

О.М. Афанасьєва
Я.С. Бродський
О.Л. Павлов
А.К. Сліпенко

МАТЕМАТИКА

10 клас

Підручник для закладів
загальної середньої освіти
Рівень стандарту



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512(075.3)
А94

Афанасьєва О.М.

А94 Математика : підручник для 10 кл. закладів загальн. серед. освіти : рівень стандарту. / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2018. — 574 с. : іл.

ISBN 978-966-10-5422-5

Пропонований підручник відповідає програмі з математики для 10-го класу рівня стандарту й передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

Для учнів і вчителів закладів загальної середньої освіти.

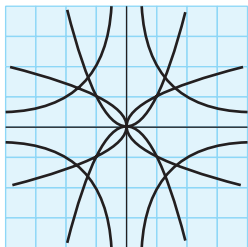
УДК 512(075.3)

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

*Підручник доповнено електронним додатком, який можна відкрити за посиланням:
<http://www.bohdan-digital.com/edu10/>*

ISBN 978-966-10-5422-5

© Афанасьєва О.М., Бродський Я.С.,
Павлов О.Л., Сліпенко А.К., 2018
© Навчальна книга – Богдан, 2018



! Звернення до читацького кола

Дорогий юний друже!

Перед вами підручник з математики. Його головне призначення — допомогти вам систематизувати, розширити й поглибити знання і вміння, які необхідні для математичного моделювання і дослідження процесів і явищ за допомогою функцій, рівнянь та інших математичних об'єктів, опанувати суміжні предмети (фізика, хімія, біологія тощо). І тим самим упевнитись у могутності математичної мови для пізнання навколишнього світу, у розв'язанні різних проблем.

Підручник для 10 класу вміщає по три розділи з «Алгебри і початків аналізу» та «Геометрії». Кожному розділу передують матеріал, що вивчався у попередніх класах і необхідний для вивчення цього розділу. Його подано у вигляді таблиць. Для забезпечення готовності до вивчення матеріалу розділу наводиться діагностичний тест.

Розділи підручника поділено на параграфи, які, у свою чергу, розчленовані на пункти. До кожного пункту подано контрольні запитання, що мають забезпечити активне засвоєння основних понять і фактів у їхньому взаємозв'язку.

Викладення навчального матеріалу у кожному пункті структуроване за рівнями. На першому рівні (його позначено літерою **Б**) викладаються найголовніші поняття, основні факти теми, хоча, найчастіше, без формальних доведень. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного.

На другому рівні (його позначено літерою **О**) наводиться більш повне обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення, наводяться приклади його застосування. Матеріал на цих двох рівнях повністю забезпечує оволодіння предметом згідно з вимогами програми на рівні стандарту.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач відповідного рівня. Початок і кінець доведень тверджень та розв'язань прикладів позначено відповідно знаками $\square$ і $\blacksquare$.

Система задач, вправ і контрольних запитань, наведених у підручнику, має три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*».

До загальної системи задач включено вправи на повторення, що мають сприяти готовності опанування наступним матеріалом, збереженню вмінь, навичок та компетентностей, сформованих при вивченні попередніх розділів.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю (з відповідями) та зразка тематичної контрольної роботи. Для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу наведено відповідні таблиці.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Читання книги не є легкою справою. Деякі фрагменти доведень залишені для самостійного опрацювання. Не минайте їх!

Щиро бажаємо успіхів!

Колектив авторів

Позначення для орієнтування в навчальному матеріалі



— дві сходинки засвоєння навчального матеріалу



— зверніть увагу



— початок розв'язання задачі, доведення теореми



— кінець розв'язання задачі, доведення теореми

° — задачі першого рівня складності

* — задачі третього рівня складності



— контрольні запитання



— графічні вправи; задачі



— вправи для повторення



— завдання для самоконтролю



— тест для діагностики



— історичний коментар



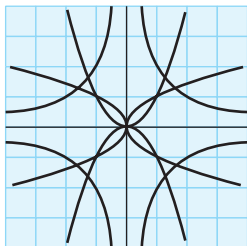
— межі для різних типів задач

∃ — існує об'єкт

∃! — існує єдиний об'єкт

⇒ — знак логічного слідування: якщо ..., то

⇔ — рівносильність: тоді і тільки тоді



! Вступ

Розвиток суспільства і математика

Однією з характерних особливостей нашого часу є широке застосування математики у різних галузях діяльності людини. Без математики не обійтися при проектуванні та будівництві споруд, виробництві приладів та їхніх деталей, важливу роль відіграє ця наука у плануванні господарчої діяльності, керуванні технологічними процесами, роботою підприємств тощо.

Суттєве прискорення процесу математизації науки, техніки, господарської діяльності розпочалося в середині XX ст. Воно пов'язане зі створенням електронно-обчислювальних машин, автоматизацією процесів виробництва, новітніми технологіями, істотними змінами у характері праці людини.

Математика стала універсальним засобом моделювання та дослідження навколишнього світу, інструментом програмування, надійним знаряддям розв'язування практичних задач. Тому вивчення математики, її застосувань є невід'ємною складовою формування світогляду людини та підготовки сучасного фахівця — кваліфікованого робітника, програміста, техніка, інженера, економіста тощо.

Практика — основне джерело розвитку математики

Очевидно, математика виникла на ранній стадії розвитку людства під впливом потреб практики. Розвиток ремесла, землеробства, торгівлі й обміну, навігації, управління державою потребував удосконалення вимірювань і розрахунків.

Неможливо точно відповісти на питання, коли саме було сформовано перші математичні поняття. Однак є переконливі писемні свідчення (папіруси, глиняні таблички), які підтверджують високий рівень математичних знань у могутніх цивілізацій Стародавнього Сходу — Єгипті та Вавилоні — за три-дві тися-

чі років до н. е. Тогочасна математика мала яскраво виражений конкретний характер. Її досягнення дійшли до нас у вигляді задач, більшість з яких належить до розряду господарських, і їхніх розв'язків. У них йдеться про вимірювання площ і об'ємів, про підрахунки врожаю і величини податку, про обчислення, пов'язані зі сплатою боргів та ін.

Приблизно у VII ст. до н. е. виникла грецька цивілізація, яка відрізнялась від країн Стародавнього Сходу політичним ладом і економікою. Розквіт науки і мистецтва у Стародавній Греції супроводжувався плідними теоретичними дослідженнями. Намагання стародавніх греків зрозуміти будову Всесвіту, визначити роль і місце людини у природі та суспільстві привели до утвердження нових форм раціонального мислення. У математиці ця форма мислення виявлялась у прагненні довести всі твердження, виходячи з невеликої кількості початкових тверджень. До тих часів математика мала «рецептурний» характер. Тож обґрунтування узвичаєних практичних «рецептів» стало одним з основних завдань грецьких математиків. Уже в III ст. до н. е. Евклід створив книгу «Начала», в якій у дедуктивній формі виклав основи тогочасної математики. Упродовж двох тисячоліть «Начала» Евкліда вважались взірцем строгості й істотно впливали на розвиток математики. Втім, аксіоматичний метод, за допомогою якого Евклід виклав основи геометрії, є загальноновизнаним при побудові наук, і не тільки математичних.

У Стародавній Греції були зроблені відкриття, які на багато століть визначили напрямки розвитку математики. Поряд із досягненнями теоретичного характеру тогочасні вчені мали багато суто практичних здобутків. Найвидатнішим представником прикладної математики того часу історики вважають Архімеда (приблизно 287–212 рр. до н. е.). Він був не тільки математиком, а й талановитим інженером. Його праці з обчислення площ і об'ємів стали передвісниками найпотужніших сучасних методів математики.

Останній період розвитку античного суспільства пов'язаний із впливом Римської імперії, де, на відміну від Греції, математикою цікавились мало. Після прийняття християнства у V ст. н.е. римський імператор Юстиніан навіть заборонив заняття математикою під загрозою смерті.

Після занепаду Римської імперії центр математичних досліджень перемістився на Схід. Найбільш значними досягненнями середньо-

вічної математики є запровадження в Індії сучасної десяткової позиційної системи запису чисел, введення від'ємних чисел і нуля, створення арабськими математиками (аль-Караджі, аль-Біруні, аль-Хайамі та ін.) основ алгебри, яка згодом виділилась у самостійний розділ математики. Математичні дослідження на Сході мали арифметико-алгебраїчний характер і були більш прикладними, ніж за часів античності. Арабські математики істотно розвинули тригонометрію з огляду на необхідність астрономічних досліджень та потреб навігації.

У той час, як Схід продовжував розвиватись, Західна Європа поступово занепадала. Феодальні чвари, низький рівень культури і виробництва аж ніяк не сприяли розвитку науки. Вивчення математики в культурних центрах того часу — монастирях — обмежувалось студіюванням арифметики.

На початку XII ст. економічне життя Заходу активізується, встановлюються торговельні зв'язки зі Сходом. Через арабів Європа знайомиться з працями грецьких вчених, в європейських країнах поживається інтерес до математики.

Кінець середньовіччя (XV-XVI ст.) у Західній Європі характеризується бурхливими змінами, пов'язаними з розпадом феодального суспільства і формуванням ринкових відносин. Розвиток промисловості, торгівлі, мореплавства, друкарської справи привів до розквіту культури, мистецтва і науки. Математика стає важливим засобом наукового Відродження. В процесі активних занять нею вчені створили сучасну алгебраїчну символіку.

Уже в епоху Відродження почалося використання різних машин і механізмів на мануфактурах, у будівництві, гірничій справі тощо. Відтак з'явилися передумови для розвитку теоретичної механіки та вивчення механічного руху. Вчені мусили подбати про створення відповідного математичного апарату. На початку XVII ст. Рене Декарт (1596 – 1650) ввів у науковий обіг поняття змінної величини. Відтоді основним об'єктом математики стало поняття функції. Зусиллями Ньютона, Лейбніца, їхніх учнів і послідовників для вивчення функціональної залежності було розроблено новий математичний апарат. Його застосування при розв'язуванні задач механіки, астрономії та інших наук надовго визначило подальші шляхи розвитку математики.

Розвиток ринкових відносин у XVIII і XIX століттях супроводжувався перебудовою виробництва із застосуванням парових машин, інших технічних засобів. Розвиток математики у той час

був тісно пов'язаний з технічною революцією, вимогами практики. Створення геометричних теорій, розвиток поняття про число, вивчення функцій стимулювалися необхідністю вирішення науково-технічних проблем в царині кораблебудівництва і мореплавства, балістики, гідротехніки, геодезії і картографії, астрономії.

З часом безпосередній вплив практики на розвиток математики дещо зменшувався. Однак становлення різних природничих і технічних наук, передусім – фізики, було тісно пов'язане з удосконаленням математичних методів, розширенням сфери їхнього застосування.

Таким чином, зв'язок математики з практикою найчастіше здійснюється через природничі і технічні науки.

Важливим джерелом розвитку математики є її внутрішні потреби, спрямовані на систематизацію теорій, їхнє узагальнення, вдосконалення наукових методів і т.ін.

Розвиток математики в XIX ст. визначався як її внутрішніми потребами, так і потребами практики. Яскраві результати були одержані і на тому, і на іншому шляху. Нерідко абстрактні математичні теорії з часом ставали прикладними. Так, наприклад, неевклідова геометрія, творцями якої були К. Ф. Гаусс (1777 – 1855), Я. Больяй (1802 – 1860) та М. І. Лобачевський (1792 – 1856), постанала на ґрунті намагань удосконалити «Начала» Евкліда. На початку XX ст. це відкриття стало невід'ємною частиною сучасних фізичних теорій.

Ще більшу роль у вивченні навколишнього світу та у суспільстві загалом відіграє математика в XX ст. Її можливості істотно зросли внаслідок створення електронно-обчислювальних машин. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується значним ростом сфер застосування математики.

Чим же пояснюється розмаїття застосувань математики й універсальність її методів? По-перше, математика послуговується досить загальними і чіткими об'єктами для описання навколишніх явищ (геометричні фігури, числа, рівняння, вектори і т. д.).

А, по-друге, вченими розроблено низку потужних методів дослідження математичних об'єктів: метод координат, алгебраїчні методи, методи математичного аналізу й ін.

Таким чином, математика є зручним і ефективним засобом для описання і дослідження закономірностей реальності.

Математичне моделювання

Застосування математики для описання і дослідження процесів та явищ дійсності ставить нас перед необхідністю знайти відповідь на питання: «А в чому полягає сутність розв'язання прикладної задачі за допомогою математики?». Власне, про це ми і поговоримо.

Усім вам доводилось застосовувати математичні знання для розрахунку швидкості заповнення басейну, часу виконання роботи та ін. Ці застосування передбачають заміну реальних об'єктів і відношень між ними математичними об'єктами і відношеннями між ними (функціями, рівняннями, геометричними фігурами).

Для цього необхідно передусім виділити суттєві характеристики реальних об'єктів і відношень між ними, проігнорувавши несуттєві, а тоді — саме їх замінити математичними об'єктами і зв'язками між ними. Процес такого заміщення називають **математичним моделюванням**.

Математичними моделями звичайно називають наближені описання якогось класу явищ зовнішнього світу, виражені за допомогою математичних понять і відношень між ними.

Математичною моделлю вільного падіння тіла на землю є функція

$$h(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t,$$

де h — висота, м; g — прискорення вільного падіння, м/с²; t — час, с; v_0 — початкова швидкість, м/с; h_0 — початкова висота тіла, м. Ця функція описує залежність відстані тіла від Землі в момент часу t за умови, що тіло знаходиться на висоті h_0 в момент часу $t = 0$. А якщо нас цікавить питання: “Коли тіло впаде на Землю?”, то його математичною моделлю є задача: знайти значення t , при якому

$$h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 0.$$

Застосування математики при розв'язанні практичних задач зводиться до їх перекладу мовою математики, розв'язання одержаної математичної задачі, тлумачення розв'язку.

