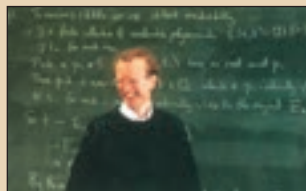
У 1998 р. Вайлс доповів про своє відкриття на Всесвітньому математичному конгресі в Берліні. Перед більш як двотисячним зібранням провідних математиків з усього світу він прочитав годинну лекцію на тему: «20 років теорії чисел», яка завершувалася доведенням Великої теореми Ферма. Весь зал понад 15 хв стоячи аплодував доповідачеві. Це була феноменальна перемога усього планетарного розуму.

Як відомо, знаменита Нобелівська премія за відкриття у галузі чистої математики не присуджується. Натомість найвищою нагородою у цій царині вважається медаль Філдса, заснована канадським математиком Джоном Філдсом (1863–1932). Присуджується вона раз на чотири роки 2 – 4 ученим. Але в положенні про філдсівську медаль є окремий пункт, за яким вік претендента на момент присудження не повинен перевищувати 40 років.

У 1994 р., на попередньому математичному конгресі, Вайлс був беззаперечним претендентом на цю медаль, однак на момент проведення конгресу він ще не встиг повністю усунути недоліки у доведенні, на які йому вказали спеціалісти. А в 1998 р. учений уже подолав 40-річний рубіж. Оскільки, таким чином, із суто формальної причини присудити Вайлсу медаль Філдса не було змоги, то вирішили нагородити його спеціальною «Срібною пластиною ІМУ» (ІМУ — міжнародне математичне товариство). Ця відзнака увінчала собою численні інші нагороди, яких Ендрю Вайлс удостоївся за своє досягнення. Серед них була й історична премія Вольфскеля.



Ернст Куммер



Ендрю Вайлс, переможець Великої теореми Ферма



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§14. Золотий переріз

Знаменитий астроном Йоганн Кеплер (1571–1630), який відкрив закони руху планет навколо Сонця, називав теорему Піфагора скарбом геометрії. Однак він також уважав, що у геометрії є ще один скарб — «золотий переріз», або «переріз у середньому і крайньому відношенні». Теорему Піфагора він порівнював із золотом, а «золотий переріз» — із коштовним каменем.

Означення.

Точка C ділить відрізок AB (рис. 3.20) у середньому і крайньому відношенні, яке називається також золотим відношенням, золотим поділом або золотим перерізом, якщо відношення більшої частини AC відрізка до меншої частини CB

дорівнює відношенню усього відрізка AB до його більшої частини AC :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Із цієї пропорції $a = \sqrt{b \cdot (a+b)}$, тобто довжина більшої частини відрізка є середнім пропорційним (середнім геометричним) між усім відрізком і його меншою частиною. Звідси й назва — *поділ у середньому і крайньому відношенні*.



Леонардо да Вінчі

Термін «золотий переріз» з'явився в епоху європейського Відродження, коли з'ясувалося його особливе значення для живопису. Відомо, зокрема, що дуже велику увагу цьому приділяв Леонардо да Вінчі, і тому золотий переріз називають ще «кодом да Вінчі».

Однак ідея золотого перерізу у скульптурі та архітектурі застосовувалася ще в античну епоху. Уважається, зокрема, що її активно втілював знаменитий грецький скульптор Фідій, який жив у першій половині V ст. до н. е. і уславився тим, що створив скульптурне оздоблення знаменитого Парфенону. На честь Фідія значення золотого відношення позначається великою грецькою літерою Φ (фі), а обернена до нього величи-

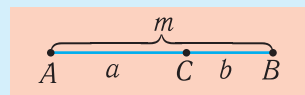


Рис. 3.20

на — малою літерою ϕ : $\phi = \frac{1}{\Phi}$. Спосіб геометричної побудови золотого перерізу подавався навіть у «Началах геометрії» Евкліда (на стор. 97 ця книга розгорнута саме у цьому місці!).

Числове значення відношень Φ та ϕ неважко знайти. За означенням (див. рис. 3.20): $\frac{a}{b} = \frac{m}{a}$.

Або:

$$\frac{a}{m-a} = \frac{m}{a}.$$

Звідси:

$$a^2 + ma - m^2 = 0.$$

Розглядаючи це співвідношення як рівняння відносно a і враховуючи, що $a > 0$, матимемо:

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} m.$$

Отже,

$$\phi = \frac{a}{m} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ а } \Phi = \frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Легко обчислити, що:

$$\phi \approx 0,62, \text{ а } \Phi \approx 1,62.$$

Для практичного виконання золотого поділу можна вдатися й до суто геометричних побудов. На перпендикулярі BD до відрізка AB (рис. 3.21) відкладемо відрізок $BD = \frac{m}{2}$ і сполучимо точки A і D . За теоремою Піфа-

гора, $AD = \sqrt{m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} m$. Потім на DA відкладемо відрізок $DE = \frac{m}{2}$, а на AB — відрізок $AC = AE = \frac{\sqrt{5}+1}{2} m - \frac{m}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} m$. Отже, точка C — шукана.

Зовсім несподівано, що поряд з рівністю

$$a = m\phi,$$

виконується рівність:

$$b = a\phi = m\phi^2.$$

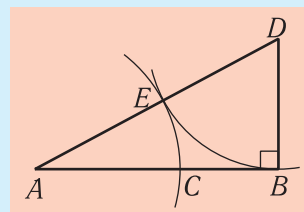


Рис. 3.21

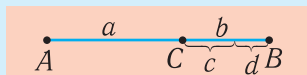


Рис. 3.22

А це означає, що якщо після поділу у середньому і крайньому відношенні відрізка m аналогічним чином поділили менший з одержаних відрізків b , то для його частин c і d (рис. 3.22) виконувалися б рівності:

$$c = b\varphi = m\varphi^3;$$

$$d = \varphi^2 b = m\varphi^4.$$

При цьому, оскільки $c + d = b$, то $m\varphi^3 + m\varphi^4 = m\varphi^2$.

Продовжуючи цей процес ділення й далі, можна вибудувати спадну послідовність відрізків з довжинами:

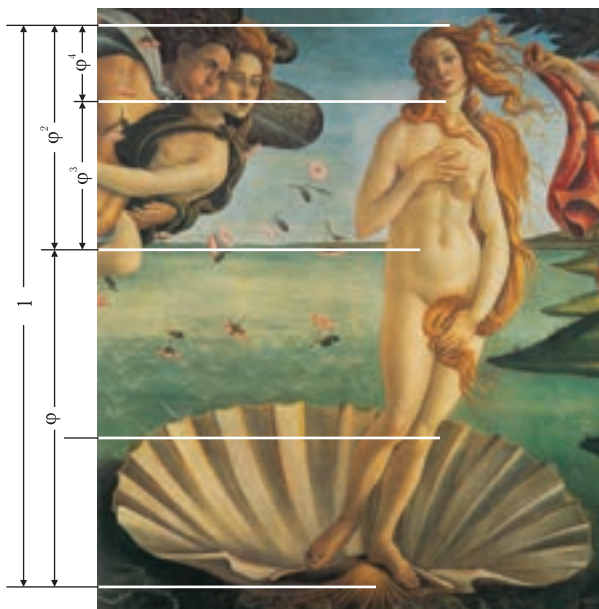
$$m = m\varphi^0, m\varphi = m\varphi^1, m\varphi^2, m\varphi^3, m\varphi^4, \dots$$

у якій кожний член є сумою двох наступних, розміщених безпосередньо за ним.

У класичному архітектурному, скульптурному і живописному мистецтві вважається, що саме золотим відношенням повинні визначатися співвідношення між цілим і частинами, аби вони викликали відчуття гармонії. Зокрема, для зображення ідеальної людської фігури існує такий канон (рис. 3.23). Перший поділ усього зросту людини у середньому і крайньому відношенні визначається пупком («Сонячним сплетінням»). Другий поділ нижньої частини — лінією колін, а верхньої



Леонардо. Аполлон Бельведерський (IV ст. до н.е.). Римська мармурова копія з грецького бронзового оригіналу



Сандро Боттічеллі. «Народження Венери». Фрагмент

Рис. 3.23

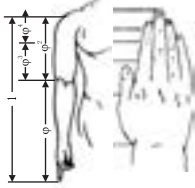


Рис. 3.24

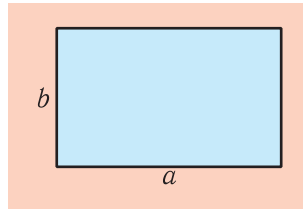


Рис. 3.25

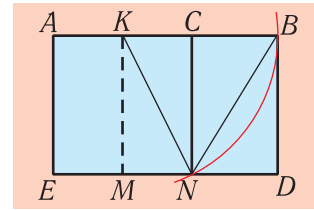


Рис. 3.26

частини — розташуванням Адамового яблука. Поділ голови визначається лінією брів, а якщо брати зверху — то нижньою частиною носа. Аналогічні поділи визначаються для рук і пальців (рис. 3.24).

Уважається, що свої ідеальні пропорції мають і геометричні фігури. Зокрема, особливо цінується так званий «золотий прямокутник» (рис. 3.25), відношення сторін якого дорівнює значенню золотого відношення:

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,62.$$

На рис. 3.26 відображений спосіб побудови такого прямокутника за стороною b . Будується квадрат $ACNE$ з такою стороною. Потім із середини K сторони AC квадрата, як із центра, описується дуга кола до перетину з променем AC у точці B . Відрізок AB — шукана сторона золотого прямокутника $ABDE$.

З усіх прямокутних форм, які нас оточують у щоденному житті, найпоширенішою є саме форма золотого прямокутника — від книжкових обкладинок до письмових столів, від вікон і дверей до кредитних карток, емблем і найрізноманітніших гаджетів. Серед дизайнерів побутує переконання, що саме такі форми справляють найприємніше зорове враження. На рис. 3.27 зображено емблему знаменитої автомобільної корпорації TOYOTA. Її геометричною канвою є три золоті прямокутники.

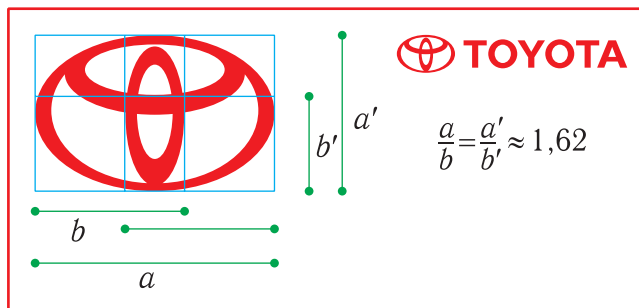


Рис. 3.27



Рис. 3.28

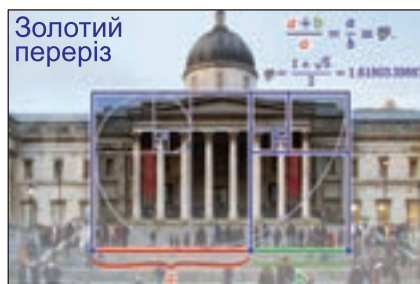
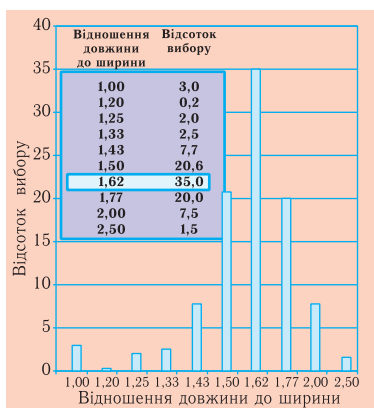


Рис. 3.29

Можна навести доволі прикладів втілення золотого прямокутника у відомих архітектурних спорудах. Це, зокрема, фасади знаменитого Парфенону (V ст. до н. е.) (рис. 3.28) і Національної галереї в Лондоні (1832 р.) (рис. 3.29).

У 2-й половині XIX ст. відомий німецький психофізик Густав Фехнер (1801–1887) провів експериментальне дослідження на великій групі людей, яке переконливо підтвердило цю тезу. Кожному респондентові пропонувалося вибрати із 10-ти прямокутників із різним співвідношенням сторін той, який, з його погляду, справляє найприємніше враження. На рис. 3.30 подані результати цього експерименту у вигляді діаграми. Висота кожного стовпчика показує, який відсоток респондентів вибрав прямокутник з відповідним відношенням сторін. З діаграми видно, що першість зі значним випередженням була віддана саме золотому прямокутнику.



Діаграма Густава Фехнера розподілу уподобань прямокутних форм

Рис. 3.30



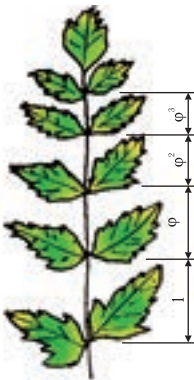
Теодор Густав Фехнер

Аналогічні висновки одержані й численні інші дослідники, зокрема, й ті, які пропонували для вибору не прості прямокутники, а, наприклад, картини в рамках з різними співвідношеннями сторін, архітектурні споруди з прямокутними формами тощо.

Немає однозначної відповіді на запитання про глибинні причини цієї вибірковості сприйняття. Проте, найімовірніше, що вона криється у глобальній зорієнтованості людини, можливо й на підсвідомому рівні, на ті досконалі співвідношення розмірів, які вона спостерігає у природі (рис. 3.31).

Можливо також, що чимале значення мають і виняткові геометричні властивості золотого прямокутника, які уможливлюють особливу ритмічність сприйняття його частин. Виявляється, що золотий прямокутник можна розбити на спіралеподібну послідовність квадратів, і можливо, саме рух по такій спіралі є найкомфортнішим для сприйняття усього прямокутника.

Геометричні підстави цих міркувань пояснюються з допомогою рис. 3.32 – 3.34. Відріжемо умовно від золотого прямокутника з вимірами a і b ($a > b$, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$) квадрат зі стороною b , як показано на рис. 3.32. Ми дістанемо прямокутник з вимірами $a-b$ і b . Сума його сторін дорівнює b , а її відношення до більшої сторони b , згідно зі співвідношенням $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, дорівнює відношенню більшої сторони b до меншої $a-b$. Отже, це — теж золотий прямокутник. Таким чином, якщо від золотого прямокутника відрізати квадрат, то одержаний менший прямокутник теж буде золотим.



Прояви золотого відношення у живій природі

Рис. 3.31

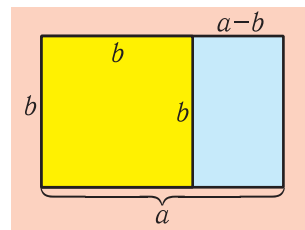


Рис. 3.32

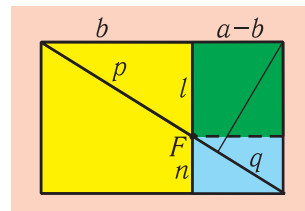


Рис. 3.33

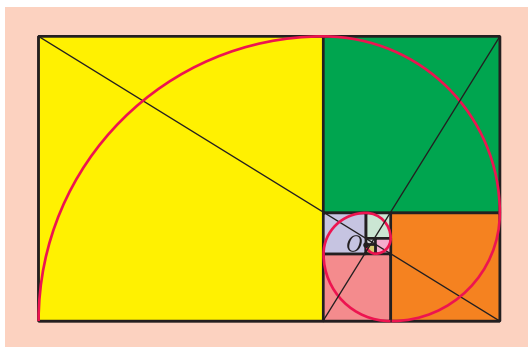


Рис. 3.34



Рис. 3.35

Крім цього, діагональ початкового прямокутника і відповідна сторона нового прямокутника теж поділяють одна одну у середньому і крайньому відношенні (рис. 3.33): $\frac{p}{q} = \frac{l}{n} = \frac{b}{a-b} = \frac{a}{b}$. Це випливає з подібності утворених трикутників.

У свою чергу, звідси випливає, що коли через точку F перетину вказаних відрізків провести пряму, паралельну стороні a початкового прямокутника, то діста-



Рис. 3.36

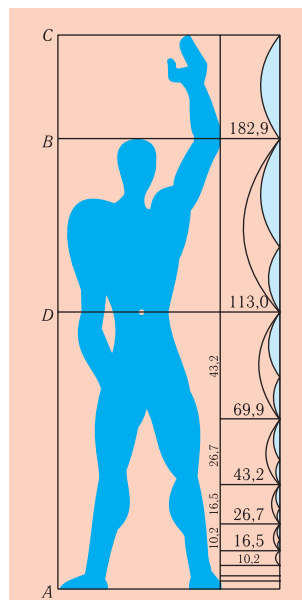


Рис. 3.37

немо розбиття уже меншого прямокутника — знову на квадрат (зі стороною $a - b$) і третій прямокутник (зі сторонами $a - b$, n), який теж буде золотим.

Продовжуючи ці побудови й далі, дістанемо розбиття початкового золотого прямокутника на нескінченну множину квадратів, які у вигляді спіралі «закручуватимуться» довкола точки O перетину взаємно перпендикулярних діагоналей перших двох золотих прямокутників (рис. 3.34). Можна навіть наочно зобразити цю спіраль за допомогою спряжених колових дуг із центрами у відповідних вершинах квадратів.

Здається, що французький художник Жорж Сера (1859–1891), основоположник неоімпресіонізму, спеціально створив свою відому картину «Вистава» (*La Parade*) (рис. 3.35), аби наочно проілюструвати ці властивості золотого прямокутника.

У більшості ж мистецьких творів, у яких усвідомлено або мимовільно використовується ідея золотого прямокутника, це стає помітним лише після відповідного аналізу. Наприклад, якщо на картині Рафаеля «Заручини Марії» (рис. 3.36) провести дві горизонтальні лінії, які відтинають квадрати зверху й знизу, то одна з них пройде на рівні рук заручених, фіксуючи особливу увагу на суті події, що відбувається, а інша — на рівні ручки дверей до величного храму.

Основні принципи новітньої архітектури видатний французький архітектор Ле Корбузе (1887–1965) визначив так: функціональність, комфорт, технологічність та раціоналізм. Намагаючись комплексно втілювати ці вимоги, він прийшов до геніальної ідеї про уніфікацію базових будівельних конструкцій на основі естетичного принципу золотого перерізу. А саме, він створив шкалу архітектурних розмірів — так званий Модулор Корбузе (рис. 3.37), за основу якої взяв давній канон людини з ідеальними пропорціями. Послідовним діленням цього канону у золотому відношенні, він визначив усі можливі дрібніші лінійні розміри, а збільшенням — більші. При цьому, що вкрай важливо з технологічного погляду, кожні дві сусідні міри разом дають наступну міру (згадайте властивість послідовності $\varphi^n a$). На догоду прихильникам англійської системи, за базовий зріст людини було взято 6 античних футів з англійським значенням довжини фута (у підсумку — 182,9 см). Так знаменитий лозунг Протагора «Людина — мірило усіх речей» здобув можливість для реального втілення в архітектурі.

Ідея Модулора Корбузе викликала захват у самого Ейнштейна. Проте практична її реалізація й досі перебуває на початковій стадії. Можливо, час для гармонійного поєднання задекларованих Корбузе принципів архітектури ще не настав.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

§15. Алгебраїчний метод розв'язування задач на побудову

Поділ відрізка у середньому і крайньому відношенні (золотий переріз), описаний у попередньому §14, було здійснено особливим методом, який називається *алгебраїчним*. А саме, спочатку була знайдена формула для шуканого відрізка, а вже потім здійснювалися побудови відрізка за цією формулою. В аналогічний спосіб застосовують цей метод і до багатьох інших задач на побудову.

Отже, алгебраїчний метод розв'язування задач на побудову полягає у наступному.

1. Унаслідок аналізу задачі побудова шуканої фігури зводиться до побудови певного відрізка (інколи декількох відрізків).
2. Знаходиться рівняння, яке пов'язує вибраний відрізок з даними задачі.
3. Розв'язуючи знайдене рівняння, знаходиться формула, яка виражає шуканий відрізок через дані задачі.
4. Проводиться побудова відрізків за знайденою формулою.
5. Використовуючи побудований відрізок, завершують побудову усієї шуканої фігури.

У багатьох випадках, які виникають в елементарній геометрії, побудову відрізків за одержаними формулами можна звести до декількох основних побудов. Основними вважаються побудови відрізків x , що виражаються через задані відрізки a , b і c за допомогою таких формул:

$$1) x = a + b;$$

$$2) x = a - b;$$

$$3) x = \frac{m}{n}a, \text{ } m \text{ і } n \text{ — натуральні};$$

$$4) x = \frac{bc}{a};$$

$$5) x = \sqrt{ab};$$

$$6) x = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$7) x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Побудови за формулами 1) – 2) вкрай елементарні і не потребують додаткових пояснень. Побудова за формулою 3) фактично уже була описана у п. 9.1. Якщо

послідовно відкласти m разів відрізок a на деякому промені, то потім потрібно буде поділити утворений відрізок ma на n рівних частин. Це легко здійснюється на основі теореми Фалеса.

Побудова відрізка x за формулою 4) здійснюється на підставі узагальненої теореми Фалеса. Спочатку будемо довільний кут і на одній з його сторін відкладаємо відрізки $OA = a$, $OB = b$, а на іншій — відрізок $OC = c$ (рис. 3.38). Потім проводимо пряму AC та пряму BX , паралельну AC . Тоді відрізок OX — шуканий.

Справді, за узагальненою теоремою Фалеса, $a : b = c : x$, а звідси $x = \frac{bc}{a}$.

Побудова за формулою 5) здійснюється на підставі теореми про пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику; вона описана у кінці п. 13.1.

Нарешті, побудови за формулами 6) і 7) легко здійснюються на підставі теореми Піфагора; у першому випадку шуканий відрізок x є гіпотенузою у прямокутному трикутнику з відомими катетами a і b (рис. 3.39, а), а в другому — катетом у прямокутному трикутнику з відомими гіпотенузою a та іншим катетом b (рис. 3.39, б).

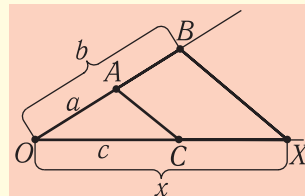


Рис. 3.38

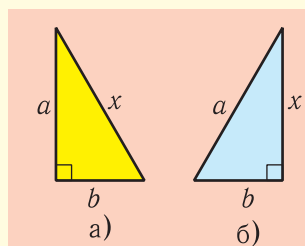


Рис. 3.39

Розглянемо один конкретний приклад розв'язування задачі на побудову алгебраїчним методом, яка пропонувалася на заключному етапі Всеукраїнської математичної олімпіади в 1994 р.

Задача.

На стороні гострого кута дано точку A . Побудувати на цій самій стороні таку точку M , щоб відстань від неї до точки A дорівнювала відстані від M до іншої сторони кута.

Розв'язання. Нехай O — заданий гострий кут (рис. 3.40). Оскільки відкладати відрізки від точки A на стороні кута можна у двох напрямках, то потрібно розглянути два випадки: 1) шукана точка M_1 лежить ближче до вершини O кута, ніж точка A ; 2) шукана точка M_2 лежить далі від вершини кута O , ніж точка A . Нехай AA_1 , M_1N_1 , M_2N_2 — перпендикуляри, опущені з точок A , M_1 , M_2 на іншу сторону кута. Для розв'язання задачі потрібно побудувати відрізки:

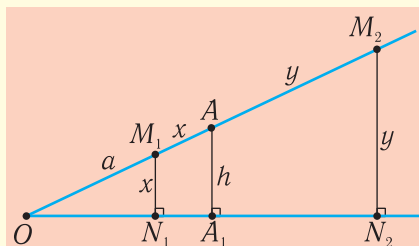


Рис. 3.40

$$x = AM_1 = M_1N_1;$$

$$y = AM_2 = M_2N_2.$$

Заданими будемо вважати відрізки $OA = a$ та $AA_1 = h$.

З подібності трикутників OAA_1 та OM_1N_1 , а також трикутників OAA_1 та OM_2N_2 маємо:

$$\frac{M_1N_1}{AA_1} = \frac{OM_1}{OA}, \quad \frac{M_2N_2}{AA_1} = \frac{OM_2}{OA}.$$

Або:

$$\frac{x}{h} = \frac{a-x}{a}; \quad \frac{y}{h} = \frac{a+y}{a}.$$

Звідси:

$$x = \frac{ah}{a+h}, \quad y = \frac{ah}{a-h}.$$

Побудова. 1. Будуємо відрізки $a+h$ та $a-h$ (рис. 3.41).

2. Будуємо відрізки $x = \frac{ah}{a+h}$ та $y = \frac{ah}{a-h}$ за

описаним вище способом побудови відрізка $x = \frac{bc}{a}$

(рис. 3.42, а, б).

3. Відкладаємо відрізки $AM_1 = x$ та $AM_2 = y$ від точки A на стороні OA кута у відповідних напрямках (див. рис. 4.40). Точки M_1, M_2 — шукані.

Оскільки у трикутнику OAA_1 $OA = a$ — гіпотенуза, а $AA_1 = h$ — катет, то $a-h > 0$. Отже, обидва відрізки x, y за знайденими формулами завжди можна побудувати. Тому задача завжди має два розв'язки.

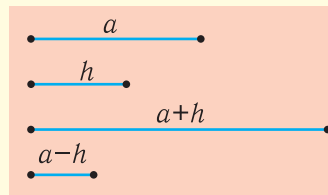


Рис. 3.41

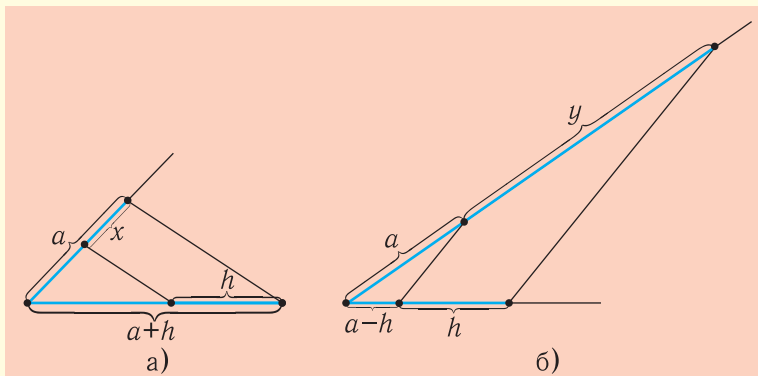


Рис. 3.42

А тепер подивимось, як цю саму задачу можна розв'язати класичним, не алгебраїчним методом.

Аналіз. Нехай, як і раніше, M_1, M_2 — шукані точки, N_1, N_2 — основи перпендикулярів, опущених із цих точок на іншу сторону заданого кута O (рис. 3.43). Проведемо два кола: одне — з центром M_1 і радіусом M_1A , а інше — з центром M_2 і радіусом M_2A . Зрозуміло, що ці кола дотикатимуться до іншої сторони кута. Проведемо, крім цього, $AQ \perp OA$. Тоді AQ буде спільною дотичною до обох кіл.

За властивістю дотичних, проведених до кола із зовнішньої точки, $QN_1 = OA$ і $QN_2 = OA$. Звідси й випливає спосіб побудови.

Побудова. Побудувавши точку Q і відклавши від неї в обидва боки на стороні кута відрізки QN_1 та QN_2 , рівні відрізку QA , проводимо $N_1M_1 \perp OQ$ та $N_2M_2 \perp OQ$. Точки M_1, M_2 будуть шуканими.

Який розв'язок кращий? Відповідь залежить від уподобань. Алгебраїчний метод більш «технологічний», щось на кшталт сучасного серійного виробництва. У класичному ж методі більше від мистецтва і від індивідуальної творчості винахідника.

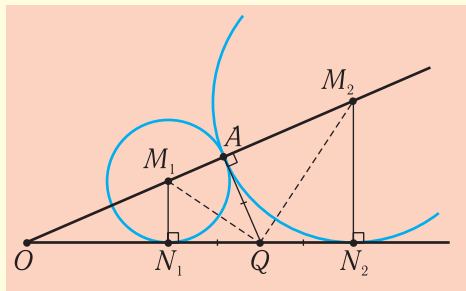


Рис. 3.43



Хендрик ван Бален Молодший (1623–1661). Вимірювачі.
Музей історії науки в Оксфордському університеті

§16. Співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику

16.1. Синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника

Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C . Позначимо його сторони через a , b , c (рис. 3.44). Загалом, із трьох сторін, взятих по дві, можна скласти шість різних відношень. Кожне з них має окрему назву, а всі разом вони називаються *тригонометричними функціями* гострого кута A . Головними вважаються наступні чотири тригонометричні функції.

