

В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Підручник для поглибленого
вивчення математики
у закладах загальної
середньої освіти



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512(075.3)
Т13

Т13 **Тадеев В.О.** Геометрія : підручник для 10 кл. закладів загальн. серед. освіти : поглиблений рівень. / В.О. Тадеев. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2018. — 448 с.: іл.

ISBN 978-966-10-5423-2

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для навчання на профільному рівні у 10-х класах закладів загальної середньої освіти, у тому числі у спеціалізованих фізико-математичних школах, ліцеях та гімназіях. Він містить обов'язковий обсяг теоретичного матеріалу, а також розширення «Для тих, хто хоче знати більше» та «Сторінки історії». Може використовуватися учнями, що бажають опанувати математику поглиблено.

У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

УДК 512(075.3)

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

Підручник доповнено електронним додатком, який можна відкрити за посиланням:
<http://www.bohdan-digital.com/edu10/>

Переднє слово до учнів та вчителів

Ми не допускаємо, щоб талановиті, обдаровані діти працювали нижче від своїх можливостей. Якщо учень, який повинен бути дослідником природи, юним натуралістом, майбутнім ученим, скочується до рівня посереднього зубрили, то не повною мірою розкриваються здібності й тих, у кого немає яскраво виявлених задатків талановитості, обдарованості. Запобігання неуспішності слабких учнів ми вбачаємо в тому, щоб талановиті, обдаровані виходили за межі програми з тих предметів, тих сфер творчої діяльності, до яких у них є великі здібності, задатки.

Викладачі математики дають учням завдання кількох варіантів складності. Кожному надається можливість вибрати те, що йому під силу. Оскільки ж розумова праця відбувається в колективі, вона набуває характеру змагання творчих здібностей: ніхто не хоче бути слабшим, кожний прагне випробувати свої сили на складному завданні. В атмосфері змагання розкриваються таланти.

*Василь Сухомлинський.
«Серце віддаю дітям»*

Шановні друзі! Ви розгорнули ще один підручник з геометрії — тепер уже для 10 класу. У цьому році ви розпочинаєте систематично вивчати геометрію в просторі, або *стереометрію*. Як і планіметрія (тобто геометрія на площині), стереометрія теж споконвіку вважалася школою мудрості. Переказують, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, було вирізьблено напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!».

За що ж так цінувалася геометрія? — За те, що розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися давні греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед сімох легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали своїми духовними учителями, на перше місце вони завжди ставили Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим, і як стверджують легенди, довів лише декілька простих геометричних теорем. Однак у такий спосіб він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей феномен став основою західної цивілізації.

Отже, навчаючись стереометрії, ви й далі навчатиметеся мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю сучасного демократичного суспільства.

Переміщаючись «машиною часу» далі, потрапляємо у XVII ст. Виникло нове природознавство: Галілей, Кеплер, Декарт, Паскаль, Ньютон... Давня геометрія не тільки не стала осторонь нових тенденцій, а й перетворилася на теоретичну основу експериментальної науки, водночас залишаючись основою раціоналістичної філософії. Своєрідне відображення цієї нової тенденції знаходимо у мандрах казкового

Гулливера Джонатана Свіфта. Прибувши на літаючий острів Лапуту, Гуллівер найбільше здивувався тому, що все життя його мешканців оберталось довкола геометрії. Навіть буденна мова лапутян рясніла геометричними термінами. Та якби Гуллівер був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, у нього не було б. Геометричними термінами тепер пронизані не тільки природничі і технічні науки, а й гуманітарні, мистецтвознавство, мова щоденного спілкування. Ось лише найпоширеніші слова, які побутують у нашому мовленні й запозичені з геометрії: аксіома, паралелі, площина, вектор, сфера, координати, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетрія тощо. Певна річ, щоби правильно розуміти та вживати ці слова, потрібно знати їхній первісний геометричний зміст. «Книга природи», — як влучно висловився Галілей, «написана мовою геометрії».

Отже, навчаючись стереометрії, ви й далі прилучатиметеся до надбань світової культури, ставатимете обізнаними й компетентними у тих питаннях, в яких без цього відчували б себе немовби прибульцями з варварських епох.

Ми... у XXI ст. Комп'ютерна графіка і дизайн, захмарні архітектурні проекти, проникнення у глибини космосу й матерії... Геометричні ідеї та принципи лежать в основі і цих надбань. Вивчаючи геометрію, ви в цьому не раз переконаєтеся.

Отже, і з практичної точки зору стереометрія необхідна.

Навчання мистецтву аргументації, прилучення до надбань світової культури і практичні застосування геометрії — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Вони невіддільні одне від одного, як невіддільні, рівнозначні і взаємоповнюючі Віра, Надія і Любов у християнській моралі. Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із зазначених завдань відведено належне місце.

Гортаючи підручник, ви по всьому тексту помітите такі розпізнавальні знаки:



Усі вони мають символічне значення.

Основний зміст підручника структурований за двома потоками. Перший потік формується базовим змістом геометрії, визначеним рівнем державного стандарту для 10 класів усіх загальноосвітніх навчальних закладів. Другий потік містить матеріал, який є доповненням, розширенням або поглиблення базового ядра і відповідає програмі поглибленого вивчення математики. Цей матеріал друкується на блакитному тлі під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше» і супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Життєвий шлях цих учених переконливо засвідчує, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці.

Окрім основного змісту, у підручнику містяться два додаткові розширення. У першому з них подаються окремі питання, які хоч і виходять за межі програми, однак все ще тісно пов'язані з нею і традиційно вивчаються у спеціалізованих фізико-математичних школах (ліцеях, гімназіях). Це розширення теж подається під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше», однак позначається зірочкою.

Друге розширення — це «Сторінки історії». Його супроводжує муза історії Клію зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас» (картина прикрашає завісу Львівського оперного театру). Муза тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні мотиви розвитку математики. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому розумінню науки.

У кінці кожного змістового пункту, під рубрикою «Перевір себе», подаються питання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкс з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповів на її запитання.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афінa. Вибрано рельєфне зображення Афінi Парфенос, реконструйоване за описами знаменитої скульптури Фідія.

Задачі і вправи розміщені в кінці кожного пункту теорії за порядком наростанням складності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а складніші — зірочкою. Задачі, які не позначені додатковими значками, хоч і не так явно, однак теж природно розбиваються на дві групи: перші — простіші, а наступні — складніші. Отже, загалом задачний матеріал проградуваний за чотирма рівнями складності.

У кінці великих змістових блоків подані типові завдання для тестової перевірки рівня засвоєння основних теоретичних положень та проведення контрольних робіт (у двох варіантах). Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на самостійній та контрольній роботах. Ці матеріали подаються у двох варіантах. Відтак і вчитель матиме додаткові можливості для організації самостійної роботи учнів.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем та ученицею, які разом розв'язують задачу. На поданих прикладах демонструються застосування встановлених теоретичних відомостей, а в окремих випадках — і корисні нові факти та загальні підходи, якими можна скористатися й при розв'язуванні інших задач. Крім того, ці задачі слугують прикладами завдань, які зазвичай пропонуються на різноманітних іспитах і тестуваннях, а подані розв'язання — взірцями для оформлення, яких рекомендується дотримуватись.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!



Людина і кристали. Рисунок Карела Чапека

Так відомий письменник передав своє захоплення кристалічними формами, які є одним із найдосконаліших утілень ідеальних геометричних форм

Вступ

Про геометрію взагалі. Аксіоматика планіметрії

Для цієї мети я винайшов особливий, досі невідомий метод викладання: я запросив для мого старшого помічника двох викладачів. При цьому один навчав його з початку, з абетки, а інший — з кінця. ... Рівно через три тижні мій старший помічник доніс мені рапортом, що обидва викладачі довчили його до середини, і, таким чином, завдання виконане.

Андрій Некрасов. «Пригоди капітана Врунгеля»

Здається, — пригадав слоник, — я про цю математику чув ...

Григорій Остер. «38 пануг»

Шановні десятикласники! Ви вже три роки вивчали геометрію в основній школі. Перед продовженням її вивчення у старшій школі доречно провести невеличку систематизацію вивченого та окинути поглядом найближчі горизонти.

1. Що ж таке геометрія?

З глибин віків. Геометрія — дуже давня наука. Старшою від неї серед усіх наук можна вважати хіба що астрономію. Втім, коли астрономія з описового (спостережного) рівня перейшла на теоретичний (прогностичний), вона завжди вдавалася до послуг геометрії.

Тисячоліттями тривало накопичення геометричних фактів дослідним шляхом. Оформлення геометрії у струнку наукову систему відбулося у Давній Греції в період розквіту її культури (у VI – IV ст. до н. е). Греки дуже полюбили пов'язувати вигоди своїх досягнень з давніми епохами. Зокрема, вони вважали, що геометрія пере-

йшла до них з Єгипту, де вона нібито зародилася з потреби вимірювання земельних ділянок після щорічних розливів ріки життя — Нілу. Звідси й історична назва цієї науки — геометрія, що в дослівному перекладі з грецької означає «вимірювання землі», «землемірство».

Однак «вимірюванням землі» геометрія у Давній Греції була хіба що в тому розумінні, що грецькі вчені у своїх дослідженнях часто вдавалися до креслення фігур на піску. А по суті геометрія стала у них виключно теоретичною наукою про властивості геометричних фігур, арсенал якої значно перевершив потреби будь-яких практичних вимірювань. Зокрема, геометрія «вийшла у простір» і фактично розділилася на дві частини — плоску й просторову. За плоскою частиною збереглася її історична назва — геометрія, а просторову частину стали називати стереометрією (від грецького «стерео» — просторовий). Такий поділ виявився особливо зручним для навчання, оскільки давав змогу спочатку опановувати простіші для сприйняття відомості про плоскі фігури, а вже потім переходити до складніших, просторових фігур. Цей поділ через віки дійшов і до нашого часу. Єдине удосконалення відбулося в тому, що плоску частину геометрії перейменували у планіметрію (латинське слово *plano* означає «площина»), а під історичною назвою «геометрія» об'єднали разом планіметрію і стереометрію.

Отже, на даний час геометрія складається із двох частин — геометрії на площині (планіметрії) та геометрії у просторі (стереометрії). У 7–9 класах ви в основному вивчали планіметрію, знайомлячись лише з елементами стереометрії. А тепер розпочинаєте систематичне вивчення стереометрії.