Розглянемо задачу, яка демонструє застосування методу математичного моделювання на практиці. Побудова математичних моделей ґрунтується на нехтуванні неістотних властивостей

об'єктів чи понять, які моделюються. Наприклад, у багатьох випадках вільне падіння тіла можна вивчати за припущеннями:

- 1) Земля — інерціальна система;
- 2) прискорення вільного падіння є сталою величиною;
- 3) Земля є плоскою;
- 4) опір повітря можна не враховувати;
- 5) структуру і розміри тіла можна не враховувати.

Ці припущення, як нам підказує досвід, є природними і слухними за певних умов (тіло має невеликі розміри, воно симетричне, початкова швидкість невелика і т.п.).

Створення математичних моделей базується на використанні законів, що характеризують процес. Це можуть бути закони фізики, хімії, біології чи інших наук. У розглянутому прикладі необхідно скористатися другим законом Ньютона, який описує рух тіла під дією сили.

Математична задача, до якої звелось визначення часу падіння тіла з висоти h_0 , має, як ми бачили, вигляд квадратного рівняння:

$$h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 0.$$

Оскільки дискримінант цього рівняння додатний, то рівняння має два корені:

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Із фізичного змісту задачі випливає, що один корінь зайвий.

Справді, корінь $t_2 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$ від'ємний, тому його можна відкинути. Остаточна відповідь на поставлене питання є такою:

час падіння тіла визначається формулою $t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$.

Щоправда, математичні задачі, що виникають при моделюванні, не завжди такі прості, як наведена вище. Наприклад, якщо враховувати силу опору повітря при падінні тіла, то залежність висоти від часу і рівняння для знаходження часу падіння будуть значно складнішими. Необхідно мати певні математичні знання і навички, щоб досліджувати математичні моделі. Використання математики для вивчення економічних, соціальних процесів, інші нетрадиційні сфери її застосувань вимагають розробки но-

вих ідей і методів. У цьому проявляється вплив практики на розвиток математики у наш час.

Розв'язування одержаної при моделюванні математичної задачі не завершує розв'язування даної прикладної задачі, для якої було побудовано математичну модель. Одержані результати використовуються для прийняття якихось рішень чи прогнозування перебігу процесу, що вивчається. А отже, потрібна впевненість у тому, що одержаними результатами можна скористатись для цих цілей. Інакше кажучи, необхідно переконатись у відповідності побудованої моделі явищу, яке вивчається (в тій мірі, якої вимагає дана задача).

Розглянемо, наприклад, падіння каменя, кинутого у колодязь, рух парашутиста у вільному падінні, спуск кабіни космічного корабля у атмосфері. Зрозуміло, що точність розрахунків і складність моделей, які використовуються у даних прикладах, різні. Однак, і глибину колодязя, і швидкість приземлення космічного апарату належить розраховувати максимально вірогідно.

Дослідження адекватності математичної моделі явищу, яке вивчається, з'ясування того, наскільки близькі до реальних результати, одержані за допомогою математичної моделі, є найбільш складним і відповідальним етапом математичного моделювання. На цьому етапі існуюча модель може зазнати змін, які роблять її більш реальною, досконалою, хоча, як правило, і більш складною. Наприклад, врахувавши у розглянутій задачі те, що Земля має форму кулі і обертається навколо власної осі, а тверде тіло вільно падає на Землю з великої висоти, можна зробити всі розрахунки значно точніше, ніж за допомогою розглянутої раніше формули. Необхідність уточнення математичних моделей визначається вимогами практики.

Підбиваючи підсумки, можна стверджувати, що процес математичного моделювання загалом складається з трьох етапів:

1) вибір чи побудова математичної моделі для описання даної задачі;

2) дослідження побудованої моделі, тобто розв'язування математичної задачі;

3) тлумачення результатів дослідження, встановлення відповідності одержаного результату цілям досліджень.

При необхідності уточнюється сама математична модель і результати, які з неї випливають.

Побудова математичної моделі ґрунтується на абстрагуванні від усіх властивостей об'єкта пізнання, крім кількісних і просторових. При побудові математичної моделі завжди виникає необхідність нехтувати тими чи іншими сторонами реальності. Про якість побудованої моделі можна судити лише за результатами порівняння дійсності з інформацією, отриманою шляхом дослідження моделі. Таким чином, метод математичного моделювання виходить з практики, створюючи математичні моделі явищ і процесів, і повертається до неї, щоб обґрунтувати доцільність створення моделі.

Підсумок

Основою застосування математики, як уже зазначалось, є процес математичного моделювання. До цієї діяльності Ви готувались, вивчаючи курс математики в основній школі. Там створювався запас математичних моделей, формувались навички їхньої побудови та дослідження.

У даному курсі передбачається систематизація, поглиблення і розширення знань, одержаних в основній школі, а також удосконалення навичок моделювання. Для моделювання реальних об'єктів і відношень, з якими Ви матимете справу при вивченні інших дисциплін, в майбутній професійній діяльності, необхідно суттєво розширити засоби математичного моделювання і дослідження математичних моделей, за рахунок введення нових класів функцій та математичних методів. Дана книга допоможе Вам у досягненні цих цілей.

Алгебра і початки аналізу

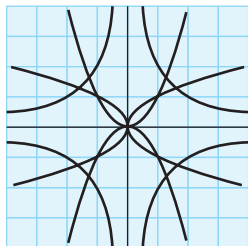


Розділ 1.

ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Кожній людині постійно доводиться мати справу з різними залежностями між величинами. У відповідності з цим вивчення залежностей є основним змістом її навчання в школі, а також у вищому навчальному закладі. Щоб переконатись у цьому, досить погортати сторінки підручників з фізики, хімії, технічних чи суспільних дисциплін, науково-популярних журналів та інших видань. Із закінченням навчання не зникає потреба враховувати, розглядати і досліджувати різні залежності. Для будівельників важливою є залежність вартості будівництва від його тривалості, залежність якості виконаних робіт від якості будівельних матеріалів. Для підприємств автомобільного транспорту викликає інтерес залежність витрат палива від якості доріг. Перелік таких прикладів із господарства, побуту, політики тощо можна продовжити.

Починаючи з XVII ст. вивчення найважливіших типів залежностей стало основним завданням математики. В математику міцно увійшли поняття змінної величини та функції, які стали і залишаються до цього часу потужними засобами моделювання реальних процесів, а тому й одними з головних об'єктів дослідження. У даному розділі закладено основи для вивчення функціональних залежностей між змінними величинами, виділено деякі найважливіші класи функцій, вивчаються елементарні методи дослідження функцій, а також продовжується вивчення однієї з найбільш застосовних функцій — степеневі.



Готуємось до вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки»

Вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» базується практично на усьому алгебраїчному матеріалі, який вивчався в попередніх класах. Головне призначення цієї теми якраз і полягає у його повторенні, систематизації і поглибленні. Тому для підготовки до вивчення теми наведено найважливіший матеріал у вигляді таблиць.

Числа та обчислення

Таблиця 1

Тема	Зміст	Приклади
Звичайні дроби	Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$ Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками. Множення: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$ Ділення: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$	$\frac{3}{5} + \frac{5}{6} = \frac{18}{30} + \frac{25}{30} = \frac{43}{30} = 1\frac{13}{30}.$

Тема	Зміст
Відсотки і пропорції	$1\% = 0,01$. $p\%$ від числа a дорівнюють $\frac{ap}{100}$. Якщо $p\%$ від числа a дорівнюють b , то $a = \frac{b}{p} \cdot 100$. Відсоткове відношення чисел a і b дорівнює $\frac{a}{b} \cdot 100\%$. Головна властивість пропорції $a : b = c : d$ — $ad = bc$.

Вирази та їхні перетворення

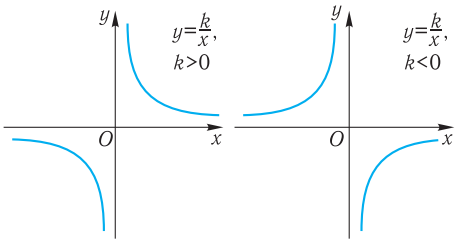
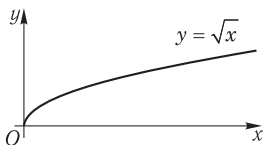
Таблиця 2

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$	
де x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.	

Функції і графіки

Таблиця 3

1. Лінійна функція $y = kx + b$. Графік — пряма, не паралельна осі y. Коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі x: $k = \operatorname{tg}\varphi$.	
2. Квадратична функція $y = ax^2, a \neq 0$. Графік — парабола, вітки якої спрямовані вгору, якщо $a > 0$, і вниз, якщо $a < 0$.	

3. Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Графік — гіпербола, яка при $k > 0$ розташована у I і III чвертях, а при $k < 0$ — у II і IV чвертях.	
4. Функція $y = \sqrt{x}$. Визначена на проміжку $[0; +\infty)$.	

Рівняння

Таблиця 4

Тип рівняння	Розв'язання
Лінійне рівняння $ax = b$	Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$.
	Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то рівняння не має коренів.
	Якщо $a = 0$, $b = 0$, то будь-яке x є коренем рівняння.
Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$ — його дискримінант	Якщо $D < 0$, то рівняння не має коренів. Якщо $D = 0$, то рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$. Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
Неповне квадратне рівняння (один з коефіцієнтів b або c дорівнює 0)	$ax^2 + bx = 0$ або $x(ax + b) = 0$, тоді $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$. $ax^2 + c = 0$ або $x^2 = -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то рівняння не має коренів.

Означення степеня з цілим показником

Таблиця 5

Степінь з натуральним показником	$n \in N, n > 1 \Rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n. \quad a^1 = a.$
Степінь з нульовим показником	$a^0 = 1, a \neq 0.$
Степінь з цілим від'ємним показником	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in N.$

Властивості степеня з цілим показником

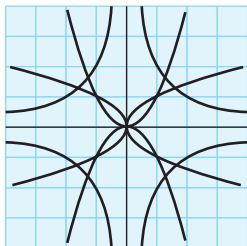
Таблиця 6

Добуток степенів з однаковими основами	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, x, y \in Z.$
Частка від ділення степенів з однаковими основами	$a^x : a^y = a^{x-y}, x, y \in Z.$
Піднесення степеня до степеня	$(a^x)^y = a^{xy}, x, y \in Z.$
Степінь добутку	$(ab)^x = a^x \cdot b^x, x \in Z.$
Степінь частки	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, x \in Z.$

Арифметичний квадратний корінь та його властивості

Таблиця 7

Означення	$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0, (\sqrt{a})^2 = a$
Арифметичний квадратний корінь з добутку	$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$
Арифметичний квадратний корінь з дробу	$a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$
Арифметичний квадратний корінь з квадрата	$\sqrt{a^2} = a .$

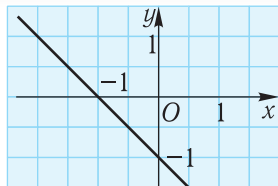


**Тест для діагностики
готовності до вивчення
теми «Функції, їхні
властивості та графіки»**

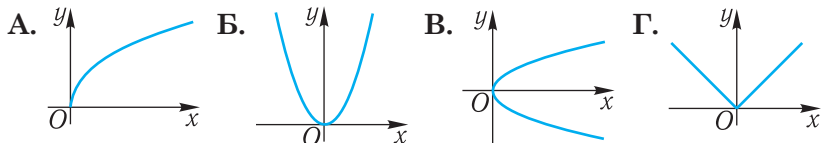
- Обчисліть: $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$.
А. $-\frac{27}{8}$. Б. $\frac{8}{27}$. В. $-\frac{8}{27}$. Г. $\frac{27}{8}$.
- Порівняйте без обчислювальних засобів числа $a = \frac{4}{5}$ і $b = \frac{5}{6}$.
А. $a < b$. Б. $a = b$. В. $a > b$.
Г. Порівняти неможливо.
- Після підвищення цін на 10% ціна товару дорівнювала 220 грн. Якою була початкова ціна цього товару?
А. 242 грн. Б. 200 грн. В. 198 грн. Г. 180 грн.
- Обчисліть значення виразу $\frac{x-x^3}{2}$ при $x = -\sqrt{5}$.
А. $-3\sqrt{5}$. Б. $-2\sqrt{5}$. В. $2\sqrt{5}$. Г. $3\sqrt{5}$.
- Скоротіть дріб $\frac{a-2}{a^2-4}$.
А. $\frac{1}{a+2}$. Б. $\frac{1}{a-2}$. В. $a-2$. Г. $\frac{1}{2-a}$.
- Подайте вираз $\left(\frac{a^6}{a^2}\right)^5$ у вигляді степеня числа a .
А. a^{15} . Б. a^{20} . В. a^8 . Г. a^9 .
- Серед наведених точок укажіть точку, через яку проходить графік функції $y = -\frac{2}{x}$.
А. $(-1; -2)$. Б. $(-1; 2)$. В. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. Г. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

8. На рисунку зображено графік функції ...

А. $y = x + 1$. Б. $y = x - 1$.
В. $y = -x - 1$. Г. $y = -x + 1$.



9. Графік функції
- $y = x^2$
- зображено на рисунку ...

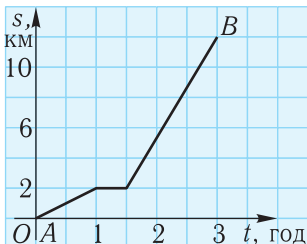


10. Яка з наведених функцій є оберненою пропорційністю?