Відношення протилежного катета BC до гіпотенузи AB називається *синусом* кута A і позначається як $\sin \angle A$:

$$\sin \angle A = \frac{a}{c}. \quad (1)$$

Відношення прилеглого катета AC до гіпотенузи AB називається *косинусом* кута A і позначається як $\cos \angle A$:

$$\cos \angle A = \frac{b}{c}. \quad (2)$$

Відношення протилежного катета BC до прилеглого катета AC називається *тангенсом* кута A і позначається як $\operatorname{tg} \angle A$:

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}. \quad (3)$$

Відношення прилеглого катета AC до протилежного катета BC називається *котангенсом* кута A і позначається як $\operatorname{ctg} \angle A$:

$$\operatorname{ctg} \angle A = \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Оскільки усі прямокутні трикутники з рівними гострими кутами подібні, а відношення відповідних сторін подібних трикутників рівні, то значення усіх тригонометричних функцій кута A залежить тільки

Уроки
37–42

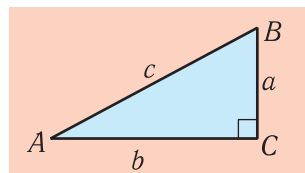


Рис. 3.44



Джованні Мартінеллі
(1600–1659).

Два алегоричних «портрети»
Геометрії

від його величини і не залежить від конкретної довжини сторін трикутника ABC .

Зі співвідношень (1) — (4) випливають такі рівності:

$$a = c \cdot \sin \angle A; \quad (1')$$

$$b = c \cdot \cos \angle A; \quad (2')$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \angle A; \quad (3')$$

$$b = a \cdot \operatorname{ctg} \angle A. \quad (4')$$

Звідси дістаємо такі правила:

катет, протилежний даному гострому куту A , дорівнює добутку гіпотенузи на $\sin \angle A$;

катет, прилеглий до даного гострого кута A , дорівнює добутку гіпотенузи, на $\cos \angle A$;

катет, протилежний даному гострому куту A , дорівнює добутку прилеглого катета на $\operatorname{tg} \angle A$;

катет, прилеглий до даного гострого кута A , дорівнює добутку протилежного катета на $\operatorname{ctg} \angle A$.

З рівностей (1) — (4), або (1') — (4'), маємо ще й такі рівності:

$$c = \frac{a}{\sin \angle A};$$

$$c = \frac{b}{\cos \angle A};$$

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \angle A};$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{ctg} \angle A}.$$

Отже, за однією зі сторін прямокутного трикутника і значенням відповідних тригонометричних функцій його гострого кута можна знайти обидві інші сторони. Особливо часто до цього вдаються при вирішенні практичних задач.

Для цього користуються спеціальними таблицями тригонометричних функцій, складеними для усіх гострих кутів з дуже малим кроком — зазвичай в $\frac{1}{60}$



Мішель Корнель Молодший (1642–1708).

Аспасія (дружина легендарного афінського правителя Перікла) веде учені диспути з філософами

градуса (тобто 1 мінуту). Значення тригонометричних функцій також можна визначати за допомогою калькулятора.

Приклад 1. Ось як можна було б розв'язати задачу на визначення відстані до корабля у морі або ширини річки, розглянуті у п. 11.3 (рис. 3.45). Побудувавши прямокутний трикутник ABC , далі можна не будувати подібний йому трикутник DEC , як на рис. 2.53, а виміряти гострий кут C та відстань AC , і тоді шукана відстань AB визначиться за формулою: $AB = AC \cdot \operatorname{tg} \angle C$.

Звісно, для цього потрібно скористатися таблицями або калькулятором, але все це значно простіше, ніж розбивати на місцевості ще один трикутник. А головне, цей спосіб забезпечує більшу точність.

Узагалі, при виконанні вимірювальних роботах на місцевості намагаються якомога менше вдаватися до безпосереднього вимірювання відстаней — через нерівність ландшафту та всілякі перешкоди на ньому. Натомість вимірюють кути, а це значно простіше, бо їх можна брати між зоровими променями. І це ще один важливий мотив для вивчення тригонометрії.

Приклад 2. Повернімося тепер ще до однієї проаналізованої раніше задачі — на визначення висоти предмета, до якого неможливо підійти впритул. Замість використання хитромудрого приладу або дзеркала (див. рис. 2.51 – 2.52 у §11), можна обійтися вимірюванням кутів AC_1D та AC_2D (рис. 2.51, а). Тоді з трикутників ADC_2 та ADC_1 мали б:

$$\begin{aligned} AC_2 &= AD \cdot \operatorname{ctg} \angle C_2; \\ AC_1 &= AD \cdot \operatorname{ctg} \angle C_1. \end{aligned}$$

Звідси

$$AC_2 - AC_1 = AD \cdot (\operatorname{ctg} \angle C - \operatorname{ctg} \angle C_1).$$

Отже, для шуканої висоти AD одержується вираз:

$$AD = \frac{C_1C_2}{\operatorname{ctg} \angle C_2 - \operatorname{ctg} \angle C_1}.$$

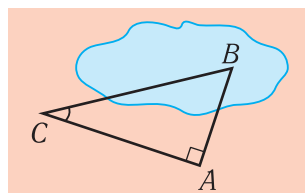
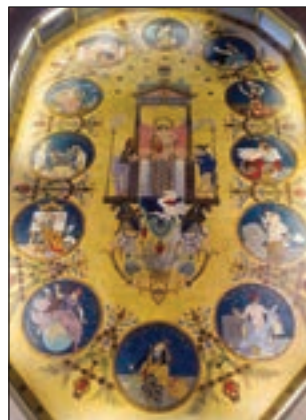


Рис. 3.45



Стеля в актовій залі Мадридського культурно-просвітницького центру Афіней (Ateneo de Madrid) із фресками Артуро Меліді (1849–1902).

На 12 медальйонах зображені різні науки і мистецтва. Математику супроводжує натуральний ряд чисел і теорема Піфагора

Для визначення числового значення AD потрібно виміряти відстань C_1C_2 та кути C_1 і C_2 .

Припустимо, наприклад, що у результаті вимірювань дістали: $C_1C_2 = 3$ м; $\angle C_1 = 55^\circ$; $\angle C_2 = 40^\circ$. За таблицями або за допомогою калькулятора знаходимо з точністю до сотих: $\operatorname{ctg} 55^\circ = 0,7$; $\operatorname{ctg} 40^\circ = 1,19$.

Тому $AD = \frac{4}{1,19 - 0,7} \approx 8,2$ м.

Як уже зазначалося, практичне значення тригонометричних функцій полягає ще й у тому, що з їхньою допомогою можна знаходити кути за відомими сторонами трикутників. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Нехай вертикально поставлена жердина AB має висоту 4 м, а тінь BC від неї — довжину 4,77 м (рис. 3.46). Визначити висоту Сонця над горизонтом у цей момент.

З прямокутного трикутника ABC :

$$\operatorname{tg} \angle C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{4,77} \approx 0,839.$$

За таблицями знаходимо, що цьому значенню тангенса відповідає кут 40° . Отже, шукана висота Сонця над горизонтом становить 40° .



Віньетка з титульної сторінки «Курсу тригонометрії» відомого англійського викладача математики і автора підручників Джона Бонікастла (1751–1821) (Лондон, 1806 р.)

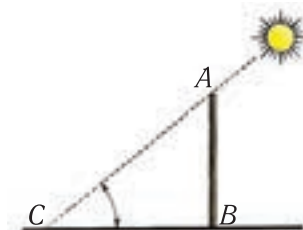


Рис. 3.46



16.2. Приклади застосування тригонометричних функцій для розв'язування довільних трикутників

Визначення невідомих сторін та кутів трикутників за відомими елементами називається *розв'язуванням трикутників*. У попередньому пункті було розглянуто декілька прикладів розв'язування прямокутних трикутників. Та найбільше значення тригонометричних функцій полягає якраз у тому, що вони дають змогу розв'язувати довільні косокутні трикутники. Систематичну теорію цього питання зі встановленням відповідних алгоритмів ви вивчатимете у 9 класі. Зараз обмежимося лише двома прикладами¹⁾.



Бернардо Строцці
(1581–1644).
Алегорія математики

¹⁾ Ці приклади запозичені з чудової книги Я.І. Перельмана «Захоплююча геометрія» / Переклад і редакція В.О. Тадеева. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2008.

Приклад 1. З двох пунктів B і C , розташованих на березі озера на відстані 187 м, виміряли кути, під якими до BC видно точку A на острові (рис. 3.47): $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 43^\circ$. Як за цими даними визначити відстань BA ?



Рис. 3.47

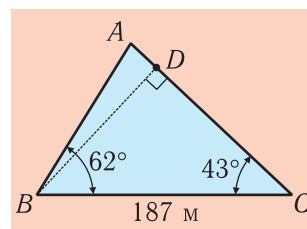


Рис. 3.48

Розв'язання. Проведемо висоту BD трикутника BDC (рис. 3.48). З прямокутного трикутника BDC : $BD = BC \cdot \sin \angle C \approx 187 \cdot 0,68 \approx 127$ м.

Тепер у прямокутному трикутнику BDA нам відомо катет BD і гострий кут $A = 180^\circ - 62^\circ - 43^\circ = 75^\circ$.

Тому $AB = \frac{BD}{\sin 75^\circ} \approx \frac{127}{0,97} \approx 130$ м. Отже, шукана відстань приблизно дорівнює 130 м.

Приклад 2. Для визначення ширини AB озера (рис. 3.49) виміряли кути A і C та відстань AC :

$\angle A = 109^\circ$, $\angle C = 43^\circ$, $CA = 35$ м. Як за цими даними провести необхідні обчислення?

Розв'язання. Проведемо висоту AD трикутника ABC (рис. 3.50). Тоді у прямокутному трикутнику ADC : $\angle CAD = 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$;

$$AD = AC \cdot \cos \angle CAD \approx 35 \cdot 0,682 \approx 23,9 \text{ м.}$$

У прямокутному трикутнику ADB

$$\angle DAB = 109^\circ - 47^\circ = 62^\circ. \text{ Тому}$$

$$AB = \frac{AD}{\cos \angle DAB} \approx \frac{23,9}{0,47} \approx 51 \text{ м.}$$

Отже, шукана ширина дорівнює приблизно 51 м.

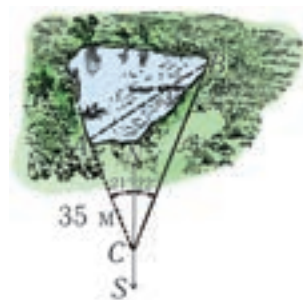


Рис. 3.49

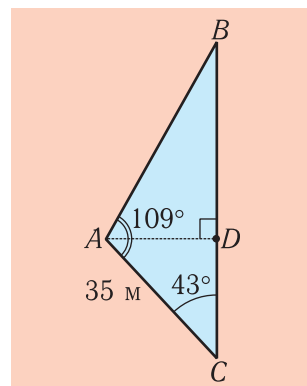


Рис. 3.50

16.3. Тригонометричні таблиці і формули

Основні тригонометричні тотожності

З наведених конкретних прикладів застосувань тригонометричних функцій очевидно, що ключовою ланкою у них є відповідні таблиці, або (що з формальної точки зору те ж саме) їхнє завантаження у калькуляторі чи комп'ютері. Тому про складання таблиць варто мати певне уявлення.

Найперше потрібно знати, що всі тригонометричні функції алгебраїчно взаємозалежні, тобто виражаються одна через одну за допомогою простих формул. Тому фактично достатньо побудувати таблицю лише для однієї з них і тоді таблиці для всіх решти можна буде дістати простим перерахунком за цими формулами.

Тригонометричних формул існує дуже багато. Вони мають різне застосування. Більшість із них вивчатимете в наступних класах. Зараз же зупинимося лише на тих із них, які необхідні для ілюстрування зазначеної ідеї стосовно таблиць. Це — так звані основні залежності між тригонометричними функціями, або *основні тригонометричні тотожності*.

Розглянемо знову прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C та сторонами a , b , c , але тепер для спрощення записів гострий кут A позначимо через α (рис. 3.51).

Відповідно до означення тригонометричних функцій:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}. \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}. \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}. \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (4)$$



Фронтиспіс до «Таблиць синусів, тангенсів, логарифмів, ... корисних для всіх будівельників», виданих в Амстердамі у 1700 р. Таблиці складені теологом Егідієм Штраухом (1632–1682) і удосконалені математиком та архітектором Леонардом Крістофом Штурмом (1669–1719)

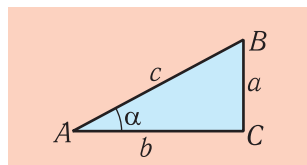


Рис. 3.51

Якщо поділимо почленно рівність (1) на рівність (2), то матимемо:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}.$$

Але $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$. Отже,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Якщо, навпаки, поділимо рівність (2) на рівність (1), то аналогічно дістанемо:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (6)$$

Помноживши рівності (3), (4) або (5), (6), матимемо:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Звідси

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}. \quad (8)$$

Для виведення інших тригонометричних тотожностей застосовується теорема Піфагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Якщо поділимо цю рівність на c^2 , то матимемо:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Звідси, враховуючи формули (1) — (2), дістанемо:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (9)$$

Із цього співвідношення функції $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ виражаються одна через одну:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad (10)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (11)$$

Якщо, далі, рівність (9) поділимо на $\cos^2 \alpha$, то дістанемо:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$



Геррада Ландсберзька (1130–1195) — ельзаська черниця, письменниця і художниця, з 1167 р. — абатиса. «Сім вільних мистецтв». Ілюстрація до її морально-етичної і філософської книги «Сад насолод» (бл. 1180 р.). «Вільні мистецтва» тут уособлюють сім муз. Геометрія із циркулем і мірилом — ліворуч. Над нею напис латиною: «Terre mensuras per multas dirigo curas» («Точно вимірюю землю»)

Звідси, враховуючи, що $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$, маємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (12)$$

Аналогічно, поділивши рівність (9) на $\sin^2 \alpha$, одержимо:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (13)$$

З формул (12), (13) функції $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ можна виразити через $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, або, навпаки, — функції $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ — відповідно через $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.

З усіх наведених тут рівностей основними тригонометричними тотожностями вважаються рівності (5) — (13). Для кращого запам'ятовування випишемо їх окремо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$



Алегорія Математики (праворуч), Астрономії (у центрі) та Механіки (праворуч). Фреска у великій залі національного художнього музею (Рейксмузеум) в Амстердамі (1885 р.). На білому мармурі нідерландською мовою золотом викарбувані слова із 118 Псалма (вірші 73 і 116): GEEF MY VERSTAND EN IK ZAL LEVEN (Подай мені розуму... і я житиму)

Тригонометричні функції доповняльних кутів

Просте спостереження за так званими доповняльними кутами дає змогу істотний бік справи зі складання тригонометричних таблиць звести фактично до складання таблиць для кутів від 0° до 45° . Адже, як виявляється, значення функцій для кутів від 45°

до 90° елементарно виражаються через відповідні значення для кутів від 0° до 45° .

Доповняльними називаються два кути, які в сумі дають 90° . Отже, гострі кути прямокутного трикутника є доповняльними.

Нехай гострі кути A і B прямокутного трикутника ABC — відповідно α і β (рис. 3.52); $\beta = 90^\circ - \alpha$. З означень тригонометричних функцій маємо:

$$1) \sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha);$$

$$2) \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta = \sin (90^\circ - \alpha);$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha);$$

$$4) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha).$$

Отже, при переході від одного з доповняльних кутів до іншого значення функції синус змінюється на косинус, а значення функції тангенс — на котангенс, і навпаки.

Звідси, зокрема, впливає такий алгоритм відшукання значень $\sin \alpha$ для кутів $\alpha > 45^\circ$. Спочатку знаходимо $\sin \beta$, де кут $\beta = 90^\circ - \alpha$ буде меншим від 90° . Потім за формулою визначаємо: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$. Тоді, відповідно до властивості доповняльних кутів, $\sin \alpha = \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 (90^\circ - \alpha)}$.

Моделювання тригонометричних функцій в одиничному крузі

Уявімо собі, що вершини A усіх прямокутних трикутників ABC , за допомогою яких визначаються значення тригонометричних функцій (див. рис. 3.52), суміщені з центром одиничного круга. Нехай їхні гіпотенузи дорівнюють радіусу цього круга. (Уже зазначалося, що значення тригонометричних функцій не залежать від розмірів сторін трикутника, а тільки від їхніх відношень. Тому обмеження $AB = 1$ не є істотним). Нехай, нарешті,

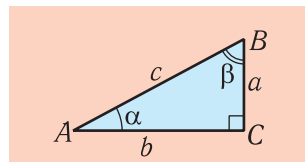


Рис. 3.52



Фердинанд Бол
(1616–1680).

Учитель геометрії (1658 р.)
(Париж, Лувр)

катети AC лежить на одному й тому самому радіусі AT круга (рис. 3.53). Тоді відрізок BC буде синусом кута α , відрізок AC — косинусом, а відрізок TP на дотичній TF до круга — тангенсом. Синусом α буде також проекція AB_1 гіпотенузи AB на перпендикулярний до AT радіус AN .

З цієї моделі видно, що коли значення кута α змінюється в незначних межах, то дуга, яку при цьому описує точка B , дуже близька до відрізка BC . Тому в цих межах значення тригонометричних функцій змінюється пропорційно зміні кута.

Звідси вимальовується така стратегія обчислень для побудови тригонометричних таблиць: визначити значення тригонометричних функцій для певних ключових кутів (нагадаємо, що достатньо це зробити для кутів у межах від 0° до 45°), а між ними — розподілити пропорційно. Звичайно, ці значення будуть наближеними, але для багатьох практичних потреб наближення достатньо точні.

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

Значення тригонометричних функцій декількох кутів можна визначити елементарними міркуваннями. Зокрема, якщо в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) кут $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3.54), то катет a дорівнює половині гіпотенузи c . Тому $\sin 30^\circ = a : c = \frac{c}{2} : c = \frac{1}{2}$.

Далі, за теоремою Піфагора, знаходимо:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

Звідси

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{c}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} c = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

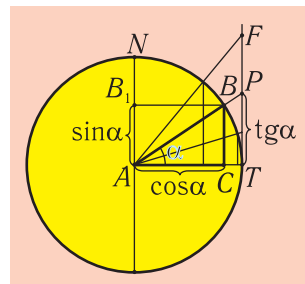


Рис. 3.53

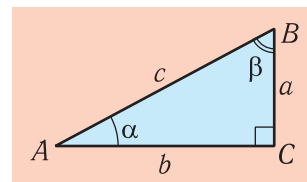


Рис. 3.54

Тоді для доповняльного кута $\beta = 60^\circ$ одержимо:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Якщо ж кут α дорівнюватиме 45° , то катети a і b будуть рівними, а $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Тому:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

Одержані вираження використовуються у різних розділах математики.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Формула половинного кута

Збільшити кількість точних значень для тригонометричних функцій дають змогу численні тригонометричні формули. Їх можна по-різному виводити. Для прикладу розглянемо просте геометричне виведення для так званої *формули половинного кута*.

Позначимо гострий кут A прямокутного трикутника ABC через α і проведемо бісектрису AL (рис. 3.55). Уважатимемо, що гіпотенуза $AB = 1$. Тоді $BC = \sin 2\alpha$, $AC = \cos 2\alpha$.

За властивістю бісектриси $\frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}$. Звідси

$$\frac{CL}{\sin 2\alpha - CL} = \cos 2\alpha. \text{ І, отже, } CL = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

З $\triangle ACL$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CL}{AC}$. Тому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}. \quad (*)$$

Зокрема, покладаючи у цій формулі $\alpha = 15^\circ$, дістанемо:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

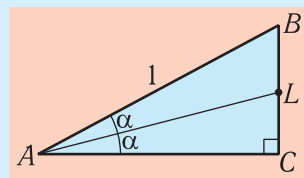


Рис. 3.55

Далі зі співвідношення $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ можемо знайти, що $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Нарешті, $\sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Покладаючи у формулі (*) $2\alpha = 15^\circ$, так само можемо знайти точні значення тригонометричних функцій для кута $7,5^\circ$, потім $3,75^\circ$ тощо.

Як можна скласти тригонометричні таблиці на основі ідей Птолемея

Клавдій Птолемей (бл. 100 – бл. 178 н.е.) займався практично усіма науками свого часу. Йому належали навіть твори з музики й географії. Проте, найвизначніші досягнення Птолемея були пов'язані з астрономією. Зокрема, він створив геоцентричну планетарну систему, яка домінувала в науці більше 1 000 років — аж до відкриття геліоцентричної системи Коперником у XVI ст.

Моделлю зоряного неба з давніх часів була сфера, а взаємні відстані між світилами вимірювали коловими дугами цієї сфери, а також хордами цих дуг. У зв'язку з цим використовувалися спеціальні астрономічні таблиці для визначення хорд через градусні міри відповідних їм дуг та центральних кутів.

Якщо радіус R сфери вважати рівним одиниці, то довжина хорди MN , що відповідає центральному куту α (рис. 3.56), дорівнюватиме подвоєному відрізку KN , для якого $OK \perp MN$, тобто — синусу половинного кута $\frac{\alpha}{2}$. Отже, простим діленням на 2 хорд і кутів, таблиці

хорд Птолемея можна перетворити на тригонометричні таблиці синусів.

Як же складав свої таблиці хорд сам Птолемей? Для цього він застосовував теорему, яка зараз називається теоремою Птолемея (див. п. 12.2). Користуючись цією теоремою, Птолемей знаходив за хордами двох дуг хорди різниці цих дуг, а також за хордою якої-небудь дуги — хорду половини цієї дуги, і в такий спосіб створювалася його таблиця хорд.

Нехай у колі з діаметром $DC = d$ відомі хорди a і b дуг DA і DB , а потрібно знайти хорду c різниці AB цих дуг (рис. 3.57). За теоремою Птолемея, застосованою для чотирикутника $DABC$:

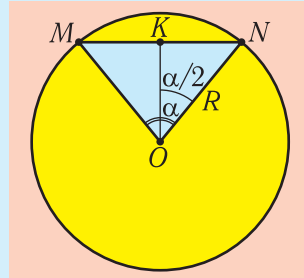


Рис. 3.56



Клавдій Птолемей.
Старовинна гравюра

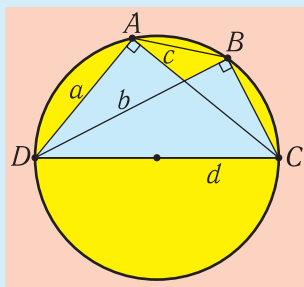


Рис. 3.57

$$a \cdot BC + c \cdot d = b \cdot AC. \quad (*)$$

З іншого боку, відрізки BC і AC можна визначити за теоремою Піфагора, оскільки кути DAC і DBC , що спираються на діаметр DC , — прямі: $BC = \sqrt{d^2 - b^2}$, $AC = \sqrt{d^2 - a^2}$. Тоді з рівності $(*)$ виводиться шуканий вираз:

$$c = \frac{b\sqrt{d^2 - a^2} - a\sqrt{d^2 - b^2}}{d}.$$

Для визначення за хордою b хорди a половинної дуги, потрібно у цьому виразі покласти $c = a$ і визначити a через b :

$$a = \frac{bd}{\sqrt{2(d^2 + d\sqrt{d^2 - b^2} - b^2)}}.$$

За початкові значення хорд Птолемеї брав хорди, які легко обчислюються на основі елементарних геометричних теорем. Це були сторони правильних вписаних багатокутників — трикутника, квадрата, шестикутника, п'ятикутника і десятикутника.

Приклад застосування тригонометрії для оцінювання точності наближених побудов правильного п'ятикутника



Альбрехт Дюрер.
Автопортрет (1500 р.)

Багатокутник називається *правильним*, якщо у ньому рівні всі сторони і всі кути. Прикладом правильного багатокутника є квадрат і рівносторонній трикутник. Ці фігури легко побудувати за допомогою креслярських інструментів. Натомість побудова правильних багатокутників з більшою кількістю сторін може бути спряжена зі значними труднощами. Тому практики — художники, архітектори, ювеліри, декоратори, ремісники тощо — здавна користувалися наближеними побудовами. Найкращі з них зібрав та описав знаменитий німецький художник і теоретик мистецтва Альбрехт Дюрер (1471–1528) у своєму трактаті «Керівництво для вимірювання», опублікованому у 1525 р. У пізніші часи відкриття цих побудов часто приписували самому Дюреру, хоча він сам вказував на джерела, з яких про них довідався.

Вже перших відомостей із тригонометрії, вміщених у цьому підручнику, достатньо для того, аби оцінити ступінь точності описаних Дюрером наближених

побудов. Для прикладу проаналізуємо описану ним побудову правильного п'ятикутника. При цьому будемо враховувати, що кут правильного п'ятикутника дорівнює 108° . Цей факт елементарно випливає з формули для суми кутів багатокутника, яка буде виведена у п. 17.2.

У побудовах використовується циркуль з постійним розхилом, що дорівнює стороні AB правильного п'ятикутника, який потрібно побудувати.

Спочатку будуються два кола з центрами A і B , потім — коло із центром в одній з точок D перетину перших двох кіл (рис. 3.58). У результаті визначаються точки E, F , а також точка G перетину третього кола з прямою CD . Далі на перших двох колах визначаються вершини I та H — як точки перетину кіл з прямими FG та EG . Нарешті, провівши ще одне коло — із центром I або H , на прямій DC визначаємо точку K . П'ятикутник $ABHKI$ — шуканий.

Для оцінки точності цих побудов визначимо кути п'ятикутника $ABHKI$. Доволі очевидно, що $\angle A = \angle B$, а $\angle H = \angle I$. Тому визначатимемо лише кути B, H і K .

Позначимо точки перетину сторони AB з прямими EH та CD відповідно через M і L . Нехай $BN \perp MH$, $HQ \perp CD$, $BP \perp HQ$, $\angle MHB = \varphi$, $\angle QHK = \psi$. Радіус побудованих кіл позначимо через R ; отже, $AB = BH = HK = KI = AI = R$.

Оскільки прямокутний трикутник MLG — рівнобедрений, то $ML = LG = DG - DL$. З іншого боку, оскільки усі сторони трикутника ADB дорівнюють по R , то його висота $DL = \frac{\sqrt{3}}{2} R$. І тому:

$$ML = R - \frac{\sqrt{3}}{2} R;$$

$$MB = ML + LB = R - \frac{\sqrt{3}}{2} R + \frac{R}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} R.$$

У прямокутному трикутнику MNB гострий кут M дорівнює 45° . Тому

$$BN = \frac{MB}{\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} R.$$

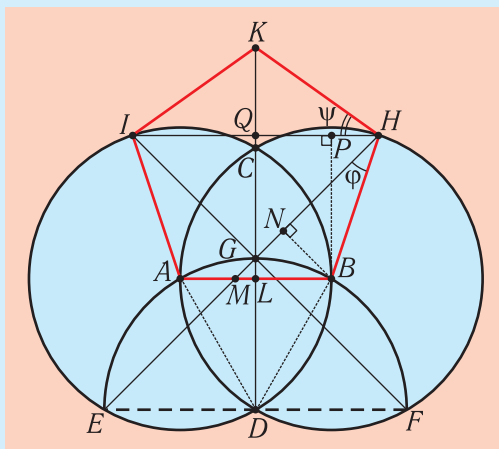


Рис. 3.58

Нарешті, з прямокутного трикутника BNH :

$$\sin \varphi = \frac{BN}{BH} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \approx 0,4483;$$

$$\varphi \approx 26^\circ 38'.$$

Тепер визначаємо $\angle ABH$:

$$\angle ABH = 180^\circ - \angle HMB - \varphi = 180^\circ - 45^\circ - \varphi \approx 108^\circ 22'.$$

Для правильного ж п'ятикутника цей кут має дорівнювати 108° . Отже, абсолютна похибка становить усього $22'$, тобто менше половини градуса. Звісно, для ока ця величина невлучима.