Сучасне трактування змісту та значення геометрії. Геометрію в сучасному значенні цього слова можна означити як науку про просторові форми реального або мислимого світу. А оскільки просторові форми ще інакше називають геометричними фігурами, то, отже, геометрія — це наука про геометричні фігури, а саме: про їхні види, властивості, вимірювання, взаємне розміщення та перетворення. Самі ж геометричні фігури — це ідеальні мисленнєві образи. Найпростіші з них виникають у нашій свідомості при зосередженні уваги лише на формі та розмірах реальних твердих фізичних тіл й абстрагуванні від будь-яких інших їхніх характеристик — кольору, маси, температури, речовини, вартості тощо. Складніші фігури можуть конструюватися свідомістю уже без посередництва реальних тіл у результаті мисленнєвих операцій з найпростішими фігурами — об'єднання, перетину, доповнення, відрізання, вкладання, вилучення, переміщення, деформування й т.ін.

У шкільному курсі геометрії, який ще інколи називають елементарною (тобто найпростішою) геометрією, обмежуються лише дуже незначним набором геометричних

фігур. А саме, з плоских фігур вивчають точки, прямі, відрізки, півпрямі (промені), кути, трикутники, чотирикутники, правильні багатокутники, коло, круг і деякі комбінації цих фігур. Плоскі фігури вивчаються у 7–9 класах. Із просторових фігур обмежуються вивченням прямих, площин, найпростіших багатогранників (призм і пірамід), круглих тіл (циліндрів, конусів і кулі), а також деяких комбінацій цих фігур.

Просторові фігури систематично вивчаються у курсі геометрії старшої школи. При цьому в 10 класі ви детально вивчатимете прямі і площини, а також найпростіші багатогранники — паралелепіпеди і тетраедри. Пізніше вивчення цих питань буде поглиблено із застосуванням координат і векторів. В 11 класі детально вивчатимуться тіла обертання — циліндр, конус і куля, а насамкінець — вимірювання геометричних тіл, тобто їхніх об'ємів та площ поверхонь.

Поза елементарною (шкільною) геометрією залишається величезний обсяг накопичених людством геометричних знань. Одні з них з'явилися внаслідок поглибленого дослідження фігур елементарної геометрії, інші — за рахунок збільшення арсеналу геометричних фігур, а ще інші — за рахунок різноманітних перетворень цих фігур. Є й такі геометрії, де простори мають «викривлення» і вищі розмірності. Таку «вищу» геометрію вивчають на фізико-математичних спеціальностях у вищих навчальних закладах. У цій геометрії проводять свої дослідження вчені-математики. А застосовують її у фізиці, астрономії, хімії, теоретичній і технічній механіці, інженерії, економіці тощо. Крім цього, геометричні ідеї мають численні застосування в інших напрямках математичних досліджень — в алгебрі, теорії чисел, математичному аналізі, теорії ймовірностей, а через них — у ще більшому спектрі прикладних наук. Попри усе це первинним джерелом для пробудження мисленнєвої просторової уяви, фантазії та інтуїції була й залишається звичайна елементарна геометрія, яка через те й вивчається у школі.

Вивчаючи властивості геометричних фігур — ідеальних об'єктів, ми водночас дістаємо певні знання про просторові властивості реальних предметів і можемо застосовувати їх при проектуванні та експлуатуванні. Цим визначається значення геометрії для кожної культурної людини, а особливо для тих, хто проектуватиме та зводитиме нові об'єкти.

Важливим залишається застосування геометрії і для вирішення тих практичних задач, які колись послужили одним із найпотужніших джерел для її зародження — для вимірювання землі. Щоправда, тепер це відбувається в основному через посередництво окремої прикладної інженерної науки — геодезії. За допомогою геодезичних зйомок складають плани і карти місцевості, а також здійснюють «прив'язку» до місцевості плану кожної споруди чи магістралі перед її будівництвом.

Приклад новітнього застосування геометрії.

Безперечно, про усі згадані застосування ви вже маєте уявлення з уроків геометрії та інших предметів у попередніх класах, а також із найрізноманітніших джерел додаткової інформації. Значно менш відомими є принципи геометричного моделювання на рівні тонких структур матерії, які, проте, в сучасній науці набувають дедалі ширшого застосування.

Ще видатний філософ Платон у IV ст. до н.е., узагальнюючи й розвиваючи погляди піфагорійців, учив про існування чотирьох основних стихій — вогню, повітря, води і землі, з яких у відповідних пропорціях складається усе суще. Найдрібнішим структурним елементам цих стихій Платон приписував форми правильних багатогранників (рис. 1), а саме: вогню — форму тетраедра (рис. 1, а), повітря — октаедра (рис. 1, в), воді — куба (рис. 1, б), а землі — ікосаедра



Платон

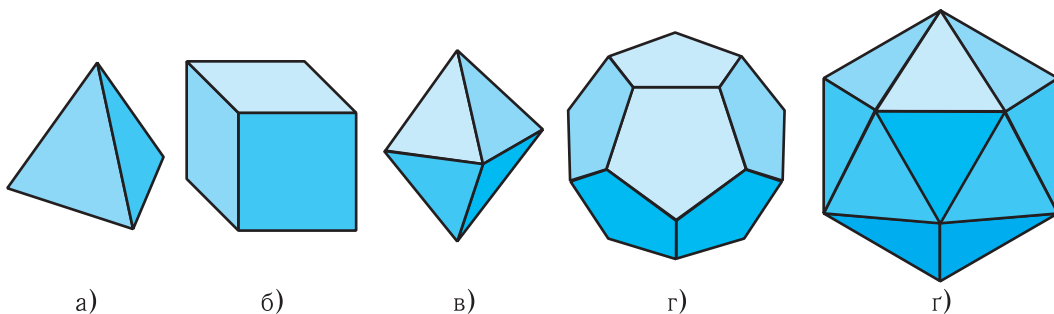


Рис. 1

(рис. 1, г). А оскільки в геометрії уже було відомо, що загалом існує п'ять видів правильних багатогранників, то форму п'ятого — додекаедра (рис. 1, г) — Платон відвів для усього Космосу (відгомонам цієї ідеї стало зображення додекаедра на відомій картині Сальвадора Далі «Таємна вечерея», відтворений на 2-му форзаці цього підручника).

До цих уявлень давніх мудреців могли привести спостереження за природними багатогранниками — кристалами (рис. 2). Наприклад, гірський кришталі Аристотель уважав закам'янілим льодом, а Пліній про нього писав, що «гладкість граней його така



Рис. 2

досконала, що того ніяким мистецтвом створити неможливо».

У середні віки уявлення про те, що саме в кристалах заховані усі таємниці буття, знайшло своє відображення у приписуванні їм надприродної чудодійної сили. Не випадково в одній зі старовинних легенд про чорнокнижника Фауста, які послужили Гете першоджерелом для його знаменитого твору, доктор Фауст бесідує з духом на ймення «Кристалос».

У свій спосіб захоплення кристалами передав відомий чеський письменник Карел Чапек, рисунок якого «Людина і кристали» вміщено на заставці до цього вступу (с. 6) та на обкладинці підручника.

Перші спроби наукового пояснення дивовижно точних багатограних форм природних кристалів належать ще до XVII–XVIII ст. А найбільшим досягненням у вивченні кристалів на основі візуального спостереження стало створення у середині XIX ст. французьким фізиком і кристалографом Огюстом Браве (1811–1863) так званої решітчастої теорії.

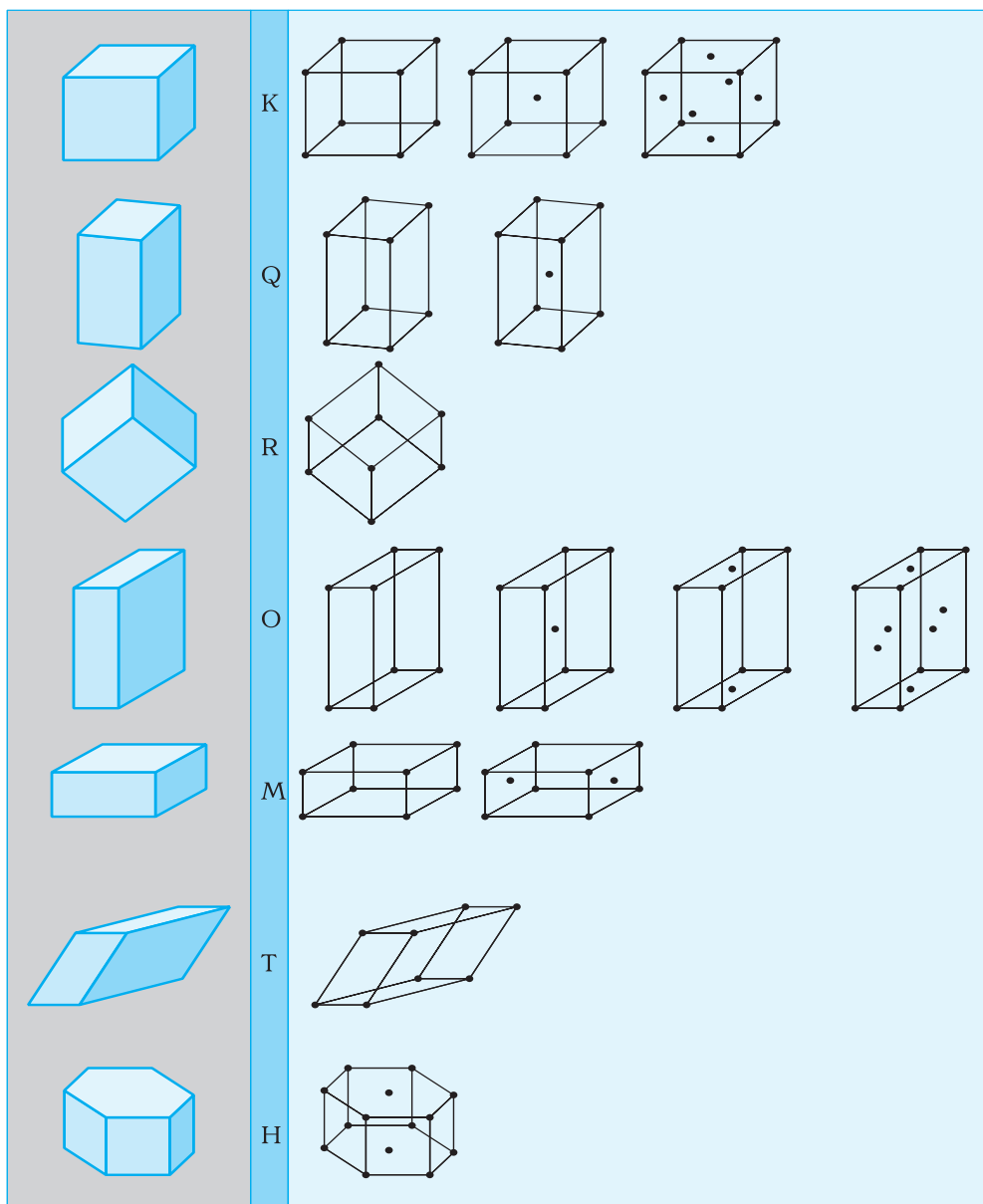
У 1849 р. Браве, який, за словами Володимира Вернадського, «дивився на природу очима геометра», після численних спостережень і обмірювань кристалів опублікував працю «Дослідження про багатогранники симетричної форми». У ній він, зокрема, висунув продуктивну гіпотезу про те, що в основі правильних геометричних форм кристалів лежать правильні багатогранні форми їхньої внутрішньої структури. Основу цієї структури, за Браве, утворює решітка, яка складається із закономірно розміщених вузлів (центрів ваги корпускул, або атомів). Браве вважав, що у процесі росту кристала його решітка розростається із фундаментальної первісної багатогранної форми шляхом переміщень і з'єднання цілими гранями. На основі цієї ідеї він виділив 14 типів можливих фундаментальних форм — так званих решіток Браве (рис. 3).