А. $y = 2x$. Б. $y = x^2$. В. $y = \frac{2}{x}$. Г. $y = \sqrt{x}$.

11. На рисунку представлено графік руху туриста з пункту А в пункт В, де
- s
- відстань від пункту А до туриста у момент часу
- t
- . Скільки часу рухався турист до привалу?

А. 2 год. Б. 3 год.
В. 1,5 год. Г. 1 год.



12. Із формули
- $s = \frac{vt}{2} + 1$
- виразіть залежність часу
- $t > 0$
- від шляху
- s
- .

А. $t = \frac{v}{2s-2}$. Б. $t = \frac{2s-2}{v}$. В. $t = \frac{2s+2}{v}$. Г. $t = \frac{2s-1}{v}$.

13. Скільки коренів має рівняння
- $3x^2 - 5x + 2 = 0$
- ?

А. Жодного. Б. Один. В. Два. Г. Більше від двох.

14. Розв'яжіть систему нерівностей
- $$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0, \\ 1 - x > 0. \end{cases}$$

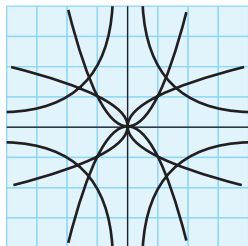
А. $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. Б. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$. В. $\left(-1; \frac{1}{2}\right]$. Г. $(1; +\infty)$.

15. Знайдіть область визначення виразу
- $\sqrt{1-2x}$
- .

А. $x \geq \frac{1}{2}$. Б. $x \leq \frac{1}{2}$. В. $x \geq 2$. Г. $x \leq 2$.

16. Розв'яжіть нерівність:
- $x^2 < 4$
- .

А. $(2; +\infty)$. Б. $(-2; 2)$.
В. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Г. $(-\infty; 2)$.



§1. Функціональні залежності

Функціональні залежності між величинами можуть задаватися по-різному: за допомогою формул, графіків, таблиць, словесних описів. Вдосконаленню вмінь користуватися ними, добувати необхідну інформацію присвячено даний параграф.

1. Поняття функції, способи її задання



Характерною особливістю функціональних залежностей є те, що для кожного допустимого значення однієї зі змінних вони однозначно визначають значення другої змінної. Так, для кожного значення t за формулою $s = 3t - 1$ можна знайти **лише одне** значення s . Узагальнимо спочатку те, що вивчалось про функціональні залежності раніше.

Нехай задано дві змінні x і y , які набувають числових значень, і D — множина значень змінної x .

Залежність між змінними x і y , яка для кожного значення x із D визначає єдине значення y , називається функціональною залежністю у від x з областю визначення D .

Змінну x у таких залежностях називатимемо **незалежною змінною або аргументом**, змінну y — **залежною змінною**. Функціональні залежності зазвичай називають **функціями** і позначають латинськими (іноді грецькими) літерами — f , g , F , φ тощо.

Функція — від латинського *function* — дія, виконання.

Область визначення функції f часто позначають $D(f)$. Значення змінної y , яке відповідає x , називають **значенням функції f у точці x** і позначають $f(x)$. Запис « $y = f(x)$ » означає, що задано функцію f . Функціональну залежність змінної y від x іноді записують так: $y = y(x)$.

Множину значень, яких набуває залежна змінна y , якщо x пробігає область визначення функції f , називають **множиною значень цієї функції** і позначають $E(f)$.

! Фраза «задати функцію y від x » означає сформулювати правило, за допомогою якого для кожного допустимого значення змінної x можна знайти відповідне йому значення змінної y .

Існують різні способи задання функції. У математиці функціональна залежність найчастіше задається **формулами**.

Як відомо, **лінійна функція** задається формулою: $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — аргумент. Наприклад, функції $y = 2x - 3$ (тут $k = 2$, $b = -3$), $y = -0,5x + 2$ (тут $k = -0,5$, $b = 2$), $y = 4x$ (тут $k = 4$, $b = 0$), $y = 5$ (тут $k = 0$, $b = 5$) є лінійними.

Квадратична функція задається формулою: $y = ax^2 + bx + c$, де a , b , c — деякі числа, $a \neq 0$, x — аргумент. Наприклад, функції $y = x^2$, $y = 3x^2 + 1$, $y = 2x^2 + x - 4$ є квадратичними. (Вкажіть для кожної з цих функцій, чому дорівнюють коефіцієнти a , b , c .)

Обернена пропорційність задається формулою $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ — деяке число, x — аргумент.

Такий спосіб задання функції називається **аналітичним**.

Зауважимо, що не кожна залежність між змінними є функціональною залежністю. Наприклад, залежність між змінними y і x , яка задається рівнянням $x^2 + y^2 = 1$, не є функціональною, бо, наприклад, значенню $x = 0$ відповідають два значення y : $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

! Якщо функція задана формулою, то при відсутності додаткових зауважень чи умов вважають, що її областю визначення є всі значення незалежної змінної, при яких ця формула має зміст.

Так, лінійна функція $y = kx + b$, квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ визначені при всіх значеннях x , тобто $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$ визначена при всіх значеннях x , окрім $x = 0$, тобто $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$, оскільки добування квадратного кореня з від'ємних чисел неможливе.

Приклад 1. Дано функцію $y = \frac{3}{x^2 - 1}$. Знайти:

- 1) область визначення функції;
- 2) значення функції в точці $x = -2$;
- 3) значення аргументу, за яких функція набуває значення 1.

□ 1) Функція визначена при всіх значеннях x , для яких знаменник дробу не дорівнює нулю, тобто при всіх x , окрім ± 1 . Отже, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$2) \text{ Значення функції в точці } x = -2 \text{ дорівнює: } y(-2) = \frac{3}{(-2)^2 - 1} = \frac{3}{4 - 1} = 1.$$

3) Щоб знайти значення аргументу, за яких функція набуває значення 1, розв'яжемо рівняння $1 = \frac{3}{x^2 - 1}$. Одержимо: $x^2 - 1 = 3$, $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Отже, у цих точках функція набуває значення 1. ■

Відповідь. 1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) 1; 3) -2 ; 2.

При розв'язуванні багатьох прикладних задач область визначення функції встановлюють, виходячи з фізичного чи геометричного змісту задачі. Наприклад, якщо розглядати залежність площі квадрата від довжини його сторони x , то областю визначення цієї функції буде інтервал $(0; +\infty)$, оскільки довжина сторони квадрата може виражатися тільки додатним числом. У такому разі інколи пишуть: $y = x^2$, $x > 0$.

! Зверніть увагу на те, що функції $y = x^2$ і $y = x^2$, $x > 0$, є різними функціями. У них не тільки не збігаються області визначення, вони також мають різні властивості, у чому переконаємося згодом.

У математиці та її застосуваннях дуже поширений *графічний спосіб задання функції*. Існує багато самописних приладів, які

викреслюють криві, встановлюючи тим самим залежність між досліджуваними величинами. Так, сейсмограф записує графік коливання земної кори. За цим графіком можна, наприклад, вивчати силу і характер поштовхів при землетрусі.

За допомогою лінії, зображеної на рис. 1, можна для кожного моменту часу $0 \leq t \leq 12$ вказати єдине значення температури середовища T , тобто ця лінія задає функціональну залежність між змінними t і T .

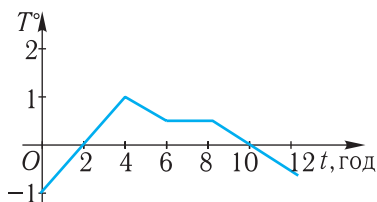


Рис. 1

Не завжди лінія на координатній площині визначає деяку функцію.

Щоб деяка лінія визначала функціональну залежність y від x , необхідно і достатньо, аби кожна пряма, паралельна осі y , і вісь y у перетинали цю лінію щонайбільше в одній точці. Так, лінії на рис. 2 визначають функціональні залежності y від x . На рис. 3 є вертикальні прямі, які перетинають лінію в двох точках. Тому відповідні лінії не визначають функцію y від x .

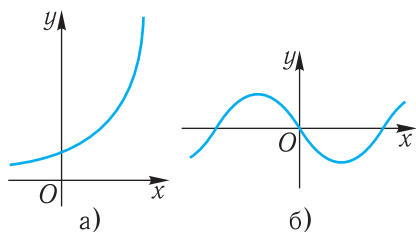


Рис. 2

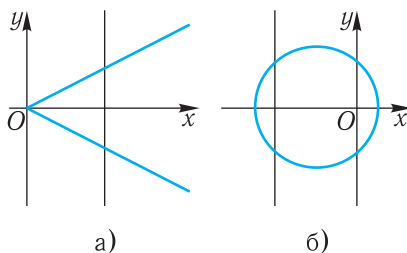


Рис. 3

Приклад 2. Функцію $y = f(x)$ задано графічно (рис. 4). Вкажіть:

- 1) її область визначення;
- 2) її множину значень;
- 3) значення функції при $x = 5$;
- 4) значення аргументу x , при якому функція набуває значення 3.

□ 1) Областю визначення функції є відрізок $[-2; 5]$.

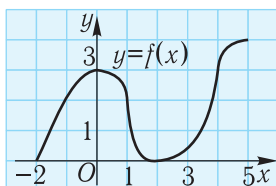


Рис. 4

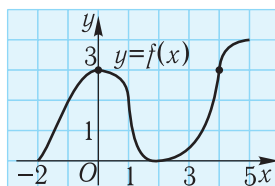


Рис. 5

2) Множиною значень функції є відрізок $[0; 4]$.

3) $f(5) = 4$.

4) Проведемо пряму $y = 3$ і знайдемо її точки перетину з графіком функції $y = f(x)$ (рис. 5). Це точки з координатами $(0; 3)$ і $(4; 3)$. Отже, значення 3 функція набуває при $x = 0$ і при $x = 4$. ■

Відповідь. 1) $[-2; 5]$; 2) $[0; 4]$; 3) 4; 4) 0; 4.

Приклад 3. На рис. 6 зображено залежність $N(t)$ кількості деталей, які виготовив робітник, від часу, де t у днях.

1) Скільки деталей виготовив робітник за перші 10 днів?

2) За які 10 днів — перші чи останні — робітник виготовив більше деталей?

3) За скільки днів робітник виготовив 50 деталей?

□ 1) Знайдемо значення функції $N(t)$ при $t = 10$. Зверніть увагу на масштаб по осі t і осі N . Маємо: $N(10) = 40$, тобто за перші 10 днів виготовлено 40 деталей.

2) За останні десять днів виготовлено $N(30) - N(20) = 80 - 60 = 20$ деталей, тобто менше, ніж за перші 10 днів.

3) Потрібно знайти значення аргументу, за якого функція набуває значення 50. Проведемо пряму $N = 50$ до перетину з графіком функції $N = N(t)$. Одержимо, що 50 деталей робітник виготовив за 15 днів. ■

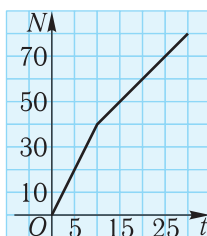


Рис. 6

Відповідь. 1) 40; 2) за перші; 3) 15.

! У розглянутому прикладі функція $N(t)$ визначена для натуральних значень аргументу. Її графік є скінченною сукупністю точок. Для наочності вони сполучені відрізками. Такий прийом зображень залежностей будемо використовувати і в подальшому.

Крім аналітичного і графічного способів задання функцій, застосовується також **табличний** спосіб. У фізиці та техніці часто залежності між змінними фіксуються на шкалах вимірювальних приладів. У таких випадках функцію задають у вигляді таблиці, у першому рядку якої містяться всі значення незалежної змінної $x_1, x_2, x_3, \dots$, у другому — відповідні їм значення функції. Найзручнішими є таблиці зі сталими різницями $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots$, причому значення різниці називається **кроком таблиці**. Для таких таблиць незалежна змінна набуває значень $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$, де

h — крок таблиці. Так, наведена нижче таблиця показує динаміку зміни обсягу пасажирських перевезень (у млн. людей) у нашій країні, починаючи з 2009 року.

2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
7,27	6,84	6,98	6,81	6,62	5,9	5,18	4,85	4,65



Функціональні залежності широко використовуються на практиці. Багато процесів і явищ описуються лінійною функцією. Наприклад, при рівномірному русі пройдений шлях прямо пропорційний часу, тиск газу p при сталому об'ємі прямо пропорційний його температурі T : $p = cT$ (закон Шарля); напруга U в електричному колі зі сталим опором R прямо пропорційна силі струму I : $U = RI$ (закон Ома). Залежність сили F , яка діє на пружину, від величини її розтягування x має вигляд: $F = -kx$ (закон Гука).

Чимало фізичних залежностей виражається за допомогою квадратичної функції. Наприклад, закон рух тіла вздовж координатної прямої під дією сталої сили можна подати у вигляді: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, залежність кінетичної енергії тіла W , маса якого дорівнює m , від швидкості v виражається формулою: $W = \frac{mv^2}{2}$. Тіла, які кинули горизонтально чи під кутом до горизонту, рухатимуться по параболічній траєкторії під дією сили тяжіння (рис. 7, 8).

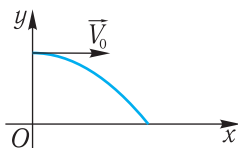


Рис. 7

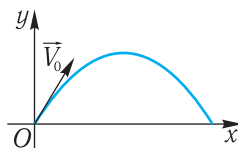


Рис. 8

Обернено пропорційними є:

- залежність часу, який витрачається на подолання даного шляху, від швидкості рівномірного прямолінійного руху;
- залежність між сторонами прямокутника при заданій площі;
- залежність між тиском газу та його об'ємом при сталій температурі.