Далі займемося визначенням кута BHK .

$$\angle BHP = \varphi + \angle MHQ = \varphi + 45^\circ \approx 71^\circ 38'.$$

Із $\triangle BPH$: $HP = BH \cos \angle BPH = R \cos (\varphi + 45^\circ) \approx 0,315R$.

$$HQ = HP + PQ = HP + BL \approx 0,315R + 0,5R = 0,815R.$$

Із $\triangle HQK$: $\cos \psi = \frac{HQ}{HK} \approx 0,815$; $\psi \approx 35^\circ 26'$.

Тому $\angle BHK = \angle BHP + \psi \approx 71^\circ 38' + 35^\circ 26' = 107^\circ 4'$.

Отже, абсолютна похибка у цьому випадку більша, — майже цілий градус: $108^\circ - 107^\circ 4' = 56'$.

Тепер уже легко знайти величину кута HKI :

$$\angle HKI = 540^\circ - 2\angle ABH - 2\angle BHK \approx 109^\circ 8'.$$

Цей кут найбільше відрізняється від точного значення — більше, ніж на цілий градус. Проте, для ока й ця похибка навряд чи буде помітною.



Перевірте себе

1. Опишіть мотиви для введення тригонометричних функцій.
2. Дайте означення функцій синус, косинус, тангенс і котангенс для гострого кута прямокутного трикутника.
3. Охарактеризуйте співвідношення, які існують між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику.
4. Наведіть приклади практичного застосування тригонометричних функцій.
5. Опишіть основні мотиви та ідеї для створення таблиць тригонометричних функцій.
6. Запишіть та доведіть основні залежності між тригонометричними функціями.
7. Дайте означення доповняльних кутів. Які співвідношення існують між ними?
8. Опишіть модель тригонометричних функцій в одиничному крузі. Які ідеї з цієї моделі використовуються для складання тригонометричних таблиць?
9. Якими є значення тригонометричних функцій для кутів 30° , 45° і 60° ? Як це можна обґрунтувати?



Вправи і задачі

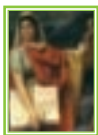
- 63°.** Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють відповідно 5 см і 13 см. Визначте:
- а) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
 - б) косинус гострого кута, який прилягає до меншого катета;
 - в) тангенс гострого кута, який лежить проти меншого катета.
- 64°.** У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 8 см і 15 см. Визначте:
- а) тангенс гострого кута, який лежить проти меншого катета;
 - б) синус гострого кута, який прилягає до меншого катета;
 - в) косинус гострого кута, який лежить проти більшого катета.
- 65°.** Визначте невідомі сторони прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C , якщо:
- а) $AC = 5$ см, $\sin \angle B = \frac{3}{5}$; б) $BC = 4$ см, $\cos \angle B = \frac{4}{5}$;
 - в) $AC = 6$ см, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{15}{8}$; г) $AB = 4$ см, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{8}{15}$.
- 66°.** За даними сторонами і кутами прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C визначте решту його сторін і кутів:
- а) $AB = 8$ см; $\angle B = 65^\circ$;
 - б) $BC = 6$ см, $\angle A = 38^\circ$;
 - в) $AC = 5$ см, $\angle B = 78^\circ$;
 - г) $AB = 41$ см, $BC = 40$ см.
- Обчислення сторін виконайте з точністю до 0,01, а кутів — з точністю до $1'$.
- 67°.** У прямокутному трикутнику синус одного з гострих кутів дорівнює $\frac{3}{5}$. Визначте відношення його катетів.
- 68°.** У прямокутному трикутнику тангенс одного з гострих кутів дорівнює $\frac{8}{15}$. Визначте відношення його катетів до гіпотенузи.
- 69°.** Визначте невідомі сторони прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C , якщо:
- а) $AB = c$, $\angle A = \alpha$;
 - б) $BC = a$, $\angle B = \beta$;
 - в) $AC = b$, $\angle A = \alpha$.
- 70.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а висота, проведена до основи, — 5 см. Визначте кути трикутника.
- 71.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB бічна сторона дорівнює 6 см, а кут при вершині C — 54° . Визначте основу трикутника та висоту, проведenu до основи.

72. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB бічна сторона дорівнює 5 см, а кут при основі — 65° . Визначте основу трикутника, а також його висоти.
73. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до основи, — 5 см. Визначте висоту трикутника, проведену до бічної сторони.
74. У прямокутному трикутнику один із гострих кутів дорівнює α , а довжина висоти, проведеної до гіпотенузи, — h . Визначте катети трикутника.
75. У прямокутному трикутнику катет дорівнює a , а прилеглий до нього кут — α . Визначте проекції катетів на гіпотенузу.
76. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює h , а один із гострих кутів — α . Визначте гіпотенузу.
77. У прямокутнику одна зі сторін дорівнює a , а кут, який утворює інша сторона з діагоналлю, — α . Визначте невідому сторону та діагональ прямокутника.
78. Кути при основі трикутника дорівнюють α і β , а висота, проведена з протилежної вершини, лежить усередині трикутника і дорівнює h . Визначте основу трикутника.
79. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см. Визначте кут між діагоналями.
80. Діагоналі ромба дорівнюють 18 см і 14 см. Визначте його кути.
81. Радіус кола дорівнює 5 см. З точки, що знаходиться на відстані 13 см від центра, проведено дотичні до кола. Визначте довжини дотичних та кут між ними.
82. З точки, що знаходиться на відстані 6 см від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути 45° і 30° . Визначте довжини похилих та їхні проекції на пряму.
83. З точки, що знаходиться на відстані 9 см від прямої, проведено до прямої дві похилі, які утворюють з прямою кути 60° і 45° . Визначте відстань між основами похилих.
84. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює $15 : 23$. Визначте його гострі кути.
85. Тінь від вертикальної жердини, висота якої дорівнює 3 м, становить 2 м. Визначте у градусах висоту Сонця над горизонтом.
86. У рівнобічній трапеції з основами AB і DC гострий кут A дорівнює α , а висота DN — h . Визначте бічну сторону трапеції.
87. У прямокутній трапеції $ABCD$ основи $AB = 16$ см, $DC = 10$ см, $\angle C = 135^\circ$. Визначте бічні сторони.
88. У рівнобедреній трапеції $ABCD$ $AD = BC = 5$ см, $AB = 12$ см, $DC = 6$ см. Визначте кути трапеції.
89. Один із кутів ромба дорівнює 120° . Чому дорівнює відношення діагоналей цього ромба?

- 90.** Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a . Визначте:
 а) радіус вписаного кола; б) радіус описаного кола.
- 91.** Діагональ паралелограма має довжину a і перпендикулярна до його сторони. Визначте сторони паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .
- 92.** У ромбі з вершини тупого кута, що дорівнює 120° , проведено висоти. Відстань між основами висот дорівнює 6 см. Визначте сторону ромба.
- 93.** Визначте сторони рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює 35 см, а основа відноситься до бічної сторони, як 48 : 25.
- 94.** Визначте тангенси кутів трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см.
- 95.** Доведіть, що сума відстаней від точки, узятої на основі гострокутного рівнобедреного трикутника, до його бічних сторін не залежить від розміщення цієї точки.
- 96.** Побудуйте кут α , якщо:
 а) його синус дорівнює $\frac{3}{5}$; б) його косинус дорівнює 0,6;
 в) його тангенс дорівнює $\frac{7}{3}$.
- 97.** Визначте $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$.
- 98.** Визначте $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{8}{17}$.
- 99.** Визначте $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$.
- 100.** Визначте $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{7}{25}$.
- 101.** Спростіть вирази:
 а) $1 - \cos^2 \alpha$; б) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
 в) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$; г) $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$;
 г) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; д) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$;
 е) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$; е) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$;
 ж) $\operatorname{tg}^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1)$; з) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;
 и) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha$; і) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$;
 ї) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

254 Розділ ІІІ. Розв'язування прямокутних трикутників

- 102.** Знаючи, що $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$, визначте $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
- 103*.** Знаючи, що $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$, визначте $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.
- 104.** Обчисліть значення виразів:
- а) $2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ$; б) $2\cos 60^\circ + 3\operatorname{tg} 45^\circ$;
в) $4\sin 30^\circ - \sqrt{3}\cos 30^\circ$; г) $\frac{2\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ}$.
- 105.** Спростіть вирази:
- а) $\sin^2 \alpha + \sin^2 (90^\circ - \alpha)$; б) $\sin^2 (90^\circ - \alpha) + \cos^2 (90^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}^2 \alpha$;
в) $2\sin (90^\circ - \alpha) - \cos \alpha$; г) $\cos (90^\circ - \alpha) + \cos \alpha + \sin \alpha - \sin (90^\circ - \alpha)$.
- 106.** Яке значення більше і чому:
- а) $\sin 31^\circ$ чи $\sin 32^\circ$; б) $\cos 33^\circ$ чи $\cos 34^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 45^\circ$ чи $\operatorname{tg} 47^\circ$; г) $\sin 35^\circ$ чи $\frac{1}{2}$;
г) $\sin 50^\circ$ чи $\cos 50^\circ$; д) $\sin 68^\circ$ чи $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
- 107.** Який з кутів більший — α чи β , якщо:
- а) $\cos \alpha = 0,7$, $\cos \beta = 0,3$; б) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{4}{5}$;
в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{8}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{6}$; г) $\operatorname{tg} \alpha = 1$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$?
- 108.** У прямокутному трикутнику ABC катет BC більший за катет AC . Яке значення більше:
- а) $\sin \angle A$ чи $\sin \angle B$; б) $\cos \angle A$ чи $\cos \angle B$?
- 109*.** У трикутнику ABC основа $BC = 6$ см, а кути B і C дорівнюють відповідно 40° і 50° . Визначте бічні сторони.
- 110*.** У трикутнику ABC сторони AB і AC дорівнюють відповідно 5 см і 9 см, а кут A між ними дорівнює 60° . Визначте сторону BC .
- 111*.** X — довільна точка гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC . Чи залежить сума квадратів синусів кутів ACX і BCX від положення точки X ?
- 112*.** Дві взаємно перпендикулярні хорди AB і AC мають довжини 21,3 см та 38,5 см. Під якими кутами ці хорди нахилені до діаметра AD ?
- 113*.** Катети прямокутного трикутника мають довжини 7 см і 24 см. Визначте значення синуса і косинуса кута між гіпотенузою і проведеною до неї медіаною.



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Про назви тригонометричних функцій

Тригонометрія, як наука про розв'язування трикутників, сформувалася у Європі в епоху Середніх віків та Відродження. Загальною мовою науки у той час була латина, а тому й не дивно, що назви тригонометричних функцій латинські. Що ж вони означають?

Найбільш відповідним з них є термін «тангенс». Ми бачили (див. рис. 3.53), що значення функції тангенс у моделі в одиничному крузі зображаються відрізками на дотичній прямій. А «той, що дотикається» латиною — тангенс. Це й визначило назву цієї функції.

Префікс *ко-* у слові «котангенс» утворився від скорочення слова *complementum* — «доповнення». Пригадайте, що тангенс і котангенс, а також синус і косинус доповняльних кутів рівні. Це й послужило джерелом для утворення термінів котангенс та косинус.

Що ж до терміна «синус», то стосовно його походження існує декілька версій. Найвірогіднішою вважається така. Першим, хто почав зображати синус у крузі так, як на нашому рис. 3.53, були індуси. Для людини тієї далекої епохи фрагмент круга ABT нагадував половину лука, а синус BC — *половину його тятиви* (рис. 3.59). Останнє словосполучення звучало приблизно як «архаджиба». Виходило дуже довге слово. Тому для математики його скоротили до «джиба». Коли ж пізніше араби перекладали індуські математичні тексти на свою мову, то вони, звісно, не змогли буквально перекласти штучного слова «джиба»,

тому лише переписали його своїми літерами. Особливістю ж арабської писемності є те, що багато голосних букв у ній не пишуться, а при читанні вгадуються за відповідною комбінацією приголосних. У результаті індуське слово «джиба» записали двома приголосними літерами, які називаються «джим» та «бо», а передають звуки «дж» і «б». Пізніше, у XII ст. європейський перекладач при перекладі на латину стикнувся з тією самою проблемою, що й колись арабський, тільки тепер у нього були варіанти з вибором голосних. І він вирішив, що записане слово «джайб», яке має значення «впадина», «западина», навіть, «пазуха». А латиною це — *sinus*. Так і був перекладений цей термін. Отже, завдячуючи декільком перекладацьким помилкам, зовсім не пов'язане з математикою слово *sinus* набуло значення математичного терміна.

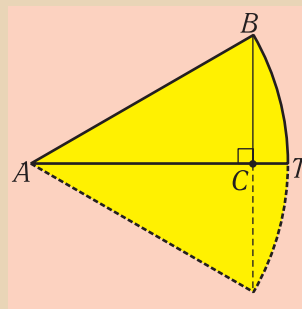


Рис. 3.59



Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу III

Пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

1. а) Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 16 см. Визначте висоту трикутника, проведену з вершини прямого кута.
б) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см. Визначте катети трикутника.
8. а) Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Визначте довжини діагоналей ромба.
б) Точка дотику вписаного в ромб кола ділить його сторони на відрізки 5 см і 20 см. Визначте радіус кола.
- 9*. а) У гострокутному рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту $AD = 8$ см. Відрізок $CD = 6$ см. Визначте медіану, проведену з вершини B .
б) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 9 см, а висота, проведена до основи, — 3 см. Визначте сторони трикутника.
10. а) У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 5 см і 12 см. Визначте катети трикутника.
б) У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить один із катетів на відрізки 3 см і 5 см. Визначте гіпотенузу та інший катет трикутника.
11. а) Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 5 см і 4 см. Визначте сторони трикутника.
б) Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки 3 см і 5 см. Визначте сторони трикутника.
12. а) У рівнобічній трапеції бічна сторона, висота і діагональ дорівнюють відповідно 10 см, 8 см і 17 см. Визначте основи трапеції.
б) У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює 15 см, а середня лінія — 8 см. Визначте висоту трапеції.
13. а) У рівнобічну трапецію вписано коло. Визначте його радіус, якщо основи трапеції дорівнюють 4 см і 9 см.
б) У прямокутну трапецію з основами 6 см і 10 см вписано коло. Визначте довжини бічних сторін та діагоналей трапеції.
- 14*. а) Точка дотику кола, вписаного у рівнобічну трапецію, ділить її бічні сторони на відрізки 2 см і 8 см. Визначте радіус кола та основи трапеції.

- б) У рівнобічну трапецію вписано коло. Визначте радіус кола, якщо бічна сторона трапеції дорівнює 10 см, а її основи відносяться, як 2 : 3
- 15°.** а) Кінці більшої бічної сторони прямокутної трапеції віддалені від центра вписаного в неї кола на відстані 15 см і 20 см. Визначте периметр трапеції.
б) Точка дотику, вписаного у прямокутну трапецію кола, ділить більшу бічну сторону на відрізки 5 см і 20 см. Визначте периметр трапеції.
- 16°.** а) У прямокутній трапеції точка дотику вписаного в неї кола, ділить більшу основу на відрізки 3 см і 4 см. Визначте меншу основу трапеції.
б) У прямокутній трапеції точка дотику вписаного в неї кола, ділить меншу основу на відрізки 9 см і 12 см. Визначте більшу основу трапеції.
- 17°.** а) Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 см і 16 см, а бічна сторона — 10 см. Визначте радіус описаного кола.
б) Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота — 8 см. Визначте радіус описаного кола.
- 18.** а) Точки A і B лежать по один бік від прямої l . Відстань між проекціями цих точок на пряму дорівнює 7 см. Визначте довжину відрізка AB , якщо різниця від точок A і B до прямої l дорівнює 24 см.
б) Точки A і B лежать по різні боки від прямої l на відстанях відповідно 4 см і 13 см від неї. Визначте відстань між проекціями точок A і B на пряму l , якщо пряма l ділить відрізок AB на два відрізки, різниця яких дорівнює 7 см.
- 19°.** а) Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см, а проекція на неї медіани, проведеної з вершини прямого кута — 7 см. Визначте периметр трикутника.
б) Проекції сторін паралелограма на його більшу діагональ дорівнюють 41 см і 57 см. Визначте діагоналі паралелограма, якщо різниця його сторін дорівнює 14 см.
- 20°.** а) Сторони трикутника дорівнюють 22 см, 30 см і 32 см. Визначте довжину проекції більшої сторони на пряму, яка містить середню сторону.
б) Сторони трикутника дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см. Визначте проекції меншої і середньої сторони на пряму, яка містить найбільшу сторону.
- 21°.** а) У прямокутному трикутнику катет a лежить проти кута 15° . Визначте довжину гіпотенузи та іншого катета.
б) У прямокутному трикутнику катет b лежить проти кута $22^\circ 30'$. Визначте довжину гіпотенузи та іншого катета.

Співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику

22. а) У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 7 см і 24 см. Визначте його гострі кути.
 б) У прямокутному трикутнику катет і гіпотенуза дорівнюють відповідно 12 см і 13 см. Визначте його гострі кути.
23. а) У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 10 см, а гострий кут — 55° . Визначте катети.
 б) У прямокутному трикутнику катет дорівнює 6 см, а прилеглий до нього кут — 40° . Визначте інший катет і гіпотенузу.
24. а) Визначте кути рівнобедреного трикутника з основою 7 см і висотою, проведеною до бічної сторони, — 5 см.
 б) Визначте кути рівнобедреного трикутника з основою 12 см і висотою, проведеною до бічної сторони, — 4 см.
25. а) У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC $\angle A = 125^\circ$, $AB = 10$ см. Визначте BC і висоту AN .
 б) У рівнобедреному трикутнику ABC з основою $BC = 12$ см, $\angle B = 75^\circ$. Визначте сторону AB і висоту AM .
26. а) Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{12}{13}$.
 б) Побудуйте кут, косинус якого дорівнює $\frac{8}{17}$.
27. а) α — гострий кут прямокутного трикутника. Визначте $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.
 б) α — гострий кут прямокутного трикутника. Визначте $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$.
- 28* а) Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює $\frac{3}{4}$. Визначте кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.
 б) Відношення катета до гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює $\frac{7}{25}$. Визначте кут, який утворює з гіпотенузою медіана трикутника, проведена з вершин більшого гострого кута.
29. а) Сторона ромба дорівнює 6 см, а одна з його діагоналей — 10 см. Визначте кути ромба.
 б) Сторона ромба дорівнює 10 см, а гострий кут — 50° . Визначте діагоналі ромба.

- 30.** а) У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 4 см і 3 см, а висота — 5 см. Визначте кути трапеції.
б) У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 3 см і 9 см, а гострий кут — 70° . Визначте кут між діагоналлю і основою трапеції.
- 31.** а) Основа трикутника дорівнює 12 см, а прилеглі до неї кути — 40° і 110° . Визначте бічні сторони трикутника.
б) Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 12 см, а кут між ними — 115° . Визначте третю сторону.
- 32.** а) У прямокутній трапеції $ABCD$ $\angle C = 135^\circ$, $BC = 8$ см, $CD = 4$ см. Визначте кут, який більша діагональ трапеції утворює з більшого бічною стороною.
б) У трапеції $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle D = 120^\circ$, $AB = 8$ см, $BC = 4$ см. Визначте кут, який більша діагональ трапеції утворює з меншою бічною стороною.



Деталь фрески Бернардо Пінтуріккіо (1454–1513) «Гермес Трисмегист, Ізіда та Озіріс» з апартаментів Борджа у Ватикані (1495 р.). Приклад застосування правильних багатокутників в образотворчому мистецтві

Розділ IV

Багатокутники. Площі багатокутників

§17. Загальні властивості багатокутників

17.1. Багатокутник та його елементи. Опуклі та неопуклі багатокутники

Уроки
43–48



Вивчені вже нами трикутники та чотирикутники дають підґрунтя та ідеї для означення та вивчення складніших фігур — n -кутників, або багатокутників.

Ми знаємо, що трикутник повністю визначається трьома точками — вершинами, які не лежать на одній прямій. Сполучивши послідовно ці точки відрізками, ми одержуємо замкнуту ламану, що складається із трьох ланок (рис. 4.1). Ця ламана разом із обмеженою нею частиною площини і називається *трикутником*. Ланки ламаної — *сторони* трикутника.

Для визначення чотирикутника потрібно задати вже чотири точки — вершини, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Однак, на відміну від трикутника, цього не достатньо. Потрібно додати умову, що відрізки-сторони, які сполучають вершини, не перетинаються у внутрішніх точках (рис. 4.2). Справді, сполучивши ці точки інакше (рис. 4.3), ми дістанемо фігуру, яка не виправдовуватиме назви *чотирикутника*, оскільки матиме більше, ніж чотири кути.

Для ще більшої кількості точок ситуація тільки ускладнюється. Кількість можливих замкнених

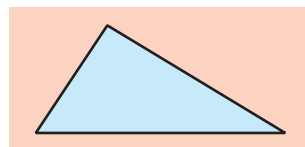


Рис. 4.1

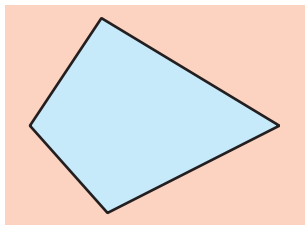


Рис. 4.2

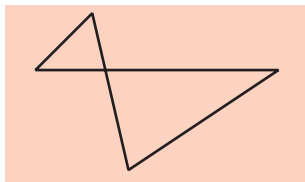


Рис. 4.3

ламаних, які послідовно сполучають ці точки одна з одною, стрімко зростає. При цьому ланки можуть багаторазово перетинатися (рис. 4.4, а). Отже, для визначення n -кутника при $n > 3$ замкнена ламана повинна бути *простою*, тобто її ланки мають перетинатися лише у вершинах (рис. 4.4, б).

Проста замкнена ламана (рис. 4.5) ділить площину на дві області — *внутрішню* і *зовнішню*. Вони мають такі характеристичні властивості: кожен промінь a , який виходить із внутрішньої області, переходить у зовнішню. Натомість у зовнішній області є безліч променів b , які не перетинають внутрішньої області. Внутрішню область разом із обмежуючою її ламаною називають *багатокутником*.

Означення.

Багатокутником називається фігура, яка складається із простої замкненої ламаної та її внутрішньої області. Вершини ланок (тобто їхні кінці) називають *вершинами багатокутника*, а самі ланки — *сторонами багатокутника*.

Для спрощення кажуть також, що *багатокутником називається плоска фігура, обмежена простою замкненою ламаною*. При цьому за давньою традицією саму цю ламану часто теж називають багатокутником, щоправда, інколи з уточненням — *каркасний* або *лінійний* багатокутник.

Кількість вершин і кількість сторін багатокутника однакові. Залежно від цієї кількості, багатокутник називається *трикутником*, *чотирикутником*, *п'ятикутником*, *шестикутником*, *n-кутником*.

Позначення багатокутника утворюється із позначень його вершин, записаних по порядку. Наприклад, на рис. 4.6 зображено п'ятикутник $ABCDE$. A, B, C, D, E — його вершини, AB, BC, CD, DE, EA — сторони.

Дві вершини багатокутника, які є кінцями однієї сторони, називаються *сусідніми* вершинами, а дві

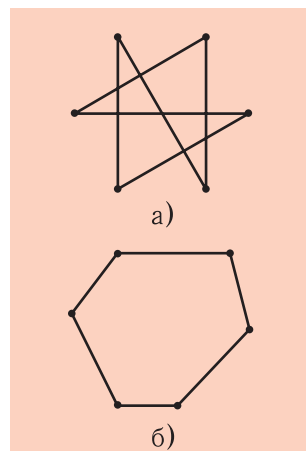


Рис. 4.4

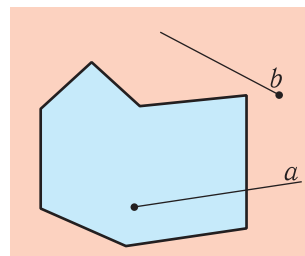


Рис. 4.5

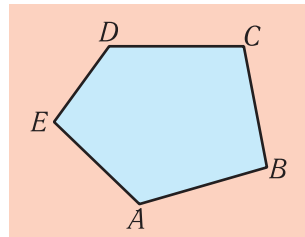


Рис. 4.6

сторони, що виходять з однієї вершини, — *суміжними* сторонами. Наприклад, на рис. 4.6 D і C — сусідні вершини, а DC і CB — суміжні сторони.

Означення.

Сума довжин усіх сторін багатокутника називається його периметром.

При кожній вершині багатокутника можна розглядати плоский кут, який визначається його сторонами і в безпосередній близькості від вершини містить внутрішні точки багатокутника. Цей кут називається *кутом* багатокутника при цій вершині. Часто для більшої визначеності його ще називають *внутрішнім кутом* багатокутника. Наприклад, на рис. 4.7 BAE — внутрішній кут п'ятикутника $ABCDE$.

Про кут багатокутника, сторона якого містить сторону багатокутника, кажуть, що він прилягає до цієї сторони. До кожної сторони багатокутника прилягає два його кути. Наприклад, у багатокутнику, зображеному на рис. 4.7, до сторони AE прилягають кути BAE та AED (можна сказати й простіше — до сторони AE прилягають кути A та E).

Як ви вже знаєте, у трикутниках усі кути менші від 180° , тобто є опуклими. Однак у чотирикутниках можуть бути й неопуклі кути, тобто більші за 180° . На рис. 4.8 зображено п'ятикутник $ABCDE$ з двома неопуклими кутами B та E .

Означення.

Якщо у чотирикутнику всі кути опуклі, то він називається опуклим. Якщо ж є хоча б один неопуклий кут, то багатокутник називається неопуклим.

Опуклість або неопуклість багатокутника можна охарактеризувати і за допомогою діагоналей.



П'ятикутні форми у міжнародному аеропорті «Хосе Марті» в Гавані (Куба)

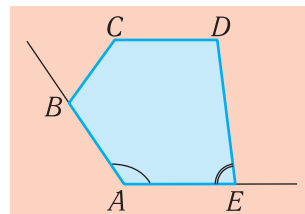


Рис. 4.7

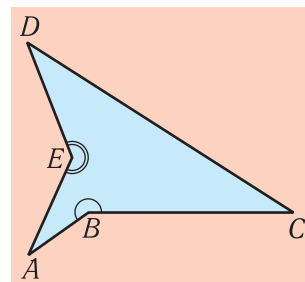


Рис. 4.8

Означення.

Діагоналлю багатокутника називається відрізок, який сполучає його несусідні вершини.

На рис. 4.9 а, б) зображено два п'ятикутники — опуклий $ABCDE$ і неопуклий $KLMNP$. У першому з них проведено діагоналі AC та AD , і обидві вони належать п'ятикутнику. У другому проведено діагоналі KM та MN , і перша з яких належить п'ятикутнику, а друга не належить.

За аналогією із чотирикутниками можна довести, що в опуклих багатокутниках усі діагоналі належать цим фігурам, а в неопуклих багатокутниках існують діагоналі, які виходять за їхні межі.

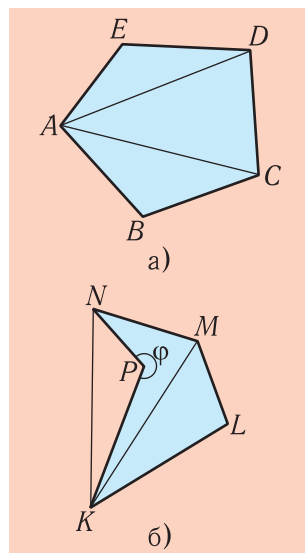
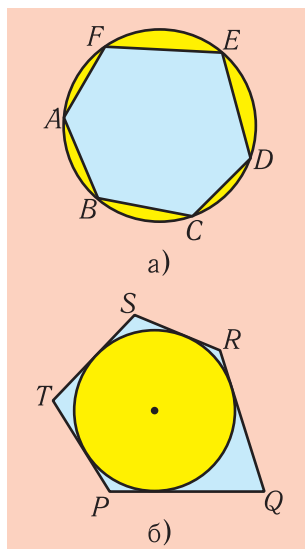
Інколи зручно користуватися *достатніми* умовами опуклості, які полягають у тому, що будь-який багатокутник, навколо якого можна описати або в який можна вписати коло, є опуклим (доведення можна провести за аналогією із чотирикутниками). Однак ці умови не є *необхідними*, оскільки існують опуклі багатокутники, для яких не існує ні описаного, ні вписаного кола

Означення описаних і вписаних багатокутників аналогічні означенням вписаних і описаних трикутників та чотирикутників.