Огюст Браве

Застосування — корисні і фактично необхідні для теорії, оскільки вони ставлять перед теорією нові запитання. Можна сказати, що застосування й теорія перебувають у такому самому відношенні, як листок і дерево: дерево тримає листок, але листок живить дерево.

Жак Адамар



Фундаментальні форми кристалів (ліворуч) і відповідні їм 14 видів кристалічних решіток Браве. Зверху вниз: куб, прямокутний паралелепіпед з квадратною основою (правильна чотирикутна призма), ромбоєдр, прямокутний паралелепіпед загального виду, прямий паралелепіпед з основою у формі паралелограма, косий паралелепіпед загального виду, правильна шестикутна призма.

Рис. 3

Решітки Браве дали змогу пояснити багато феноменів кристалографії, а в геометрії стали джерелом для низки важливих задач про щільні заповнення простору багатогранниками. Проте у своїй основі ця ідея залишалася лише гіпотетичною аж до вирішального фізичного експерименту німецького фізика Макса фон Лауе (1879–1960), який у 1912 р. незаперечно довів саме існування атомної структури кристалів.

Як відомо, атомну структуру речовини неможливо помітити візуально навіть при збільшенні у найпотужнішому мікроскопі. Причиною є надто велика довжина світлових хвиль у видимому діапазоні, які на своєму шляху «не помічають» атомів. Лауе у своєму експерименті використав рентгенівські промені, які теж невидимі для ока, але довжина їхніх хвиль сумірна з розмірами атомів, а тому ці промені на своєму шляху «помічають» атоми і заломлюються на них. Схема його експерименту відображена на рис. 4. Вузький пучок рентгенівських променів спрямовувався на монокристал (чистий кристал однорідної структури), а після проходження через кристал фіксувався на фотопластинці. Виявлене розсіювання пучка свідчило про дифракцію променів, причиною якої могла бути лише атомна структура кристалу, який, таким чином, відігравав роль дифракційної решітки. Симетричне ж розміщення слідів розсіяних променів свідчило про симетричне розміщення відповідних граней кристалічної решітки. Пізніше з'ясувалося, що геометричний аналіз рентгенограми дає змогу навіть повністю відтворити просторову будову кристалічної решітки.

Первісною метою досліджу Лауе було підтвердження за допомогою дифракції на кристалічній решітці хвильової природи рентгенівських променів. І за цей результат йому було присуджено Нобелівську премію 1914 р. Але одночасно було підтверджено й атомну структуру кристалів і це дало потужне практичне застосування — можливість дослідження



Макс фон Лауе

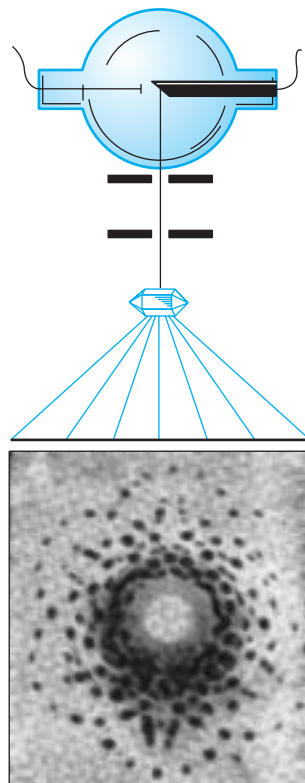


Схема досліджу Лауе

Рис. 4

структури речовини на основі рентгеноскопічного аналізу.

Рентгеноскопічний аналіз — це синтез фізичного способу одержання рентгенограми атомної структури речовини та геометричних методів відтворення на цій основі її просторової кристалічної решітки.

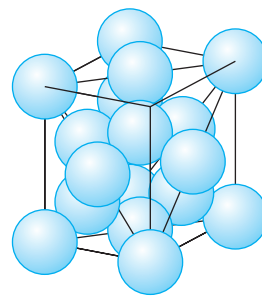
У свою чергу, побудована кристалічна решітка дає змогу пояснити відомі або передбачити нові фізичні властивості кристалів при зміні фізичних умов їхнього утворення (температури, тиску тощо).

На рис. 5, а), б) для прикладу зображені кристалічні решітки алмазу і графіту. Хімічний склад обох цих матеріалів один і той самий — атоми вуглецю. Але наскільки різні їхні властивості: графіт — м'який, чорний і вогнетривкий, а алмаз — твердий, прозорий і у вогні згоряє дотла! Усе це — наслідки особливої структури кристалічної решітки.

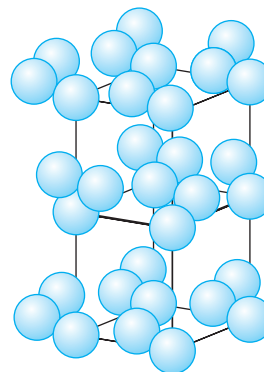
Згодом ідеї й методи рентгеноскопічного аналізу з кристалографії поширилися на хімію, а потім — і на біологічні структури. У 1964 р. професор Дороті Кроуфут-Ходжкін (1910 – 1994) засобами рентгеноструктурного аналізу з'ясувала структуру низки складних фізіологічних утворень, у тому числі пеніциліну (у 1946 р.) та вітаміну B_{12} (у 1956 р.). За ці досягнення їй у 1964 р. було присуджено Нобелівську премію. У 1962 р. Нобелівську премію одержали американський біохімік Джеймс Вотсон (нар. 1928) та англійський біофізик і генетик Френсіс Крік (1916 – 2004), які у 1953 р. створили модель структури ДНК (рис. 6). Це відкриття поклало початок молекулярній генетиці.

Таким чином, геометричне моделювання просторових структур неорганічної та органічної природи нині перебуває на передньому краї науки. У цьому — великі перспективи для створення нових матеріалів, нових біологічних форм і нових лікарських засобів.

У свою чергу, проблеми кристалографії, стереохімії та мікробіології стимулюють і розвиток геометричних теорій. Зокрема, рентгеноскопічний



а)



б)

Моделі атомної будови алмазу (вгорі)
і графіту (внизу)

Рис. 5



Дороті Кроуфут-Ходжкін

аналіз, виявляючи конкретну решітчасту форму атомної структури кристалів, все ще не дає відповіді на питання, чому ця форма є саме такою і які взагалі можливі кристалічні решітки. Геометрія ж уже знайшла відповіді на деякі з питань такого гатунку. Примітно, що до цих визначних успіхів причетні вітчизняні учені, які можуть бути взірцем для наслідування усім, хто обирає собі шлях у науку.

У 1932 р. колишній випускник Київського університету Борис Миколайович Делоне (1890–1980) на основі декількох найзагальніших припущень про можливе взаємне розміщення атомів у кристалах запропонував значно досконалішу, ніж свого часу Браве, класифікацію кристалічних решіток. Усі можливі кристалічні решітки він розбив на 24 види, залежно від форми так званих паралелепедів Діріхле — опуклих багатогранників певного виду з попарно паралельними гранями. На рис. 7 зображено усі такі паралелепедри разом із відповідними їм решітками Браве. Легко помітити, що паралелепедри Діріхле охоплюють усі решітки Браве. Отже, класифікація Делоне є детальнішою, ніж класифікація Браве.

У своїх спогадах Б.М. Делоне зазначав, що про проблему правильних просторових решіток він дізнався ще у підлітковому віці з бесід свого батька Миколи Борисовича Делоне (1856–1931) зі всесвітньо відомим українським математиком Георгієм Феодосійовичем Вороним (1868–1908). Перший у ті часи був професором Варшавського політехнічного інституту, а другий — професором Варшавського університету. Сам же Георгій Вороний у 1908 р. розв'язав фундаментальну математичну проблему про можливість щільного заповнення паралелепедрами n -вимірного простору. Цей його результат знайшов несподівані практичні застосування в сучасних інформаційних системах.

Георгій Вороний народився у селі Журавка Полтавської губернії (тепер Варвинський район на Чернігівщині). Середню освіту здобував у Бердянській (до 5-го класу) і Прилуцькій гімназіях, в яких



Просторова модель молекули ДНК

Рис. 6



Джеймс Вотсон



Френсіс Крік

	I	II	III	IV	V
K	1		2		3
Q	4	5			6
R	7		8		
O	9	11	12	13	14
	10				
M	15	17	19	20	
	16	18			
T	21	22	23		
H				24	

Кристалічні решітки за класифікацією Делоне

Рис. 7

директував його батько — магістр філології, колишній випускник Київського університету. Закінчив Петербурзький університет (у 1889 р.). Наукові дослідження проводив у руслі Петербурзької школи теорії чисел. Після захисту магістерської дисертації у 1896 р. до кінця свого короткого життя працював професором Варшавського університету.