Приклад 4. При вільному падінні тіла з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с залежність пройденого шляху від часу виражається

формулою: $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, де s — шлях, м; t — час, с; $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ — прискорення вільного падіння.

- 1) Який шлях пройде тіло за перші 2 с?
- 2) За який час тіло пройде 15 м?

□ 1) Щоб відповісти на перше запитання, потрібно обчислити значення функції s при $t = 2$:

$$s(2) \approx 10 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 40 \text{ (м)}.$$

2) Щоб відповісти на друге запитання, треба розв'язати квадратне рівняння: $10t + 5t^2 = 15$. Воно має два корені: -3 і 1 , але умову задачі задовольняє тільки значення $t = 1$. Отже, тіло подолає 15 м приблизно за 1 с. ■

Відповідь. 1) 40 м; 2) ≈ 1 с.

Приклад 5. Деяка маса газу при температурі 20°C мала об'єм 107 см^3 , а при 40°C об'єм дорівнював 114 см^3 .

- 1) Виходячи із закону Гей-Люссака, знайти функціональну залежність об'єму газу від температури.
- 2) Яким буде об'єм газу при 0°C ?

□ 1) Згідно із законом Гей-Люссака, об'єм газу V лінійно залежить від температури t : $V = a + bt$, де a і b — деякі числа. Знайдемо ці числа, користуючись умовою задачі. Оскільки $V(20) = 107$, $V(40) = 114$, то маємо систему рівнянь відносно a і b :

$$\begin{cases} 107 = a + 20b, \\ 114 = a + 40b. \end{cases}$$

Звідси: $b = 0,35$, $a = 100$. Отже, $V = 100 + 0,35t$.

2) $V(0) = 100 + 0,35 \cdot 0 = 100 \text{ (см}^3\text{)}$. ■

Відповідь. 1) $V = 100 + 0,35t$; 2) 100 см^3 .

✓ Контрольні запитання

- 1°. Які з наступних залежностей є функціональними:
 - а) кожному двоцифровому числу ставиться у відповідність сума його цифр;
 - б) кожному числу, яке не дорівнює нулеві, ставиться у відповідність обернене до нього число;
 - в) кожному числу ставиться у відповідність ціле число, менше від нього?

2°. Яка з ліній, зображених на рис. 9, а) – г), не визначає функцію y від x ?

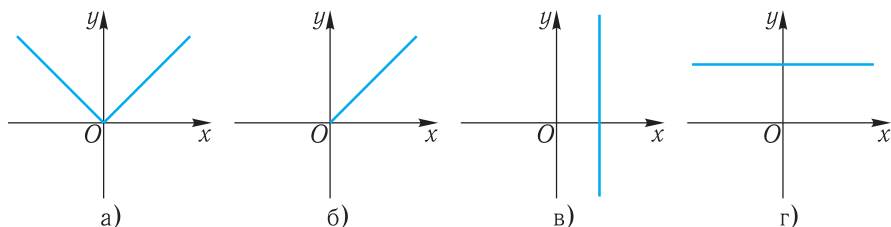


Рис. 9

3. Яким є значення функції $y = \frac{x}{2x-1}$ у точці $x = -1$; $x = 0$?
4. У скількох точках функція $y = x^2 - 2x$ набуває значення 0; -1 ; -2 ?
5. Для якої з наступних функцій: 1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y = x^2$ областю визначення є проміжок $(0; +\infty)$?

6. Дано функції: 1) $y = \frac{1-x}{2}$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = (1-x)^2$; 4) $y = (\sqrt{x})^2$.

а) Яка з них є лінійною; квадратичною; оберненою пропорційністю?

б) У яких точках квадратична функція набуває значення 1?

в) Яка з функцій не набуває значення 0?

7. Для графічно заданої функції $y = f(x)$ (рис. 10) знайдіть:

а) область визначення;

б) множину значень;

в) значення функції в точці $x = 0$; $x = 4$;

г) нулі функції, тобто точки, в яких функція набуває значення 0.

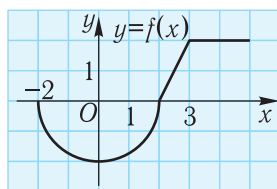


Рис. 10

2. Графік функції



Графічний спосіб задання функції більш наочний у порівнянні з аналітичним. За графіком легко охарактеризувати досліджувану величину. Наприклад, за графіком, зображеним на рис. 1, можна сказати, що температура протягом 12 годин змінювалась від -1° до $+1^\circ$. За графіком видно також, коли температура збільшувалась, коли зменшувалась, а коли залишалась незмінною.

Тому часто аналітичне задання функції супроводжують графіком. У даному пункті розглядаються графіки вже відомих вам функцій і деякі способи побудови графіків.

Графік функції $y = f(x)$ — це множина точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де x — довільне число з області визначення функції.

Для побудови графіка функції $y = f(x)$ на площині вводять прямокутну систему координат і будують точки з координатами $(x; f(x))$.

! Абсолютно точно побудувати графік функції неможливо, тому що неможливо точно зобразити навіть одну точку $(x_0; f(x_0))$ на координатній площині, а тим більше, якщо їх безліч. Тому під побудовою графіка функції розуміють побудову рисунка (найчастіше лінії), що відображає головні особливості ідеального графіка. Такі рисунки називають ескізами графіків. Отже, побудувати графік функції — означає побудувати ескіз графіка, тобто відобразити графічно всі основні властивості функції.

Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є, як вам вже відомо, пряма лінія. Для її побудови досить знайти дві точки графіка і через них провести пряму. Наприклад, для побудови графіка функції $y = 2x + 1$ візьмемо точки перетину прямої з осями координат, тобто точки $A(0; 1)$ і $B(-\frac{1}{2}; 0)$ і проведемо через них пряму (рис. 11).

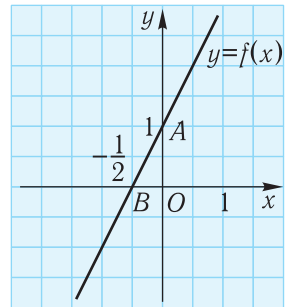


Рис. 11

Число k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої $y = kx + b$ до осі x і називається її **кутовим коефіцієнтом**.

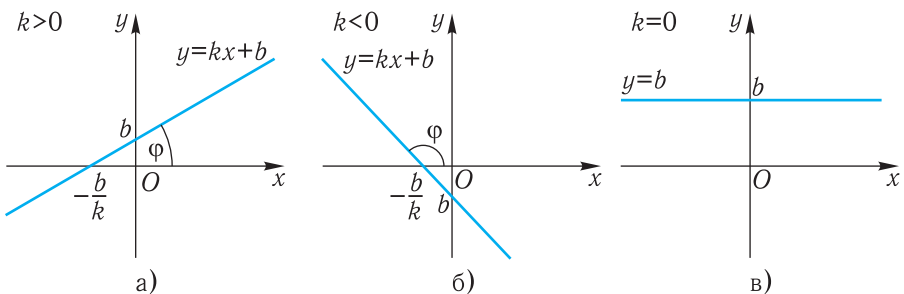


Рис. 12

На рис. 12, а), б) зображені графіки лінійних функцій залежно від знака k . Якщо $k = 0$, то маємо сталу функцію $y = b$, графік якої зображено на рис. 12, в).

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = |x|$.

□ Оскільки

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

то для невід'ємних значень x графік функції $y = |x|$ збігається з графіком функції $y = x$, а для від'ємних — з графіком функції $y = -x$ (рис. 13). ■

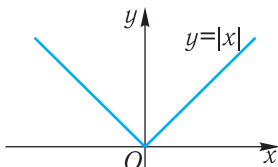


Рис. 13

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є **парабола**. Її розміщення на координатній площині залежить від коефіцієнтів a , b , c . Напрямок її віток визначається знаком числа a : при $a > 0$ вони спрямовані вгору, при $a < 0$ — вниз. Вершина її знаходиться у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Парабола може не мати спільних точок з віссю x , а може мати з нею одну чи дві спільні точки. Це залежить від кількості коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Парабола — грецьке παραβολή (parabole) від παραβολήν (parabollein) — прикладаю, порівнюю.

Параболу зазвичай будують за її вершиною і точками перетину з осями координат. Графіки функцій $y = x^2$ і $y = -x^2$ зображено на рис. 14, 15.

Розглянемо на конкретних прикладах побудову графіків квадратичної функції.

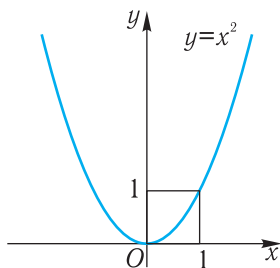


Рис. 14

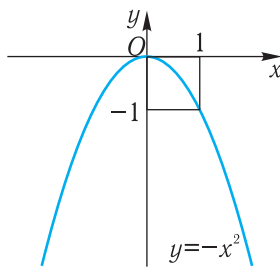


Рис. 15

Приклад 7. Побудувати графік функції:

1) $y = x^2 + 6x + 8$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 3$.

□ 1) Знайдемо абсцису вершини параболи за формулою $x_0 = -\frac{b}{2a}$: $x_0 = -\frac{6}{2} = -3$. Ордината вершини знаходиться обчисленням значення квадратичної функції при $x_0 = -3$: $y_0 = y(-3) = 9 - 18 + 8 = -1$. Отже, координати вершини — $(-3; -1)$. Знайдемо абсциси точок перетину графіка з віссю абсцис. Для цього розв'яжемо рівняння: $x^2 + 6x + 8 = 0$. Одержимо: $x_1 = -4$; $x_2 = -2$. Знайдемо точку перетину графіка з віссю y . Для цього обчислимо значення функції $y = x^2 + 6x + 8$ при $x = 0$: $y(0) = 8$. Графік перетинає вісь y в точці $(0; 8)$. Вітки параболи спрямовані вгору, адже коефіцієнт при x^2 є додатним. Побудуємо графік, враховуючи отримані результати (рис. 16).

2) Вершина параболи знаходиться у точці з координатами $(1; 4)$. Точки перетину параболи з віссю абсцис мають координати $(-1; 0)$ і $(3; 0)$. Графік функції перетинає вісь y в точці з координатами $(0; 3)$. Вітки параболи спрямовані вниз. Графік зображено на рис. 17.

3) Вершина параболи знаходиться у точці з координатами $(1; 1)$. Парабола не перетинає вісь x , оскільки рівняння $2x^2 - 4x + 3 = 0$ не має коренів. Парабола перетинає вісь y в точці з координатами $(0; 3)$. Для уточнення положення графіка обчислимо значення функції в точці $x = 2$: $y(2) = 3$, тобто парабола проходить через точку A з координатами $(2; 3)$. Графік зображено на рис. 18. ■

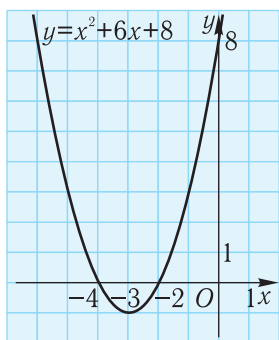


Рис. 16

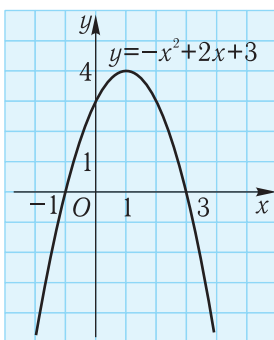


Рис. 17

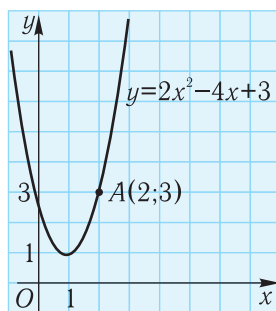


Рис. 18

Графіком оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$ є *гіпербола*, розміщення якої залежить від знака k (рис. 19, 20).

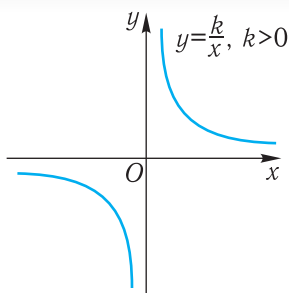


Рис. 19

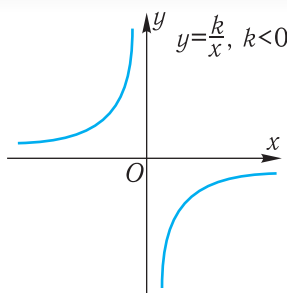


Рис. 20

Гіпербола (грецькою υπερβολη — hyperbole) — надлишок, перебільшення.

Приклад 8. На рис. 21 зображено графік оберненої пропорційності. Задати цю залежність формулою.

□ Обернена пропорційність задається формулою $y = \frac{k}{x}$. Необхідно знайти число k .

Графік функції проходить через точку з координатами $(-1; 2)$, тобто справджується рів-

ність: $2 = \frac{k}{-1}$. Звідси $k = -2$. ■

Відповідь. $y = -\frac{2}{x}$.

Існують різні способи побудови графіків функцій. Один з них — побудова за точками.

Графік функції потрібно будувати не за довільно обраними точками, а за **характерними** точками для даної функції.

Найпростіше побудувати графік лінійної функції. Для цього достатньо знайти дві точки, які належать графіку, і через них провести пряму. Характерною точкою для квадратичної функції є вершина параболі і абсиси точок перетину параболі з осями координат. А для оберненої пропорційності характерною є точка $x = 0$, у якій її графік «розривається». У подальшому ви познайомитеся із загальними методами знаходження характерних точок.