Означення.

Якщо всі вершини багатокутника лежать на колі, то він називається вписаним у коло, а коло — описаним навколо багатокутника. Якщо всі сторони багатокутника дотикаються до кола, то він називається описаним навколо кола, а коло — вписаним у багатокутник.

На рис. 4.10, а) зображено вписаний шестикутник $ABCDE$, а на рис. 4.10, б) — описаний п'ятикутник $PQRST$.

**Рис. 4.9****Рис. 4.10**

17.2. Сума кутів опуклого багатокутника

Теорема

(про суму кутів опуклого багатокутника).

Сума кутів будь-якого опуклого n -кутника дорівнює $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Доведення. Нехай маємо опуклий n -кутник $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$ (рис. 4.11). Провівши усі його діагоналі, що виходять з точки A_1 , розіб'ємо цей n -кутник на $(n - 2)$ трикутники (кожна сторона, за винятком двох — A_1A_2 та A_1A_n , представляє один і лише із цих трикутників, отже, трикутників стільки, скільки цих сторін, тобто $n - 2$). Сума кутів кожного із трикутників дорівнює 180° , а всі разом вони вичерпують усі кути n -кутника. Отже, сума кутів n -кутника дорівнює $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Теорему доведено.

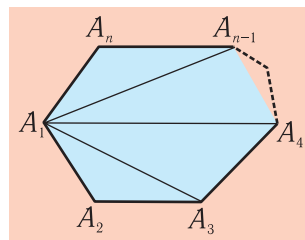


Рис. 4.11



Розв'язуємо разом

Задача.

Неважко побудувати трикутник, чотирикутник, п'ятикутник, шестикутник із трьома гострими кутами (див. рис. 4.12). А чи існує який-небудь опуклий багатокутник із чотирма гострими кутами?

Розв'язання. Припустимо, що при деякому n існує такий опуклий n -кутник, у якому чотири кути $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — гострі. Нехай $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-4}$ — інші



Франческо Ботті
(1640–1710).

Геометрія.

Муза геометрії проводить
вимірювання циркулем
у п'ятикутнику

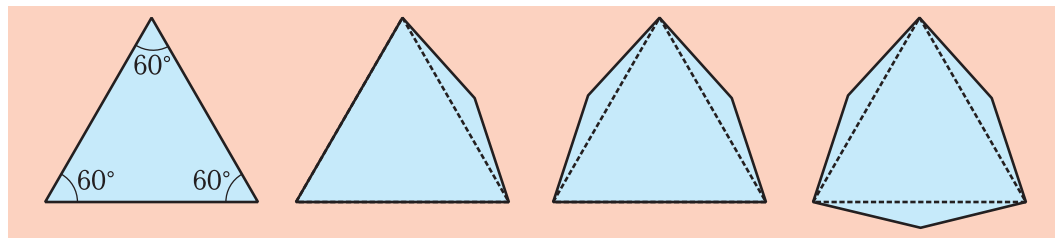


Рис. 4.12

його кути. Тоді, відповідно до формули для суми кутів n -кутника:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-4}) = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Оскільки, за припущенням, сума $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ менша від $4 \cdot 90^\circ$, тобто від $2 \cdot 180^\circ$, то для виконання записаної рівності сума $(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-4})$ має бути більшою за $(n - 2) \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ$, тобто за $(n - 4) \cdot 180^\circ$. Цього жодним чином не можна досягти, якщо кожен із доданків $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-4}$ не перевищуватиме 180° . Отже, принаймні один із них має бути більшим за 180° . А це можливо лише для неопуклих багатокутників. Тому не існує жодного опуклого багатокутника, у якому аж чотири кути гострі.

Відповідь. Не існує.



Багатокутні форми у бібліотеці Вільнюського університету (збудована у 2011 р.)



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

17.3. Сума кутів довільного багатокутника

Твердження про те, що сума кутів n -кутника дорівнює $(n - 2) \cdot 180^\circ$, справджується не лише для опуклих, а й для неопуклих n -кутників. Але доведення цього в загальному випадку складніше.

Розглянемо доведення, яке придатне одночасно і для опуклих, і для неопуклих багатокутників. Для ілюстрування візьмемо опуклий і неопуклий п'ятикутники $ABCDE$ (рис. 4.13, а, б).

Проведемо діагональ AD , яка сполучає дві довільні вершини, взяті «через одну». Якщо AD належить п'ятикутнику, то вона відріже від нього трикутник ADE . Тоді одержиться чотирикутник $ABCD$, сума кутів якого буде на 180° меншою, ніж була у п'ятикутника. Якщо ж AD не належить п'ятикутнику, то, навпаки, до п'ятикутника долучиться трикутник ADE . У цьому разі теж одержиться чотирикутник $ABCD$ і початкова сума

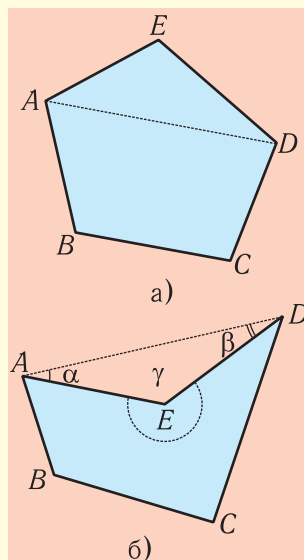


Рис. 4.13

кутів теж зменшиться на 180° . Справді, до тих кутів, які були, тепер долучаться кути α і β , але віднімється кут γ . Тому різниця становитиме:

$$\angle E - (\alpha + \beta) = 360^\circ - \gamma - (180^\circ - \gamma) = 180^\circ.$$

Якщо таку операцію з «відрізанням та «приєднанням» трикутників застосовувати до n -кутника $(n - 3)$ рази, то врешті решт дійдемо до трикутника із сумою кутів 180° . При цьому початкова сума кутів n -кутника (позначимо її через x) щоразу зменшуватиметься на 180° . Звідси для x одержується просте співвідношення:

$$x - (n - 3) \cdot 180^\circ = 180^\circ,$$

з якого $x = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Що й треба було довести.

Отже, *сума кутів будь-якого n -кутника (опуклого чи неопуклого) дорівнює $(n - 2) \cdot 180^\circ$.*

17.4. Зовнішні кути опуклого багатокутника

Зовнішній кут опуклого багатокутника означається так само, як і для трикутника — це кут, який є суміжним із внутрішнім кутом багатокутника.

На рис. 4.14 CBM — зовнішній кут опуклого чотирикутника $ABCD$ при вершині B .

Для неопуклих багатокутників поняття зовнішнього кута не означається.

Якщо при кожній вершині опуклого багатокутника, як і для трикутника, розглядати лише один із двох рівних зовнішніх кутів, то матимемо цікавий і несподіваний факт, який виражається такою теоремою.

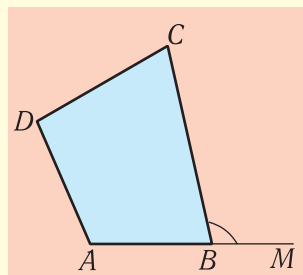


Рис. 4.14

Теорема

(про суму зовнішніх кутів опуклого багатокутника).

Сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого багатокутника дорівнює 360° .

Доведення. Нехай $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ — зовнішні кути опуклого багатокутника, суміжні із його внутрішніми кутами $A, B, C, D, \dots$ (рис. 4.15). Тоді маємо рівність:

$$\begin{aligned} &(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \dots) + \\ &+ (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots) = n \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що сума внутрішніх кутів $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \dots$ дорівнює $(n - 2) \cdot 180^\circ$, для суми зовнішніх кутів дістаємо: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Теорему доведено.

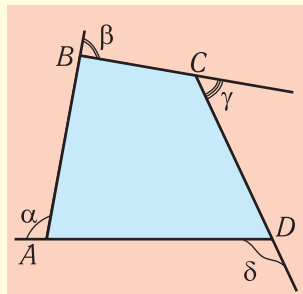


Рис. 4.15



Перевірте себе

1. Що таке замкнена ламана? Як називаються її елементи?
2. Дайте означення багатокутника та основних його елементів — вершин, сторін, кутів та діагоналей. Що означає термін n -кутник?
3. Дайте означення опуклих і неопуклих багатокутників. Яку властивість мають їхні діагоналі?
4. Дайте означення вписаних і описаних багатокутників. Навколо яких відомих вам багатокутників можна описати коло? В які багатокутники можна вписати коло?
5. Чому дорівнює сума кутів опуклого n -кутника? А — неопуклого?



Вправи і задачі

- 1°. Накресліть опуклі п'ятикутник і шестикутник та проведіть їхні діагоналі, що виходять з однієї вершини. Скільки діагоналей буде проведено? На які фігури розбиває п'ятикутник (шестикутник) одна із діагоналей? На які фігури розбивають п'ятикутник (шестикутник) усі діагоналі, проведені з однієї вершини? Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини в n -кутнику?
- 2°. На скільки частин розбивається опуклий n -кутник діагоналями, проведеними з однієї вершини? Що це за фігури?
- 3°. Скільки усіх діагоналей можна провести в опуклому п'ятикутнику і в опуклому шестикутнику? А — в неопуклих п'ятикутнику і шестикутнику?
- 4°. Накресліть приклади неопуклих п'ятикутників з одним і двома неопуклими кутами та визначте вимірюванням суми їхніх кутів. Чи таким був би результат, якби п'ятикутник був опуклим?
- 5°. Визначте суму всіх внутрішніх кутів опуклого: а) шестикутника; б) десятикутника.
- 6°. Усі кути опуклого дев'ятикутника рівні між собою. Чому дорівнює величина кожного з них?
- 7°. В опуклому п'ятикутнику два кути прямі, а решта три — рівні між собою. Визначте їхню величину.
- 8°. Всі сторони опуклого п'ятикутника рівні між собою, а два кути, які прилягають до однієї зі сторін — прямі. Визначте решту кутів п'ятикутника.
- 9°. Доведіть, що коли п'ять кутів опуклого шестикутника дорівнюють по 120° , то таку саму величину має й шостий кут.
- 10°. Яка найбільша кількість діагоналей може не належати п'ятикутнику?

11. Скільки сторін має багатокутник, якщо кожен його кут дорівнює: 1) 144° ; 2) 150° ; 3) 170° ; 4) 171° ?
12. Скільки сторін має багатокутник, якщо сума його кутів дорівнює: 1) 1080° ; 2) 1620° ; 3) 3960° ; 4) 1800° ; 5) 4140° ?
13. Чи може сума кутів багатокутника дорівнювати: 1) 9180° ; 2) 3600° ; 3) 2040° ; 4) $11d$; 5) $18d$ (d — величина прямого кута)?
14. Доведіть, що коли всі кути опуклого багатокутника прямі, то це — прямокутник.
15. Визначте суму градусних мір зовнішніх кутів опуклого: а) п'ятикутника; б) шестикутника.
16. Доведіть, що не існує опуклого багатокутника, який має: а) більше чотирьох прямих зовнішніх кутів; б) більше трьох тупих зовнішніх кутів.
17. Доведіть, що у багатокутнику довжина будь-якої діагоналі не більша за половину периметра.
18. Яку найбільшу кількість гострих кутів може мати n -кутник?
19. Скільки усіх діагоналей має багатокутник з n сторонами?
20. Чи існує n -кутник, кількість усіх діагоналей якого: а) удвічі більша за кількість сторін; б) удвічі менша від кількості сторін; в) утричі менша від кількості сторін?
21. Відрізки, які сполучають середину кожної сторони квадрата з кінцями протилежної сторони, обмежують деякий опуклий восьмикутник. Чи рівні в нього кути?
22. Скільки сторін має багатокутник, якщо сума усіх його внутрішніх кутів разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 2250° ?
23. Визначте кількість сторін багатокутника з усіма рівними внутрішніми кутами, якщо сума його зовнішніх кутів разом з одним із внутрішніх дорівнює 468° .

§18. Площі багатокутників

18.1 Про одиниці вимірювання площ

Уроки
49–57



Найважливішою характеристикою багатокутників з точки зору практичного застосування є їхня площа. Власне, із визначення площ багатокутників і розпочиналася геометрія.

Найперше, що потрібно зробити для визначення будь-якої величини, — це вибрати одиницю для вимірювання. Є декілька основних, або так званих *еталонних* величин, а інші визначаються на основі цих еталонних. До еталонних величин відноситься й одиниця для вимірювання довжин — 1 м. Від неї утворюються дрібніші та крупніші



Книжкова полиця
для шанувальника геометрії

одиниці — 1 дм, 1 см, 1 мм, 1 км та ще деякі інші. Від неї ж утворюється й одиниця для вимірювання площ — квадратний метр (скорочено кв. м або м^2). 1 кв. м. — це числове вираження величини частини площини, яку обмежує квадрат зі стороною 1 м. У свою чергу, від квадратного метра утворюються похідні дрібніші й крупніші величини для площ. За основу беруться відповідні дрібніші або крупніші величини для довжин. Але принцип той самий — мірилом залишається квадрат з відповідною одиничною стороною. У результаті утворюються такі квадратні одиниці, як 1 кв. дм, 1 кв. см, 1 кв. мм, 1 кв. км тощо.

Визначившись з основною і похідними одиницями вимірювання, з'ясовують співвідношення між ними. Зокрема, у випадку з площею потрібно встановити, яку частину квадратного метра становить квадратний дециметр, квадратний сантиметр тощо. Основою для цього є розбиття квадрата на менші квадрати.

Якщо дві суміжні сторони одиничного квадрата розбити на n рівних частин і через точки поділу провести відрізки, паралельні іншим сторонам (рис. 4.16), то внаслідок цього квадрат розіб'ється на n шарів по n квадратиків у кожному, тобто, загалом на $n \cdot n = n^2$ квадратиків зі стороною $\frac{1}{n}$. Отже, початкова квадратна одиниця розіб'ється на n^2 дрібніших квадратних одиниць.

Якщо, наприклад, описаним способом розбити квадратний метр на квадратні сантиметри, то n матиме значення 100. Отже, 1 кв. м містить 100^2 , тобто 10 000 кв. см. Навпаки, 1 кв. см становить $\frac{1}{10\,000}$ кв. м.

Ще один приклад. Оскільки 1 км містить 1 000 м, то 1 кв. км вміщує $1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000$ кв. м, а 1 кв. м відповідно 0,0000001 кв. км.

Аналогічно встановлюються співвідношення й між іншими квадратними одиницями.



Пеллегріно Тібальді
(1527–1596).
Давньоіндуські філософи
(гімнософісти).
Фреска з резиденції
«Ескоріал» (Іспанія)

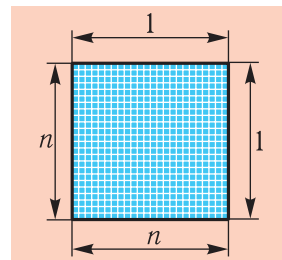


Рис. 4.16

Зазначимо, водночас, що поряд з метричною системою вимірювання довжин застосовуються й деякі інші, наприклад, — у Великобританії та США. Але принцип формування квадратних одиниць і встановлення співвідношення між ними той самий. Наприклад, оскільки 1 англійський фут вміщує 12 дюймів, то 1 кв. фут містить 12^2 , тобто 144 кв. дюйми.

Варто також знати, що при вимірюванні великих територій та акваторій застосовується квадратні одиниці, які утворюються з основних в дещо інший спосіб. Найпоширенішими серед них є ар (скорочено 1 а) (від латинського *area* — поверхня, площа) та гектар (скорочено 1 га) (грецьке «гекто» означає «сто »). Їхні величини такі:

$$1 \text{ а} = 10 \cdot 10 \text{ кв. м} = 100 \text{ кв. м};$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ а} = 10\,000 \text{ кв. м}.$$

У побуті 1 ар часто називають соткою, або сотою, оскільки він дорівнює $\frac{1}{100}$ від гектара.

18.2. Основні принципи для вимірювання площ. Площа прямокутника

В основі вимірювання площ плоских фігур лежить проста ідея, яку можна назвати «ідеєю палетки». *Палеткою* називається прозора прямокутна пластинка, розбита на рівні квадратики прямими, паралельними її краям. Якщо покласти палетку на плоску фігуру F (рис. 4.17) і порахувати кількість m квадратиків, які повністю належать цій фігурі, і кількість k квадратиків, які належать їй лише частково, але мають з фігурою спільні внутрішні точки, то природно вважати, що площа S цієї фігури знаходиться у межах між ms_0 та $(m + k)s_0$.

$$ms_0 \leq S \leq (m + k)s_0,$$

де s_0 — площа одного квадратика палетки. Зокрема, у випадку, зображеному на рис. 4.17,

$$31s_0 \leq s \leq (31 + 34)s_0.$$



Пеллегріно Тібальді
(1527–1596).

Давньоєгипетські жерці.
Фреска з резиденції
«Ескоріал» (Іспанія)

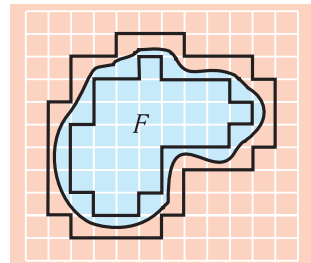


Рис. 4.17

Таким способом інколи користуються і на практиці, — наприклад, коли потрібно наближено визначити площу якої-небудь ділянки за планом або картою. Тоді за наближене значення площі беруть середнє арифметичне значення величин ms_0 та $(m + k)s_0$, тобто величину $\left(m + \frac{k}{2}\right)s_0$. Це значення може вияви-

тися навіть точним, як, наприклад, у випадку прямокутника з цілими вимірами (рис. 4.18), або іншої фігури, складеної з одиничних квадратиків (рис. 4.19).

Проте основним, навіть у практичних застосуваннях, є не безпосереднє, а опосередковане визначення площ, яке здійснюється шляхом обчислення за формулами, які виражають площу через лінійні та кутові розміри фігури. Не ходять же обліковці, наприклад, з палеткою по полю, аби виміряти його площу! Проте виведення відповідних формул відбувається на основі логічного розвитку «ідеї палетки».

А розвиток полягає у тому, щоб, знаходячи площу фігури F (див. рис. 4.17), не обмежуватися лише першими наближеннями $S_0 = ms_0$ (з *недостачею*) та $S'_0 = (m + k)s_0$ (з *надлишком*), а якщо вони не збігаються, то шукати другі наближення, потім треті, четверті і т. д. Для других наближень S_1, S'_1 враховуються вже і квадратики зі стороною $\frac{1}{10}a$, де a — сторона початкового квадрата, отже, з площею $S_1 = \frac{s_0}{10^2}$. Для третіх S_2, S'_2 — ще й квадратики зі

стороною $\frac{1}{10}a = \frac{1}{10^2}a$, отже, з площею $\frac{S_1}{10^2} = \frac{s_0}{10^4}$ і т. д. Сама площа S тоді вважається спільним граничним значенням послідовностей наближень S_n, S'_n .

Застосуємо цю ідею для прямокутника зі сторонами (вимірами) a і b .

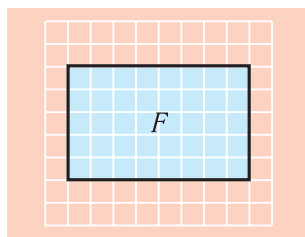


Рис. 4.18

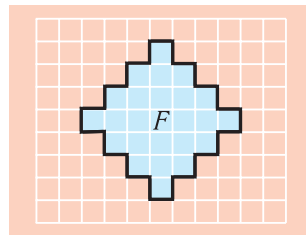


Рис. 4.19



Грегор Рейш (бл. 1467–1525) — чернець картезіанського ордену та енциклопедист. Гравюра до розділу «Геометрія» з його енциклопедії «Перлина філософії» («Margarita philosophica») (1503 р.)

Якщо a і b — цілі числа, то в даному прямокутнику вміщуватиметься рівно $a \cdot b$ одиничних квадратиків (рис. 4.20). Отже, вважаючи площу одного такого квадратика рівною одиниці, площа прямокутника дорівнюватиме $a \cdot b$ відповідних квадратних одиниць. Наприклад, площа прямокутника F , зображеного на рис. 4.18, дорівнює $8 \cdot 5 = 40$ квадратних одиниць.

Далі розглядаємо випадок, коли числа a і b можна подати у вигляді скінченних десяткових дробів (у тому числі і з цілими частинами). Нехай $a = \frac{p}{10^m}$,

$b = \frac{q}{10^n}$, де p і q — деякі цілі числа. Припустимо, що $m \leq n$. Подрібнимо умовно палетку так, щоб сторони її квадратиків дорівнювали $\frac{1}{10^n}$. Тоді площа

одного квадратика палетки дорівнюватиме $\frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{2n}}$ від площі початкової квадратної

одиниці. Якщо довжину відрізка $\frac{1}{10^n}$ взяти за нову одиницю вимірювання, то сторона a прямокутника тоді дорівнюватиме цілому числу $\frac{p}{10^m} \cdot 10^n$, а сто-

рона b — цілому числу q цих нових лінійних одиниць. Тоді, як уже зазначалося, у даному прямокутнику вміститься рівно $\frac{p}{10^m} \cdot 10^n \cdot q$ квадратиків,

кожен з яких має площу $\frac{1}{10^{2n}}$. Отже, сумарна

площа цього прямокутника дорівнюватиме $\left(\frac{p}{10^m} \cdot 10^n \cdot q\right) \cdot \frac{1}{10^{2n}} = \frac{p}{10^m} \cdot \frac{q}{10^n} = a \cdot b$ початкових квадратних одиниць.

Нехай, нарешті, хоча б один із вимірів a , b прямокутника є нескінченним десятковим дробом (можливо й періодичним). Тоді розглядатимемо

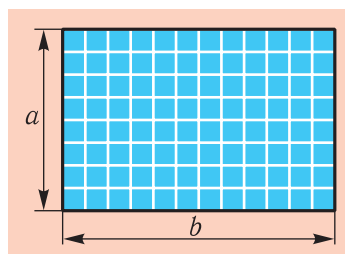


Рис. 4.20



Клірики вивчають астрономію і геометрію. Ілюстрація із ранньофранцузької рукописної книги XV ст. «Правдива історія чудового правителя Александра Македонського»

послідовні десяткові наближення a_n^- , b_n^- чисел a , b з недостатчею, та десяткові наближення a_n^+ , b_n^+ з надлишком. Прямокутник з вимірами a_n^- , b_n^- повністю міститься у прямокутнику з вимірами a , b , а прямокутник з вимірами a_n^+ , b_n^+ — містить прямокутник з вимірами a , b (рис. 4.21). Тому для площ S_n^- , S_n^+ та шуканої площі S виконуються нерівності:

$$S_n^- < S < S_n^+.$$

Оскільки десяткові наближення i з надлишком, і з недостатчею є скінченними десятковими дробами, то, як уже встановлено, для наближень S_n^- , S_n^+ площі S справджуються формули:

$$S_n^- = a_n^- \cdot b_n^-; \quad S_n^+ = a_n^+ \cdot b_n^+.$$

Отже, при будь-якому n для площі S істинними є наближення:

$$a_n^- \cdot b_n^- < S < a_n^+ \cdot b_n^+.$$

Згідно ж з означенням, прийнятим в алгебрі, так само наближується і добуток дійсних чисел a і b :

$$a_n^- \cdot b_n^- < a \cdot b < a_n^+ \cdot b_n^+.$$

Збіг наближень для числового значення площі S і для добутку $a \cdot b$, узятих з як завгодно високою точністю (тобто з як завгодно великою кількістю правильних десяткових знаків після коми), якраз і означає, що ці числа рівні. Отже, і в цьому разі $S = a \cdot b$.

Таким чином, ми довели, що площа прямокутника завжди виражається формулою:

$$S = a \cdot b.$$

Коротко цей результат формулюють так: **площа прямокутника дорівнює добутку його вимірів.**

При цьому мається на увазі, що площа виражається у квадратних одиницях, однак її числове значення дорівнює добутку числових значень відповідних лінійних вимірів прямокутника.

Наслідок.

Площа квадрата зі стороною a дорівнює a^2 .

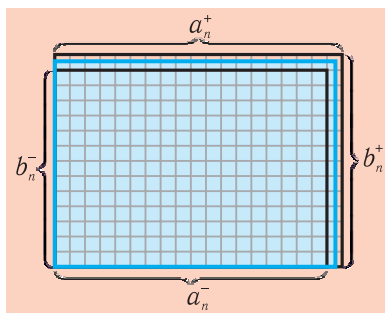


Рис. 4.21



Геометрія. Фігура із групи «Сім вільних мистецтв» у притворі кафедрального собору у Фрайбурзі (Німеччина) (XV ст.)

Звідси, до речі, походить і назва «квадрат» для другого степеня числа a .



Розв'язуємо разом

Задача.

План підлоги помешкання, яку потрібно застелити паркетом, має вигляд багатокутника, зображеного на рис. 4.22. Усі кути між сусідніми сторонами прямі. Для закупівлі паркету потрібно визначити площу підлоги. Для цього знято усі необхідні розміри (в метрах); їх вказано на плані. Чому ж дорівнює площа підлоги?

Розв'язання. Шукану площу можна знайти як площу двох прямокутників $ABCD$ та $PQRS$, від якої віднімаються площі прямокутників $DEFG$, $BLMN$ та $SXYZ$.

Виміри прямокутника $ABCD$ дорівнюють $6 + 7 = 13$ (м) та $5 + 1,9 = 6,9$ (м). Тому його площа $S_1 = 13 \cdot 6,9 = 89,7$ (м²).

Виміри прямокутника $PQRS$ дорівнюють 4,7 м та 2,4 м. Тому його площа $S_2 = 4,7 \cdot 2,4 = 11,28$ (м²).

Виміри прямокутника $DEFG$ дорівнюють 6 м і $5 + 1,9 - 3,8 = 3,1$ (м). Тому його площа $S_3 = 6 \cdot 3,1 = 18,6$ (м²).

Виміри прямокутника $BLMN$ дорівнюють 4,2 м і 1,9 м. Тому його площа $S_4 = 4,2 \cdot 1,9 = 7,98$ (м²).

Виміри прямокутника $SXYZ$, дорівнюють 3,5 м та $2,4 - 1,8 = 0,6$ (м). Тому його площа $S_5 = 3,5 \cdot 0,6 = 2,1$ (м²).

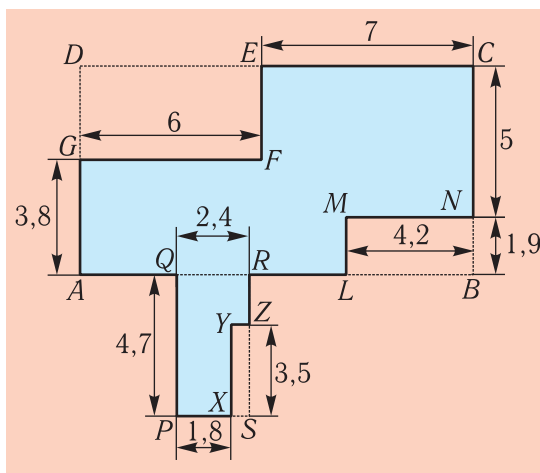


Рис. 4.22



Афіньський акрополь
(V ст. до н. е.).
Реконструкція

Отже, шукана площа підлоги дорівнює: $S_1 + S_2 - S_3 - S_4 - S_5 = 89,7 + 11,28 - 18,6 - 7,98 - 2,1 = 72,3 \approx 72 \text{ (м}^2\text{)}$.

18.3. Загальні властивості площ та стратегія їх застосування для багатокутників

Окрім формули для площі прямокутника, ідея «па-летки» дає змогу виокремити дуже важливі загальні властивості площ, якими зручно користуватися при визначенні площ складніших фігур.

Властивість 1. *Площа фігури невід’ємна.*

(Але фігури з нульовою площею теж існують. Наприклад, — прями. Адже у прямій не «поміститься» жоден квадратик, якими б малими не були його розміри).

Властивість 2. *Площа одиничного квадрата (тобто квадрата, сторона якого дорівнює одиниці довжини) дорівнює 1 кв. одиниці.*

Властивість 3. *Рівні фігури мають рівні площі.*

Властивість 4. *Площа фігури, що складається з декількох частин (або розбита на частини), дорівнює сумі площ цих частин.*

Означення.