Борис Делоне народився в Петербурзі. У 16 років з батьками переїхав до Києва, де батько працював професором політехнічного інституту. Закінчив екстерном Київську гімназію, а у 1913 р. — Київський університет. До 1916 р. викладав у цьому ж університеті, потім (у 1916–1922 рр.) — у Київському політехнічному інституті. Подальша трудова і наукова діяльність Б.М. Делоне була пов'язана з Ленінградським і Московським університетами, а також з Математичним інститутом ім. В.А. Стеклова. Основні наукові дослідження проводив на стику алгебри й геометрії. У 1978 р. удостоєний престижної міжнародної премії ім. Лобачевського. На початку 30-х рр. XX ст. Делоне був серед перших ініціаторів проведення в СРСР математичних олімпіад серед школярів. Був майстром спорту з альпінізму. У 1926 р. здійснив сходження на одну з головних вершин системи Белухи на Алтаї, пізніше названої піком Делоне. Звісно, цією назвою відзначені не так спортивні, як наукові здобутки Б.М. Делоне, які ознаменували собою один із «піків» геометрії XX ст.



Г.Ф. Вороний



Б.М. Делоне



Пік Делоне

Особливості шкільного курсу геометрії.

Виятково влучну характеристику особливостям предмета геометрії дав видатний геометр XX ст. О.Д. Александров (1912–1999). У низці підручників для школи, створених під його керівництвом, він пояснював учням: «Своєрідність геометрії полягає в нерозривному зв'язку живої уяви зі строгою логікою. Можна сказати, що геометрія у своїй суті і є просторовою уявою, яка пронизана й організована строгою логікою. У будь-якому справді геометрично-

му твердженні, чи то аксіомі, означенні, теоремі, чи то задачі, неодмінно присутні обидва ці елементи: наочна картина і строге формулювання, строгий логічний висновок.

Наочність, уява належать більше до мистецтва, а строга логіка — привілей науки. Сухість точного висновку і життєдайність наочної картини — геометрія поєднує в собі ці дві протилежності. Так її й потрібно вивчати: поєднуючи наочні картини зі строгими формулюваннями й доведеннями».

І далі відомий геометр дає таку настанову учням:

«Тому основне правило полягає в тому, що стикаючись із означенням, теоремою або задачею, потрібно перш за все зрозуміти їхній зміст: подати наочно, нарисувати або ще краще, хоча й важче, уявити те, про що йде мова. Нічого не намагайтеся завчити, не нарисувавши, не уявивши того, про що йде мова, не зрозумівши, яким чином це наочне уявлення точно виражається у формулюванні означення, теореми або задачі».

Таким чином, геометрія — одночасно школа логіки й творчої уяви. Звідси той тісний зв'язок геометрії з мистецтвом та історією культури, який супроводжує її на всіх щаблях історичного розвитку. А тому геометричні знання абсолютно необхідні для розуміння історії культури. У цьому ж і джерело їхньої невичерпної цікавості для вивчення.



О.Д. Александров

Життя прикрашають дві речі — заняття математикою та її викладання.

Сімеон Дені Пуассон

2. Аксиоматика планіметрії

Геометрія є вивідною, кажуть ще — дедуктивною наукою. Це означає, що кожне її положення або твердження стосовно геометричних фігур формуються або виводяться на основі попередніх положень і тверджень. Очевидно, що при послідовній реалізації цієї схеми повинна існувати певна система її початкових фактів. Ця система називається *аксиоматикою геометрії*, а кожне з її положень — *аксіомою* (грецьке слово «аксіома» означає «гідний уваги», «авторитетний»).

Першу аксіоматику геометрії збудував знаменитий учений античного світу Евклід Александрійський у III ст. до н.е. На базі цієї аксіоматики він створив перший підручник з математики «Начала геометрії», який у повному обсязі дійшов до нашого часу. Аксиоматика Евкліда не була досконалою, оскільки не містила повного переліку аксіом, які фактично використовувалися в геометричних доведеннях. Зокрема, у ній не було аксіом, що визначають порядок розміщення точок на прямій, та встановлення рівності фігур. Проте ця аксіоматика проіснувала понад 2 000 років, а побудовані на ній «Начала геометрії» Евкліда весь цей час уважалися неперевершеним взірцем наукової теорії.



Евклід

Лише у XIX ст. з'ясувалося, що коли чітко не зафіксувати в аксіомах усіх первісних положень геометрії, то можна одержати логічні суперечності або «неевклідові» геометрії. У зв'язку з цим були проведені пошуки нових варіантів аксіоматики класичної евклідової геометрії. Особливо вагомих результатів у розв'язанні цього завдання досягли італійський математик Джузеппе Пеано (1858–1902) та німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Завдячуючи великому авторитету Гільберта у науковому світі, його аксіоматика стала своєрідним еталоном у розбудові основ геометрії.



Джузеппе Пеано

Однак, задовольняючи найвищі канони математичної строгості, аксіоматика Гільберта водночас виявилася абсолютно непридатною для елементарного викладання. Причиною був надвисокий для початківців рівень абстрагування, велика кількість аксіом (20 аксіом, розбитих на 5 груп), а головне — надто довгий шлях від аксіом до введення міри геометричних величин — відстаней і кутів. Тому шкільне викладання ще довгий час послуговувалося неповною евклідовою аксіоматикою або й зовсім обходилося без неї. Математики ж продовжували пошуки зручніших аксіоматик.



Давид Гільберт

Оригінальним вирішенням проблеми стала аксіоматика на основі поняття руху, яку запропо-

нував професор Новоросійського (тепер Одеського) університету В.Ф. Каган (1869–1953). Ще оригінальнішу ідею аксіоматичного введення міри для відрізків і кутів розробив американський математик Джордж Біркгоф (1884–1944); вона стала дуже популярною серед американських авторів підручників з геометрії. Нарешті, синтез ідей Евкліда, Гільберта, Кагана і Біркгофа втілив у своїй аксіоматиці геометрії видатний вітчизняний геометр зі світовим ім'ям О.В. Погорелов (1919–2002). Аксиоматика Погорелова була оприлюднена у його підручнику, що вперше вийшов із друку на початку 70-х років XX ст., а потім понад чверть століття застосовувався в загальноосвітній школі.

Як аксиоматика Гільберта вважається каноном строго наукового викладу основ геометрії, так аксиоматику О.В. Погорелова можна вважати каноном наукового викладу, адаптованого для школи. Тому віддаючи належне автору, нижче майже дослівно подається його редакція аксіом, а також дуже близьке до авторського виведення перших наслідків із них. Строгий науковий виклад основ геометрії О.В. Погорелова зазвичай важко сприймається учнями на початках вивчення геометрії у 7 класі. Зате при повторенні у старшій школі ви відчуєте у цьому викладі ту справжню логічну довершеність, яку великий учений може продемонструвати навіть у шкільному підручнику.

Основними фігурами в аксіоматиці планіметрії О.В. Погорелова є *точки* і *прямі*, а основними поняттями — *належності* для точок і прямих, *розміщення між* для точок на прямій, *довжини* відрізка і *градусної міри* кута. Усього в цій аксіоматиці 10 аксіом, які розподіляються на 6 груп.



В.Ф. Каган



Джордж Біркгоф



О.В. Погорелов

I. Аксиоми належності

1. Для будь-якої прямої існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

На рис. 8 точки A і B належать прямій a , а точки C і D — не належать їй.

2. Для будь-яких двох точок існує пряма, і притому — єдина, якій ці точки належать.

На рис. 8 пряма a — єдина, якій належать дві задані точки A і B .

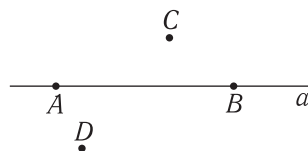


Рис. 8



Маленький Принц на своїй планеті.

Рисунок Сент-Екзюпері

Рис. 9

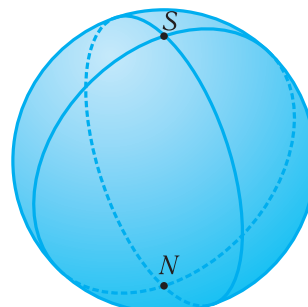


Рис. 10

Мовний зворот: «точки належать прямій» часто змінюють на «пряма проходить через точки». У зв'язку з цим аксіому 2 часто формулюють так: *через будь-які дві точки проходить пряма, і до того ж — тільки одна.*

Так само вислів «проходить» часто заміняють на «можна провести». І тоді аксіома 2 набуває третьої форми: *через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.*

Усі ці формулювання вважаються рівносильними або еквівалентними. Кожне з них стосується одного й того ж основного поняття «належності».

Якими «очевидними» не здавалися б аксіоми належності, проте вони виражають фундаментальні властивості, без яких площина не була б такою, якою ми її собі уявляємо. Якби, наприклад, не приймалася аксіома 1, то вся геометрія могла б звузитися до геометрії на одній прямій — як це ми робимо при зображенні множини дійсних чисел на числовій осі. А якби не приймалася аксіома 2, то замість планіметрії можна було б одержати «сфериометрія» — геометрію на сфері. Мабуть, такою була геометрія на планеті Маленького Принца у відомій повісті Антуана де Сент-Екзюпері (рис. 9). Роль прямих у такій геометрії відігравали б великі кола, а через дві діаметрально протилежні точки сфери

можна провести скільки завгодно прямих: так, на глобусі через полюси N і S проходить безліч меридіанів (рис. 10).

II. Аксиоми взаємного розміщення точок на прямій і площині

3. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

На рис. 11 зображено три точки A , B , C , що лежать на прямій a . Із них тільки точка C лежить між двома іншими точками A і B .

Якщо точка C лежить між точками A і B , то кажуть також, що точки A і B лежать *по різні боки* від точки C , або що точки C і B лежать *з одного боку* від точки A , чи: точки A і C лежать *з одного боку* від точки B .

4. Кожна пряма розбиває площину на дві півплощини.

На рис. 12 зображено пряму a , яка розбиває площину на дві півплощини.

На основі аксиоми 3 вводиться перше похідне від основних поняття — поняття відрізка. *Відрізком* з даними *кінцями* A і B називається частина прямої AB , що складається із самих точок A і B , а також з усіх точок, що лежать між ними, — *внутрішніх* точок відрізка. На рис. 13 синім кольором зображено відрізок AB прямої AB . Усі внутрішні точки M відрізка AB лежать між його кінцями A і B .