Іншим способом побудови графіка функції є **геометричні перетворення графіка**. Так, знаючи графік функції $y = f(x)$, можна

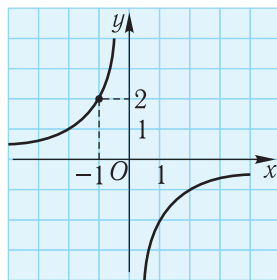


Рис. 21

побудувати графіки функцій $y = f(x) + a$ і $y = f(x + b)$, де a і b – деякі числа, за наступними правилами.

Графік функції $y = f(x) + a$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням його уздовж осі y на $|a|$ одиниць: у напрямі осі y , якщо $a > 0$, і у напрямі, протилежному напрямку осі y , якщо $a < 0$ (рис. 22).

Графік функції $y = f(x + b)$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням його уздовж осі x на $|b|$ одиниць: у напрямі осі x , якщо $b < 0$, і у напрямі, протилежному осі x , якщо $b > 0$ (рис. 23).

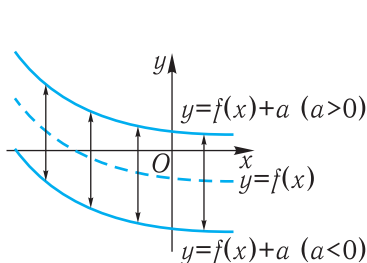


Рис. 22

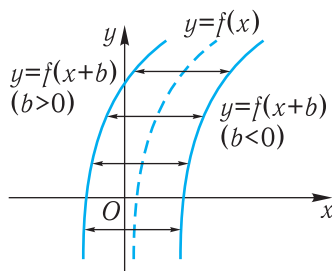


Рис. 23

Наприклад, графік функції $y = x^2 - 1$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ на 1 одиницю у напрямі, протилежному напрямку осі y , оскільки $x^2 - 1 = x^2 + (-1)$ (рис. 24). Графік функції $y = (x - 1)^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ паралельним перенесенням останнього на 1 одиницю у напрямі осі x , оскільки $(x - 1)^2 = (x + (-1))^2$ (рис. 25).

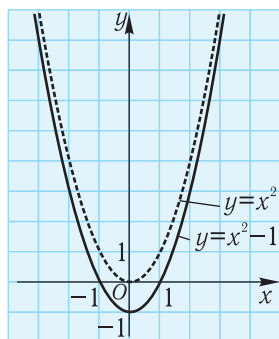


Рис. 24

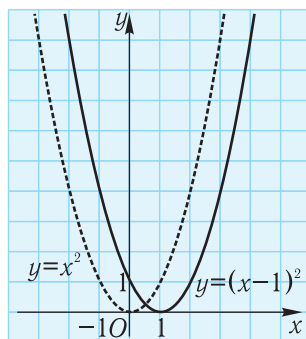


Рис. 25



! Побудова графіків за довільно вибраними точками може привести до суттєвих помилок.

Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{x}$, складемо таблицю її значень.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Тепер зобразимо відповідні точки на координатній площині і з'єднаємо їх відрізками. Одержимо лінію, зображену на рис. 26.

Однак вона зовсім не схожа на справжній графік $y = \frac{1}{x}$. Ви його до-

бре знаєте — це гіпербола (див. рис. 19). У чому ж ми припустились помилок? А у тому, що, як ми відмічали раніше, графік функції потрібно будувати не за довільно обраними точками, а за **характерними** точками для даної функції.

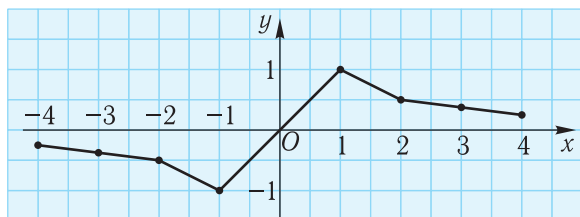


Рис. 26

Характерною точкою для квадратичної функції є вершина параболы. А для оберненої пропорційності характерною є точка $x = 0$, у якій її графік «розривається». У подальшому ви познайомитесь із загальними методами знаходження характерних точок.

Геометричні перетворення графіків дають змогу розв'язувати різноманітні задачі.

Приклад 9. Скільки коренів має рівняння $x^2 = -\frac{1}{x+2}$?

□ Рівняння має стільки коренів, скільки спільних точок мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = -\frac{1}{x+2}$. Зобразимо графіки цих функ-

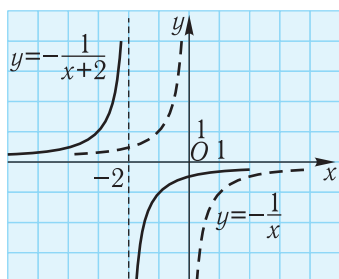


Рис. 27

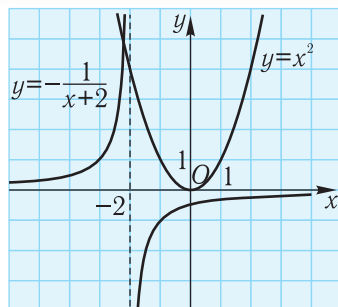


Рис. 28

цій в одній системі координат. Графік функції $y = -\frac{1}{x+2}$ можна отримати із графіка функції $y = -\frac{1}{x}$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі x на 2 одиниці вліво (рис. 27). Тоді із рис. 28 видно, що рівняння має один корінь. ■

Відповідь. Один корінь.

Тепер нагадаємо, як знаючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(\omega x)$, де k і ω — деякі додатні числа.

Графік функції $y = kf(x)$ ($k > 0$) одержують із графіка функції $y = f(x)$ розтягом в k разів від осі x при $k > 1$ (рис. 29) і стиском у $\frac{1}{k}$ разів до осі x при $0 < k < 1$ (рис. 30).

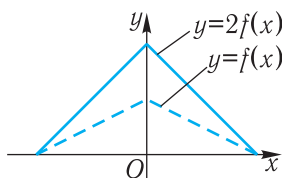


Рис. 29

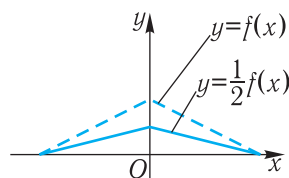


Рис. 30

Приклад 10. Побудувати графіки функцій $y = 1,5x^2$, $y = 0,5x^2$.

□ Графік функції $y = 1,5x^2$ одержимо з графіка функції $y = x^2$ розтягом від осі x в 1,5 рази (рис. 31). Графік функції $y = 0,5x^2$ одержимо з графіка $y = x^2$ стиском його до осі x в 2 рази (рис. 32). ■

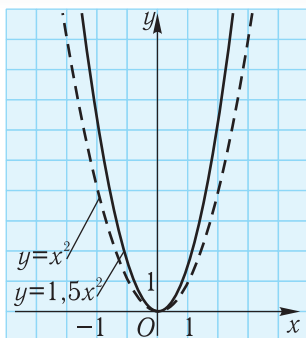


Рис. 31

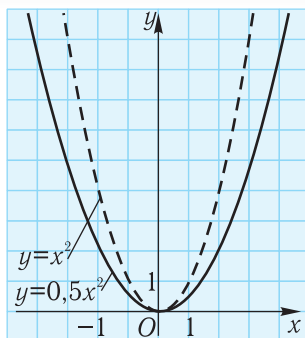


Рис. 32

Графік функції $y = f(\omega x)$ ($\omega > 0$) одержують із графіка функції $y = f(x)$ стиском його до осі y в ω разів при $\omega > 1$ (рис. 33)

і розтягом в $\frac{1}{\omega}$ разів від осі y при $0 < \omega < 1$ (рис. 34).

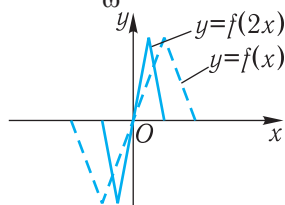


Рис. 33

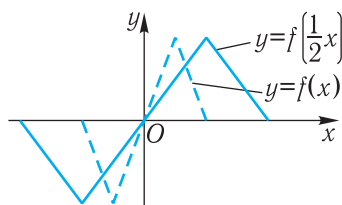


Рис. 34

Наприклад, графік функції $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ можна побудувати, розтягнувши графік функції $y = \sqrt{x}$ від осі y в 3 рази (рис. 35). Графік функції $y = \sqrt{3x}$ одержимо з графіка функції $y = \sqrt{x}$, стиснувши його до осі y утричі (рис. 36).

При побудові графіка функції іноді доводиться виконувати декілька геометричних перетворень.

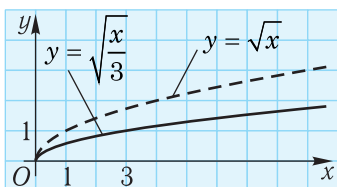


Рис. 35

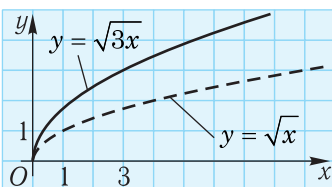


Рис. 36

Приклад 11. Побудувати графік функції $y = 2|x| - 1$.

□ Побудова виконується у два етапи:

- 1) графік функції $y = |x|$ розтягується від осі x удвічі (рис. 37);
- 2) одержаний графік паралельно переноситься на 1 одиницю у від'ємному напрямі осі y (рис. 38). ■

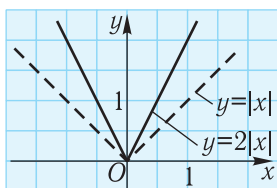


Рис. 37

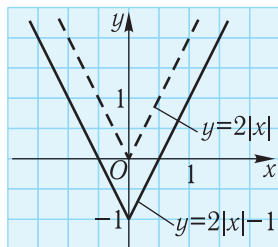


Рис. 38

Неважко побачити, що графіки лінійної і квадратичної функцій можна побудувати, не відриваючи олівця від аркушу паперу. Якщо функцію задано на деякому проміжку, та її графік подано у вигляді нерозривної лінії, то кажуть, що функція **неперервна** на цьому проміжку.

Так, лінійна і квадратична функції неперервні у своїх областях визначення. Функція $y = \frac{1}{x}$ неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. Однак графік цієї функції розривається у точці $x = 0$. Кажуть, що точка $x = 0$ є точкою розриву функції $y = \frac{1}{x}$.

Розглянемо графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, зображені на рис. 39 і 40.

Функція $y = f(x)$ неперервна у своїй області визначення, оскільки її графік є нерозривною лінією. Графік функції $y = g(x)$ такої влас-

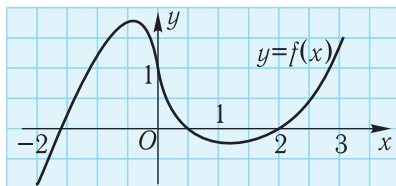


Рис. 39

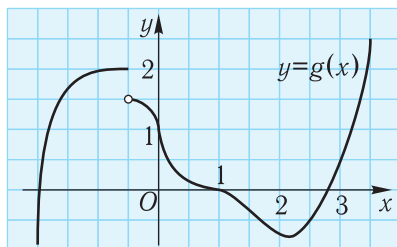


Рис. 40

тивості не має. Він розірваний у точці з абсцисою $x = -0,5$. Незамальованим кружечком позначено точку, яка не належить графіку функції $y = g(x)$. Тобто точка з координатами $(-0,5; 1,5)$ не належить цьому графіку. Водночас графіку функції $y = g(x)$ належить точка з координатами $(-0,5; 2)$: $g(-0,5) = 2$. Зверніть увагу на те, що дві точки з однаковими абсцисами не можуть одночасно належати графіку функції y від x .

Про функцію $y = g(x)$ (рис. 40) кажуть, що точка $x = -0,5$ є її **точкою розриву**. Наприклад, точка $x = 0$ є точкою розриву функції

$y = \frac{1}{x}$ (див. рис. 19 при $k = 1$) і $y = \frac{|x|}{x}$ (рис. 41).

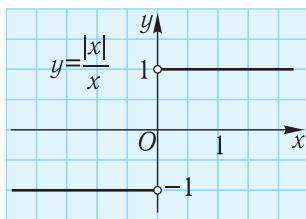


Рис. 41

Неперервна функція описує процеси, які відбуваються плавно, без «стрибків», тобто коли досліджувана величина за малий проміжок часу змінюється мало. Саме так у звичайних умовах змінюється довжина шляху, пройденого тілом, швидкість механічного руху, температура тіла при охолодженні.

! Однак існують процеси, в яких досліджувана величина змінюється стрибками. Наприклад, так змінюється залежно від часу маса товару m , що залишається в машині, якщо його розвантажують ящиками (рис. 42, а); сума грошей на банківському рахунку залежно від часу, якщо цей рахунок поповнюється, але гроші з цього рахунку не знімаються (рис. 42, б); висота трави на газоні залежно від часу за умови регулярного її підстригання за допомогою газонокосарки (рис. 42, в) тощо.

Важливо навчитися працювати з подібними функціями.