Фігури, які мають рівні площі, називаються рівновеликими.

За властивістю 3, рівні фігури є і рівновеликими. Однак рівновеликі фігури не обов’язково рівні. Наприклад, рівносторонній і прямокутний трикутники з рівними площами є рівновеликими, однак, звісно, вони не рівні.

Загальна стратегія застосування властивостей площ для визначення площ багатокутників є такою.

Якщо багатокутник можна розбити на декілька прямокутників, як, наприклад, у випадку, зображеному на рис. 4.23, а), то, керуючись відзначеними властивостями площ, площу такої фігури можна знайти як суму площ цих прямокутників.



Франческо Пріматіччо (1504–1570). Геометрія.

Фреска у галереї замку Ансі ле Фран у Бургундії (Франція)

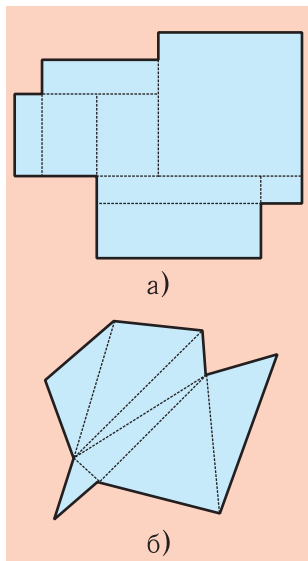


Рис. 4.23

Але розбиття на прямокутники можливе лише для окремих фігур. В загальному ж випадку проводиться розбиття на трикутники (рис. 4.23, б). Зі свого боку, будь-який трикутник можна розбити на прямокутні трикутники (рис. 4.24). Тому в кінцевому підсумку проблема з визначенням площ складніших багатокутників зводиться до встановлення формули для площі прямокутного трикутника. Ми розв'яжемо її на основі розбиття прямокутника на два рівних прямокутних трикутники.

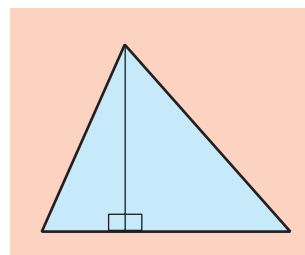


Рис. 4.24

18.4. Площа трикутника

Площа прямокутного трикутника

Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з катетами $CB = a$ і $CA = b$ (рис. 4.25). Доповнимо його до прямокутника, побудувавши для цього прями кути CAM та CBN , як показано на рисунку. Якщо позначимо через D точку перетину сторін AM та BN побудованих кутів, то дістанемо прямокутник $ACBD$. Діагональ AB розбиває цей прямокутник на два рівних прямокутних трикутники. А рівні фігури мають і рівні площі. Отже, площа трикутника ACB дорівнює площі трикутника ADB . А оскільки разом ці два трикутники утворюють прямокутник $ACBD$, то площа кожного з них дорівнює половині площі цього прямокутника.

Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють a і b , а його площа, отже, ab . Звідси для площі S прямокутного трикутника виводимо формулу:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

Таким чином, площа прямокутного трикутника у відповідних квадратних одиницях виражається числом, яке дорівнює половині добутку його катетів. Для скорочення мови кажуть просто: *площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів*.

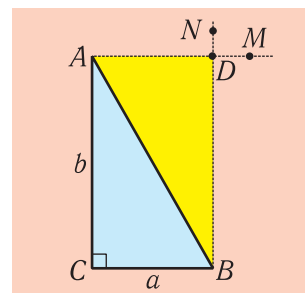


Рис. 4.25



Геометрія. Мозаїка у кафедральному соборі міста Кельна (Німеччина, XV ст.)



Розв'язуємо разом

Задача.

У прямокутнику $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 6$ см. На сторонах BC і CD взято точки L , M і N (рис. 4.26) так, що $BL = 2$ см, $CM = 3$ см, $DN = 4$ см. Визначити площу чотирикутника $ALMN$.

Розв'язання. Шукану площу S знайдемо, якщо від площі $10 \cdot 6 = 60$ (см²) прямокутника віднімемо площі S_1 , S_2 , S_3 прямокутних трикутників ABL , LCM , AND . За формулою для площі прямокутного трикутника знаходимо:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot (6 - 2) \cdot 3 = 6 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже, $S = 60 - 10 - 6 - 12 = 32$ (см²).

Відповідь. 32 см².

Площа довільного трикутника

Нехай маємо довільний трикутник ABC , $AD = h$ — його висота, що відповідає основі $BC = a$ (рис. 4.27). Якщо трикутник ABC прямокутний і h та a — його катети, то вже з'ясовано, що площа $S = \frac{1}{2}ah$. Доведемо, що цією самою формулою виражається площа й будь-якого іншого трикутника.

Для цього скористаємося тим, що коли точка D лежить усередині відрізка BC , то шукана площа S дорівнює сумі площ прямокутних трикутників ADC і ADB , а якщо ззовні відрізка BC , — то різниці площ вказаних трикутників. Отже, у першому випадку

$$S = \frac{1}{2}DC \cdot h + \frac{1}{2}DB \cdot h = \frac{1}{2}(DC + DB) \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot h,$$

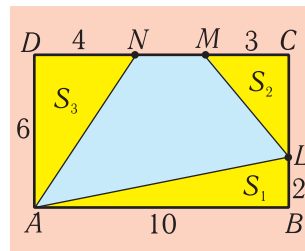


Рис. 4.26

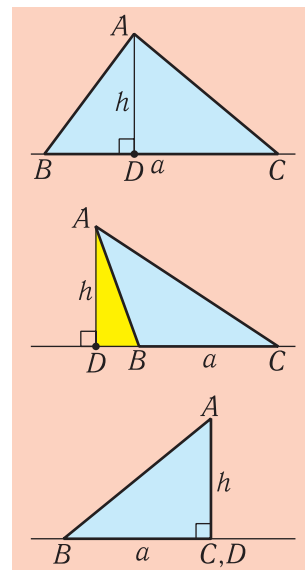


Рис. 4.27

а в другому —

$$S = \frac{1}{2} DC \cdot h - \frac{1}{2} DB \cdot h = \frac{1}{2} (DC - DB) \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

Як бачимо, в усіх випадках $S = \frac{1}{2} ah$, що й треба було довести.

Таким чином, *площа будь-якого трикутника дорівнює половині добутку основи на висоту.*



Розв' язуюмо разом

Задача.

Визначити площу рівностороннього трикутника, коли задано: а) його сторону a ; б) радіус вписаного кола r ; радіус описаного кола R .

Розв' язання. Нехай маємо рівносторонній трикутник ABC зі стороною a (рис. 4.28). Відомо, що у рівносторонньому трикутнику усі кути дорівнюють по 60° . Відомо, також, що кожна медіана є водночас висотою і бісектрисою та належить серединному перпендикуляру до відповідної сторони. Отже, точка перетину медіан є центром вписаного і описаного кіл.

Проведемо медіану AM . Оскільки точка перетину медіан ділить кожну з них у відношенні $2 : 1$, беручи від вершини трикутника, то центром вписаного і описаного кіл для трикутника ABC буде така точка G медіани AM , для якої $AG = 2GM$.

У прямокутному трикутнику AMB : $BM = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$;

$$AM = AB \cdot \sin \angle B = a \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Тому для площі S трикутника ABC маємо:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$



Мозаїка «Навчання геометрії». (Меморіал принца Альберта у Лондоні, 1875 р.)

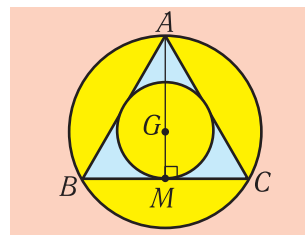


Рис. 4.28

Якщо буде задано величину $GM = r$, то AM дорівнюватиме $3r$, а з прямокутного трикутника AMB :

$$BM = AM \cdot \operatorname{tg} \angle BAM = AM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = r\sqrt{3}.$$

І тоді для площі S матимемо:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AM = BM \cdot AM = \sqrt{3}r \cdot 3r = 3\sqrt{3}r^2.$$

Якщо ж буде задано величину $AG = R$, то AM дорівнюватиме $\frac{3}{2}AG$, тобто $\frac{3}{2}R$. І тоді, за попереднім способом, послідовно знаходимо:

$$BM = AM \cdot \operatorname{tg} \angle BAM = AM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{3}{2}R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = R \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$S = BM \cdot AM = R \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2; 3\sqrt{3}r^2; \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

18. 5. Площі основних видів чотирикутників

Для визначення площ найпоширеніших видів чотирикутників немає потреби ні в застосуванні палетки, ні в розбитті на трикутники, ні в додаткових побудовах для перетворення у рівновеликі трикутники чи прямокутники. Для цього існують прості формули.

Площа паралелограма

Нехай маємо паралелограм $ABCD$ з основою $AB = a$ і висотою $DF = h$ (рис. 4.29). Відомо, що діагональ DB розбиває паралелограм на два рівних, а тому й рівновеликих трикутники ABD і CDB . Основою і висотою першого з них є відповідно основа AB і висота DF паралелограма. Тому для площі S паралелограма $ABCD$ маємо:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot DF = ah.$$

Отже, площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту.



Мішель Корнель Молодший (1642–1708). Меркурій та Афіна в оточенні муз.

Фреска на стелі зали королеви у Версальському палаці.

У лівій руці музи Астрономії — небесний глобус, а в правій під пахвою — планшети з геометричними рисунками, зокрема, до теореми Піфагора

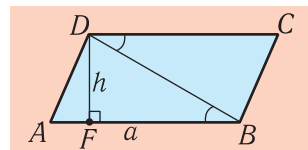


Рис. 4.29

Площа трапеції

Нехай маємо трапецію $ABCD$ з основами $AB = a$ і $DC = b$ та висотою $CN = h$ (рис. 4.30). Діагональ AC розбиває її на два трикутники з висотами CN і AM , що дорівнюють висоті трапеції. Тому для площі S трапеції маємо:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h + \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Отже, *площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.*

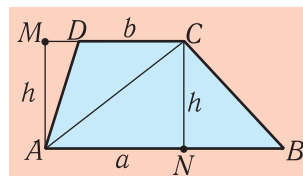


Рис. 4.30



Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що площа чотирикутника із взаємно перпендикулярними діагоналями дорівнює половині добутку цих діагоналей.

Розв'язання. Нехай маємо чотирикутник $ABCD$, діагоналі AC і BD якого взаємно перпендикулярні. Можливі два суттєво відмінних один від одного випадки: або точка O перетину прямих AC і BD лежить усередині чотирикутника (рис. 4.31, а) (зокрема, це характерно для ромба (рис. 4.32)), або — ззовні нього (рис. 4.31, б). У першому випадку чотирикутник опуклий, у другому — неопуклий.

У першому випадку площа S даного чотирикутника складається з площ трикутників ABC і ADC , що мають спільну основу AC і відповідно висоти DO і BO . Тому

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot DO = \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot (BO + DO) = \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot BD. \end{aligned}$$

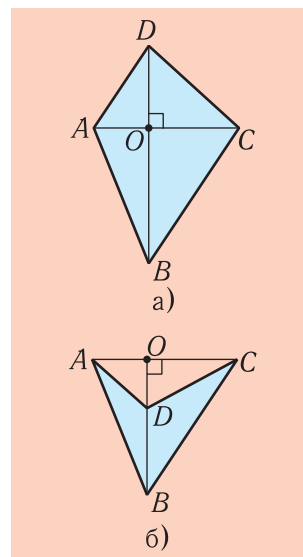


Рис. 4.31

У другому випадку шукана площа S дорівнює різниці площ трикутників ABC і ADC . Тому

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BO - \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC \cdot (BO - DO) = \\ = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Отже, в обох випадках площа чотирикутника із взаємно перпендикулярними діагоналями дорівнює половині добутку діагоналей. Твердження задачі доведене.

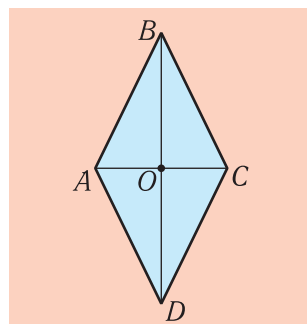


Рис. 4.32

Наслідок.

Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей.



ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

18.6. Побудова рівновеликих багатокутників

Маючи формулу для площі трикутника, можна визначити площу будь-якого багатокутника, розбивши його на трикутники і додавши їхні площі. Проте застосовуються й інші способи для визначення площ багатокутників. Один із них полягає у перетворенні багатокутника у простіший рівновеликий багатокутник.

Із формул $S = ab$ та $S = \frac{1}{2}ah$ для площ прямокутника і трикутника випливає, що трикутник з основою a і висотою h рівновеликий прямокутнику з вимірами $\frac{1}{2}a$ та h або прямокутнику з вимірами a та $\frac{1}{2}h$ (рис. 4.33).

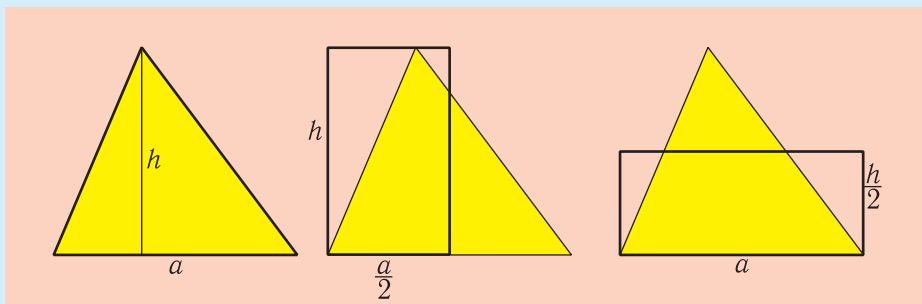


Рис. 4.33

З іншого боку, з формули $S = \frac{1}{2}ah$ для площі трикутника випливає, що всі трикутники, які мають спільну основу a і рівні висоти h , рівновеликі (рис. 4.34). Вершини цих трикутників, які протилежні спільній основі a , знаходяться на однаковій відстані h від прямої l , що містить цю основу. Якщо брати їх лише з одного боку від прямої l , то вони заповнять пряму m , паралельну прямій l .

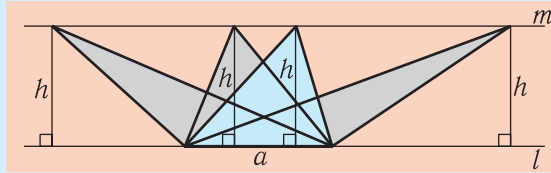


Рис. 4.34

На підставі цієї властивості будь-який багатокутник за допомогою простих побудов легко перетворити на рівновеликий йому багатокутник із меншою на одиницю кількістю сторін, а після низки таких перетворень — і на рівновеликий трикутник. Трикутник же, як зазначено вище, легко перетворюється на рівновеликий прямокутник. У підсумку виходить, що будь-який багатокутник за допомогою геометричних побудов можна перетворити на рівновеликий йому прямокутник.

Проілюструємо цю стратегію двома прикладами.

Приклад 1. Нехай маємо який-небудь опуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 4.35, а). Проведемо у ньому діагональ AC , а потім через вершину D — пряму DD_1 , паралельну прямій AC . Нехай D_1 — точка перетину цієї прямої з прямою BC . Трикутники ADC і AD_1C мають спільну основу AC і рівні висоти DM і D_1N . Отже, вони рівновеликі. Тому чотирикутник $ABCD$ рівновеликий двом трикутникам ABC і AD_1C , які утворюють один трикутник ABD_1 . Виходить, що чотирикутник $ABCD$ рівновеликий трикутнику ABD_1 . Далі цей трикутник легко перетворюється на рівновеликий йому прямокутник $APQL$ (рис. 4.35, б), у якому сторона AP перпендикулярна до BD_1 , а сторона $PQ = \frac{1}{2}BD_1$.

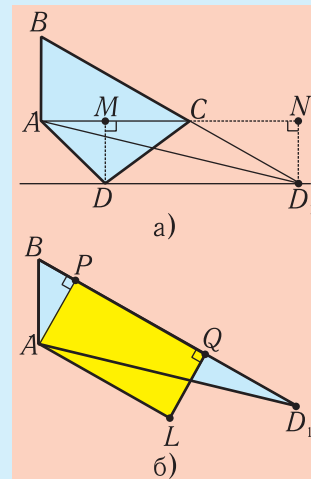


Рис. 4.35

Приклад 2. Нехай маємо який-небудь неопуклий п'ятикутника $ABCDE$ з неопуклим кутом при вершині D (рис. 4.36). Проведемо у ньому діагональ CE , а через вершину D — пряму, паралельну цій діагоналі. Нехай D_1 — точка перетину проведеної прямої зі стороною AE .

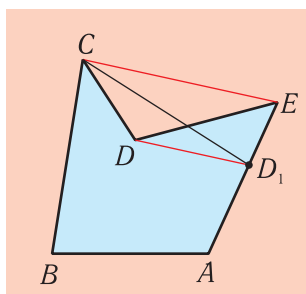


Рис. 4.36

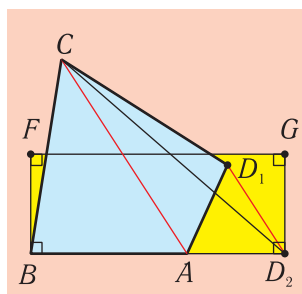


Рис. 4.37

Оскільки трикутники CDE і CD_1E — рівновеликі, то п'ятикутник $ABCDE$ рівновеликий чотирикутнику $ABCD_1$, тому що обидві ці фігури одержуються із чотирикутника $ABCE$ вилученням рівновеликих трикутників.

Зі свого боку, одержаний чотирикутник $ABCD_1$ можна перетворити на рівновеликий йому трикутник BCD_2 (пряма D_1D_2 проведена паралельно AC , тому трикутник ACD_1 рівновеликий трикутнику ACD_2), а той — на рівновеликий прямокутник $BFGD_2$ (рис. 4.37). У результаті п'ятикутник $ABCDE$ перетвориться на рівновеликий прямокутник $BFGD_2$.

У кінці п. 13.1 було описано спосіб перетворення прямокутника на рівновеликий квадрат. Разом із зазначеним у цьому пункті, це дає стратегію для так званої квадратури багатокутника, тобто для перетворення багатокутника на рівновеликий квадрат.

18.7. Вираження площі трикутника через його сторони

В реальних обчисленнях площ трикутних ділянок формула $S = \frac{1}{2}ah$ застосовується рідко, оскільки це потребує додаткових побудов для визначення висоти. У зв'язку з цим там, де не вимагається великої точності, здавна користувалися наближеною формулою $S \approx \frac{1}{2}ab$, у якій a і b — ті сторони трикутника, які утворюють кут, що найменше відхиляється від прямого. Як же діяти тоді, коли результат повинен бути точним, а всі кути трикутника далекі від прямого? — Відповідь на це запитання була відома вже античним ученим.

Зокрема, Архімед у III ст. до н. е. знав точну формулу для обчислення площі трикутника за його сторонами. Через три століття цю формулу серед інших навів у своїй «Метриці» Герон Александрійський (зі знаменитої Єгипетської Александрії, в якій раніше працював великий математик Евклід, а трохи згодом відомий астроном Птолемей). У зв'язку з цим її називають *формулою Герона*.

Виводиться формула Герона непросто, але цілком посильно для сучасного учня. Основою для виведення є простіша формула — для площі трикутника через периметр і радіус вписаного кола.

Формула для площі трикутника через периметр і радіус вписаного кола

Нехай O — центр кола, вписаного у заданий трикутник ABC , r — радіус цього кола, a, b, c — сторони трикутника (рис. 4.38). Сполучивши точку O відрізками з вершинами A, B, C , дістанемо розбиття трикутника ABC на три трикутники OAB, OBC, OAC . Висотами цих трикутників будуть радіуси вписаного кола. Тому для площі трикутника ABC матимемо вираз:

$$S = \frac{1}{2}r \cdot a + \frac{1}{2}r \cdot b + \frac{1}{2}r \cdot c = \frac{1}{2}r(a + b + c). \quad (*)$$

Цей вираз спрощується, якщо півпериметр $\frac{1}{2}(a + b + c)$ позначимо через p . Тоді матимемо:

$$S = p \cdot r.$$

Отже, *площа будь-якого трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.*

З а у в а ж е н н я. Цілком аналогічно можна довести, що коли у багатокутник можна вписати коло, то площа цього багатокутника дорівнює добутку його півпериметра p на радіус вписаного кола.

Справді, наприклад, для описаного п'ятикутника (рис. 4.39) маємо:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}d \cdot r + \frac{1}{2}e \cdot r = \\ &= \frac{1}{2}r(a + b + c + d + e) = \frac{1}{2}pr. \end{aligned}$$

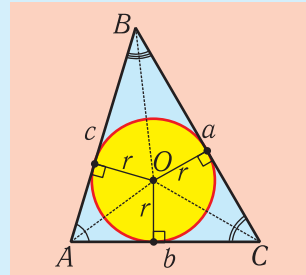


Рис. 4.38

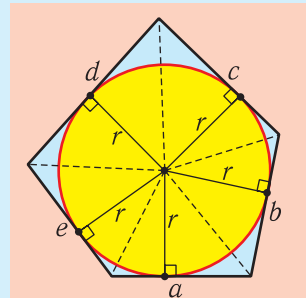


Рис. 4.39

Формула Герона

Основна ідея для виведення формули Герона полягає у тому, щоб виразити через сторони трикутника радіус вписаного у нього кола, а потім це вираження підставити у формулу (*).

Окрім вписаного у даний трикутник ABC кола (із центром O і радіусом r) побудуємо одне з так званих ззовні вписаних кіл (із центром Q і радіусом R), яке до-

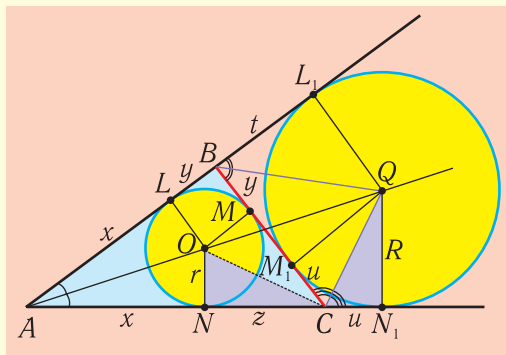


Рис. 4.40

тикається до сторони BC трикутника та до продовжень двох інших його сторін AB і AC (рис. 4.40). Існування зовні вписаного кола доводиться аналогічно до того, як і для вписаного кола: його центром є спільна точка бісектриси внутрішнього кута A та бісектрис BQ та CQ зовнішніх кутів при вершинах B і C .

Нехай L, M, N — точки дотику вписаного кола, L_1, M_1, N_1 — точки дотику зовні вписаного кола. Між відрізками, на які ці точки розбивають сторони трикутника та їхні продовження, існують

цілком певні співвідношення (інколи їх використовують і при розв'язуванні інших геометричних задач). Вони виводяться з того, що відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

Для виведення позначимо: $AL = AN = x$, $BL = BM = y$, $CM = CN = z$, $BM_1 = BL_1 = t$, $CM_1 = CN_1 = u$. Тоді на основі властивості дотичних матимемо низку рівностей, які ми об'єднаємо у дві системи:

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ x + z = b; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} t + u + a, \\ c + t = b + u. \end{cases} \quad (2)$$

Якщо відніmemo почленно від першої рівності системи (1) другу, то одержимо: $x - z = c - b$. А якщо тепер цю рівність відніmemo від третьої рівності, то матимемо: $2z = a + b - c$. Отже,

$$z = \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c - 2c}{2} = p - c.$$

Аналогічно знайдемо, що $x = p - a$, $y = p - b$.

Якщо ж від першої рівності системи (2) відніmemo другу рівність цієї системи, то одержимо:

$$\begin{aligned} u - c &= a - b - u; \quad 2u = a - b + c; \\ u &= \frac{a - b + c}{2} = \frac{a + b + c - 2b}{2} = p - b. \end{aligned}$$

(Цікаво зауважити, що $AN_1 = AC + CN_1 = b + p - b = p$. Так само $AL_1 = p$). Тепер уже все підготовлено для безпосередніх обчислень.

З подібності прямокутних трикутників ANO та AN_1Q (вони мають спільний гострий кут A) маємо: $\frac{QN_1}{ON} = \frac{AN_1}{AN}$. Звідси

$$\frac{R}{r} = \frac{p}{p-a}. \quad (3)$$

Подібними також є прямокутні трикутники CN_1Q та ONC . Це випливає з того, що $\angle QCN_1 = \frac{1}{2} \angle BCN_1 = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACB = 90^\circ - \angle OCN$ і тому $\angle QCN_1 = \angle CON$. З подібності цих трикутників маємо: $\frac{NC}{N_1Q} = \frac{ON}{CN_1}$. Звідси

$$\frac{p-c}{R} = \frac{r}{p-b}. \quad (4)$$

Перемноживши рівності (3) і (4), одержимо:

$$\frac{p-c}{r} = \frac{pr}{(p-a)(p-b)}.$$

Звідси:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Підставивши, нарешті, знайдене значення для r у формулу $S = p \cdot r$, одержимо шукану *формулу Герона*:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Приклад. Нехай сторони трикутника дорівнюють: $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. Тоді його півпериметр $p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21$ (см). Отже, для площі S за формулою Герона маємо:

$$S = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{(3 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 4) \cdot 7 \cdot (3 \cdot 2)} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 7^2} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Зауваження. Трикутники з цілочисельними довжинами сторін і цілочисельним значенням площі називаються *героновими трикутниками*. Як щойно з'ясовано, трикутник зі сторонами 13, 14 і 15 є героновим. Геронових трикутників безліч. Зокрема, окрім згаданого, такими є трикутники зі сторонами 4, 13, 15 та 8, 29, 35.

Площа трикутника через його сторони й радіус описаного кола

При розв'язуванні геометричних задач інколи дуже зручно використовувати формулу для площі трикутника, у яку входить радіус описаного кола. Зокрема,

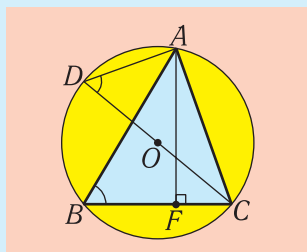


Рис. 4.41

застосовуючи цю формулу разом з формулою Герона, можна легко визначити радіус описаного кола через сторони трикутника.

Нехай задано трикутник ABC зі сторонами a, b, c . Опишемо навколо нього коло, нехай R — радіус цього кола. Проведемо через вершину C діаметр кола CD , а з вершини A — висоту трикутника AF (рис. 4.41). Тоді $\triangle AFB \sim \triangle CAD$ (ці трикутники прямокутні і мають рівні гострі кути). Звідси $\frac{CA}{AF} = \frac{CD}{AB}$. Отже, $CA \cdot AB = AF \cdot CD$.

Помножимо обидві частини останньої рівності на BC :

$$CA \cdot AB \cdot BC = AF \cdot BC \cdot CD,$$

а далі врахуємо, що добуток $AF \cdot BC$ дорівнює подвійній площі $2S$ трикутника, а $CD = 2R$:

$$abc = 2S \cdot 2R.$$

Звідси остаточно одержуємо:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

18.8. Застосування площ при розв'язуванні геометричних задач

Оскільки площі рівних фігур рівні, то величина площі однозначно визначається лінійними і кутовими розмірами фігури. На прикладі трикутника й ромба ми вже бачили, що для обчислення площ існують різні формули. Площу фігури можна визначити також як суму площ її складових. Усе це створює підстави для застосування площ як своєрідного посередника для вираження невідомих величин через відомі. А саме: виразивши площу фігури різними способами, тобто через різні її елементи, та прирівнявши одержані результати, ми дістанемо певне співвідношення між усіма цими елементами.

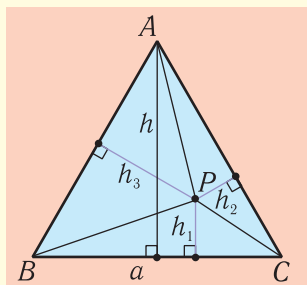


Рис. 4.42

Розглянемо два приклади.

Задача 1.