У свою чергу, за допомогою поняття відрізка конкретизується зміст аксиоми 4. Розбиття прямою a площини на дві півплощини означає, що кожний відрізок AB з кінцями в одній із півплощин не перетинає граничної прямої a , а кожен відрізок CD з кінцями у різних півплощинах — перетинає її (рис. 14)

Як і аксіома 2, аксіома 3 теж не виконувалася б у геометрії на планеті Маленького Принца Сент-Екзюпері (див. рис. 9): про кожную з трьох точок

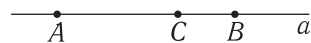


Рис. 11

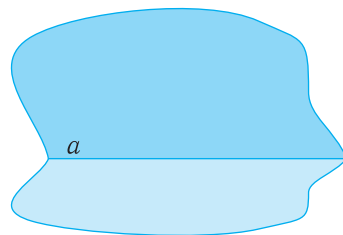


Рис. 12



Рис. 13

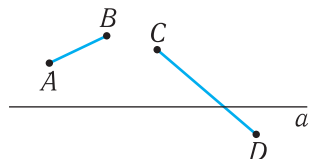


Рис. 14

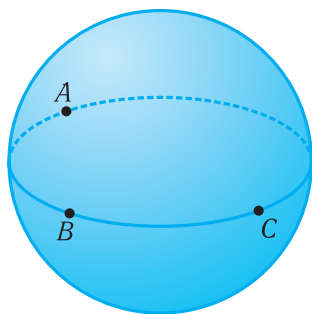


Рис. 15

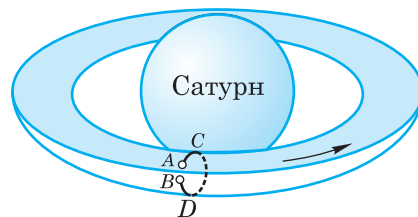


Рис. 16

A , B , C , розміщених на одному великому колі на сфері, наприклад, на її екваторі (рис. 15), можна сказати, що вона лежить між двома іншими. А на кільцеподібній планеті, яку гіпотетично можна уявити внаслідок згущення кільця Сатурна (рис. 16), не виконувалася б аксіома 4: «пряма» a , яка проходить по зовнішньому обводу кільця, не розбиває його поверхню на дві частини, оскільки, наприклад, з точки A у точку B можна перейти завдяки внутрішньому обводу через точку C .

III. Аксиоми вимірювання та відкладання відрізків

5. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізків дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю точкою.

На рис. 17 відрізок AB розбивається його внутрішньою точкою C на два відрізки AC і CB . При цьому, відповідно до аксиоми 5, $AB = AC + CB$.

Для формулювання наступної аксиоми потрібно ввести поняття півпрямой.

*Півпрямую, або променем, називається частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать по один бік від деякої взятої на ній точки. Ця точка називається *початком* півпрямой. Інші точки називаються *внутрішніми* точками півпрямой.*

На рис. 18 зображено *півпрямую* OA з початком O і внутрішньою точкою A .



Рис. 17



Рис. 18

Очевидно, що півпрямую буде частина кожної прямої a , що лежить у даній півплощині, якщо тільки пряма a перетинає граничну пряму b півплощини (рис. 19). Початком цієї півпрямой буде точка O перетину прямих a і b .

6. На будь-якій півпрямій від її початку можна відкласти відрізок даної довжини, і при тому — тільки один.

На рис. 20 від початку O півпрямой a відкладено відрізок OA , що має задану довжину d .

Відрізки, які мають однакові довжини, називаються *рівними*.

В лаконічних і «очевидних» формулюваннях аксіом 5–6 втілено тисячолітній практичний досвід людства з вимірювання довжин. Найбільшим здобутком у цьому досвіді був вибір єдиного еталона одиниці вимірювання. Про це ви можете прочитати на наших сторінках історії. Інша проблема лежала в теоретичній площині. Реальне вимірювання відрізків відбувається так, що спочатку на заданому відрізку відкладають певну кількість разів сам еталон, потім на залишку — якусь кількість частин еталона, наприклад, $\frac{1}{10}$, потім — ще дрібніші час-

тини, наприклад, $\frac{1}{100}$ і т.д. Практично цей процес дуже скоро завершується, однак теоретично він може продовжуватися й нескінченно: даний відрізок може виявитися *несумірним* з еталоном. Наприклад, ще піфагорійці з'ясували, що несумірними є сторона та діагональ квадрата, а європейські математики XIX ст. — що несумірні радіус кола і його довжина. А це означало, що не кожен відрізок має точно визначену для нього довжину. Лише після того, як до раціональних чисел були долучені ірраціональні, що записуються нескінченними і неперіодичними десятковими дробами, стало можливим вести мову про довжину *будь-якого* відрізка.

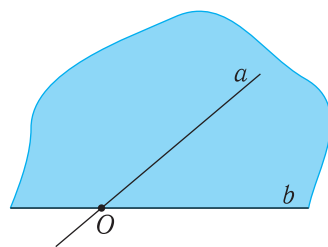


Рис. 19

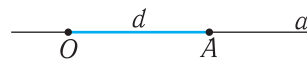


Рис. 20

— Зараз, удаве, я зміряю твій зріст у папугах.

— У папугах? — хором здивувалися слоненя і мавпочка.

— Як це? — знітився удав.

— А так, — сказав папуга. — Скільки папуг у тебе вміститься, такий у тебе й зріст!

— Ова! — жажнулася мавпочка. — Скільки вміститься!!!

— Дуже мені треба! — образився удав. — Я не буду ковтати стільки папуг.

— Навіщо ж ковтати. По-перше, ковтати нікого не треба, а по-друге, і одного папуги вистачить. Мене.

— Ну то, — недовіриливо сказав удав, — якщо ковтати не треба, тоді вимірюй у папугах!

Григорій Остер.
«38 папуг»

Але тоді з'явилася інша проблема — чи для кожного ірраціонального числа існуватиме відрізок з довжиною, що виражатиметься цим числом, і чи буде цей відрізок єдиним, якщо відкласти його на заданому промені від його початку? — Аби усе це забезпечити, Гільберту у його «Основах геометрії» довелося ввести по дві спеціальні аксіоми порядку та неперервності. А в аксіоматиці О.В. Погорелова ця проблема вирішується всього двома аксіомами, якими зазначені труднощі «непомітно» переносяться на теорію дійсних чисел.

Математика — жриця визначеності й чіткості.

Йоганн Фрідріх Герbart

IV. Аксиоми вимірювання та відкладання кутів

Кутом називається фігура, що складається з двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається *стороною* кута, а їхній спільний початок — *вершиною* кута.

Кутом називають також і частину площини, обмежену сторонами кута. Кут у такому розширеному тлумаченні називають ще *плоским* кутом; тоді кут без обмеженої ним частини площини називається *лінійним* кутом.

На рис. 21 зображено кут Oab з вершиною O та сторонами a і b . Вживаються також позначення $\angle O$ та $\angle ab$.

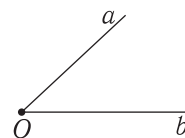


Рис. 21



Рис. 22

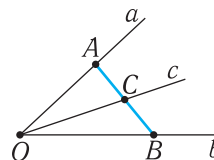


Рис. 23

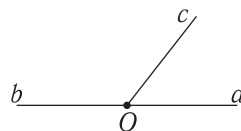


Рис. 24

Кут, сторони якого є доповняльними променями, тобто лежать на одній прямій по різні боки від спільної вершини, називається *розгорнутим* кутом. На рис. 22 зображено розгорнутий кут з вершиною O та сторонами a і b .

Кажуть, що промінь c з початком у вершині розгорнутого кута Oab проходить між його сторонами, якщо він перетинає який-небудь відрізок AB з кінцями на сторонах даного кута (рис. 23). Для розгорнутого кута Oab вважається, що будь-який промінь c , який виходить з вершини O , лежить між його сторонами a і b (рис. 24).

7. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних

мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

На рис. 23 кут Oab дорівнює сумі кутів Oac і Ocb .

8. Від будь-якої півпрямой у задану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, і притому — тільки один.

На рис. 25 зображено кут Oab певної заданої величини α , відкладений від півпрямой Oa у задану півплощину, гранична пряма якої містить півпряму Oa .

Кути, які мають однакові градусні міри, називаються *рівними*. Промінь, який проходить між сторонами кута і ділить його на два рівні кути, називається *бісектрисою* цього кута.

На відміну від вимірювання відрізків, єдиний масштаб для вимірювання кутів (градус) було виведено дуже давно (див. Сторінки історії: «Як вимірювали кути у різні часи»). Втім, його більше застосовували в астрономії та геодезії, а в геометрії вели мову про частини прямого або розгорнутого кута. Що ж до принципових труднощів, пов'язаних зі встановленням міри для довільного кута та побудовою кута з довільною заданою градусною мірою, то вони аналогічні зазначеним вище труднощам для відрізків. Обмеження на граничну величину кута 180° — не принципове, тим більше, що воно знімається в подальших узагальненнях, пов'язаних з введенням тригонометричних функцій.

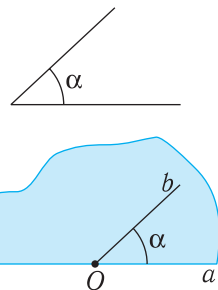


Рис. 25

— Я чудово пам'ятаю, що спочатку цього закону не було, а потім його відкрив хтось дуже мудрий.

— Навіщо? Хто його просив? — обурилась мавпочка.

— А як він відкрив? — спитав слоник.

— Давно це було, — сказав папуга.

Григорій Остер.
«38 папуг»

V. Аксиома рухомості трикутника

Трикутником називається фігура, що складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки — його *сторонами*.

Трикутником називають також частину площини, обмежену сторонами трикутника. У цьому разі доречно уточнення: *плоский* трикутник, а для трикутника без обмеженої ним частини площини — *лінійний* трикутник.

На рис. 26 зображено трикутник ABC з вершинами A , B , C та сторонами AB , BC і AC .

Кутом трикутника ABC при даній його вершині A називається кут, утворений півпрямими AB і AC (рис. 27). Аналогічно означаються кути трикутника при інших вершинах.

Два трикутники ABC і $A'B'C'$ називаються рівними (записують так: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$) (рис. 28), якщо у них рівні усі відповідні сторони й усі відповідні кути, тобто $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$; $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.

На рисунках рівні сторони рівних трикутників часто позначають однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок.

Строго кажучи, саме тільки означення рівності трикутників ще не гарантує існування таких трикутників. Щоправда, на такий висновок наштовхує практичний досвід, але для логічного узаконення такої можливості необхідно прийняти відповідну аксіому.

9. Який би не був трикутник, існує трикутник, рівний йому, що займає задане положення відносно даної півпрямой.

На рис. 29 зображено трикутник ABC і рівний йому трикутник $A'B'C'$, вершина A' якого збігається з початком O деякого променя a , сторона $A'B'$ — належить цьому променю, а вершина C' знаходиться у вибраній півплощині від прямої, що містить промінь a .