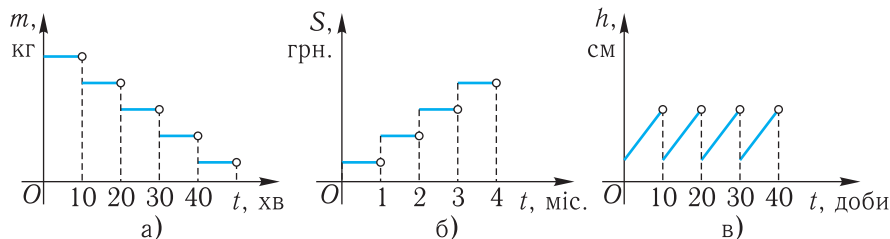


Рис. 42

✓ Контрольні запитання

- 1°. Чи проходить графік функції $y = 5x + 2$ через точку:
а) $A(0; 5)$; б) $B(0; 2)$; в) $C(-1; -2)$; г) $D(-1; 3)$?
- 2°. В яких точках пряма $y = 1 - 4x$ перетинає осі координат?
- 3°. Вкажіть декілька точок, через які проходить графік лінійної функції $y = -2$.
- 4°. Які знаки мають числа k і b , якщо графік лінійної функції $y = kx + b$ зображено на рис. 43?
- 5°. В яких з наступних парабол вітки напрямлені вгору:
а) $y = 1 - x + 2x^2$; б) $y = 5x - 3x^2 - 1$; в) $y = 1 - x^2$?
- 6°. Якою є абсциса вершини параболі:
а) $y = 1 - 3x + 2x^2$; б) $y = -5x^2 + x - 2$; в) $y = (x + 5)(x - 1)$?
- 7°. Якою є обернена пропорційність, графік якої зображено на рис. 44?

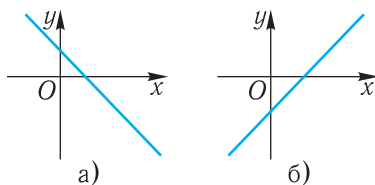


Рис. 43

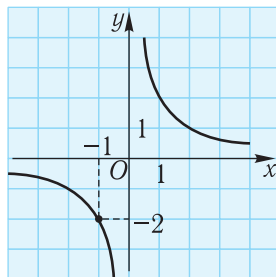


Рис. 44

- 8°. У скількох точках перетинаються графіки функцій:
а) $y = \frac{2}{x}$, $y = x$; б) $y = \frac{2}{x}$, $y = -x$; в) $y = -\frac{2}{x}$, $y = x^2$?
- 9°. На скільки одиниць і в якому напрямі слід паралельно перенести гіперболу $y = \frac{1}{x}$, щоб отримати гіперболу:
а) $y = \frac{1}{x + 4}$; б) $y = \frac{1}{x} + 4$?
- 10°. На скільки одиниць і в якому напрямі слід паралельно перенести параболу $y = x^2$, щоб її вершина опинилась у точці з координатами: а) $(-2; 0)$; б) $(0; 2)$?

11°. Якою формулою може бути задана функція, графік якої зображено на рис. 45, якщо його отримано за допомогою геометричних перетворень із графіка функції $y = \sqrt{x}$?

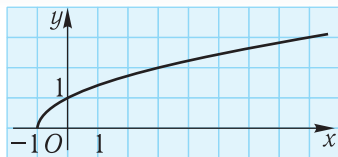
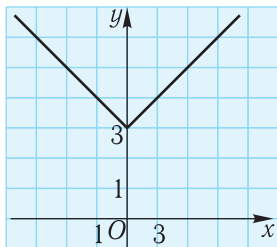
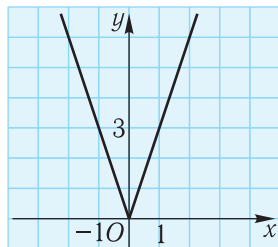


Рис. 45

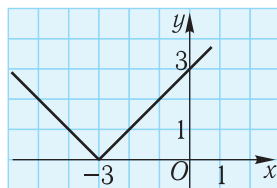
12. Для кожної з функцій $y = |x + 3|$, $y = |x| + 3$, $y = 3|x|$ підберіть відповідний графік на рис. 46, а)–в).



а)



б)



в)

Рис. 46

13*. На рис. 47 зображено графік функції $y = g(x)$. Які з наступних тверджень є правильними?

- 1) Функція $y = g(x)$ є неперервною.
- 2) Функція має три точки розриву.
- 3) Функція не визначена в точках розриву.
- 4) $g(0) = 3$.
- 5) $g(4) = 2$.

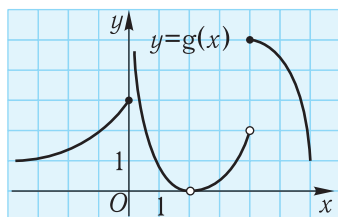


Рис. 47

Задачі

1. Дано функцію $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Знайдіть:

1°) $f(-2)$, $f(3)$, $\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right|$;

2°) нулі функції;

3) корені рівняння $f(x) = f(0)$.

2°. Дано функцію $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Знайдіть значення аргументу, за яких функція набуває значення: 1) -2 ; 2) 2 ; 3) 3 .

3. Знайдіть область визначення функції:

$$1^\circ) y = \frac{5x+1}{x^2+4}; \quad 2^\circ) y = \frac{5x+1}{x^2-4}; \quad 3^\circ) y = \frac{1}{2-|x|};$$

$$4^\circ) y = \sqrt{3-2x}; \quad 5) y = \frac{x}{x+3} + \sqrt{2-x}; \quad 6) y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

4. Функцію $y = f(x)$ задано графічно (рис. 48).

1°) Якою є її область визначення?

2°) Якою є множина значень функції?

3°) Скільки нулів має функція?

4°) За яких значень x функція набуває додатних (від'ємних) значень?

5°) Чи є функція парною? Непарною?

6) Чому дорівнює найбільше (найменше) значення функції?

7) Скільки коренів має рівняння $f(x) = 0,5$?

5. На рис. 49 зображено графіки рухів двох пішоходів назустріч один одному по шосе, яке з'єднує пункти A і B ; $s_1(t)$ і $s_2(t)$ — відстані від A , відповідно, до першого та другого пішоходів у момент часу t .

1°) Якою є відстань між пунктами?

2°) Скільки кілометрів пройшов перший пішохід за перші дві години?

3) Який з пішоходів до моменту зустрічі подолав більшу відстань?

4) Який з пішоходів прийшов у пункт призначення першим?

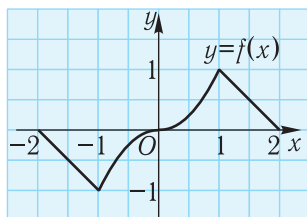


Рис. 48

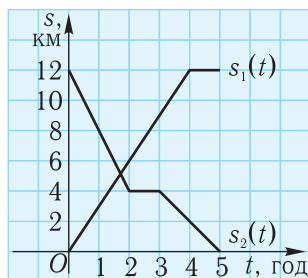


Рис. 49

6. На рис. 50 наведено графік залежності часу t , який витрачається на шлях з пункту A в пункт B , від швидкості руху v , що представляє собою обернену пропорційність. З якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з A в B менш ніж за 2 години?

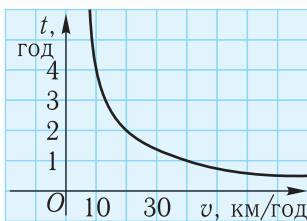


Рис. 50

- 7°. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x-3}{2}$; 2) $y = -3$; 3) $y = -\frac{2}{x}$; 4) $y = x^2 - 5x + 4$;

5) $y = -3x^2 - 2x + 1$; 6) $y = x^2 - 4x + 4$; 7) $y = (x+2)(x-4)$.

8. Побудуйте графік функції за допомогою геометричних перетворень:

1°) $y = (x - 0,5)^2$; 2°) $y = x^2 - 0,5$; 3) $y = \frac{x^2}{2}$; 4°) $y = \sqrt{x+2}$;

5°) $y = \sqrt{x} - 2$; 6°) $y = \frac{1}{x-3}$; 7°) $y = \frac{1}{x} + 3$; 8°) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

9. На рис. 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1°) $y = f(x-1)$;

2°) $y = f(x) - 1$;

3) $y = f(2x)$;

4) $y = 2f(x)$.

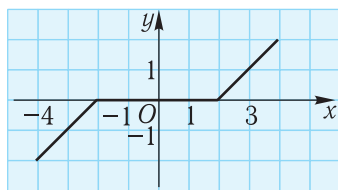


Рис. 51

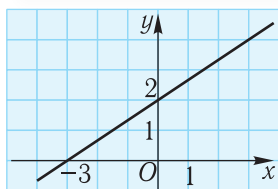
10. Знайдіть лінійну функцію, якщо:

1°) її графік проходить через точки $A(1; -1)$ і $B(2; -1)$;

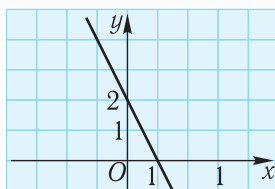
2) її графік утворює кут 135° з віссю x і проходить через точку $A(0; 2)$.

- 11°. Задайте за допомогою формули функції, графіки яких зображено на рис. 52, а)–в).

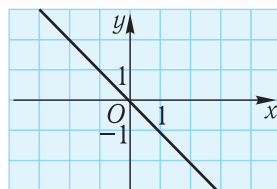
12. Напруга в електричному колі рівномірно зростає, тобто лінійно залежить від часу. На початку досліду напруга дорівнювала 10 В, а наприкінці досліду, що тривав 5 с, напруга збільшилася у 1,5 разів.



а)



б)



в)

Рис. 52

- 1) Виразить залежність напруги від часу і побудуйте графік цієї функції.
- 2) Якою була напруга через 3 с після початку дослідів?
- 13°. Знайдіть обернену пропорційність, якщо відомо, що її графік проходить через точку $A(-1; 3)$. Побудуйте її графік.
14. Згідно із законом Бойля–Маріотта, тиск p і об'єм газу V пов'язані формулою $p = \frac{c}{V}$, де c — деяке число, стає для даної маси і температури газу. Побудуйте графік цієї залежності, якщо при тиску $p = 10$ Па об'єм газу дорівнює 0,5 л.

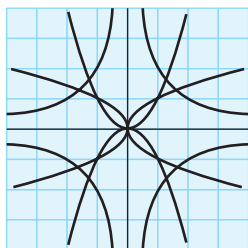
Вправи для повторення

15. Які з наступних пар точок симетричні відносно осі y , а які — відносно початку координат:
 - 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$;
 - 2) $A(0; 1)$, $B(0; -1)$;
 - 3) $A(1; 2)$, $B(-1; 2)$;
 - 4) $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$?
16. Вкажіть функції, графіки яких симетричні відносно осі y , а яких — відносно початку координат:
 - 1) $y = x$;
 - 2) $y = -x + 1$;
 - 3) $y = x^2$;
 - 4) $y = x^3$;
 - 5) $y = \frac{1}{x}$.
17. Доведіть, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = \sqrt{x}$.
18. Чому дорівнює відстань між точками:
 - 1) $A(x)$ і $B(2)$;
 - 2) $A(a)$ і $B(-3)$;
 - 3) $A(a)$ і $B(b)$;
 - 4) $A(a)$ і $B(-b)$?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація, приклади
Залежність між змінними x і y , яка для кожного значення x із D визначає єдине значення y , називається функціональною залежністю y від x з областю визначення D .	Наприклад, висота від літака до поверхні землі є функцією часу його перебування в польоті.
Графік функції $y = f(x)$ — це множина точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де x — довільне число з області визначення функції.	Часто графіком функції є деяка лінія на площині, але не будь-яка лінія є графіком деякої функції.



§2. Основні властивості функцій

Вивчення реальних процесів часто зводиться до дослідження залежностей, які описують ці процеси. Дослідити функціональну залежність — означає виявити її характерні особливості. Характерними особливостями функції є, наприклад, її зростання чи спадання, парність чи непарність, неперервність. Розгляду цих властивостей і присвячено даний параграф.

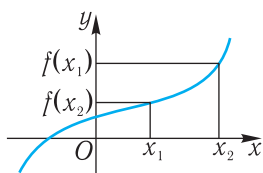
1. Спадання і зростання функцій



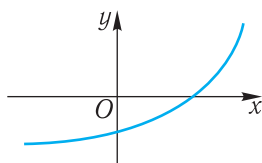
Розглянемо функції, графіки яких зображено на рис. 53.

Характерною ознакою цих функцій є те, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Такі функції називають **зростаючими**.

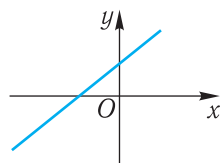
Зростаючі функції описують процеси і явища, в яких залежна величина збільшується зі зростанням незалежної. Наприклад, температура води з часом збільшується при її нагріванні до моменту кипіння. Також збільшується з часом швидкість тіла при вільному падінні до моменту падіння.



а)



б)



в)

Рис. 53

Якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то таку функцію називають **спадною** (рис. 54).

Процеси і явища, в яких залежна величина зменшується при зростанні незалежної, описуються спадними функціями. Наприклад, зменшується атмосферний тиск при зростанні висоти над рівнем моря, швидкість тіла при гальмуванні.

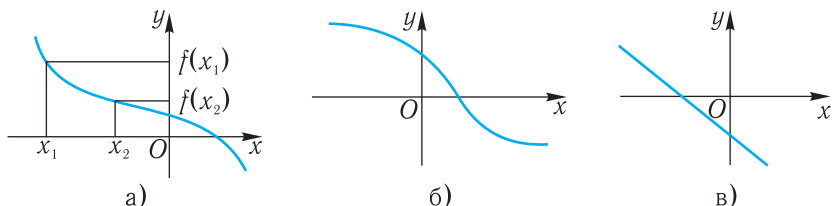


Рис. 54

Зростаючі чи спадні функції називають **монотонними**.

Монотонний — грецькою μονοτονος (monotonos), від μονος (monos) — один, і τονος (tonos) — натягування, напруження — однтонний, однозвучний, одноманітний.