Довести, що сума відстаней від довільної точки, узятої всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.

Розв'язання. Нехай ABC — заданий трикутник, a — його сторона, h — висота, P — яка-небудь точка усередині трикутника (рис. 4.42). Проведемо відрізки PA, PB, PC . Тоді відстані від точки P до сторін трикут-

ника ABC дорівнюватимуть висотам h_1, h_2, h_3 утворених трикутників PBC, PAC і PAB . Оскільки сума площ цих трикутників дорівнює площі трикутника ABC , то з цього одержуємо співвідношення:

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Помноживши обидві його частини на 2 та поділивши на a , матимемо:

$$h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

Твердження задачі доведено.

Задача 2.

Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Визначити радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання. Знайдемо площу S даного трикутника за формулою Герона. Для півпериметра маємо:

$$p = \frac{1}{2}(4 + 13 + 15) = 16 \text{ (см)}.$$

Тому:

$$S = \sqrt{16 \cdot (16 - 4) \cdot (16 - 13) \cdot (16 - 15)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

З іншого боку, для площі трикутника існує формула:

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де a, b, c — його сторони, R — радіус описаного кола. Прирівнюючи результати, одержані за двома цими формулами, матимемо:

$$24 = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot R}.$$

Звідси $R = 8,125$ см.

Відповідь. 8,125 см.

Принципово інший спосіб застосування площ ґрунтується на такому очевидному факті: якщо трикутники мають рівні висоти, то відношення їхніх площ дорівнює відношенню сторін, до яких проведені ці висоти.

Зокрема, відрізок AK , який виходить з вершини A трикутника ABC і закінчується на основі BC (рис. 4.43), ділить цей трикутник на дві частини, відношення площ яких дорівнює відношенню відрізків основи:

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle AKC}} = \frac{BK}{KC}.$$

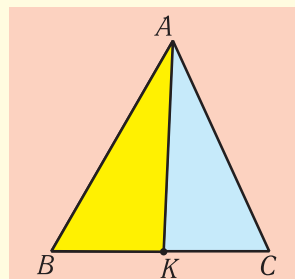


Рис. 4.43

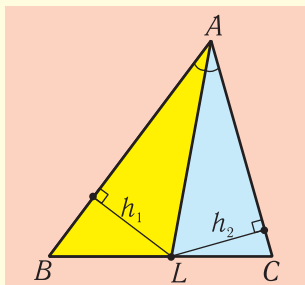


Рис. 4.44

Продемонструємо спочатку застосування цієї властивості на доведенні двох відомих уже нам теорем — про властивість бісектриси трикутника і про точку перетину його медіан.

Нехай AL — бісектриса у трикутнику ABC ; h_1 , h_2 — перпендикуляри, проведені з точки L до сторін кута A (рис. 4.44). Відомо, що $h_1 = h_2$. Ці перпендикуляри є висотами трикутників ABL та ACL . Тому, як щойно зазначено, відношення площ цих трикутників дорівнює $\frac{AB}{AC}$.

З іншого боку, ті самі трикутники ABL та ACL мають спільну висоту, що виходить з точки A . Тому відношення їхніх площ дорівнює $\frac{BL}{LC}$.

Отже,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC},$$

що й треба було довести.

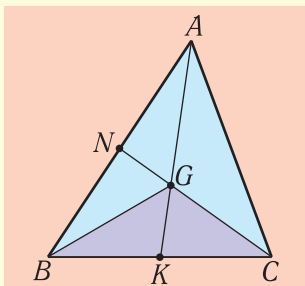


Рис. 4.45

Нехай тепер у трикутнику ABC проведено дві медіани AK та CN , G — точка їхнього перетину (рис. 4.45). Як нам уже відомо, доведення теореми про точку перетину медіан трикутника можна звести до обґрунтування пропорції:

$$CG : GN = 2 : 1.$$

Оскільки K — середина BC , то:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABK} &= S_{\triangle ACK}, \\ S_{\triangle GBK} &= S_{\triangle GKC}. \end{aligned}$$

Віднявши почленно ці рівності одну від одної, дістанемо:

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ACG}. \quad (*)$$

З іншого боку, відрізок GN ділить площу трикутника ABG навпіл. Отже, площа однієї його частини ANG удвічі менша, ніж площа трикутника AGC . А оскільки трикутники ANG і AGC мають спільну висоту, проведену з вершини A , то звідси випливає, що $NG : GC = 1 : 2$, що й треба було довести.

Із теореми про перетин медіан трикутника легко вивести такий наслідок. Нехай точки K і N ділять сторони BC і AB трикутника ABC навпіл, а G — точка перетину відрізків AK і CN (рис. 4.46). Тоді відрізок

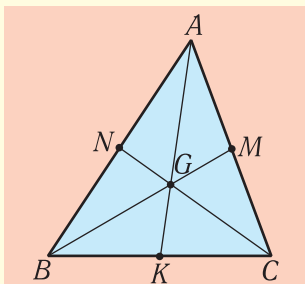


Рис. 4.46

BM , проведений із третьої вершини B через точку G , перетне навпіл протилежну сторону AC .

У свою чергу цей наслідок веде до такого природного запитання: а якщо точки K і N ділитимуть сторони BC і AB не навпіл, а в довільних інших заданих відношеннях, то як тоді визначиться відношення, у якому відрізок AC поділить точка M ?

Відповідь на це запитання дає теорема Чеви, названа на честь італійського математика Джованні Чеви (1648 – 1734), який опублікував її у 1678 р.



Джованні Чева

Теорема

(Чеви).

Якщо через точку G всередині трикутника ABC провести три відрізки AK , BM і CN з кінцями K , M , N на сторонах трикутника (рис. 4.47), то:

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1. \quad (*)$$

Навпаки, якщо для трьох точок K , M , N , узятих на сторонах трикутника ABC , виконується рівність $(*)$, то відрізки AK , BM і CN перетинаються в одній точці.

Доведення. Позначимо $\frac{BK}{KC}$ через k . Тоді матимемо:

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle ACK}} = k; \quad \frac{S_{\triangle GBK}}{S_{\triangle GKC}} = k.$$

Звідси:

$$S_{\triangle ABK} - S_{\triangle GBK} = k (S_{\triangle ACK} - S_{\triangle GKC}).$$

Отже,

$$S_{\triangle ABG} = k \cdot S_{\triangle ACG},$$

або:

$$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ACG}} = \frac{BK}{KC}. \quad (1)$$

Аналогічно знаходимо:

$$\frac{S_{\triangle BCG}}{S_{\triangle BAG}} = \frac{CM}{MA}; \quad \frac{S_{\triangle CAG}}{S_{\triangle CBG}} = \frac{AN}{NB}. \quad (2)$$

Перемноживши почленно рівності (1) і (2), дістанемо потрібну рівність $(*)$.

Нехай тепер виконується рівність $(*)$. Припустимо, що відрізки AK , BM , CN не перетинаються в одній точці. Проведемо тоді відрізок CN' з кінцем N' на стороні

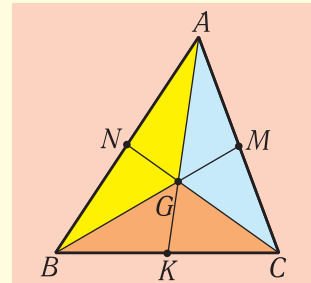


Рис. 4.47

AB через точку G перетину відрізків AK і BM . Відповідно до уже доведеного, справджуватиметься рівність:

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN'}{N'B} = 1. \quad (**)$$

Поділимо тоді рівність (*) почленно на рівність (**). Дістанемо:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AN'}{N'B}.$$

А це означає, що точки N і N' ділять відрізок AB в одному й тому самому відношенні, беручи від кінця A . Отже, ці точки збігаються. Теорему доведено повністю.

Зокрема, якщо $\frac{BK}{KC} = \frac{CM}{MA} = 1$, тобто, якщо AK і BM — медіани трикутника ABC , то з теореми Чеви випливає, що й $\frac{AN}{NB} = 1$, тобто, що CN — теж медіана цього трикутника.

Якщо ж, наприклад, $\frac{BK}{KC} = \frac{3}{2}$, $\frac{CM}{MA} = \frac{4}{5}$, то $\frac{AN}{NB} = 1 : \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{5}{6}$.



Перевірте себе

1. Як утворюються одиниці для вимірювання площ? Які назви мають найпоширеніші з них? Як з'ясовуються співвідношення між квадратними одиницями?
2. Які принципи покладаються в основу вимірювання площ? Які основні властивості площ впливають із цих принципів?
3. Опишіть в основних рисах спосіб виведення формули для площі прямокутника. Чи для будь-яких вимірів прямокутника вона істинна?
4. Як можна охарактеризувати загальну стратегію для визначення площ багатокутників?
5. Опишіть способи виведення формул для площ прямокутного і довільного трикутників.
6. За якою формулою обчислюється площа трикутника?
7. За якими формулами обчислюються площі паралелограма і трапеції? Як виводяться ці формули?
8. За якою формулою можна обчислити площу ромба?



Вправи і задачі

Площа прямокутника і квадрата

- 24°.** Периметр квадрата дорівнює 32 см. Чому дорівнює його площа?
- 25°.** Площа квадрата дорівнює 49 м^2 . Чому дорівнює його периметр?
- 26°.** Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Сторона квадрата 12 см, а одна зі сторін прямокутника — 9 см. Чому дорівнює інша сторона прямокутника?
- 27°.** Два прямокутники мають спільну сторону і рівні площі. Чи можна стверджувати, що вони суміщаються один з одним?
- 28°.** Площа квадрата ($y \text{ м}^2$) виражається тим самим числом, що й периметр ($y \text{ м}$). Чому дорівнює сторона цього квадрата?
- 29°.** Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону: а) подвоїти; б) потроїти; в) зменшити удвічі?
- 30°.** Як зміниться площа прямокутника, якщо: а) його сторони подвоїти; б) сторони утричі зменшити; в) більшу сторону збільшити в 4 рази, а меншу — зменшити в 4 рази; г) меншу сторону збільшити у 6 разів, а більшу — зменшити у 3 рази?
- 31°.** Визначте площу поверхні куба, якщо його ребро дорівнює: а) 8 см; б) 10 см; в) 1,2 см.
- 32°.** Довжина, ширина та висота прямокутного паралелепіпеда дорівнюють відповідно 12 см, 8 см і 20 см. Визначте площі бічної та повної поверхонь цього паралелепіпеда.
- 33°.** Визначте периметр квадрата, площа якого дорівнює 49 см^2 .
- 34°.** Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Чому дорівнює сторона квадрата, якщо прямокутник має розміри $25 \text{ см} \times 16 \text{ см}$?
- 35°.** Одна зі сторін прямокутника дорівнює 12 см, а його площа — 168 см^2 . Визначте іншу сторону прямокутника.
- 36°.** 1) Площа земельної ділянки дорівнює 250 а. Чому дорівнює площа цієї ділянки: а) у квадратних метрах; б) у квадратних кілометрах; в) у гектарах?
2) Площа земельної ділянки дорівнює 24 га. Чому дорівнює площа цієї ділянки: а) у квадратних кілометрах; б) у квадратних метрах; в) в арах?
3) Площа земельної ділянки дорівнює $350\,000 \text{ м}^2$. Виразіть цю площу: а) у квадратних кілометрах; б) в арах; в) у гектарах.
- 37°.** Яка одиниця вимірювання площ більша — 1 ар чи 1 сотка?
- 38°.** Як ви гадаєте, площа футбольного поля менша від 1 га, чи більша?

- 39°. Як потрібно змінити довжину однієї сторони прямокутника, залишаючи іншу без змін, аби площа прямокутника збільшилася учетверо? Як для цього можна змінювати обидві сторони?
- 40°. Доведіть, що коли два прямокутники мають по рівній стороні, то відношення їхніх площ дорівнює відношенню інших сторін.
41. Прямокутну ділянку землі засівають травою. Розміри ділянки $22\text{ м} \times 28\text{ м}$. Скільки знадобиться пакетів насіння, якщо вмістом одного пакета можна засіяти 70 м^2 ?
42. Довжина кімнати $5,4\text{ м}$, а ширина — $4,2\text{ м}$. У кімнаті два вікна завширшки $1,2\text{ м}$ і заввишки $1,6\text{ м}$. Освітленість кімнати вважається достатньою, якщо площа вікон (світлова площа) становить 20% від площі підлоги. Чи достатньо є освітленість цієї кімнати?
43. Відомо, що периметр прямокутника, кожна зі сторін якого вимірюється цілим числом сантиметрів, дорівнює 12 см . Визначте можливу площу цього прямокутника. В якому випадку площа прямокутника буде найбільшою?
44. Дві земельні ділянки обгородили парканом однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 180 м і 140 м , друга — форму квадрата. Яка із цих ділянок має більшу площу і на скільки?
45. Скільки потрібно кахельних плиток розміром $10\text{ см} \times 10\text{ см}$, аби викласти ними прямокутну ділянку стіни розміром $4\text{ м } 70\text{ см} \times 2\text{ м } 10\text{ см}$?
46. Визначте сторони прямокутника, якщо вони відносяться, як $7 : 4$, а площа прямокутника дорівнює 112 см^2 .
47. Одна зі сторін прямокутника на 4 см більша за іншу, а його площа дорівнює 21 см^2 . Визначте сторони прямокутника.
48. Відношення площ двох квадратів дорівнює 36. Чому дорівнює відношення їхніх периметрів?
49. Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 3. Чому дорівнює відношення їхніх площ?
50. Площа прямокутника дорівнює 48 см^2 , а одна зі сторін — 8 см . Пряма розбиває його на два рівних прямокутники. Визначте периметри цих прямокутників.
51. Сторони першого прямокутника дорівнюють 20 см і 60 см , площа другого прямокутника дорівнює половині площі першого, а одна з його сторін дорівнює 50 см . Визначте периметр другого прямокутника.
52. Площі двох прямокутників, які мають по одній рівній стороні, відносяться, як $9 : 8$. Різниця інших сторін цих прямокутників дорівнює 2 м . Визначте нерівні сторони обох прямокутників.
53. Навколо будинку з прямокутним фундаментом, довжина якого 40 м , а ширина — 30 м , поставили прямокутний паркан на відстані 10 м від кожної сторони фундаменту. Визначте площу двору і довжину паркана.

54. Визначте найменшу площу гаража для двох автомобілів, які мають габарити $4,5 \text{ м} \times 1,8 \text{ м}$, аби між автомобілями і стінками, а також між самими автомобілями був прохід завширшки щонайменше $0,5 \text{ м}$.
55. Визначте площу ділянки, план якої зображено на рис. 4.48. Всі розміри подано у метрах.
56. Запишіть формули, за якими, знаючи a , b , c і d , можна обчислити площі фігур, зображених на рис. 4.49, а)–в).

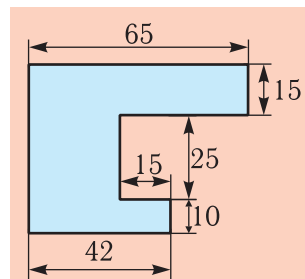


Рис. 4.48

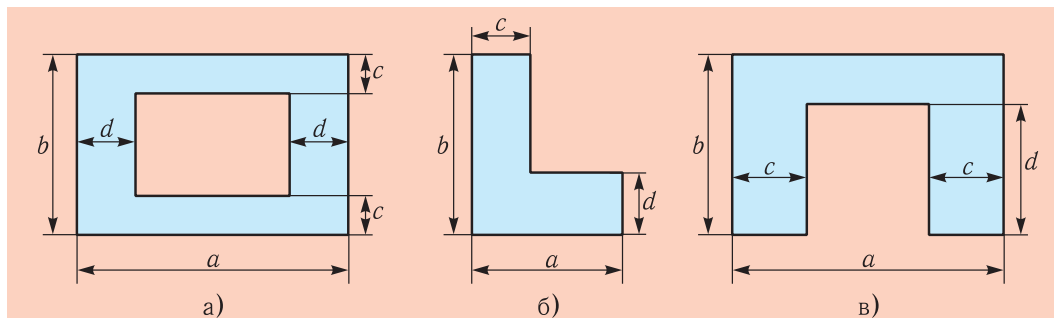


Рис. 4.49

57. Визначте площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см , а діагональ — 10 см .
58. Діагональ прямокутника дорівнює 20 см , а різниця його сторін — 4 см . Визначте площу прямокутника.
59. Визначте площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 13 см , а периметр 34 см .
60. Точка перетину діагоналей прямокутника віддалена від однієї зі сторін на 2 см далі, ніж від іншої. Периметр прямокутника дорівнює 64 см . Визначте його площу.
- 61*. Площі фігур, зображених на рис. 4.50, а, б) (розміри подано у міліметрах), дорівнюють: а) 550 мм^2 ; б) $1\,300 \text{ мм}^2$. Визначте x .

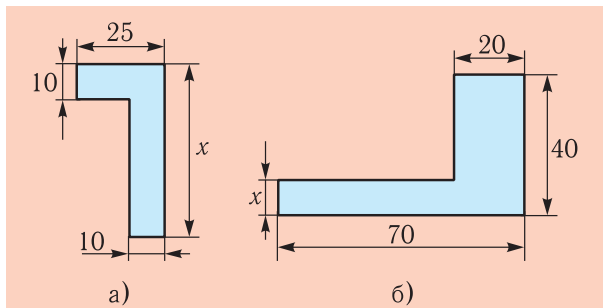


Рис. 4.50

- 62*.** За допомогою рис. 4.51, а, б) можна легко вивести алгебраїчні формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ та $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для додатних чисел a і b . Чи зможете ви це зробити?

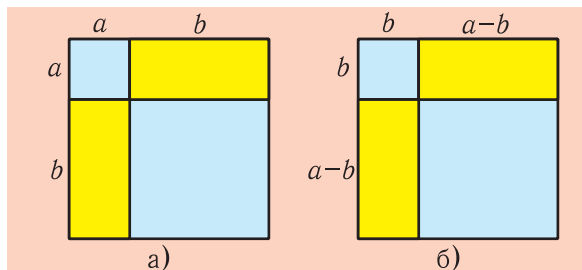


Рис. 4.51

- 63*.** Визначте сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 22 м, а площа — 30 м^2 .
- 64*.** Визначте діагональ прямокутника, периметр якого дорівнює 28 см, а площа — 48 см^2 .
- 65*.** Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить сторону BC навпіл. Периметр прямокутника дорівнює 36 см. Визначте його площу.
- 66*.** Бісектриса AL кута A прямокутника $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки $BL = 5 \text{ см}$ і $LC = 7 \text{ см}$. Визначте площу прямокутника.
- 67*.** Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, ділить діагональ на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Визначте площу прямокутника.
- 68*.** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ на відрізки завдовжки 3 см і 4 см. Визначте площу прямокутника.
- 69*.** Визначте, у скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного у це коло.
- 70*.** Чи зможете ви розрізати квадрат на три прямокутники з рівними площами так, щоб не всі прямокутники мали однакові виміри?
- 71*.** Земельна ділянка, що має форму прямокутника $ABCD$ (рис. 4.52), ділиться межею MN на два менші прямокутники. Кожний квадратний метр землі прямокутника $ABNM$ коштує 8 умовних одиниць, а кожний квадратний метр землі прямокутника $MNCD$ — 5 умовних одиниць. На якій висоті AP потрібно провести пряму PQ , яка б розбивала ділянку $ABCD$ на дві прямокутні ділянки однакової вартості?

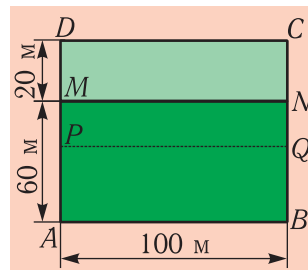


Рис. 4.52

Площа трикутника і багатокутника

72°. Як зміниться площа трикутника, якщо:

- а) основу збільшити у п'ятеро;
- б) висоту зменшити утричі;
- в) основу потроїти, а висоту зменшити утричі?

73°. Як знайти невідомий катет прямокутного трикутника, якщо відома його площа та інший катет?

74°. Основа трикутника дорівнює 10 см, висота — 4 см. Основа іншого трикутника дорівнює 20 см. Якою має бути його висота, проведена до цієї основи, аби трикутники були рівновеликими?

75°. Накресліть прямокутник і проведіть усі відрізки, що сполучають середини його сторін. Доведіть, що цими відрізками прямокутник розбивається на 8 рівновеликих частин.

76°. План майданчика побудовано на аркуші паперу в «клітинку». Визначте його площу в кожному з випадків, зображеному на рис. 4.53, якщо стороні клітинки відповідає відстань 5 м на місцевості.

77°. Точки M , N — середини відповідно катетів AC і BC прямокутного трикутника ABC (рис. 4.54), $AC = 3$ см, $BC = 8$ см. Визначте площу трикутників MCN , MNB , ABN .

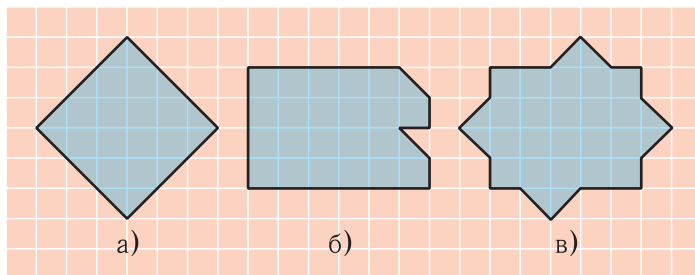


Рис. 4.53

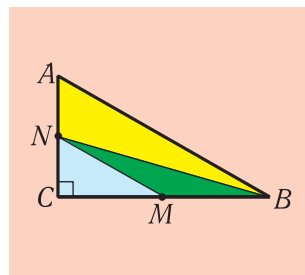


Рис. 4.54

78°. Точка L — середина сторони DC прямокутника $ABCD$ зі сторонами 6 см і 8 см. Визначте площу трикутника ALB .

79°. Точка K належить стороні CD квадрата $ABCD$, яка дорівнює 6 см. Визначте площу трикутника KAB .

80°. Площа прямокутного трикутника дорівнює 40 см^2 , а його гіпотенуза — 16 см. Чи можна за цими даними визначити висоту трикутника, проведenu до гіпотенузи?

81°. Визначте площу прямокутного трикутника, один із катетів якого дорівнює 5 см, а гіпотенуза — 13 см.

82. Визначте площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 20 см, а бічна сторона — 26 см.

83. Визначте площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 8 см.
84. Задано прямокутник $ABCD$, O — точка перетину відрізків, які сполучають середини протилежних сторін (рис. 4.55). Площа прямокутника дорівнює S . Визначте площі кожного з трикутників OAB , OBC , OCD та OAD .
85. Основа першого трикутника дорівнює 4 см, а основа другого — 7 см. Яким має бути відношення висот цих трикутників, аби площа першого з них була удвічі меншою від площі другого?
86. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 11 см, точки K , L , M розміщені на його сторонах так, як показано на рис. 4.56, і при цьому $AK = 3$ см, $BL = 5$ см, $CM = 4$ см. Визначте площу чотирикутника $DKLM$.
87. Накресліть які-небудь три різні трикутники з однаковими висотами. Як накреслити один рівновеликий їм трикутник?
88. На рисунку 4.57, а-є) знайдіть рівновеликі трикутники.

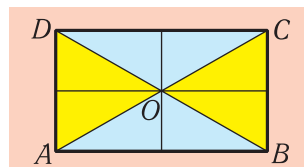


Рис. 4.55

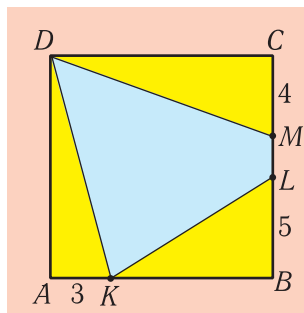


Рис. 4.56

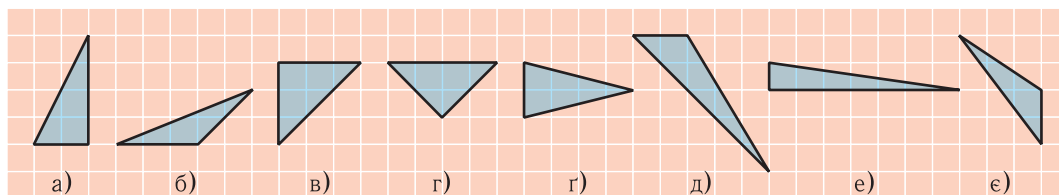


Рис. 4.57

89. Визначте площу, яку займає шкільний сад $ABDC$ і город BPD (рис. 4.58), провівши необхідні вимірювання. Масштаб плану 1 : 5 000.
90. Визначте площі фігур, зображених на рис. 4.59, а, б).
91. Площа фігури, зображеної на рис. 4.60, дорівнює 805 мм^2 . Визначте невідомий розмір x .
92. Деяку точку O , яка лежить всередині прямокутника $ABCD$, сполучили з його вершинами. Доведіть, що сума площ трикутників ABO і CDO дорівнює сумі площ трикутників BCO і DAO .
93. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Визначте висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

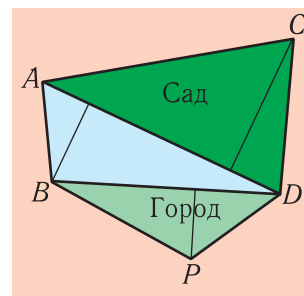


Рис. 4.58

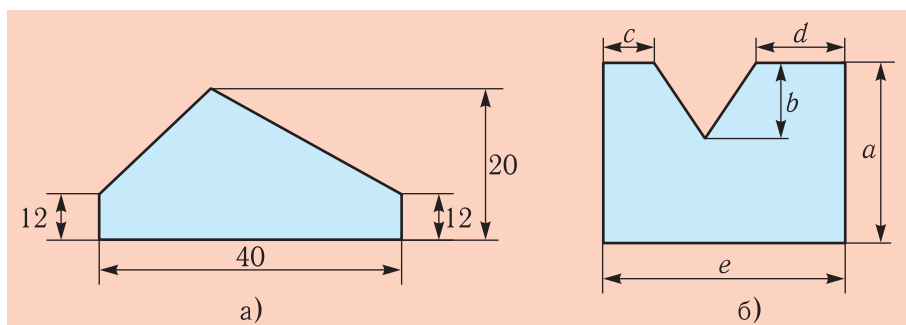


Рис. 4.59

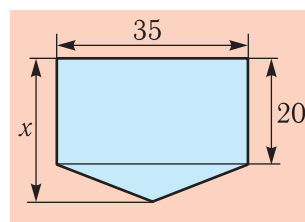


Рис. 4.60

94. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки 5 см і 20 см. Визначте площу трикутника.
95. Накресліть який-небудь трикутник, а потім через його вершину проведіть пряму, яка розбиває трикутник: а) на два рівновеликих трикутники; б) на два трикутники, площі яких відносяться, як 2 : 3.
96. Накресліть який-небудь трикутник, а потім через його вершину проведіть дві прямі, які розбивають трикутник на три рівновеликі частини.
- 97*. Відношення двох сторін трикутника дорівнює 3 : 5. Чому дорівнює відношення висот, проведених до цих сторін?
- 98*. Доведіть, що висоти трикутника обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.
- 99*. Бісектриса прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. Визначте площу трикутника.
- 100*. Точка дотику вписаного кола до гіпотенузи прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 6 см. Визначте площу трикутника.
- 101*. Бісектриса прямокутного трикутника, проведена з вершини гострого кута, ділить катет на відрізки 15 см і 17 см. Визначте площу трикутника.
- 102*. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 80 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 17 см. Визначте площу трикутника.
- 103*. Визначте площу чотирикутника, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і дорівнюють 6 см та 8 см.
- 104*. Доведіть, що усі три медіани будь-якого трикутника ділять трикутник на шість рівновеликих трикутників.

