1.2. Приклади застосування тригонометричних функцій для розв’язування довільних трикутників

Винятковою особливістю тригонометричних функцій, які початково уводяться для розв’язування прямокутних трикутників, є можливість їхнього застосування і для розв’язування довільних трикутників. Розглянемо два приклади.

Математика має доволі тонкі винаходи, які можуть принести користь як для бажаючих учитися, так і для розвитку усіх ремесел, полегшуючи працю людини.

Рене Декарт

Приклад 1.

Для визначення відстані BA до острівка, з двох пунктів B і C, розташованих на березі озера на відстані 187 м один від одного, виміряли кути, під якими, відраховуючи від прямої BC, видно точку A на острівці (рис. 1.7): $\angle B = 62°$, $\angle C = 43°$. Покажемо, що за цими даними справді можна визначити відстань BA.

Проведемо умовно висоту BD трикутника BDC (рис. 1.8). З прямокутного трикутника BDC: $BD = BC \cdot \sin \angle C \approx 187\ 127 \approx 0{,}68 \cdot$ (м).

Тепер у прямокутному трикутнику BDA нам відомо катет BD і гострий кут A, що дорівнює $180° - 62° - 43° = 75°$. Тому $AB = \dfrac{BD}{\sin 75°} \approx \dfrac{127}{0{,}97} \approx 131$ (м). Отже, шукана відстань дорівнює приблизно 131 м.

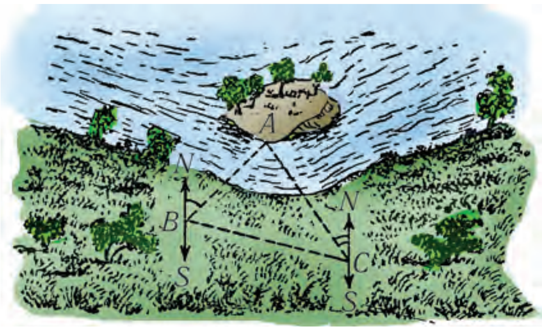

Рис. 1.7

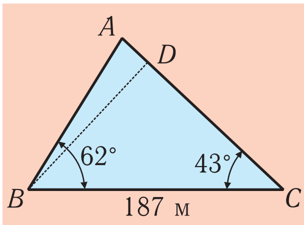

Рис. 1.8

Навпаки, якщо виконується рівність (*), то $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$. Звідси $\beta = 90^\circ + \alpha$, отже, дані прямі — перпендикулярні.

Таким чином, умова (*) є необхідною й достатньою для перпендикулярності двох прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2. Іноколи цю умову записують ще у формі:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

3.13. Приклади розв'язування геометричних задач методом координат

Застосування координат та відповідних формул і рівнянь для розв'язування геометричних задач називають *координатним методом*, або ще *методом координат* у геометрії.

Метод розв'язування добрий, якщо від самого початку ми можемо передбачити — а далі підтвердити це, — що, слідуючи йому, ми досягнемо мети.
Готфрід Вільгельм Лейбніц

Цей метод полягає у тому, що до фігур, заданих у задачі, належним чином «прив'язується» система координат, а самі фігури та відношення між ними задаються у цій системі відповідними рівняннями та формулами. Виконуючи потім алгебраїчні перетворення одержаних формул і рівнянь, одержують шукані величини або ж виражені у формулах та рівняннях шукані відношення між фігурами.

Ідейна простота цього методу спряжена, однак, з певними труднощами обчислювального характеру. Суттєвого зменшення цих труднощів часто можна досягти раціональним вибором системи координат. Розглянемо декілька прикладів.

Задача 1.

Довести, що коли дві медіани трикутника рівні, то трикутник — рівнобедрений.

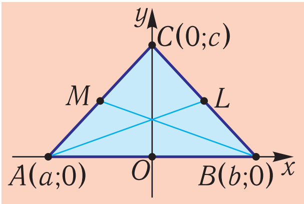

Рис. 3.26

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC медіани AL і BM рівні (рис. 3.26). Потрібно довести, що трикутник рівнобедрений. Виберемо систему координат

4.5. Приклади застосування переміщень фігур для розв'язування геометричних задач

Задача 1.

Побудувати трапецію за усіма її сторонами a, b, c, d (вказано, який відрізок за яку сторону має правити).

Розв'язання. Припустимо, що трапецію $ABCD$ побудовано, і в ній $AB = a$, $CD = c$ — основи (нехай $a > c$), $BC = b$ і $AD = d$ — бічні сторони (рис. 4.53). Перенесемо паралельно сторону AD так, щоб точка D сумістилася з точкою C. Оскільки прямі AB і DC — паралельні, а паралельність прямих при паралельному перенесенні зберігається, то точка A перейде у деяку точку A_1 на прямій AB. При цьому $CA_1 = d$. Розглянемо трикутник CA_1B: у ньому відомо всі сторони: $CA_1 = d$, $CB = b$, $A_1B = a - c$. Тому, побудувавши цей трикутник і перенісши сторону CA_1 на відстань c у напрямку BA_1, одержимо шукану трапецію.