Багато функцій не є монотонними. Наприклад, квадратична функція $y = x^2$ (див. рис. 14) чи обернена пропорційність (див. рис. 19, 20). Однак, якщо розглядати функцію $y = x^2$ тільки на проміжку $(-\infty; 0]$, то вона спадає. На проміжку $[0; +\infty)$ ця функція зростає.

Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2 , таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2 , таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Встановлення проміжків, на яких функція зростає чи спадає, є важливим завданням у дослідженні цієї функції. Це завдання називають **знаходженням проміжків монотонності функції**. Для функцій, заданих графічно, воно розв'язується досить легко.

Приклад 1. На рис. 55 зображено графік функції $y = f(x)$. З'ясувати, чи є ця функція монотонною. Вказати проміжки зростання і спадання функції. Знайти проміжок, на якому функція набуває сталого значення.

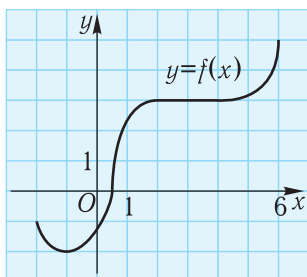


Рис. 55

□ Функція не є монотонною. Вона спадає на проміжку $[-2; -1]$ і зростає на кожному з проміжків $[-1; 2]$ і $[4; 6]$. Функція зберігає сталі значення, що дорівнює 3, на проміжку $[2; 4]$. ■

Приклад 2. На рис. 56 зображено графік швидкості руху автомобіля. Охарактеризувати його рух.

□ Перші півгодини швидкість руху автомобіля зростала від 0 км/год до 90 км/год, тобто автомобіль рухався прискорено. Протягом наступних двох годин (на часовому проміжку $[0,5; 2,5]$) він рухався зі сталою швидкістю 90 км/год, тобто рівномірно. Після цього швидкість почала зменшуватись, і через годину автомобіль зупинився. Всього він рухався 3,5 год. ■

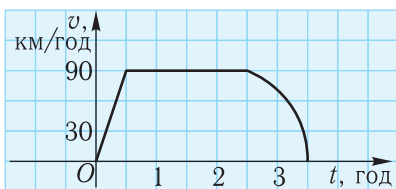


Рис. 56



Для функцій, заданих аналітично, знаходити проміжки зростання і спадання досить важко. Розв'яжемо цю проблему для вже знайомих вам функцій: лінійної, квадратичної і оберненої пропорційності.

У лінійної функції $y = kx + b$ коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу її графіка (прямої) до осі x . Якщо $k > 0$, то $\operatorname{tg} \varphi > 0$ і $0^\circ < \varphi < 90^\circ$. Отже, кут нахилу прямої до осі x є гострим, і лінійна функція зростає (див. рис. 12, а). Якщо $k = \operatorname{tg} \varphi < 0$, то $90^\circ < \varphi < 180^\circ$. Відтак кут нахилу прямої до осі x є тупим, і лінійна функція спадає (див. рис. 12, б).

Наприклад, лінійна функція $y = \frac{x-1}{2}$ є зростаючою, оскільки $k = \frac{1}{2} > 0$, а лінійна функція $y = \frac{1-x}{2}$ є спадною, бо $k = -\frac{1}{2} < 0$.

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, вершина якої знаходиться у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Якщо $a > 0$, то квадратична функція спадає на проміжку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і зростає на проміжку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ (рис. 57).

Якщо $a < 0$, то квадратична функція зростає на проміжку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і спадає на проміжку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ (рис. 58).

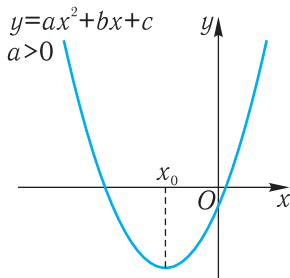


Рис. 57

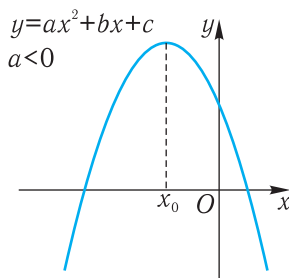


Рис. 58

Наприклад, вершина параболи $y = x^2 + 2x - 3$ знаходиться у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{2}{2} = -1$ і $a = 1 > 0$. Тому квадратична функція $y = x^2 + 2x - 3$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

! Розглянемо тепер обернену пропорційність. Зверніть увагу на те, що функція $y = \frac{1}{x}$ не є спадною у своїй області визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Порівняємо, наприклад, значення цієї функції в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$: $y(1) = 1 > y(-1) = -1$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Однак, вона спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Згадайте графік функції $y = \sqrt{x}$ і поміркуйте, чи є вона монотонною.

✓ Контрольні запитання

- 1°. Яка з функцій, графіки яких зображено на рис. 59, а)–г), є: 1) зростаючою; 2) спадною?
- 2°. Які з функцій, графіки яких зображені на рис. 59, а)–г), мають проміжки сталості?
- 3°. Які з функцій, графіки яких зображені на рис. 60, а)–г), зростають на проміжку $[0; 1]$?
- 4°. Які з наступних лінійних функцій є зростаючими (спадними):
а) $y = 1 - x$; б) $y = x - 1$; в) $y = -1$; г) $y = -2(x + 1)$?

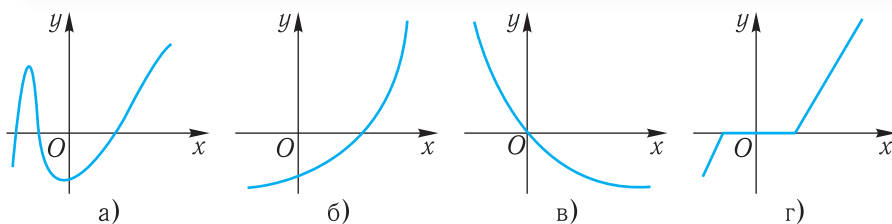


Рис. 59

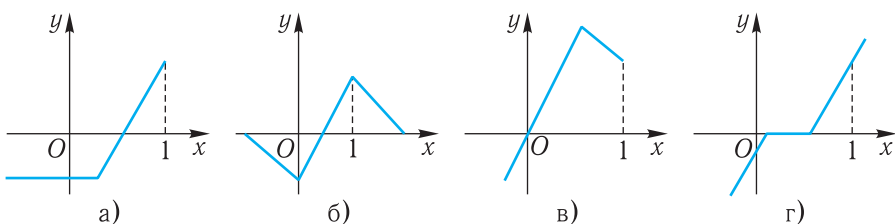


Рис. 60

5. Відомо, що $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. Чи може функція $y = f(x)$ бути монотонною?
- 6°. Функція $y = f(x)$ спадає на проміжку $[-2; 2]$. Порівняйте, якщо це можливо, числа $f(-0,5)$ і $f(-1)$.
7. Яким є проміжок спадання функції:
- а) $y = -\frac{x^2}{3}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = (x - 1)^2$?
- 8°. Яка з наведених функцій зростає на проміжку $(0; +\infty)$:
- а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \frac{1}{3x}$; в) $y = \frac{1}{-3x}$; г) $y = -\frac{x}{3}$?

2. Парність і непарність функцій



Розглядаючи графіки функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ (рис. 61, 62), ми помічаємо, що вони симетричні відносно осі y .

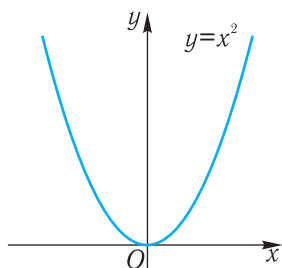


Рис. 61

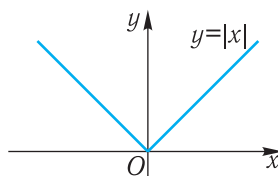


Рис. 62

Функцію, графік якої симетричний відносно осі y , називають **парною**. Якщо функція $y = f(x)$ є парною, то її область визначення симетрична відносно початку координат, і в точках x і $-x$, симетричних відносно початку координат, функція набуває того самого значення: $f(-x) = f(x)$. Тому можна дати наступне означення парної функції.

Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо:

- 1) її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$;
- 2) для кожного x із області визначення функції виконується рівність:

$$f(-x) = f(x).$$

! Із даного означення і попередніх міркувань випливає твердження:
функція є парною тоді і тільки тоді, коли її графік симетричний відносно осі ординат.

Графік функції $y = \frac{1}{x}$ (рис. 63) симетричний відносно початку координат. Такі функції називають **непарними**. Якщо функція є непарною, то її область визначення симетрична відносно початку координат, і в точках x і $-x$, симетричних відносно початку координат, функція набуває протилежних значень: $f(-x) = -f(x)$.

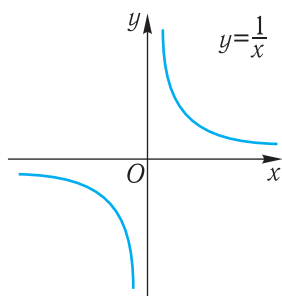


Рис. 63

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо:

- 1) її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$;
- 2) для кожного x із області визначення функції виконується рівність:

$$f(-x) = -f(x).$$

! Із даного означення і попередніх міркувань випливає твердження:
функція є непарною тоді і тільки тоді, коли її графік симетричний відносно початку координат.

Виявлення парності чи непарності функції полегшує побудову графіка, зменшує обсяг необхідних досліджень: можна досліджувати поведінку функції і будувати її графік тільки для невід'ємних значень аргументу, а для від'ємних – скористатись згаданою вище симетрією. Зокрема, якщо парна функція зростає на проміжку $[a; b]$, $a > 0$, то на проміжку $[-b; -a]$ вона спадає, і навпаки.

Дослідження функції на парність чи непарність проводять згідно з означенням. **Якщо хоча б одна з цих ознак в обох означеннях не справджується, то функція не є ні парною, ані непарною.**

Приклад 3. Дослідити на парність і непарність функцію:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}; \quad 2) f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 3}; \quad 3) f(x) = \frac{x^3}{x - 3}.$$

□ 1) Перевіримо, чи є симетричною область визначення функції відносно початку координат. Область визначення функції

$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ містить усі дійсні числа, відмінні від $\pm\sqrt{3}$, тобто вона симетрична відносно початку координат. Знайдемо вираз для

$f(-x)$: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = -\frac{x^3}{x^2 - 3}$. Порівняємо його з $f(x)$: $f(-x) = -f(x)$. Отже, $f(x)$ — непарна функція.

2) Область визначення функції $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 3}$ збігається з областю визначення функції з попереднього завдання. Справджується рівність: $f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2 - 3} = \frac{x^4}{x^2 - 3} = f(x)$. Тому дана функція є парною.

3) Функція $f(x) = \frac{x^3}{x - 3}$ не є ні парною, ані непарною, оскільки її область визначення не є симетричною відносно початку координат: -3 входить в область визначення, а 3 — не входить. ■



Для доведення того, що функція не є парною чи непарною, доцільно діяти наступним чином.

1) Перевірити, чи симетрична область визначення функції відносно початку координат. Якщо вона не

симетрична (див. приклад 3, 3)), то функція не є ні парною, ні непарною. Якщо вона симетрична, то продовжувати дослідження.

2) Підібрати дві точки, симетричні відносно початку координат і такі, що $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Це і доводить потрібне твердження.

Приклад 4. Довести, що функція $f(x) = x^2 + x$ не є ні парною, ані непарною.

□ Її область визначення симетрична відносно початку координат, але в симетричних точках 1 і -1 вона набуває значень 2 і 0, які не є ані рівними, ані протилежними числами. Тому не справджується ні рівність $f(-x) = f(x)$, ні рівність $f(-x) = -f(x)$ для всіх x із області визначення. Звідси випливає, що функція не є ні парною, ані непарною. ■

✓ Контрольні запитання

1°. Яка з функцій, графіки яких зображено на рис. 64, а)–г), може бути: 1) парною; 2) непарною?

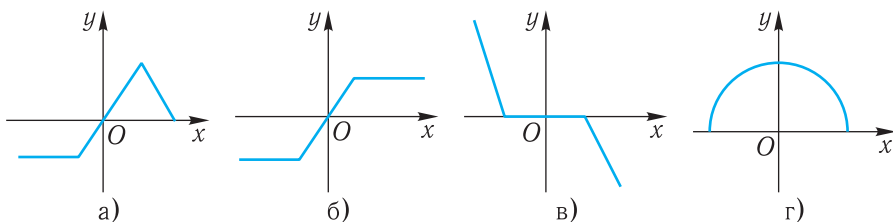


Рис. 64

2. Яку властивість мають усі функції, графіки яких зображено на рис. 65, і не має жодна із функцій, графіки яких зображено на рис. 66?