Про трикутник, який рівний даному і займає задане положення, кажуть, що його одержано з даного за допомогою переміщення. Отже, уведеною аксіомою не тільки гарантується існування рівних

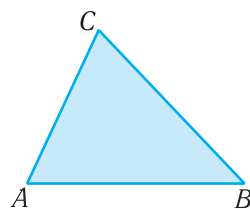


Рис. 26

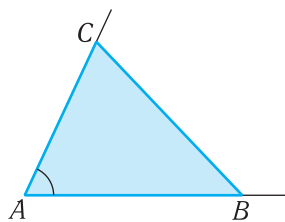


Рис. 27

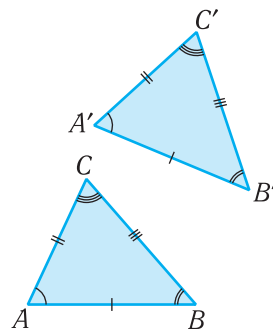


Рис. 28

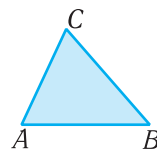
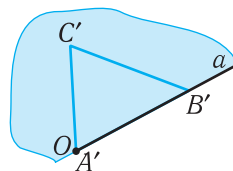


Рис. 29

трикутників, а й забезпечується логічна можливість переміщувати трикутник у будь-яке задане положення на площині. Звідси і її назва — *аксіома рухомості трикутника*.

VI. Аксиома про паралельні прямі

За аксіомою 2, прямі, які мають хоча б дві спільні точки, збігаються.

Про прямі, які мають лише одну спільну точку, кажуть, що вони перетинаються у цій точці, або є *перетинними*. Побудувати такі прямі можна так. Візьмемо довільну пряму a . За аксіомою 1, знайдеться деяка точка A на цій прямій і деяка точка B поза нею (рис. 30). Тоді прямі a і AB — перетинні. Справді, пряма a має з прямою AB лише одну спільну точку A , бо якби мала ще іншу спільну точку, — то збігалася б з нею, і тоді точка B лежала б на прямій a , всупереч вибору її поза цією прямою.

Прямі, які лежать у площині і не мають жодної спільної точки, називаються *паралельними*.

Існування паралельних прямих можна логічно довести, посилаючись на відповідні ознаки. Наприклад, дві прямі a і b , які перпендикулярні до третьої прямої c , — паралельні (рис. 31). Однак неможливо ні довести, ні спростувати єдиність паралельної, що проходить через дану точку. Тому приймається наступна аксіома.

10. Через точку, що не лежить на даній прямій, у площині проходить не більше, ніж одна пряма, паралельна даній.

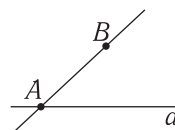


Рис. 30

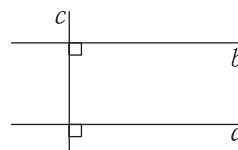


Рис. 31



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

1. Як вимірювали довжини у різні часи

Сучасна людина зазвичай не задумується над тим, що ті численні блага цивілізації, якими вона користується, забезпечені невтомною працею і пошуками всього людства впродовж багатьох віків. Характерним прикладом є вимірювання довжин і відстаней. Хто тепер не знає, що довжини, сумірні з ростом людини, вимірюють у сантиметрах, більші — у дециметрах і метрах, великі відстані — у кілометрах, а маленькі проміжки — у міліметрах? Хто не знає, що між цими одиницями вимірювання існують дуже прості співвідношення, які виражаються множенням чи діленням на степінь числа 10? Нарешті, хто не знає, що для проведення самого вимірювання використовуються прості прилади — лінійки, стрічки, складні метри, рулетки тощо? І кожна людина, в якій би частині світу вона не жила, взявши один із таких приладів, може легко перевірити вказані на будь-якому з виробів розміри або закласти відповідні розміри у виріб, який збирається виготовляти. Але так було не завжди. Більшу частину своєї історії людство не мало загальноприйнятих мір.

— Коли не знаєш, як, — задумливо сказав слоник, — потрібно в когось запитати.

Мавпочка дуже уважно подивилася на слоника й запропонувала:

— Давай у тебе запитаємо.

— У мене? — зніяковів слоник. — У мене краще не треба. Давайте запитаємо в папугу.

— Давайте! — раптом закричав папуга, не знати звідки з'явившись перед друзями. — Давайте запитаємо у мене! Запитуйте!

— Як мене зміряти? — запитав удав.

Григорій Остер.
«38 папуг»

1. Перші еталони — в людині

Першими мірами довжини, природно, служили окремі частини людського тіла — найчастіше рук і ніг.

Ще давні єгиптяни, вавилоняни та інші народи застосовували таку міру як *лікоть*, що дорівнювала відстані від ліктя до кінця розпрямленого середнього пальця руки. Ліктями, зокрема, дуже зручно вимірювати вірówki та відрізи тканини. Повний оберт тканини довкола ліктя називався *подвійним ліктем*. Ця міра теж застосовувалася у багатьох народів.

Лікоть не мав сталої величини. У різних державах і в різні часи застосовувалися різні лікті. Крім цього, в одній і тій самій державі в один і той самий час могли існувати різні лікті. Найдовшим зазвичай



Міра лікоть

був царський лікоть, який застосовувався при зборі податі.

У руській державі міра, аналогічна ліктю, називалася *аршином*. Відомий російський історик та письменник Н.М. Карамзін (1766–1826) вважав, що ця назва запозичена внаслідок торгівлі зі східними народами. Зокрема, у персів лікоть називався «арші». Недобросовісні купці часто по-своєму тлумачили дану міру. Звідси пішло відоме «міряти на свій аршин», що означає «по-своєму бачити справу, пильнувати свої інтереси».

Дрібнішими від ліктя мірами довжини були: долоня (наприклад, в юдеїв, британців), кулак (в арабів) і п'ядь (в русичів).

Долоня — це ширина кисті руки. В класичній англійській літературі часто зустрічаються оповіді про вимірювання висоти коней саме долонями.

Мала п'ядь — це відстань від кінця великого пальця до кінця вказівного, а велика п'ядь — відстань від кінця великого пальця до кінця мізинця при найбільшому можливому розведенні їх. П'яді зустрічаються уже в актах XIV ст. Вважалося, що в аршині містяться 4 п'яді. Тому п'ядь часто називалася також чверткою. З п'яддю пов'язаний крилатий вислів: «Берегти кожну п'ядь рідної землі».

Ще дрібнішою мірою довжини був *палець* (наприклад, у вавилонян) і *дюйм* (в англо-саксонських народів). Цілком природно, що долоня дорівнювала 4 пальцям.

Дюйм початково вважався рівним довжині суглоба великого пальця. Про це говорить і сама назва: слово *duim* голландською мовою якраз і означає «великий палець».

У 1324 р. англійський король Едвард II уточнив величину дюйма. Згідно з королівським указом, 1 дюйм дорівнював «довжині трьох ячмінних зернин, узятих із середньої частини колоска і прикладених одне до одного своїми кінцями». А в англійському побуті ще й досі залишилася мірка «*ячмінне зерня*», що дорівнює третині дюйма. Цікаво у цьому зв'язку зауважити, що улюблена дітьми Дюймовочка — малесенька дівчинка з однойменної казки Андерсена, яка могла жити у квітці і мала зріст 1 дюйм, народилася саме з ячмінної зернини.



Міра долоня



Міра палець

— *Виміряти свій зріст? — прийшла в захоплення мавпочка. — Яке чудове, яке дивовижне рішення.*

Григорій Остер.
«38 папуг»

На початку XVII ст. указом російського царя Петра I була встановлена відповідність між традиційними російськими та новими англійськими мірами — «заради кращої узгодженості з європейськими народами у трактатах і контрактах». Відповідно до цього указу, 1 аршин прирівнювався до 28 англійських дюймів.

Іще з часів Київської Русі на українських землях застосовувалася така міра довжини як *сажень*. Проте, зокрема, свідчить і Нестор-літописець. Слово «*сажень*» мало первісну форму «*сяжень*». Тому ймовірно, що походило воно від дієслова «сягати».

Розрізняли *маховий сажень*, що дорівнював розмаху рук, і *косий сажень*, рівний відстані від п'ятої правої ноги до кінців пальців витягнутої вгору лівої руки. Звичайно, косий сажень був більшим від махового. Тому про плечистих чоловіків (зокрема, про казкових героїв) казали, що вони мають «косий сажень у плечах». Інколи таке порівняння можна почути й нині.

У XVII ст. було узаконено, що міра 1 сажень становить 3 аршини, що на нинішній вимір дорівнює 2,13 м. Зокрема, у «Соборному укладі» 1649 року сказано: «А сажень, щоб міряти землю чи щось інше, — робити на три аршини, а більше або менше трьох аршинів сажнів не робити». На відміну від косяго та махового сажнів, цей новий сажень називався «*царським*» або «*казенним*».

Найпоширенішою з мір, пов'язаних з ногою людини, є *фут*. Він дорівнює середній довжині ступні дорослої людини (англійське foot якраз і означає «нога», «ступня»). Ця міра теж застосовувалась у різних народів. В Англії фут був узаконений разом із дюймом у XIV ст. королем Едвардом II: 1 фут уважався рівним 12 дюймам, що на нинішній вимір становить 30,48 см. Французький королівський фут (який теж поділявся на 12 дюймів і був у Франції основною мірою довжини аж до введення метра), мав довжину 32,5 см.

— А чим іще можна міряти зріст? — запитала в папуги мавпочка.

— Усім! — сказав папуга.

Григорій Остер.

«38 папуг»



Міра фут

2. Природа має і стабільніші еталони

У XVI ст. відомий тогочасний учений Христоф Клавій (1537–1612) запропонував уточнити розміри фута за допомогою тих самих ячмінних зернин. По-

ловину фута, за Клавієм, мали визначати 64 зернини, прикладені одна до одної впоперек. Це давало б змогу дуже просто відтворювати довжину еталона у будь-якому місці, оскільки ширина ячмінних зернин дуже стабільна (значно стабільніша від їхньої довжини, яку застосовували для визначення дюйма), а велика кількість узятих зернин практично повністю згладжувала індивідуальні відхилення від середньої величини. До того ж, число 64 є степенем двійки. А це давало змогу простим діленням навіпіл одержувати точні менші долі фута.

Спроби означити довжину дюйма і фута за допомогою ячмінних зернин показують, що людина давно збагнула недосконалість свого тіла для вимірювання довжин. Ще показовішою є система мір, що її знаходимо в одному з арабських рукописів VIII ст., відповідно до якої лікоть дорівнював 8 кулакам, кулак — ширині 4 пальців, палець — товщині 6 ячмінних зернин, а ячмінна зернина — товщині 6 волосин з морди осла.