Площа паралелограма і ромба

- 105°.** У паралелограмі, площа якого дорівнює 41 см^2 , сторони дорівнюють 5 см і 10 см . Визначте висоти паралелограма.
- 106°.** Площа паралелограма дорівнює 24 см^2 . Визначте відстань між прямими, які містять його протилежні сторони, якщо ці сторони дорівнюють по 6 см .
- 107°.** Сторони паралелограма 6 см і 4 см , а одна із висот — 5 см . Визначте іншу висоту. Скільки розв'язків має задача?
- 108°.** Визначте висоту ромба, сторона якого дорівнює 16 см , а площа — 96 см^2 .
- 109°.** Накресліть два не рівних, але рівновеликих паралелограми зі спільною стороною.
- 110.** Накресліть паралелограм, площа якого дорівнює 10 см^2 , а сторони — 5 см і 3 см .
- 111.** Дві смужки завширшки 4 см і 2 см , перетинаючись, утворюють паралелограм, площа якого дорівнює 12 см^2 . Визначте сторони цього паралелограма.
- 112.** У паралелограмі $ABCD$ вершину A сполучено відрізками із серединами сторін BC і CD та з вершиною C (рис. 4.61). Доведіть, що трикутники 1, 2, 3, 4 — рівновеликі.
- 113.** Визначте площу ромба, якщо його сторона дорівнює 6 см , а один із кутів — 30° .
- 114.** Діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 14 см . Визначте площу ромба.
- 115.** Визначте діагоналі ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 3 , а площа ромба дорівнює 12 см^2 .
- 116.** Паралелограм (не прямокутник) і прямокутник мають відповідно рівні сторони. Визначте гострий кут паралелограма, якщо його площа дорівнює половині площі прямокутника.
- 117.** Визначте площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 4 см і 6 см , а кут між ними — 30° .
- 118.** Визначте площу ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см , а один із кутів — 150° .
- 119.** Діагоналі ромба дорівнюють 14 см і 48 см . Визначте його висоту.
- 120°.** Дано: $ABCD$ — паралелограм, точка E належить діагоналі BD . Проведено $KL \parallel DC$ і $MN \parallel AD$ (рис. 4.62). Доведіть, що $AKEN$ і $EMCL$ — рівновеликі паралелограми.
- 121°.** Дано паралелограм $ABCD$, точки M, N, P, Q — відповідно середини його сторін AB, BC, CD, DA (рис. 4.63). Прямі AN, CQ, DM і BP обмежують чотирикутник. Доведіть, що цей чотирикутник теж є

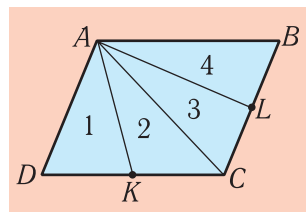


Рис. 4.61

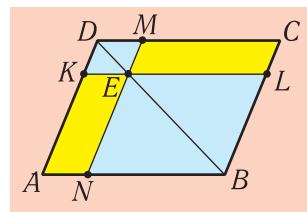


Рис. 4.62

паралелограмом і що його площа становить п'яту частину від площі даного паралелограма.

- 122°.** Висоти паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними — 30° . Визначте площу паралелограма.
- 123°.** Через вершину паралелограма проведіть прямі, які розбивають цей паралелограм на 5 рівновеликих частин.

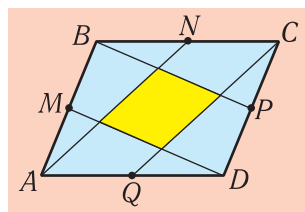


Рис. 4.63

Площа трапеції

- 124°.** Визначте площу трапеції, основи якої дорівнюють 12 см і 16 см, а висота — 15 см.
- 125°.** Визначте площу трапеції, більша основа якої дорівнює 38 см, висота — 14 см, а проекції бічних сторін на основу дорівнюють висоті трапеції.
- 126°.** Визначте площу прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 2 см і 4 см, а один із кутів — 45° .
- 127°.** Середини основ трапеції сполучені відрізком. Доведіть, що отримані при цьому дві трапеції рівновеликі.
- 128.** Доведіть, що пряма, яка проходить через середину середньої лінії трапеції і перетинає обидві основи, розбиває трапецію на дві рівновеликі частини.
- 129.** За розмірами, поданими на рис. 4.64, а, б) (лінійні розміри у сантиметрах), визначте площі трапецій.

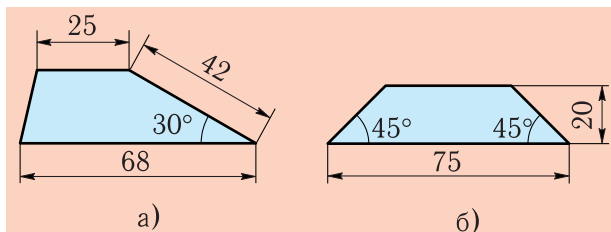


Рис. 4.64

- 130.** Площі багатокутників, зображених на рис. 4.65, а, б) (лінійні розміри у сантиметрах), дорівнюють: а) $12\,110\text{ мм}^2$; б) $3\,375\text{ мм}^2$. Визначте розмір x .
- 131.** Накресліть трапецію із взаємно перпендикулярними діагоналями. Доведіть, що площа такої трапеції дорівнює половині добутку діагоналей?
- 132.** Ділянку землі, що має форму трапеції, потрібно розбити на чотири рівновеликих частини, кожна з яких має бути трапецією. Як це можна зробити?
- 133.** Накресліть яку-небудь трапецію, а потім розбийте її прямими лініями на 3 рівновеликі частини.
- 134.** Визначте площу трапеції $CDEF$, якщо $CD \parallel EF$, $\angle F = 45^\circ$, $FE = 2CD = 5CF = 5\text{ см}$.

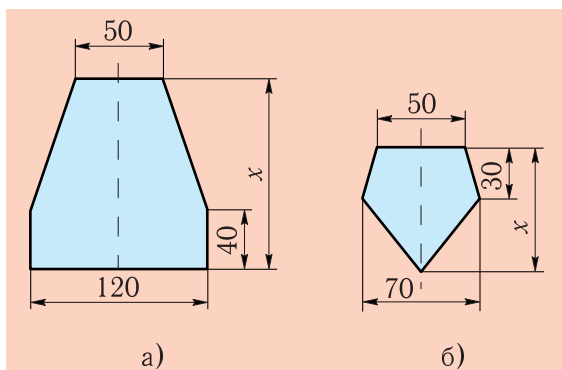


Рис. 4.65

- 135.** Визначте площу трапеції з основою 1 см і бічною стороною 3 см, якщо кути при більшій основі трапеції дорівнюють 30° і 45° .
- 136.** Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ перпендикулярна до бічної сторони BC , $AC = 4a$, $AD = 3a$. Визначте площу трапеції.
- 137.** Визначте площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 11 см, а периметр — 28 см.
- 138.** Визначте площу рівнобічної трапеції, якщо її більша основа дорівнює 22 см, бічна сторона 8,5 см, а діагональ — 19,5 см.
- 139.** Визначте площу рівнобічної трапеції, якщо вписане в неї коло точкою дотику ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 9 см.
- 140*.** Дано трапецію $ABCD$; $AB \parallel CD$; точка M належить відрізку AB , $AM = MB$; точка P належить відрізку MD , $DP = PM$; точка Q належить відрізку MC , $CQ = MQ$. Доведіть, що трикутники APD і BQC рівновеликі.
- 141*.** Дано: $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC (рис. 4.66) Точка K належить бічній стороні AB , $AK = KB$. Доведіть, що площа трикутника KCD дорівнює половині площі трапеції $ABCD$.
- 142*.** Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку однієї з бічних сторін на довжину перпендикуляра, опущеного на неї із середини іншої бічної сторони.
- 143*.** Визначте площу трапеції, основи якої дорівнюють 20 см і 60 см, а бічні сторони — 13 см і 37 см.
- 144*.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що коли сторони AD і BC паралельні, то трикутники AOB і COD рівновеликі. Доведіть також, що коли трикутники AOB і COD рівновеликі, то сторони AD і BC — паралельні.

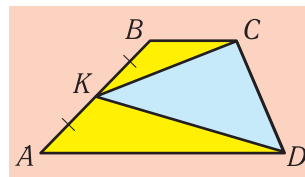
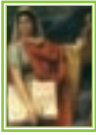


Рис. 4.66



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Евклідове доведення теореми Піфагора

У славнозвісних «Началах геометрії» Евкліда подається дуже дотепне доведення теореми Піфагора, що ґрунтується на ідеї перетворення фігур у рівновеликі їм фігури. Можливо, саме це доведення було відкрите самим Піфагором або знайдене у його школі.

В основі доведення Евкліда лежить такий простий факт: площі прямокутника й трикутника, що мають спільну основу й рівні висоти, відносяться, як 2 : 1 (рис. 4.67). Це елементарно випливає з формул для обчислення площ цих фігур.

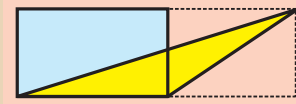


Рис. 4.67

Отже, нехай ABC — заданий прямокутний трикутник з прямим кутом C , а $ACHF$, $BCGK$, $ABED$ — квадрати, побудовані на його сторонах (рис. 4.68). Проведемо відрізок CL перпендикулярно до DE (нехай M — точка перетину цього відрізка з гіпотенузою AB), а потім — відрізки AK , BF , CD і CE . За першою ознакою $\triangle ABF = \triangle ADC$ (у них $AB = AD$ — як сторони квадрата $ABED$, $AF = AC$ — як сторони квадрата $ACHF$, $\angle FAB = \angle CAD$ — оскільки кожен з них дорівнює сумі прямого кута і кута CAB). З аналогічних причин $\triangle BAK = \triangle BEC$. Але площа $\triangle ABF$ дорівнює половині площі квадрата $ACHF$, а площа $\triangle ADC$ — половині площі прямокутника $ADLM$. А оскільки рівні трикутники мають і рівні площі, то рівні площі мають і квадрат $ACHF$ та прямокутник $ADLM$. Так само з'ясуємо, що рівні площі мають квадрат $BCGK$ та прямокутник $MBEL$. Якщо до рівних величин додати рівні, то одержимо рівні. Тому сума площ квадратів $ACHF$ і $BCGK$, побудованих на катетах трикутника ABC , дорівнює сумі площ прямокутників $ADLM$ та $MBEL$, тобто площі квадрата, побудованого на гіпотенузі, що й треба було довести.

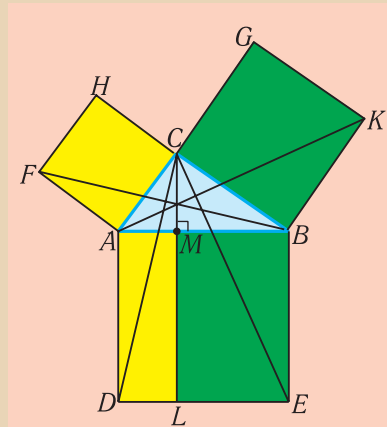


Рис. 4.68

Можливо, доведення Евкліда теоремою Піфагора дещо складніше від того, яке дійшло до нас з Індії (див. «Сторінки історії» у §13). Однак воно має й істотну перевагу, оскільки явно вказує на ті частини квадрата, побудованого на гіпотенузі, які рівновеликі кожному із квадратів, побудованих на катетах: а саме, прямокутник $ADLM$ рівновеликий квадрату $ACHF$, а прямокутник $MBEL$ — квадрату $BCGK$.



Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу IV

1. а) У багатокутнику 54 діагоналі. Визначте кількість його сторін та суму кутів.
б) У багатокутнику 77 діагоналей. Визначте кількість його сторін та суму кутів.
2. а) Визначте сторони прямокутника, якщо вони відносяться, як 3 : 8, а площа прямокутника дорівнює 96 м^2 .
б) Площа прямокутника дорівнює 84 см^2 . Визначте його сторони, якщо одна з них на 5 см більша від іншої.
3. а) Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює різниці площ двох даних квадратів.
б) Побудуйте квадрат, площа якого у п'ятеро більша від площі даного квадрата.
4. а) Визначте площу рівнобедреного трикутника, катет якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза — 17 см.
б) Визначте площу прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 10 см, а радіус описаного кола — 13 см.
5. а) Визначте площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи — 5 см.
б) Визначте площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 20 см, а основа — 32 см.
- 6*. а) Визначте площу прямокутного трикутника, у якого бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 4 см.
б) Визначте площу прямокутного трикутника, у якому бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки 8 см і 17 см.
7. а) Побудуйте рівнобедрений трикутник, рівновеликий даному трикутнику так, щоб його основа дорівнювала одній зі сторін даного трикутника.
б) Побудуйте рівнобедрений трикутник, рівновеликий даному трикутнику так, щоб його бічна сторона дорівнювала одній зі сторін даного трикутника.
- 8*. а) Визначте площу трикутника, сторони якого дорівнюють 9 см, 10 см і 8 см.
б) Визначте найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см.
9. а) Визначте площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 5 см і 8 см, а кути між ними — 120° .
б) Визначте площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 6 см і 11 см, а кут між ними — 135° .
10. а) Кути ромба відносяться, як 1 : 5, а його сторона дорівнює 6 см. Визначте площу ромба.

- б) Кути ромба відносяться, як $1 : 4$. А його висота дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Визначте площу ромба.
11. а) Визначте площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 7 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.
б) Визначте площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.
12. а) Периметр ромба дорівнює 60 см, а його діагоналі відносяться, як $3 : 4$. Визначте площу ромба.
б) Визначте площу ромба, сторона якого дорівнює 5 см, а різниця діагоналей — 2 см.
13. а) Висота ромба дорівнює 12 см, а одна з його діагоналей — 15 см. Визначте площу ромба.
б) Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки 3 см і 12 см. Визначте площу ромба.
14. а) Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а бічна сторона — 17 см. Визначте площу трапеції.
б) Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 30 см і 40 см, а її діагональ — 37 см. Визначте площу трапеції.
15. а) Визначте площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 2 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута.
б) Визначте площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 5 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута.
16. а) Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 8 см, а менша основа — 10 см. Менша діагональ трапеції є бісектрисою прямого кута. Визначте площу трапеції.
б) Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 10 см, а різниця основ — 6 см. Менша діагональ трапеції є бісектрисою прямого кута. Визначте площу трапеції.
17. а) Визначте площу трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 9 см, а кути при більшій основі — 30° і 60° .
б) Визначте площу трапеції з висотою 4 см, менша основа якої дорівнює 2 см, а кути при цій основі — 120° і 150° .
18. а) Визначте площу трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 9 см, а кути при більшій основі — 30° і 60° .
б) Визначте площу трапеції, основи якої дорівнюють 36 см і 15 см, а бічні сторони — 13 см і 20 см.
19. а) Точка дотику вписаного кола ділить більшу бічну сторону прямокутної трапеції на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Визначте площу трапеції.
б) Точка дотику вписаного кола ділить більшу бічну сторону прямокутної трапеції у відношення $4 : 9$. Менша бічна сторона трапеції дорівнює 12 см. Визначте площу трапеції.



Завдання для повторення і систематизації знань за курс геометрії 8 класу

І. Достатній рівень

1. Периметр прямокутника дорівнює p . Точка O належить цьому прямокутнику. Визначте суму відстаней від точки O до усіх сторін прямокутника.
2. Середина гіпотенузи віддалена від катетів прямокутного трикутника на відстані a і b . Визначте периметр трикутника.
3. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Визначте радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо один із відрізків, на які висота ділить гіпотенузу, дорівнює 3 см.
4. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить протилежний катет на частини, що відносяться, як $2 : \sqrt{3}$. Визначте цей гострий кут.
5. У трикутнику дві сторони дорівнюють a і b . Через середину третьої сторони проведено прямі, паралельні даним. Визначте периметр утвореного чотирикутника.
6. У паралелограмі $ABCD$ з периметром P висота BM ділить сторону AD навпіл. Визначте сторону AB , якщо периметр трикутника ABD дорівнює Q .
7. Периметр трикутника, що відтинається від паралелограма його діагоналлю, дорівнює P . Визначте довжину цієї діагоналі, якщо периметр паралелограма дорівнює Q .
8. У рівнобедреній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, кут між діагоналлю та основою становить 30° . Визначте кути трапеції.
9. Визначте периметр паралелограма, якщо бісектриса його гострого кута ділить одну зі сторін на відрізки завдовжки a і b .
10. Кінці відрізка розміщені по один бік від прямої на відстанях a і b від неї. На якій відстані від прямої знаходиться середина цього відрізка?
11. Визначте відношення основ трапеції, якщо її середня лінія ділиться діагоналями на три рівних частини.
12. $ABCD$ — прямокутник, у якому $AB = 1$, $BC = 2$. На сторонах BC та AD узято такі точки M і N , що $BMDN$ — ромб. Визначте сторону ромба.
13. Менша діагональ ромба дорівнює $\sqrt[4]{3}$, а площа — 15. Визначте величину тупого кута ромба.
14. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його діагональ на відрізки завдовжки 65 см і 156 см. Визначте сторони прямокутника.
15. У колі проведено хорду CD , перпендикулярну до діаметра AB . Точка перетину прямих AB і CD ділить діаметр на відрізки 18 см і 32 см. Визначте довжину хорди CD .
16. З точки A до кола з радіусом R проведено дві дотичні. Визначте довжину дотичної, якщо відстань між точками дотику дорівнює $2d$.
17. Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r , дотикаються одне до одного зовнішнім чином, а також дотикаються до прямої — у точках A і B . Визначте довжину відрізка AB .

18. У колі по різні боки від центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 18 см і 24 см. Відстань між хордами — 21 см. Визначте діаметр кола.
19. Відстань від бічної сторони рівнобедреного трикутника до центра описаного навколо нього кола дорівнює 12 см. Визначте радіус цього кола, якщо довжина бічної сторони трикутника дорівнює 32 см.
20. П'ять послідовних сторін описаного навколо кола шестикутника дорівнюють a , b , c , d , e . Визначте його шосту сторону.
21. Визначте площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює P , а радіус описаного кола — R .
22. Визначте площу прямокутника, одна зі сторін якого учетверо більша за іншу, а площа чисельно дорівнює периметру.
23. Визначте площу трапеції, якщо при послідовному сполученні середин її сторін утворюється квадрат, довжина сторони якого дорівнює 4 см.
24. Як зміниться площа трикутника, якщо його основу збільшити на 20%, а висоту зменшити на 20%?
25. Навколо кола з радіусом 1 см описана рівнобічна трапеція з бічною стороною завдовжки 3 см. Визначте площу трапеції.
26. Визначте площу рівностороннього трикутника за його бісектрисою l .
27. Площа квадрата, побудованого на діагоналі прямокутника, удвічі більша за площу прямокутника. Доведіть, що цей прямокутник — квадрат.
28. У прямокутний трикутник з катетами a і $3a$ вписано квадрат, який має з трикутником спільний прямий кут. Визначте діагональ цього квадрата.
29. Навколо рівностороннього трикутника описано коло з радіусом R . Через центр кола проведено пряму, паралельну одній зі сторін трикутника. Визначте довжину відрізка цієї прямої, кінці якого належать двом іншим сторонам трикутника.
30. Два кола, вписані в гострий кут з величиною 60° , дотикаються одне до одного зовнішнім чином. Визначте відстань від точки дотику кіл до сторони кута, якщо радіус меншого кола дорівнює r .
31. У трикутник з основою a і висотою H вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на основі трикутника, а інші дві — на бічних сторонах. Визначте сторону квадрата.

II. Підвищений рівень

32. Радіуси вписаного та описаного кіл для прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 2 см і 5 см. Визначте довжини сторін цього трикутника.
33. Центр вписаного кола ділить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, на відрізки 5 см і 3 см. Визначте довжини сторін трикутника.
34. Доведіть, що куб гіпотенузи прямокутного трикутника більший від суми кубів його катетів.
35. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює 3 : 4, а висота, опущена на гіпотенузу, дорівнює H . Визначте периметр цього трикутника.
36. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 11 см більший від іншого. Визначте довжину гіпотенузи, якщо довжини катетів відносяться, як 6 : 5.

37. У трикутнику точка перетину медіан і центр описаного кола симетричні відносно однієї зі сторін. Визначте медіани трикутника, якщо радіус описаного кола дорівнює R .
38. Доведіть, що у будь-якому прямокутному трикутнику сума діаметрів вписаного та описаного кіл дорівнює сумі його катетів.
39. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CD та медіану CE . Визначте відношення $AC : CB$, якщо $AB = 3DE$.
40. Через вершини A і B трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони AC і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що трикутник ABC подібний до трикутника MNC .
41. Діагональ трапеції $ABCD$ перпендикулярна до бічної сторони AB , а гострий кут BAD дорівнює α . Визначте кути трапеції, якщо менша основа трапеції дорівнює другій бічній стороні.
42. У рівнобічній трапеції один із кутів дорівнює α , бічна сторона трапеції дорівнює a , а сума довжин основ — b . Визначте довжини основ трапеції.
43. У рівнобічній трапеції діагональ ділить навпіл гострий кут. Периметр трапеції дорівнює P , а основи відносяться, як $m : n$. Визначте довжину середньої лінії трапеції.
44. Які кути може мати рівнобедрена трапеція, яка своєю діагоналлю розбивається на два рівнобедрених трикутники?
45. Визначте гострий кут ромба, сторона якого є середнім пропорційним між його діагоналями.
46. Доведіть наступну ознаку паралелограма: якщо точка перетину середніх ліній чотирикутника збігається з точкою перетину його діагоналей, то цей чотирикутник — паралелограм.
47. Доведіть наступну ознаку ромба: якщо у чотирикутник можна вписати коло і центр цього кола збігається з точкою перетину діагоналей, то даний чотирикутник — ромб.
48. Доведіть наступну ознаку ромба: якщо у чотирикутник можна вписати коло і центр кола збігається з точкою перетину середніх ліній, то цей чотирикутник — ромб.
49. Доведіть, що площа прямокутної трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнює добутку її основ.
50. У квадрат $ABCD$ зі стороною 4 см вписано коло, яке дотикається до сторони CD у точці M . Визначте довжину хорди, що належить прямій AM .
51. До кола проведено дотичну. Доведіть, що сума відстаней від кінців будь-якого діаметра до цієї дотичної дорівнює діаметру даного кола.
52. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Через середину меншого катета та середину гіпотенузи проведено коло, яке дотикається до гіпотенузи. Визначте радіус цього кола.
53. У колі проведено хорди AB і AC ($AB < AC$). Через точку A проведено дотичну до кола, а через точку B — пряму, паралельну дотичній, яка перетинає пряму AC у точці D . Доведіть, що $AB^2 = AC \cdot AD$.
54. Визначте катети прямокутного трикутника, якщо периметр трикутника і радіус вписаного у нього кола дорівнюють відповідно P і r .
55. Коло з радіусом 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата зі стороною 18 см. Визначте відрізки, на які це коло ділить кожную з двох інших сторін квадрата.

56. Навколо кола описана рівнобічна трапеція з бічною стороною l . Одна з основ трапеції дорівнює a . Визначте площу трапеції.
57. Доведіть, що три медіани трикутника ділять його площу на шість рівних частин.
58. У трикутнику точку перетину медіан сполучено з вершинами. Доведіть, що площа кожного з утворених трикутників дорівнює третині від площі даного трикутника.
59. Визначте площу трапеції, основи якої дорівнюють a і $2a$, а гострі кути — 30° і 60° .
60. На сторонах рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою a побудовані квадрати. Центри цих квадратів сполучені відрізками. Визначте площу утвореного трикутника.
61. При якому значенні висоти прямокутна трапеція з гострим кутом 30° і периметром P матиме найбільшу площу?
62. Серед усіх прямокутників з даною діагоналлю визначте той, який має найбільшу площу.
63. Серед усіх прямокутників, що мають периметр $2p$, визначте той, площа якого найбільша.
64. Як від заданого трикутника відрізати $5/9$ його площі?
65. У коло вписано трапецію, однією з основ якої є діаметр кола. Вписано також рівнобедрений трикутник, сторони якого паралельні сторонам трапеції. Доведіть, що трикутник і трапеція — рівновеликі.
66. Радіус кола, вписаного у прямокутну трапецію, дорівнює 6 см. Визначте площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 10 см.
67. Чи може медіана трикутника розділити його на два нерівних, але подібних трикутників?
68. Діагональ ділить трапецію на два подібних трикутники. Визначте залежність між довжиною d цієї діагоналі та довжинами a і b основ трапеції.
69. Поділіть відрізок завдовжки 18 см на дві частини так, щоб, узявши їх за катети прямокутного трикутника, одержати трикутник з найменшою гіпотенузою.
70. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 5 см. Визначте відстань між центрами вписаного та описаного кіл.
71. Визначте висоту рівнобічної трапеції, діагональ якої дорівнює 37 см, а середня лінія — 35 см.
72. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 144 см, а гострий кут — 60° . Діагональ трапеції ділить середню лінію на відрізки, один із яких на 16 см більший від іншого. Визначте основи трапеції.
73. Вершина A паралелограма $ABCD$ сполучена прямими із серединами сторін BC та CD . Ці прямі перетинають діагональ BD у точках M і N . Доведіть, що точки M і N ділять відрізок BD на три рівних частини.
74. Доведіть, що коли у трапецію можна вписати коло, то сума квадратів відстаней від центра цього кола до вершин трапеції дорівнює сумі квадратів її бічних сторін.
75. Діагоналі ромба дорівнюють $2a$ і $2b$. Вписане коло дотикається до сторін ромба у точках A , B , C , D . Визначте площу чотирикутника $ABCD$.
76. Центр кола, вписаного у прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на відстані 75 см і 100 см. Визначте площу трапеції.
77. Два квадрати зі стороною a розміщені так, що одна вершина кожного з них збігається з центром іншого. Визначте площу фігури, яка є перетином цих квадратів.

78. Прямою, проведеною через задану точку на стороні трикутника, розділіть цей трикутник на рівновеликі частини.
79. Діагоналі трапеції ділять трапецію на чотири трикутники. Доведіть, що трикутники, прилеглі до бічних сторін, мають рівні площі.
80. Як від заданої трапеції відрізати трикутник, площа якого дорівнює $1/5$ від площі цієї трапеції?
81. Дано трикутник зі сторонами a , b , c , для яких $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доведіть, що медіани m_a та m_b цього трикутника взаємно перпендикулярні.
82. Побудуйте квадрат, маючи його центр і дві точки, що належать прямим, на яких мають лежати дві його сторони.
83. Довжини катетів і гіпотенузи двох подібних трикутників дорівнюють відповідно a , b , c та a_1 , b_1 , c_1 . Доведіть, що $aa_1 + bb_1 = cc_1$.
84. У кут вписано три кола, одне з яких дотикається до двох інших. Доведіть, що радіуси r_1 , r_2 , r_3 цих кіл зв'язані співвідношенням: $r_2^2 = r_1 \cdot r_3$.
85. Точка M знаходиться всередині трикутника ABC , і при цьому $MA = MB$. На сторонах AC і BC ззовні трикутника ABC побудовано трикутники APC і BQC , подібні до трикутника AMB . Доведіть, що чотирикутник $MPCQ$ — паралелограм.
86. Сторона і два прилеглих до неї кути трикутника дорівнюють відповідно 6 см і 25° та 130° . Визначте дві інші сторони трикутника.
87. У трикутнику дві сторони і кут між ними дорівнюють відповідно 5 см, 8 см і 140° . Визначте третю сторону і решту кутів трикутника.
88. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 5 см і 6 см. Визначте його кути.
89. У гострокутному трикутнику ABC $\operatorname{ctg} \angle B = \frac{7}{24}$. Довжина відрізка, що сполучає осно-
- ви висот, проведених із вершин A і C , дорівнює q . Визначте довжину сторони AC .
90. Коло дотикається до двох більших сторін трикутника і має центр на меншій стороні. Визначте радіус кола, якщо довжини сторін трикутника дорівнюють 12 см, 16 см і 20 см.
91. Три сторони трапеції рівні між собою. Коло, побудоване на більшій з основ як на діаметрі, ділить бічну сторону навпіл. Визначте кути трапеції.
92. Чи може одна з бісектрис трикутника ділити навпіл іншу бісектрису? Відповідь обґрунтуйте.
93. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Визначте периметр трикутника, вершинами якого є центр ваги, ортоцентр і точка перетину бісектрис даного трикутника.
94. Два кола різних радіусів дотикаються ззовні у точці A . Визначте радіуси кіл, якщо хорди, які сполучають точку A з точками дотику їхньої спільної зовнішньої дотичної, дорівнюють 12 см і 16 см.
95. Висота й медіана трикутника, проведені з однієї вершини, ділять кут трикутника при цій вершині на три рівних частини. Визначте кути трикутника.
96. Три кола з радіусами 5 см, 12 см і 13 см попарно дотикаються одне до одного. Визначте радіус кола, вписаного у трикутник, вершинами якого є центри даних кіл.

