Співвідношення між тригонометричними функціями доповняльних кутів

Доповняльними називаються два кути α і β, які в сумі становлять 90° або 180°, тобто

$$\alpha + \beta = 90° \text{ або } \alpha + \beta = 180°.$$

Доповняльними, зокрема, є гострі кути будь-якого прямокутного трикутника. Навпаки, для будь-яких двох доповняльних кутів, не рівних 0° і 90° і для яких $\alpha + \beta = 90°$, можна побудувати прямокутний трикутник з такими гострими кутами.

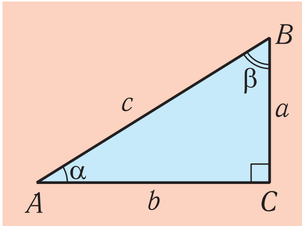

Рис. 1.15

Нехай доповняльні кути α і β є гострими кутами прямокутного трикутника ABC: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = 90°$ (рис. 1.15). Позначимо протилежні до к - тів A, B, C сторони трикутника через a, b, c. Тоді, відповідно до означень тригонометричних функцій кутів у межах від 0° до 90°, маємо:

$$\sin(90° - \alpha) = \sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha;$$

$$\cos(90° - \alpha) = \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Або остаточно:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Переконання, нібито здібність до математики трапляється рідше, ніж до інших наук, — це лише ілюзія, породжена тими, хто приступає до математики або занадто пізно, або без належної старанності.

Йоганн Фрідріх Гербарт

Легко перевірити, використовуючи наведені у кінці попереднього пункту 1.3 рівності, що перші дві із цих формул, а також остання справджуються і при $\alpha = 0°$. Третя ж формула при значенні $\alpha = 0°$ не має змісту, оскільки $\operatorname{tg}(90° - 0°) = \operatorname{tg} 90°$ і $\operatorname{ctg} 0°$ — не існують.

Правильні трикутник, чотирикутник та шестикутник — єдині правильні многокутники, кожним з яких можна повністю, без пропусків і накладань, покрити площину (рис. 2.20). Це пов'язано з тим, що повний кут 360° кратний кутам лише цих многокутників.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

4. Побудова правильного восьмикутника

Побудуємо квадрат $ABCD$, вписаний у коло (рис. 2.21), а потім кожну із дуг, які стягуються сторонами цього квадрата, поділимо навпіл — точками A_1, B_1, C_1, D_1. Для поділу, наприклад, дуги AB проведемо серединний перпендикуляр OM до хорди AB. Точка A_1 його перетину з дугою AB — шукана. Ділити навпіл інші дуги можна послідовним відкладанням від точок B, C і D дуги AA_1. Восьмикутник $AA_1BB_1CC_1DD_1$ — шуканий.

Узагальненням цієї побудови є побудова правильного $2n$-кутника за побудованим уже правильним n-кутником. А саме, побудувавши правильний вписаний n-кутник, далі кожну з дуг, які стягують його сторони, ділимо навпіл. Одержані точки поділу разом з вершинами початкового n-кутника будуть вершинами правильного вписаного $2n$-кутника.

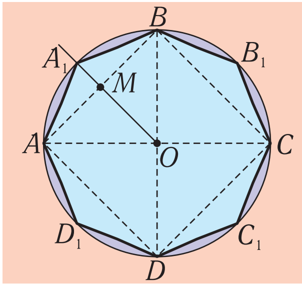

Рис. 2.21

5. Побудова правильного п'ятикутника

Проведемо спочатку *аналіз* цієї задачі на побудову.

Нехай правильний п'ятикутник $ABCDE$ побудовано і навколо нього описано коло (рис. 2.22). Проведемо діагоналі AC, AD, BD і CE. Нехай F — точка перетину діагоналей AC і BD, G — точка перетину діагоналей AD і CE. Оскільки вписані кути, що спираються на рівні дуги, рівні, то трикутник ACD — рівнобедрений ($\angle ACD = \angle ADC$), а DB і CE є бісектрисами його кутів D та C. Крім цього, рівнобедреними є й трикутники FAD, FBC та DFC (останній тому, що він подібний до трикутника ACD).

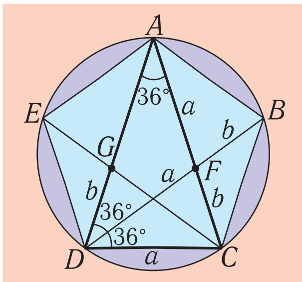

Рис. 2.22

Теорема
(про розклад перетворення подібності на гомотетію і переміщення).