Христоф Клавій (Клавій-Шлюссель) — італійський математик німецького походження. Найбільше відомий як керівник проекту з уведення григоріанського календаря, яким увесь світ користується й понині.

3. Традиції — річ серйозна

Не менш цікаве походження основної міри довжини в англо-саксонських народів — ярда. Ця міра була узаконена англійським королем Генріхом I ще у 1101 році. Згідно з легендою, 1 ярд — це відстань від кінчика носа цього короля до кінця середнього пальця його витягнутої руки. Щоправда, за іншою версією прообразом ярда став меч Генріха I. 1 ярд вважається рівним 3 футам. На даний час — це приблизно 91 см.

4. Час як відстань

Принципово інші способи застосовувалися для встановлення одиниць вимірювання великих відстаней. Вони пов'язувалися з урахуванням часу на їхнє подолання. Наприклад, такою була міра довжини *стадій*. Вважається, що ця міра виникла у Давньому Вавилоні. Достеменно відомо, що стадіями вимірювали відстані давні греки. Зокрема, від цього слова утворилося сучасне слово «стадіон».

За переказами, стадій дорівнював відстані, яку доросла людина проходить розміреним кроком за проміжок часу від появи першого сонячного променя при сході сонця до того моменту, коли весь сонячний



Міра ярд

— Гарно, — погодився удав, — але незрозуміло. До чого тут математика?

Григорій Остер.
«38 папуг»

диск повністю зійде над горизонтом. Оскільки добре відомо, що схід сонця триває 2 хв, то, враховуючи середню швидкість пішохода, легко дійти висновку, що величина стадія перебувала в межах від 160 до 195 метрів.

Відомо, що вавилоняни ділили свій стадій на 360 ліктів. А оскільки лікоть у них приблизно дорівнював 54 см, то звідси неважко вивести, що довжина вавилонського стадія становила приблизно 194 м.

На основі таких міркувань з'ясовано, що римський стадій повинен був мати довжину 185 м, а грецький олімпійський — 192 м.



Давньовавилонська лінійка (бл. 2000 р. до н.е.). Оскільки ця лінійка є фрагментом напівзруйнованої статуї царя Гудея, то можна вважати, що нею визначалася половина давньовавилонського царського лікта. Лінійка поділена на 16 рівних частин, із яких друга у свою чергу поділена на 6 рівних частин, четверта — на 5, шоста — на 4, восьма — на 3, а дев'ята — на 2 рівні частини.

Ідея з використанням часових проміжків для встановлення міри довжини одержала несподіваний розвиток у XVII ст. У результаті фізичних експериментів з маятником (важливим елементом маятникового годинника, який якраз тоді було винайдено) з'ясувалося, що період коливання маятника залежить від його довжини. На основі цього самим винахідником маятникового годинника голландським математиком і механіком Христіаном Гюйгенсом (1629–1695) у 1664 р. було запропоновано взяти за одиницю вимірювання відстаней довжину такого маятника, період коливання якого становить 1 секунду. А польський природодослідник Тіт Бурратіні (1615–1682) у 1675 р. запропонував і назву для цієї нової одиниці — метр, утворивши її від грецького слова «метрео», тобто «вимірюю».

Проте невдовзі несподівано з'ясувалося, що період коливання маятника залежить не тільки від його довжини, але й від географічної широти місця, де проводиться вимірювання. Зокрема, поблизу екватора і в середніх широтах ці величини суттєво відрізняються одна від одної. Виявивши цей недолік,

— Послухай, папуго, — сказав слоник. — А чому ти ідеш пішки?
— На кому ж він поїде? — здивувалася мавпочка.

Григорій Остер.
«38 папуг»



Христіан Гюйгенс

помітили й інший, а саме, що при реалізації цієї ідеї одиниця вимірювання довжини «прив'язувалася» до одиниці вимірювання часу. А це в теоретичному аспекті значно гірше, ніж аби ці величини визначалися незалежно одна від одної. Тому, незважаючи на оригінальність ідеї, від неї відмовилися, залишивши лише назву «метр» для одиниці вимірювання довжин.

5. Універсальним мірилом оголошено Землю

У 1670 р. французький дослідник Мутон висунув ще більш захоплюючу ідею — пов'язати одиницю вимірювання довжин із розмірами всієї матінки-Землі, точніше, з довжиною її меридіана. Але для реалізації цієї смислової, а по суті глибоко філософської та гуманістичної ідеї потрібні були особливі суспільно-політичні умови. Вони з'явилися лише через сотню літ у зв'язку з революційними подіями у Франції наприкінці XVIII ст. — своєрідним підсумком епохи Просвітництва, пов'язаної з іменами великих просвітителів Вольтера, Руссо, Дідро і Д'Аламбера. Лише революційний рух, який охопив тоді цю країну, дав змогу організувати відповідні великомасштабні вимірювання, а найголовніше — стимулював перехід на нову систему мір. В усіх інших консервативніших країнах цей перехід затягнувся більше, як на століття, а в деяких не реалізований повною мірою й досі.

Характерним у цьому зв'язку є звернення французького уряду до населення, поширене у 1790 р. В ньому, зокрема, мовилося:

«Як можуть друзі рівності миритися з розмаїттям і незручністю мір, які зберігають ще пам'ять про ганебне феодальне рабство..., в той час, як вони клялися знижити саму назву тиранії, якою б вона не була?... Для створення істинно філософської системи мір, яка була б достойною віку просвітництва, не можна взяти нічого, що не ґрунтувалося на твердих підвалинах, що не пов'язано найтіснішим чином з предметами незмінними, нічого, що в подальшому могло б залежати від людей і від подій. Потрібно звернутися до самої природи і взяти основу системи мір з її надр ...».



Керівники експедиції і схема реалізованого ними вимірювання довжини паризького меридіана

6. Як же зміряли Землю?

У березні 1791 р. Національні збори Франції затвердили пропозицію Академії наук, що виходила від найвидатніших тогочасних учених Лапласа, Лагранжа, Монжа, Лавуазьє та ін., — про спорядження спеціальної експедиції для вимірювання земного меридіана. Було вирішено виміряти довжину паризького меридіана між двома містами, розміщеними на ньому — Дюнкерком (приморським містом на півночі Франції) і Барселоною (іспанським містом на березі Середземного моря). Знаючи географічні широти цих міст, потім легко було обчислити й довжину всього меридіана. Винятково сприятливою обставиною було те, що обидва вибрані міста знаходилися на рівні моря, оскільки це суттєво спрощувало вимірювання і підвищувало їхню точність. Керівниками експедиції було призначено академіків Жана Батіста Деламбра (1749–1822) та П'єра Мешена (1744–1804).

Вимірювальні роботи експедиції та відповідні розрахунки тривали декілька років. На відстані близько 1 000 км між Дюнкерком і Барселоною за допомогою провішування було побудовано і виміряно 115 трикутників, розміщених уздовж меридіана. Шукана величина була знайдена обчисленням і сумуванням довжин відрізків меридіана, розміщених усередині кожного трикутника. З цією метою застосовувалися тригонометричні співвідношення, що існують між кутами та сторонами трикутника. З особливою точністю вимірювалася лише одна сторона крайнього трикутника — так звана база. А в усіх решти трикутниках за допомогою кутомірних приладів вимірювалися лише кути — що значно простіше, ніж вимірювання відстаней. За допомогою формул, які пов'язують сторони і кути трикутника, крок за кроком, починаючи від першого трикутника, обчислювалися сторони усіх інших трикутників, а потім і відрізки меридіана, розміщені всередині них.

Встановивши довжину паризького меридіана у старих французьких мірах (туазах і футах; 1 туаз дорівнював 6 футам), було вирішено за основу нової

міри — метра — взяти $\frac{1}{40\,000\,000}$ від знайденої величини. У старих французьких мірах це становило 3 фути і 11,44 лінії (1 лінія = $\frac{1}{12}$ фута).

Геометрія є мистецтвом добре вимірювати.

П'єр Рамус

Ніщо не повинно бути таким незмінним, як те, що має бути мірою для всього.

Шарль Луї Монтеск'є

Мрія про всесвітню міру ... нарешті, щасливо доведена до виконання; з усіх чудових починань, які у нас залишаться в пам'яті про французьку революцію, це — те, за що ми найменше заплатили.

П'єр Мешен і Жан Деламбр

7. Еталон створено

Перший еталон метра було виготовлено у 1799 р. Але навіть у Франції повний перехід на нову систему вимірювання відбувся лише у 1840 р. А міжнародною мірою метр став у 1872 р. після відповідного рішення спеціально скликаної в Парижі міжнародної конференції. Тоді ж було затверджено міжнародний еталон метра, що був виготовлений зі сплаву платини (90%) та іридію (10%). Еталон має форму стержня завдовжки 102 см з двома мітками на відстанях 1 см від кінців. Відстань між цими мітками якраз і уособлює довжину 1 м. Поперечний переріз еталона нагадує літеру Х. Саме така форма забезпечує йому найбільшу міцність при найменшій вазі (останнє дуже важливо, оскільки платина, яка домінує в сплаві, дорожча навіть за золото).

Усі відомості про природні тіла та їхні властивості повинні містити точні дані про кількість, вагу, об'єм, розміри. Практика народжується з тісного поєднання фізики і математики.

Френсіс Бекон



Проект медалі (не реалізований) на честь створення еталона метра (1798 р.). Напис оповіщає:

«На всі часи, для всіх народів»

У зв'язку з технічними труднощами, реалізація рішень конференції 1872 р. була завершена лише у 1888 р. Нова міжнародна конференція 1889 р. затвердила 31 копію еталона метра. Зберігання однієї з них доручили Міжнародному бюро у м. Севрі біля Парижа. Решта були розподілені між країнами, учасницями конференції.

За час, що минув відтоді, декілька разів проводилося порівняння національних еталонів з головним еталоном з м. Севра. І майже щоразу одержувалися розбіжності, які вловлюються за допомогою найточніших фізичних засобів порівняння. Вважають, що ці розбіжності викликані молекулярними процесами, що відбуваються в матеріалі стержнів.

Суспільство ні на мить не забариться визнати заслуги системи, в якій усе взято з природи, що наділена такою простотою, якої не існує в жодній іншій системі.