Для існування розв'язку задачі повинен існувати трикутник CA_1B, тобто сума двох його сторін має бути більшою за третю сторону, а різниця — меншою від неї.

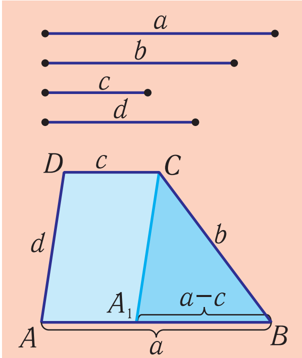

Рис. 4.53

І в розв'язуванні будь-якої задачі присутня крупинка відкриття: задача може бути скромною, однак вона кидає виклик вашій допитливості і змушує вас бути винахідливим, і якщо ви розв'язуєте її власними силами, то ви можете пережити напруження думки, що веде до відкриття, і насолодитися радістю перемоги.

Такі емоції, пережиті у сприятливому для сприймання віці, можуть пробудити смак до розумової роботи і на все життя залишити свій відбиток на мисленні й характері.

Дьєрдь Пойя

У деяких задачах буває доречно здійснити паралельне перенесення не окремого відрізка чи іншого фрагмента фігури, а цілої фігури, наприклад, кола.

Задача 2.

Дано два кола, пряма l і відрізок p (рис. 4.54). Побудувати на колах такі точки A і B, щоб відрізок AB був паралельний прямій l і дорівнював відрізку p.

Розв'язання. Нехай O, Q — центри заданих кіл. Здійснимо паралельне перенесення першого кола уздовж прямої l на відстань p. Нехай O' — центр перенесеного кола, B, B_1 — точки його перетину з другим колом, A, A_1 — прообрази точок B, B_1 у пе-

5.2. Колінеарність, співнапрямленість і протилежна напрямленість векторів

Якщо при відкладанні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від однієї точки A вони розміщуються на одній прямій l (рис. 5.7), то такі вектори називаються *колінеарними* (від латинського префікса со — «спів» і linearis — «лінійний»; колінеарні, отже, — «співлінійні»). При цьому, якщо обидва вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розміщуються з одного боку від точки A (рис. 5.7, а), то вони називаються *співнапрямленими*, а якщо з різних боків (рис. 5. 7, б) — то *протилежно напрямленими*. Нуль-вектор вважається колінеарним і співнапрямленим з будь-яким іншим вектором.

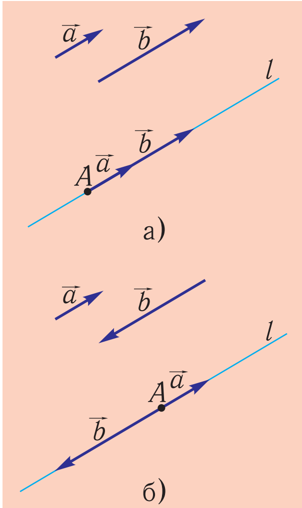

Рис. 5.7

Можна довести, що висновок про колінеарність, співнапрямленість чи протилежну напрямленість двох векторів не залежить від розміщення точки відкладання. Це очевидно, якщо хоча б один з векторів — нульовий. Розглянемо загальний випадок. Нехай ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладено від двох різних точок A і B й одержано відповідно вектори $\vec{a}_1 = \vec{a}$, $\vec{b}_1 = \vec{b}$, $\vec{a}_2 = \vec{a}$, $\vec{b}_2 = \vec{b}$ (рис. 5.8). Позначимо промені, які виходять з початків векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і містять ці вектори, через a, b. Аналогічно промені, які містять вектори $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ і виходять з точок A і B, позначимо через a_1, b_1, a_2, b_2.

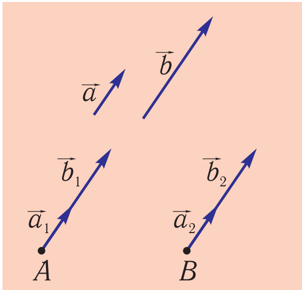

Рис. 5.8

Припустимо, що вектор $\vec{a}_1$ співнапрямлений з вектором $\vec{b}_1$. Тоді промені a_1, b_1 збігаються. Оскільки вектор $\vec{a}_1$ одержано паралельним перенесенням вектора $\vec{a}$, то при цьому перенесенні промінь a переходить у промінь a_1, тобто промені a і a_1 є співнапрямленими. Так само, промінь b співнапрямлений з b_1. А оскільки промені a_1 і b_1 — збігаються, то промені a і b — співнапрямлені.