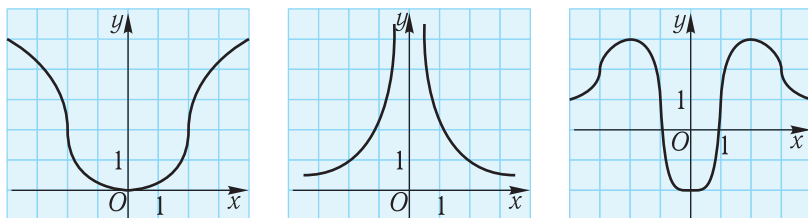


Рис. 65

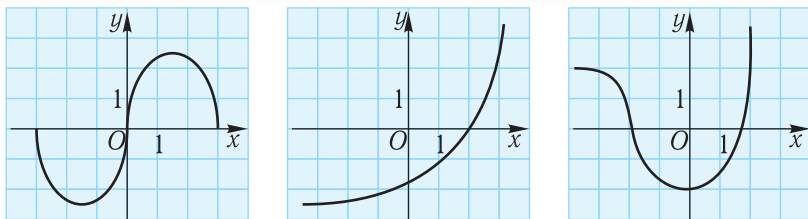


Рис. 66

- 3°. Графіки яких функцій симетричні відносно осі y :
- а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^3$;
 г) $y = |x|$; д) $y = 1$; е) $y = \frac{x-1}{x-1}$?
- 4°. Графіки яких функцій симетричні відносно початку координат:
- а) $y = 3x$; б) $y = x^2 + 1$; в) $y = x^3$; г) $y = \frac{|x|}{x}$?
5. Відомо, що функція $y = f(x)$ є парною і $f(2) = 1$. Чому дорівнює $f(-2)$?
6. Відомо, що функція $y = f(x)$ є непарною і $f(-3) = 2$. Чому дорівнює $f(3)$?
7. Областю визначення парної функції є проміжок $[a; 4]$. Чому дорівнює число a ?
8. Функція $y = f(x)$ є парною і зростає на проміжку $[1; 2]$. Чи є вона зростаючою на проміжку $[-2; -1]$?
9. Чи може зростаюча функція бути: а) парною; б) непарною?



Задачі

- 19°. Дослідіть функцію на парність і непарність:

1) $y = 5x^3 - x$; 2) $y = x^2 - 3$; 3) $y = \frac{x^2}{x^4 - 1}$; 4) $y = \sqrt{x} + 1$;

5) $y = |x| + x^2 - 4$; 6) $y = 3$; 7) $y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$; 8) $y = \frac{x^3}{2x - 1}$.

20. Доведіть, що функція $y = f(x)$ не є ні парною, ні непарною, якщо:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$; 2) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}}$.

21°. На рис. 67, 68 зображено графіки функцій $y = g(x)$ і $y = f(x)$. Знайдіть для кожної функції:

- 1) область її визначення;
- 2) множину її значень;
- 3) нулі функції та проміжки знакосталості;
- 4) проміжки зростання, спадання функції.

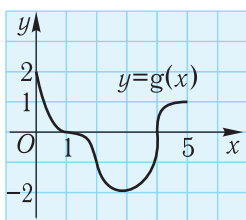


Рис. 67

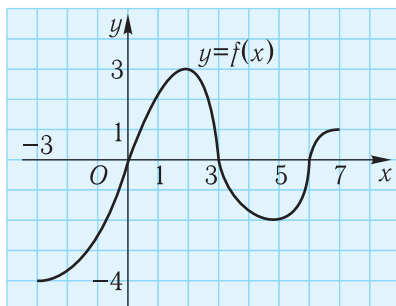


Рис. 68

22°. На рис. 69 зображено залежність швидкості велосипедиста від часу.

- 1) Якою була швидкість велосипедиста в момент часу $t = 18$ хв?
- 2) В які моменти часу швидкість дорівнювала 5 км/год?
- 3) Вкажіть проміжки часу, протягом яких швидкість велосипедиста зростала, спадала, була сталою.
- 4) Якою була найбільша швидкість велосипедиста?

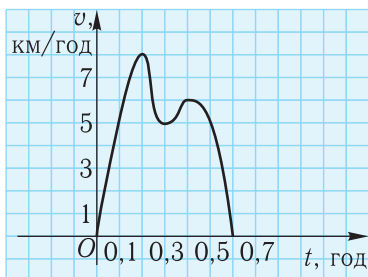


Рис. 69

23°. На рис. 70 зображено залежність об'єму води від її температури. Вкажіть на характерні особливості цієї залежності.

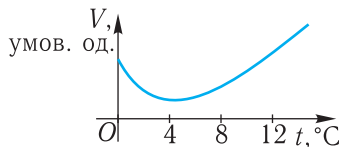


Рис. 70

24. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = -x^2 + 4x$;
- 2) $y = 3x^2 - 6x + 4$;
- 3) $y = (x + 1)(x - 2)$;
- 4) $y = \sqrt{x + 1}$;
- 5) $y = \frac{1}{x + 2}$;
- 6) $y = \frac{1}{x} - 2$.

- 25.** Побудуйте графік функції $y = f(x)$, яка задовольняє умови:
 1°) функція визначена і зростає на проміжку $[-2; 2]$, $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$;
 2°) функція зростає на проміжку $(-\infty; 2]$ і спадає на проміжку $[2; +\infty)$;
 3) функція парна і спадає на проміжку $[-3; 0]$;
 4) функція визначена на проміжку $[-4; 4]$, непарна і зростаюча.
- 26.** На рис. 71, а)–в) зображено графіки деяких функцій. Добудуйте кожний з них (якщо це можливо) до графіка: 1) парної функції; 2) непарної функції.

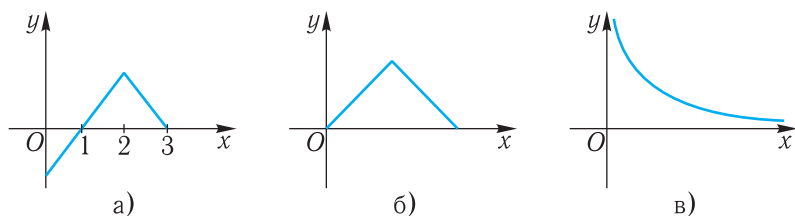


Рис. 71

- 27*.** Розподіліть графіки, зображені на рис. 72, а)–в), на 2 класи за їхніми характерними ознаками. Опишіть ознаки, за якими класифікація запропонована.

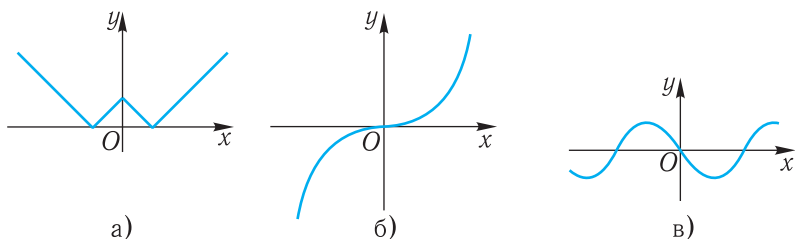


Рис. 72

- 28*.** Розподіліть усі функції, графіки яких зображені на рис. 73, а)–д), на 3 класи за деякою властивістю. Опишіть властивості, спільні для функцій кожного класу.

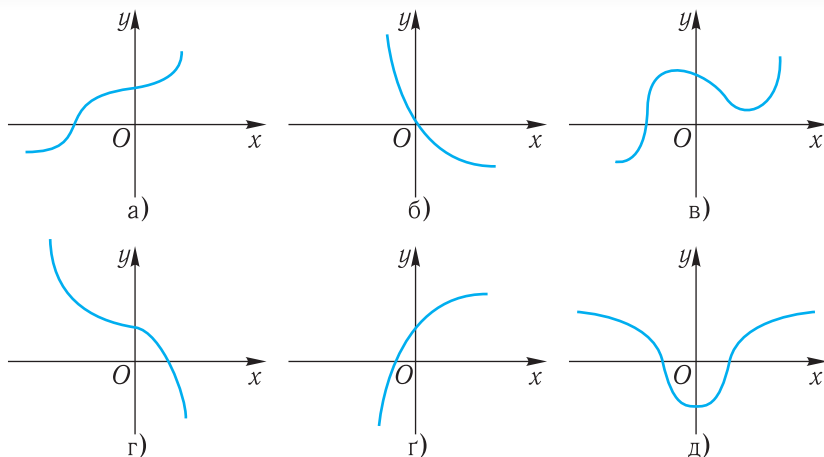


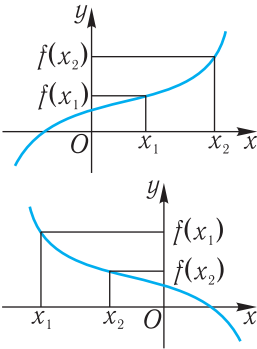
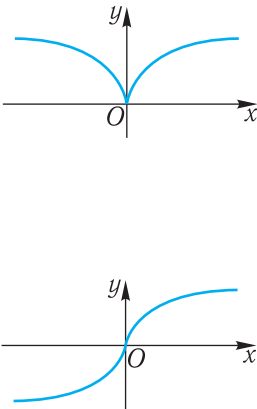
Рис. 73

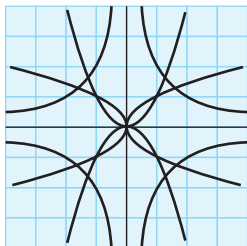
Вправи для повторення

29. Скільки існує квадратних коренів з числа: 1) 36; 2) 0; 3) -36 ?
30. Чи має зміст вираз: 1) $\sqrt{-49}$; 2) $\sqrt{(-7)^2}$; 3) $\sqrt{(-7)^3}$?
31. Обчисліть: 1) $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{5})^2$; 2) $\sqrt{3\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.
32. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{490}$; 2) $\sqrt{12a^2}$, $a < 0$.
33. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{48} - \sqrt{300} + \sqrt{75}$; 2) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab}$.
34. Дано функцію $f(x) = \sqrt{x+3}$.
 - 1) Побудуйте графік функції.
 - 2) Скільки коренів має рівняння: $f(x) = 1$; $f(x) = -1$; $f(x) = x$?

Підсумок

Основні поняття

Означення	Геометрична інтерпретація, приклади	Застосування
Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2, таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність: $f(x_1) < f(x_2)$. Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякому проміжку, якщо для довільних точок цього проміжку x_1 і x_2, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність: $f(x_1) > f(x_2)$.		Опис характерних особливостей реальних процесів і явищ; порівняння значень величин.
Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо: - її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$; - для кожного x із області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$. Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо: - її область визначення разом з кожною точкою x містить і точку $-x$; - для кожного x із області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.		Спрощення побудови графіків і дослідження функцій.



§3. Корені n-го степеня

У курсі алгебри розглядалось поняття квадратного кореня з невід'ємного числа. У даному параграфі узагальнимо це поняття, визначивши поняття кореня з довільним натуральним показником, більшим за 1.

1. Степеневі функції з натуральними показниками



Раніше ми розглядали функцію $y = x^2$. Її аргументом є основа степеня, значення функції при кожному значенні аргументу є другим степенем аргументу. Таку функцію називають **степеневою**. Показник степеня у даному випадку дорівнює 2. Можна розглядати степеневі функції з показниками, відмінними від 2.

Степеневою функцією з натуральним показником будемо називати функцію $y = x^n$, де n — натуральне число.

Розглянемо спочатку степеневі функції з парними натуральними показниками, тобто функції виду $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, Усі функції зазначеного виду мають ті самі властивості, що і функція $y = x^2$, графік якої зображено на рис. 74. Вони визначені на множині дійсних чисел. Ці функції є парними. Наприклад, для функції $y = x^4$ маємо: $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x)$. Аналогічні обґрунтування можна навести для довільної зазначеної функції. Графіки цих функцій симетричні відносно осі ординат.

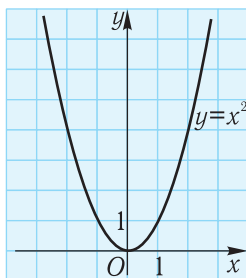


Рис. 74

Степеневі функції з парними натуральними показниками набувають невід'ємних значень і мають лише один нуль: $x = 0$. Тому

їхні графіки лежать у верхній півплощині і проходять через початок координат. Крім того, графіки усіх зазначених функцій проходять через точку з координатами (1; 1).

Функції $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ... зростають на проміжку $[0; +\infty)$ і спадають на проміжку $(-\infty; 0]$. Їхні графіки схожі на графік, зображений на рис. 74.

Розглянемо тепер степеневі функції з непарними натуральними показниками, відмінними від 1, тобто функції виду $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, ... Областю визначення цих функцій є множина дійсних чисел. Вони є непарними. Наприклад, для функції $y = x^5$ маємо: $y(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -y(x)$. Графіки цих функцій симетричні відносно початку координат.

Степеневі функції з непарними натуральними показниками є зростаючими. Вони мають лише один нуль: $x = 0$. Їхні графіки проходять через точку з координатами (1; 1) і схожі на графік, зображений на рис. 75.

Зокрема, функцію $y = x^3$ називають **кубічною**, а її графік – **кубічною параболою**.

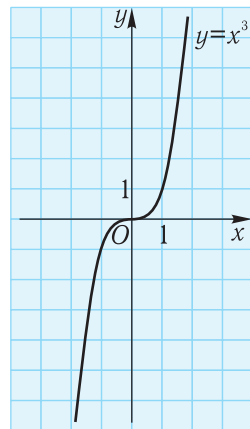
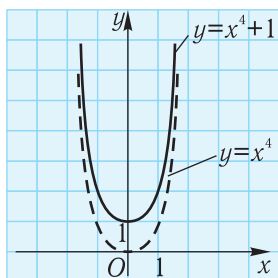


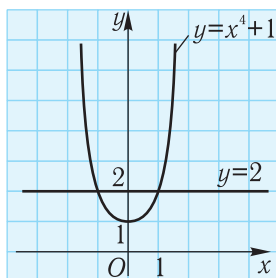
Рис. 75

Приклад 1. Дано функцію $f(x) = x^4 + 1$

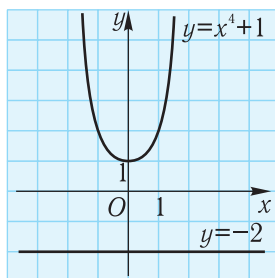
- 1) Чи проходить її графік через точки $A(-1; 2)$; $B(-1; 0)$?
- 2) Побудуйте її графік.
- 3) Скільки коренів має рівняння $f(x) = 2$; $f(x) = -2$?



а)



б)



в)

Рис. 76