Будь-яке перетворення подібності можна розкласти у добуток деякої гомотетії і переміщення.

Для мене знайти доведення математичної теореми дорожче, ніж завоювати усе перське царство.
Демокріт

Зрозуміло, що цей розклад неоднозначний. Вибираючи різні центри гомотетії O (див. рис. 4.91), матимемо різні розклади.

Відношення площ подібних фігур

З формули $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ для площі трикутника випливає, що відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності:

$$\frac{S'}{S} = \frac{a'b'\sin\alpha}{ab\sin\alpha} = \frac{a'}{a}\cdot\frac{b'}{b} = k\cdot k = k^2.$$

Будь-які два подібних многокутники можна розбити на низку подібних трикутників з одним і тим самим коефіцієнтом подібності. Тому формула

$$\frac{S'}{S} = k^2$$

справджується і для будь-яких подібних многокутників.

Приклади застосувань перетворень подібності для розв'язування задач на побудову

Задача 1.

У даний кут A вписати коло, яке проходило б через задану точку M всередині кута (рис. 4.93).

Математика є мовою особливого ґатунку, яка має ідеї, лише їй притаманні, і знаки для вираження цих ідей.
Михайло Остроградський

Розв'язання. Радіуси OP, O_1P_1, O_2P_2, ... усіх кіл, вписаних у даний кут, проведені в точки дотику з однією зі сторін, перпендикулярні до цієї сторони.

Центри O, O_1, O_2, ... лежать на бісектрисі кута. Отже, трикутники APO, AP_1O_1, AP_2O_2, — прямокутні і мають спільний гострий кут з вершиною A.

Об'єм конуса

Нехай маємо конус з вершиною у точці P, висотою H та радіусом R основи. Для визначення об'єму цього конуса будемо вписувати в його основу правильні n-кутники ABC... з дедалі більшою кількістю сторін та розглядатимемо правильні *вписані* піраміди $PABC$... (рис. 6.73). Висоти цих пірамід дорівнюватимуть висоті H конуса, а площі S_n їхніх основ дедалі ближче наближатимуться до площі S основи конуса. Тому бічна поверхня пірамід дедалі ближче «прилягатиме» до бічної поверхні конуса. Зважаючи на це, об'ємом V конуса вважають граничне значення об'ємів V_n вписаних правильних пірамід.

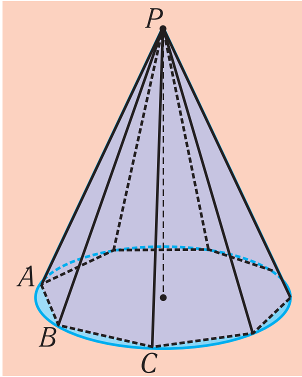

Рис. 6.73

Оскільки $V_n = \frac{1}{3} S_n \cdot H$, то при n, прямуючому до нескінченності, звідси одержують формулу:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Куля і сфера

Кулею називається геометричне тіло, утворене обертанням півкруга навколо його діаметра (рис. 6.74).

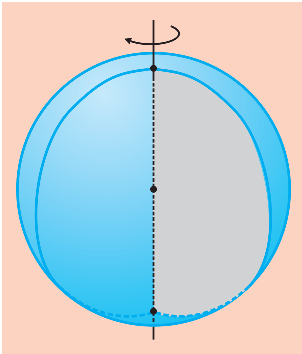
Рис. 6.74

З кожною площиною, яка проходить через вісь обертання, рухомий півкруг суміщається двічі, розміщуючись по різні боки від осі. Обидва разом ці положення утворюють цілий круг. Тому можна вважати, що куля утворюється й обертанням цілого круга навколо одного з його діаметрів (рис. 6.75). З цього випливає, що куля є множиною точок простору, віддалених від даної точки (*центра* круга) на відстані, що не перевищує даної додатної величини R. Число R називається *радіусом* кулі.

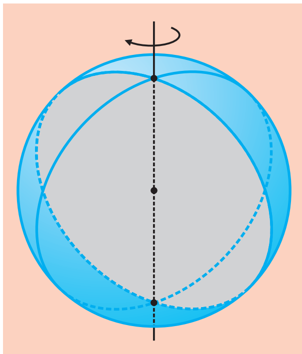
Рис. 6.75

Границя кулі називається *сферою*. Сфера описується півколом або колом, які обертаються навколо діаметра. Центр і радіус кулі називаються відповідно *центром* і *радіусом* сфери. Очевидно, що радіус