Відповіді до вправ і задач

Розділ І

- §1.** 1. Усі, крім б), е) і ж); усі, крім г). 2. а), б), в) Так; г), ґ) ні. 3. а), б) Так; в) ні. 5. Якщо трикутники не прямокутні, що прикладаються катетами. 6. У випадку а). 7. а), в) Ні; б) так. 9. а), б) ні. 10. Три; один. 12. Ні. 13. Так. 14. Твк. 15. а) 13 см, 14 см, 15 см, 18 см; б) 5 дм, 10 дм, 10 дм і 10 дм; в) 17 см, 9 см, 25 см, 27 см. 16. 36°, 72°, 108°, 144°. 21. Ні. 22. 60°, 120°, 60°, 120°. 23. Так. 26. Ні.
- §2.** 56. 3. 57. а) 12 см і 18 см; б) 13 см і 17 см; в) 7,5 см і 22,5 см; г) 11 см і 19 см; ґ) 12 см і 18 см. 58. 72° і 108°. 59. 54° і 136°. 62. 45° і 135°. 63. 13 см і 17 см. 64. 5 см. 65. 26 см. 66. 34 см або 38 см. 67. 6 см і 12 см. 68. CD . 70. Якщо рівні всі сторони. 73. Може, якщо рівні всі сторони. 74. Безліч розв'язків. 80. *Вказівка*. Проведіть відрізок AB і продовжте його за точку B на довжину $BC = AB$. Далі побудуйте паралелограм з діагоналлю AC . 82. 1 : 2. 83. 60° і 120°. 84. 1 : 3 або 2 : 3. 93. 45° і 90°. 94. 48° і 132°. 95. 60° і 120°. 96. 30° і 150°. 97. Може. 98. 4 см і 6 см. 99. 30°. 107. *Вказівка*. Скористайтесь результатом задачі 80.
- §3.** 108. 5 см. 109. 4 см. 111. $PQRS$. 112. Ні. 113. Так. 114. Ні. 115. Ні. 117. 2 рівнобедрені трикутники і 2 паралелограми. 118. Збігаються зі сторонами. 123. 144°. 124. 65°. 125. 19° і 71°. 129. Ні. 130. 44 см. 131. 6 см і 14 см. 132. 12 см і 20 см. 134. 14 см. 135. 18 см. 136. Прямокутник; 6 см. 137. 3 см. 138. 45°. 141. 60°. 142. 30° і 60°.
- §4.** 144. Найпростіше побудувати прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. 148. Можливо, тим, що такі латки легко кроїти та легко припасовувати одна до одної, і при цьому виникає навіть відчуття композиційної правильності рисунка, немовби так було задумано, і не з нужденних потреб, а з міркувань естетики. 149. Так; ні. 150. Так. 151. Так. 152. а), в) ні; б) так. 153. а) 96°; б) 70°; в) 70°; г) 64°. 154. Ні. 155. Ні. 156. Ні. 165. а) 16 см; б) 24 см. 166. 2 : 1. 167. 5 см. 168. 60°; 28 см. 169. 20 см. 170. а) 30° і 60°; б) 60° і 120°. 171. 40 см. 172. 150°. 173. 80°. 176. *Вказівка*. Побудуйте ромб, одна з діагоналей якого лежить на даній прямій і ділиться даною точкою навпіл. 177. $\frac{2}{3}P$. 178. $\frac{3}{2}a$, $3a$. 181. 30°. 182. 60° і 120°. 183. Так, провівши висоти з протилежних вершин; так, сполучивши дві сусідні вершини із серединою протилежної сторони.
- §5.** 184. Зайвими є відрізки від паралелограма до квадрата і від ромба до квадрата. Наприклад, те, що квадрат є паралелограмом, безпосередньо не впливає ні з означення квадрата, ні з означення паралелограма, а потребує доведення. 191. «Червоний квадрат» не є квадратом, оскільки правий верхній кут у ньому гострий. 195. 3. 196. З прямокутних і рівнобедрених. 199. Ні; половина діагоналі інфілда дорівнює $63\text{ft } 3\frac{3}{8}\text{ in}$, а це більше за відстань між позиціями пітчера і кетчера. 200. Так. 4d. 204. 3 см. 205. 6 см і 12 см. 207. Трикутники прямокутні. Відношення катетів або 1 : 1, або 1 : 2. 208. *Вказівка*. Розв'язання можна звести до побудови трикутника за стороною (заданим відрізком) і прилеглими до неї кутами. 209. *Вказівка*. Проведіть $CD \perp AB$. 211. 60°.
- §6.** 212. Можна, якщо діагональ не є висотою паралелограма; якщо суми прикладених кутів менші від 90°. 214. 32 см; не можна. 215. 1) – 5) так; 6) ні. 216. 1) – 3) так. 217. 1) – 5) так; 6) ні. 218. Так, якщо це — квадрат. 220. 60°, 90°. 221. Неопуклий. 222. 6 см, 4 см. 223. 6 см, 10 см. 224. 26 см, 34 см. 225. 5, 8. 230. Може, якщо діагоналі дельтоїда рівні. 231. 45°, 112,5°, 90°, 112,5°. 232. 40°, 130°, 60°, 130°. 236. Ні.

- §7. 238. 3 см; 45°. 239. 2 см. 241. Ні. 242. Ні. 243. Ні. 244. Так; ні. 245. Ні. 246. Так. 247. 130° і 35°. 248. 6 см. 249. 23 см. 250. Якщо гострий кут 45°. 251. Ні. Для перестановки віконець зовнішня частина їхньої рами має стати на місце внутрішньої, а це неможливо, оскільки вона — ширша.. 254. Ні. 258. Якщо бічна сторона дорівнює основі. 259. 1 : 2. 260. 80°, 100°, 130°. 262. 60°. 263. 1 : 3. 264. 12 см. 265. Так. 266. 4 см. 267. 60°, 10 см. 268. 30°. 269. 98 см. 270. 6 см. 271. 10 см. 273. а. 275. 10 см. 276. 10 см і 26 см. 277. 1 : 2. 278. 5 см. 279. 6 см і 18 см. 280. 2 см. 281. Правильний. 282. Прямокутний і рівнобедрений. 283. Навпіл. 284. 2а, 2b. 286. 50 см і 30 см. 287. 33 см. 289. $\frac{a+b}{2}$. 290. 13 см. 293. 28 см. 294. 5 см і 9 см. 295. $m \pm h$. 296. 11 см. 297. $\frac{3}{4}a$. 298. а) 4 см і 6 см; б) 3,5 см, 5 см, 7,5 см. 302. $l + m$. 303. 40° або 80°. 304. 72° і 108°. 305. 30° і 150°.
- §8. 311. 11 см. 312. 24 см. 314. а) Так; б) ні. 315. 12 см, 18 см, 30 см, 24 см. 316. а) Ні; б) так; в) ні; г) так. 318. а) 27°; б) 80°; в) 90°; г) 135°. 319. а) 30°; б) 130°; в) 180°; г) 304°. 320. а) 24°; 95°; в) 120°. 321. а) 70°; б) 160°; в) 220°. 322. 112°, 220°, 28°. 323. 45°, 54°, 81°. 324. 95°. 325. 50° і 130°. 332. 30°. 336. а) Ні; б) так. 337. 94°, 52°. 338. 40°, 100°, 140°, 80°.

Розділ II

- §9. 1. 5. 2. а) 4 : 5; б) 2 : 5; в) 1 : 5; г) 5 : 3. 3. 6; 6. 4. а) 15 см; б) 9 см; в) 30 см. 5. а) Так; б) ні. 6. Так. Візьмемо пропорційні відрізки, що утворюються на сторонах кута паралельними прямими, а потім один з них відкладемо від його кінця «в інший бік» на тій само стороні кута. Відрізки залишаться пропорційними, однак прямі, які їх відтинають, уже не будуть паралельними.. 8. Ні. 9. 2 см, 4 см, 6 см і 8 см. 10. 4 : 3. Вказівка. Проведіть $MN \parallel CL$. 11. 25 : 8; 6 : 5. 18. 8 : 5; 11 : 6. 19. 8 см і 10 см. 20. 10 см. 21. 10 см і 12 см. 22. а) Так; б) Ні. 23. Так. 24. Ні. 25. 5 см і 7 см. 26. 6 см і 8 см. 27. 24 см. 28. 6 см, 4 см. 30. Ні. 32. Скористайтесь властивістю медіан. 33. 4 см. 34. 18 см. 35. 4 см. 36. 36 см.
- §10. 37. 5, 25; 2,25. 38. $13\frac{1}{3}$ см, 12 см. 39. 117, 5 см. 40. 4 см і 3 см. 41. 5,25 см; 1,2 см. 43. а) 40,5 см, 54,5 см. 46. 30°, 1,5 см. 47. 4 см, 14 см. 48. 24 см, 18 см, 15 см. 49. Так. 50. Так. 51. Так. 52. а) Так; б) не обов'язково. 54. 13,6 см. 58. 1 см, 2 см, 2,5 см. 59. 6,5 см, 5,5 см. 60. $m : n$. 61. 4 см. 63. 4. 64 а, б) Ні; в) так. 66. Так. 72. 30 м. 74. Так. 75. Ні. 76. 72°, 72°, 36° або $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$. 80. 4. 82. 180° – 2∠A; 180° – 2∠B; 180° – 2∠C. 84. $\frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}$. 86. 10,4 см. 52. $m : n$. 89. $n : m$. 90. $m : n$. 91. 15 см, 18 см. 94. $\frac{bc}{b+c}$. 95. 15 см, 20 см. 96. 2,5 см і 4,5 см.

Розділ III

- §13. 1. 6 см. 2. 25 см. 3. 15 см і 20 см. 4. 16 см. 5. 12 см. 6. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 7. 6 см, $2\sqrt{13}$ см. 8. $12\sqrt{5}$ см, $6\sqrt{5}$ см, 12 см. 9. 6 см, 8 см, 18 см. 10. а) 10 см; б) 15 см; в) 26 см. 11. а) 12 см; б) 15 см; в) 10 см. 12. 30 см. 13. 3 см і 4 см. 14. 12 см і 16 см. 15. 60 см. 16. 10 см, 24 см, 26 см. 17. $4\sqrt{3}$ см. 18. Ні. 20. 84 см. 21. 15 см. 22. а) $4\sqrt{5}$ см; б) $a\sqrt{3}$. 23. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 24. 109 см. 25. Так. 26. а) 5 см; б) 13 см; в) 37 см. 27. 30 см і 40 см. 28. 20 см, 20 см, 24 см. 29. 4 см. 30. 20 см. 31. 15 см. 32. 20 см. 33. 4 см або 16 см. 34. 9 см, 15 см. 37. 15 см і 20 см. 38. 9 см і 16 см. 39. 15 см і 20 см. 40. $p : q$. 41. $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см. 42. $\sqrt{10}$ см. 43. 18 см і 32 см. 44. 12 см. 46. 45 морських миль. 47. 40 футів. 48. 12 футів. 49. 8 см. 50. 5 см. 51. Якщо похила утворює з даною прямою кут 60°. 52. 5 см. 53. По 9 см. 54. 10 см. 55. 17 см або 7 см. 56. 40 см. 57. 12 см. 59. 3 см і 12 см. 60. 2 см. 61. 20 см. 62. $AB \approx 173$ м.

- §16.** 63. а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{5}{12}$. 64. а) $\frac{8}{15}$; б) $\frac{15}{17}$; в) $\frac{8}{17}$. 67. 3 : 4. 68. 8 : 17, 15 : 17. 73. 3,75 см. 74. $\frac{h}{\sin \alpha}$, $\frac{h}{\cos \alpha}$. 75. $a \cos \alpha$, $\frac{a \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$. 76. $\frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$. 77. $\frac{a}{\tan \alpha}$, $\frac{a}{\sin \alpha}$. 78. $h \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right)$. 81. 12 см, $\approx 45^\circ 14'$. 82. 6 см, $6\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{2}$ см, 12 см. 83. $9 \pm 3\sqrt{3}$ см. 86. $\frac{h}{\cos \alpha}$. 87. 6 см, $6\sqrt{2}$ см. 89. $1:\sqrt{3}$. 90. а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 91. а) $a\sqrt{3}$, $2a$; б) a , $a\sqrt{2}$; в) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 92. $\frac{12}{\sqrt{3}}$ см. 93. 125 см, 125 см, 240 см. 94. $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$. 97. 0,8. 98. $\frac{15}{17}$. 99. $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$. 100. $\frac{24}{7}$. 101. а) $\sin^2 \alpha$; б) 2; в) $\cos^2 \alpha$; г) $\sin^3 \alpha$; р) 1; д) 1; е) $\tan \alpha$; є) $\sin^2 \alpha$; ж) $\sin^2 \alpha$; з) $\cos^2 \alpha$; ж) $\sin^2 \alpha$; з) $\cos^2 \alpha$; и) 1; і) 1; ї) $1 + \tan^6 \alpha$. 102. 0,48. 103. 0,728. 104. а) $\frac{5}{2}$; б) 5; в) 0; г) 1. 105. а) 1; б) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$; в) $\cos \alpha$; г) $2 \sin \alpha$. 111. Ні. 112. 30° і 60° . 113. 0,5376 і 0,8432.

Розділ IV

- §17.** 1. 2; 3; $n - 3$. 2. На $n - 2$ трикутники. 3. 5; 9. 4. Так. 5. а) 720° ; б) 1440° . 6. 140° . 7. 120° . 8. 60° , 150° . 10. 2. 11. 1) 10; 2) 12; 3) 36; 4) 40. 12. 1) 8; 2) 11; 3) 24; 4) 12; 5) 25. 13. 3), 4) Ні; решта — так. 18. $n - 2$. 19. б) $\frac{n(n-3)}{2}$. 20. а) $n = 7$; б) $n = 4$; в) ні. 21. Ні. 22. 14. 23. 5.
- §18.** 24. 64 см². 25. 28 см. 26. 16 см. 27. Ні. 28. 4 м. 29. а) Збільшиться в 4 рази; б) збільшиться у 9 разів; г) зменшиться в 4 рази. 30. а) Збільшиться в 4 рази; б) зменшиться у 9 разів; в) не зміниться; г) збільшиться удвічі. 31. 384 см²; 600 см²; 8,64 см². 32. 8 дм²; 8,96 дм². 33. 28 см. 34. 20 см. 35. 14 см. 36. 1) а) 25 000 м²; б) 0,025 км²; в) 2,5 га. 2) а) 0,24 км²; б) 240 000 м²; в) 2400 а. 3) а) 0,35 км²; б) 3500 а; в) 35 га. 37. Вони рівні. 38. Менша. *Вказівка.* Для проведення міжнародних змагань довжина футбольного поля має бути в межах 100 – 110 м, ширина — в межах 64 – 75 м. 39. Збільшити учетверо; безліччю способів, наприклад, якщо одну сторону збільшити у 8 разів, а іншу зменшити удвічі. 41. 9 пакетів. 42. 17%, не достатня. 43. Від 5 см² до 9 см²; найбільша для квадрата зі стороною 3 см. 44. Друга більша на 4 а. 45. 987. 46. 14 см і 8 см. 47. 3 см і 7 см. 48. 6. 49. 9. 50. 22 см або 20 см. 51. 124 см. 52. 18 м і 16 м. 53. 18 а; 220 м. 54. 28 м². 55. 36,25 м. 56. а) $ab - (a - 2d)(b - 2c)$; б) $ab - (a - c)(b - d)$; в) $ab - (a - 2c)d$. 57. 48 см². 58. 192 см². 59. 60 см². 60. 252 см². 61. а) 40 мм; б) 10 мм. 63. 6 м і 5 м. 64. 10 см. 65. 72 см². 66. 60 см². 67. 150 см². 68. 23,52 см². 69. Удвічі. 70. *Вказівка.* Найпростіше спочатку відрізати прямокутник з $\frac{1}{3}$ площі, а потім залишок поділити навпіл. 71. 36,25 м. 74. 2 см. 76. а) 90 м²; б) 115 м²; в) 120 м². 77. 3 см², 3 см², 6 см². 78. 24 см². 79. 18 см². 80. Так: 5 см. 81. 30 см². 82. 240 см². 83. 120 см². 84. По $\frac{1}{4}S$. 85. 7 : 8. 86. 62,5 см². 88. а), г), р); б), є). 89. а) 2080 мм²; б) $\frac{1}{2}(e(2a - b) + b(c + d))$. 91. 25 мм. 93. 6,72 см. 94. 125 см². 97. 5 : 3. 99. 294 см². 100. 24 см². 101. 960 см². 102. 240 см². 103. 24 см². 105. 8,2 см і 4, 1 см. 106. 4 см. 107. $\frac{10}{3}$ см або 7,5 см. 108. 6 см. 111. 3 см і 6 см. 113. 18 см². 114. 56 см². 115. 4 см і 6 см. 116. 30° . 117. 12 см². 118. 50 см². 119. 13,44 см. 122. 96 см². 124. 210 см². 125. 336 см². 126. 6 см². 129. а) 976,5 мм²; б) 1100 мм². 130. а) 126 мм; б) 75 мм. 134. $1,875\sqrt{2}$ см². 135. $\approx 4,6$ см². 136. 7,68а2. 137. $24\sqrt{3}$ см. 138. 135 см². 139. 156 см². 143. 480 см².

Предметний покажчик

Б

- Багатокутник 262
 - каркасний 262
 - неопуклий 263
 - опуклий 263
 - плоский 262
 - вписаний 264
 - описаний 264

В

- Вершини багатокутника 262
 - чотирикутника 10
- Виміри прямокутника 272
- Висота паралелограма 41
 - трапеції 109

Д

- Дельтоїд 100
- Діагональ багатокутника 264
 - чотирикутника 12

З

- Золотий переріз (поділ) 224
 - прямокутник 227
- Золоте відношення 224

К

- Квадрат 84
- Коло, вписане у багатокутник 264
 - — ромб 129
 - — чотирикутник 128
- описане навколо багатокутника 264
 - — прямокутника 128
 - — трапеції 138
 - — чотирикутника 128
- Косинус гострого кута 236
- Котангенс гострого кута 236
- Кут 13
 - внутрішній багатокутника 263
 - вписаний у коло 56, 112
 - багатокутника 263
 - зовнішній багатокутника 267
 - лінійний 13
 - неопуклий 13
 - опуклий 13

- плоский 13
- центральний 132
- чотирикутника 14

Л

- Ламана (лінія) 261–262

Н

- Неопуклий багатокутник 263
 - чотирикутник 16

О

- Ознака вписаного чотирикутника 137
 - описаного чотирикутника 130
 - квадрата 89
 - паралелограма 38, 39
 - подібності трикутників 172, 173, 176
 - прямокутника 53, 55
 - ромба 71, 72
- Опуклий багатокутник 263
 - чотирикутник 16
- Основа паралелограма 41
 - перпендикуляра 210
 - похилої 211
 - трапеції 108

П

- Паралелограм 32
- Периметр багатокутника 263
 - чотирикутника 11
- Перпендикуляр до прямої 210
 - паралелограма 280
 - прямокутника 274
 - ромба 282
 - трапеції 281
 - трикутника 279
- Похила (до прямої) 211
- Проекція похилої (на пряму) 211
- Прямокутник 51
- Рівновеликі фігури 206, 208, 276, 282–284
- Ромб 66

С

- Середнє геометричне (пропорційне) двох відрізків 205–206
- Середня лінія трапеції 113
 - трикутника 116
- Синус гострого кута 236
- Сторони багатокутника 262
 - чотирикутника 10

Т

- Тангенс гострого кута 236
- Теорема Менелая 164
 - Піфагора 207
 - — обернена 209
 - Птоломея 193
 - Фалеса 154
 - — узагальнена 157
 - Ферма (Велика) 222
 - Чеви 291
- Трапеція 106
 - прямокутна 109
 - рівнобічна (рівнобедрена) 110
- Трикутник героновий 287
 - єгипетський 209
- Трикутники подібні 169

Ф

- Формула Герона 287
 - площі паралелограма 280
 - — прямокутника 274
 - — ромба 282
 - — трапеції 281
 - — трикутника 279

Ч

- Чотирикутник 10
 - вписаний 128
 - каркасний 10
 - неопуклий 16
 - описаний 128
 - опуклий 16
 - плоский 10

ДОДАТОК

Таблиця значень тригонометричних функцій

Градуси	Синуси	Тангенси	Котангенси	Косинуси	Градуси
0	0,000	0,000		1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,335	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
Градуси	cos	ctg	tg	sin	Градуси

Зміст

Напутнє слово	3
Передмова автора і видавництва.....	5

Розділ І. Чотирикутники.....9

§1. Довільні чотирикутники	9
1.1. Чотирикутник і його елементи	9
1.2. Кути чотирикутника. Опуклі й неопуклі чотирикутники	13
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
1.3. Заомощення площини чотирикутниками	18
1.4. «Нежорсткість» чотирикутника	20
Вправи і задачі.....	21
<i>Сторінки історії.</i> Кубізм і геометризація образотворчого мистецтва	
§2. Паралелограм.....	32
2.1. Означення і властивості паралелограма	32
2.2. Застосування для трикутника: теорема про висоти трикутника	37
2.3. Ознаки паралелограма.....	38
2.4. Висоти паралелограма	41
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
2.5. Найпростіші механізми, в основі яких — паралелограм	43
Вправи і задачі.....	45
§3. Прямокутник.....	51
Вправи і задачі.....	59
<i>Сторінки історії.</i> Математик Клод Клеро і маркіза дю-Шатле: історія про перший підручник з геометрії для дітей	
§4. Ромб.....	66
4.1. Означення ромба і приклади ромбічних форм.....	66
4.2. Властивості та ознаки ромба.....	70
Вправи і задачі	74
<i>Сторінки історії.</i> Звідки пішла назва геометричної фігури «ромб»	
§5. Квадрат	84
5.1. Означення квадрата і приклади квадратних форм.....	84
5.2. Властивості та ознаки квадрата	89
Вправи і задачі.....	91
<i>Сторінки історії.</i> Теон Александрійський і Гіпатія — перше творче об'єднання авторів підручників з математики	
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	

§6.	Дельтоїд	100
	Вправи і задачі	103
§7.	Трапеція	105
	7.1. Означення трапеції і приклади реальних трапецеїдальних форм	105
	7.2. Найпростіші властивості трапеції	108
	7.3. Рівнобічна трапеція	110
	<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
	7.4. Середня лінія трапеції	113
	7.5. Середня лінія трикутника	116
	7.6. Чотирикутна «геометрична палітра»	119
	Вправи і задачі	120
	<i>Сторінки історії.</i> Про походження назви «трапеція»	125
§8.	Вписані та описані чотирикутники	127
	8.1. Означення і приклади вписаних та описаних чотирикутників	127
	8.2. Властивість та ознака описаних чотирикутників	130
	8.3. Вписані та центральні кути	132
	<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	136
	8.4. Властивість та ознака вписаних чотирикутників	137
	Вправи і задачі	139
	<i>Сторінки історії.</i> Коло — мірило досконалості в геометрії і композиційний елемент в образотворчому мистецтві	142
	Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу I	145

Розділ II. Подібність трикутників 151

§9.	Теорема Фалеса	153
	9.1. Від теорем про середню лінію трикутника і трапеції до теореми Фалеса	153
	9.2. Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки) ...	155
	9.3. Застосування теореми Фалеса для трикутника	161
	Вправи і задачі	166
§10.	Подібні трикутники	169
	10.1. Означення і базова властивість подібних трикутників	169
	10.2. Ознаки подібності трикутників	172
	Вправи і задачі	178
	<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
§11.	Приклади практичних застосувань подібності трикутників	183
	11.1. Ділильний циркуль	183
	11.2. Побудова поперечного масштабу	184

11.3. Розв'язання практичних задач на місцевості	187
Для тих, хто хоче знати більше	191
§12. Приклади теоретичних застосувань подібності трикутників	191
12.1. Пропорційні відрізки у крузі.....	191
12.2. Теорема Птоломея	193
12.3. Медіани і центр мас трикутника	193
12.4. Пряма Ейлера	194
12.5. Коло дев'яти точок	196
12.6. Пропорційність медіан, бісектрис і висот у подібних трикутниках.....	198
<i>Сторінки історії. Леонард Ейлер (1707–1783)</i>	200
Завдання для повторення та проведення контрольної роботи до розділу II	201

Розділ III. Розв'язування прямокутних трикутників203

§13. Пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора ...	204
13.1. Середні пропорційні і середні геометричні у прямокутному трикутнику.....	204
13.2. Теорема Піфагора	207
13.3. Перпендикуляри і похилі.....	210
Вправи і задачі.....	214
<i>Сторінки історії. Довкола теореми Піфагора.....</i>	217
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
§14. Золотий переріз	224
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
§15. Алгебраїчний метод розв'язування задач на побудову	232
§16. Співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику ..	236
16.1. Синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника.....	236
16.2. Приклади застосування тригонометричних функцій для розв'язування довільних трикутників.....	239
16.3. Тригонометричні таблиці і формули.....	241
Вправи і задачі.....	251
<i>Сторінки історії. Про назви тригонометричних функцій.....</i>	255
Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу III	256

Розділ IV. Багатокутники. Площі багатокутників 261

§17. Загальні властивості багатокутників	261
17.1. Багатокутник та його елементи. Опуклі та неопуклі багатокутники	261
17.2. Сума кутів опуклого багатокутника	265
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
17.3. Сума кутів довільного багатокутника	266
17.4. Зовнішні кути опуклого багатокутника	267
Вправи і задачі	268
§18. Площі багатокутників	269
18.1 Про одиниці вимірювання площ	269
18.2. Основні принципи для вимірювання площ. Площа прямокутника	271
18.3. Загальні властивості площ та стратегія їх застосування для багатокутників	276
18.4. Площа трикутника	277
18.5. Площі основних видів чотирикутників	280
<i>Для тих, хто хоче знати більше.</i>	
18.6. Побудова рівновеликих багатокутників	282
18.7. Вираження площі трикутника через його сторони	284
18.8. Застосування площ при розв'язуванні геометричних задач	288
Вправи і задачі	293
<i>Сторінки історії.</i> Евклідове доведення теореми Піфагора	303
Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу IV	304
Завдання для повторення і систематизації знань за курс геометрії 8 класу	306
Відповіді до вправ і задач	311
Предметний покажчик	314
<i>Додаток.</i> Таблиця значень тригонометричних функцій	315

На обкладинці книги — фрагмент картини французького художника Лорана Делегіра (1606–1656) «Алегорія геометрії» (1649 р.). Повністю картина відтворена на 1-му форзаці. У правій руці муза Геометрія тримає аркуш із рисунками до двох «найкоштовніших перлин геометрії» (за оцінкою знаменитого астронома Йоганна Кеплера) — теореми Піфагора і Золотого перерізу. З обома цими перлинами учні детально ознайомляться за цим підручником.

Із Золотим перерізом пов'язана й композиція картини Рафаеля «Заручини Марії» (1504 р.), розміщеної на згині обкладинки, а також картина Якопо де Барбарі (1440–1516) на 2-му форзаці із портретом на передньому плані невтомного пропагандиста Золотого перерізу, ченця і математика Луки Пачолі (бл. 1445–1517). Ліворуч від картини де Барбарі — рисунки правильних багатогранників, які виконав Леонардо да Вінчі для книги Пачолі «Про Божественну пропорцію», виданої у Венеції в 1509 р.



“КНИГА ПОШТОЮ” А/С 529
м. Тернопіль, 46008
т. (0352) 287489, 511141
(067) 3501870, (066) 7271762
mail@bohdan-books.com

Навчальне видання

ТАДЕЄВ Василь Олександрович

ГЕОМЕТРІЯ

Дворівневий підручник для 8 класу

загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Ростислав Крамар*

Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 19.08.2016. Формат 70×90/16. Папір офсетний.

Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. _____.

Умовн. фарбо-відб. _____. Обл.-вид. арк. _____.

Наклад _____ прим. Зам.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до Державного реєстру видавців,

виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48

office@bohdan-books.com

www.bohdan-books.com