П'єр Мешен і Жан Деламбр



Еталон метра з футляром до нього

8. Еталон, який є завжди і всюди

У зв'язку з цим пошук незмінних еталонів довжини продовжився. В середині XIX ст. відомий англійський фізик Джеймс Клерк Максвелл запропонував використовувати для цього найстабільнішу природну величину — довжину світлової хвилі. Світлова хвиля — це особливий потік електромагнітної енергії, в якому електрична і магнітна складові періодично переходять одна в одну. А відстань між сусідніми точками цього потоку, в яких згадані складові мають однакові величини, називається довжиною хвилі. Світлові хвилі з різних джерел і з різних частин світлового спектра мають різні довжини.

Після вимірювання еталонного метра оптичними засобами, з 1960 р. встановлено, що довжина 1 м становить 1 650 763,63 довжини хвилі оранжево-червоної лінії спектра світіння газу криптону. Для такого еталона уже не потрібні ніякі сховища. Він не залежить від жодних фізичних факторів. Але й на цьому пошуки еталона не завершуються. Цілком можливо, що крапки в цій справі не буде поставлено ніколи.

Нікому не спаде на думку низько оцінювати заслугу математиків, яку вони здобувають, виражаючи своєю мовою найважливіші відношення: все, що у вищому сенсі підвладне числу й мірі, вони вміють упорядкувати, означити і обчислити.

Йоганн Вольфганг Гете

9. Головна перевага метричної системи

Головна перевага метричної системи вимірювання над іншими системами полягає у тому, що дана система узгоджена з десятковою основою числення. Це означає, що менші і більші одиниці вимірювання утворюються з основної одиниці за допомогою ділення або множення на певний степінь числа 10. Напри-

клад, $1 \text{ дм} = \frac{1}{10} \text{ м}$; $1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см} = \frac{1}{10^2} \text{ м}$; $1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$. А це забезпечує дуже простий спосіб переведення одних одиниць в інші — більші чи менші.

Не так було до введення метричної системи. Наприклад, у старій російській системі вимірювання довжин 1 верста дорівнювала 500 сажням, 1 сажень — 3 аршинам, 1 аршин — 7 футам, 1 фут — 12 дюймам, а 1 дюйм — 10 лініям.

Зрештою, використання сучасних електронних засобів обчислень ці труднощі значно послаблюють. Тому в окремих країнах поряд з метричною системою все ще застосовуються і свої історичні системи вимірювання. Зокрема, багато з характеристик, що стосуються сучасної техніки, подаються в дюймах, морські відстані вимірюються в милях, глибини у футах тощо.

Метрична система краще будь-якої іншої може виразити підрозділи мір ..., оскільки вона збігається із системою числення.

Дмитро Менделєєв

2. Як вимірювали кути у різні часи

1. Прилади для вимірювання кутів

Транспортир і астролябія. Назва найпоширенішого тепер кутомірного інструмента — транспортира — утворена від латинського слова *transporte*, що означає «переносити». Звідси ж походять і широко вживані тепер слова «транспорт» та «транспортувати». Можливо, це свідчить про те, що початково транспортир використовували більше для перенесення кутів, ніж для їхнього вимірювання. Але найдавнішим прообразом транспортира був усе ж таки кутомірний прилад — *астролябія*. Транспортир — це половина астролябії.

Вважається, що астролябію винайшов у II ст. до н.е. знаменитий грецький астроном Гіппарх (180–125 рр. до н.е.), а вдосконалив відомий середньовічний німецький астроном Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476). Прилад слугував для визначення положення небесних світил на небесній сфері. Для прикладу, на гравюрі XVI ст., відтвореній на рис. 32, відображено один зі способів для визначення горизонтального напрямку на світило, який застосовувався мореплавцями.



Регіомонтан (Йоганн Мюллер)

Відомий німецький середньовічний астроном та математик. Автор першого в Європі підручника з тригонометрії. Склавав знамениті астрономічні таблиці.



Рис. 32

Початково астролябію використовували здебільшого для визначення висоти світил над горизонтом. З цією метою її виготовляли у вигляді важкого мідного диска — *лімба*, який підвішували за кільце у вертикальному положенні (рис. 33). По краю лімба наносилася шкала від 0° до 360° . Пряма $ГГ_1$, що з'єднувала поділки 0° і 180° , займала горизонтальне положення. У центрі лімба кріпилася рухома стрілка $АА_1$ — *алідада*. На її кінцях розміщувалися перпендикулярні до лімба пластинки з отворами — *діоптри*.

Для визначення висоти світила над горизонтом спостерігач прикладав око до нижнього діоптра $А$ і повертав алідаду доти, поки світило не було видно відразу через обидва діоптри. Поділка на шкалі, на якій зупинявся край алідади ($А$ чи $А_1$), вказувала на висоту світила над горизонтом у градусах.

Квадранти, секстанти та октанти. Бурхливий розвиток астрономії, який розпочався в Європі з початком епохи Відродження, вимагав уже значно більшої точності від астрономічних вимірювань, ніж її могли забезпечити давні астролябії. Цього можна було досягти лише за рахунок збільшення лімба. Адже чим більша кругова шкала на його краю, тим більшою буде відстань між сусідніми поділками, а це давало змогу визначати не тільки кількість цілих градусів у куті, але й кількість їхніх частин — мінут і навіть секунд.

Водночас було помічено, що в більшості астрономічних вимірювань фактично використовується не вся кругова шкала астролябії, а лише певна її частина. Тому замість усієї астролябії у збільшеному вигляді виготовляли лише *квадранти*, *секстанти* і *октанти*, тобто відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$ частини

астролябії. Спосіб використання квадранта відображено на старовинній гравюрі, відтвореній на рис. 34. А на рис. 35 зображено поєднання в одному приладі квадранта й астролябії, запропоноване видатним данським астрономом Тихо Браге (1546–1601). Секстант Браге зображено на рис. 36.

Окрім численних гравюр із зображенням кутомірних інструментів, створених художниками, астрономи ще й у свій спосіб засвідчили свою любов і повагу до цих приладів, назвавши *Секстантом* одне із



Астролябія Регіомонтана

Рис. 33

Усе тут було заставлене різноманітними секстантами, квадрантами, телескопами, астролябіями та іншими астрономічними приладами.

Джонатан Свіфт.
«Мандри Лемюєля Гуллівера»



Ян Гавелій веде спостереження за допомогою квадранта

Рис. 34

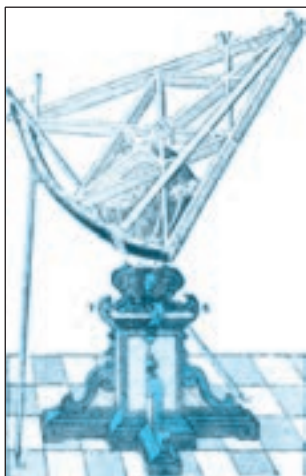


Рис. 36



Рис. 35

сузір'їв у південній частині неба. Відповідну пропозицію подав видатний польський астроном Ян Гевелій (1611–1687), автор усевітньо відомого атласу зоряного неба. Історія символічна й повчальна. Для проведення досліджень Гевелій збудував обсерваторію і величезний секстант у своєму місті Гданськ. Але затуркані й настрашені городяни спалили прилад. Тоді Гевелій вирішив «перенести його на небо» й увічнити в назві сузір'я, аби вже ніколи нічия зла рука не могла до нього дотягнутися. Але на той час не було неназваного сузір'я, яке б своєю формою нагадувало секстант (принцип, що його дотримувалися при утворенні назв більшості сузір'їв). Тому Гевелій вибрав сузір'я, яке хоч і не нагадувало своїми контурами секстанта, але знаходилося між сузір'ям Лева (якраз під його лапами) та Гідри і тому мало ще й цей додатковий символічний захист.

Телескоп і теодоліт. Наступне суттєве удосконалення в конструкцію астролябії вніс французький астроном Жан Пікар (1620–1682) в середині XVII ст. Він замінив діоптри підзорною трубою, винайденою незадовго до цього Галілеєм, а для плавного переміщення аліади використав мікрометричний гвинт. Усе це значно підвищувало точність вимірювань і не потребувало використання великих шкал.



Сузір'я Секстант.
Рисунок з атласу Гевелія

Подальші удосконалення астролябії продовжилися у напрямку використання замість підзорної труби найрізноманітніших телескопів. А для проведення наземних (геодезичних) вимірювань було сконструйовано *теодоліт* (рис. 37).

Теодоліт має два лімби, розміщені у вертикальній і горизонтальній площинах. Це дає змогу застосовувати цей прилад як для складання планів, так і для проведення нівелювання, тобто визначення висот.

Бусоль. Кути, які застосовуються у морській та повітряній навігації, вимірюють у горизонтальній площині від напрямку на північ проти руху годинникової стрілки від 0° до 360° . Кожен такий кут називається *курсом*. Прилад, що дає змогу вимірювати курс, поєднує в собі античну астролябію і компас. Він називається *бусоллю*. На принципі бусолі конструюється сучасне навігаційне обладнання для морських та повітряних суден.

Як бачимо, звичний нам транспортир має дуже давню історію і водночас втілюється у найсучасніших приладах.



Рис. 37

2. Одиниці для вимірювання кутів

Градуси. Найпоширенішою одиницею для вимірювання кутів є градус. Латинське слово *gradus*, від якого утворено цю назву, означає «крок», «ступінь». Величина кута 1 градус визначається так. Візьмемо за вершину кута центр якого-небудь півкола, а саме півколо поділимо на 180 рівних частин (рис. 38). Тоді кут, сторони якого проходять через сусідні поділки, і є кутом завбільшки в 1 градус (пишуть: 1°).

Але чому для визначення кута 1° півколо ділять саме на 180 частин?

Ще давньовавильонські жерці помітили, що під час рівнодення (тобто коли день і ніч мають однакову тривалість) сонячний диск упродовж свого руху небосхилом (рис. 39) вкладається у пройденому шляху рівно 2×180 разів. А оскільки цей шлях — півколо, то цілком природно було розбивати його на 180 таких подвійних кроків Сонця. Саме ці кроки пізніше і були названі градусами.

Спостереження за рухом Сонця впродовж дня підтверджувалися і відповідними спостереженнями

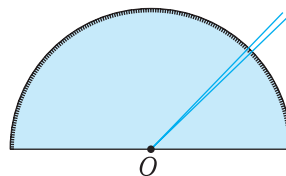


Рис. 38

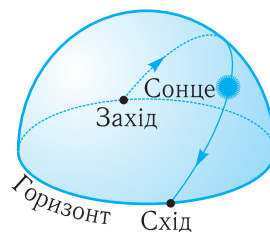


Рис. 39

за його річним рухом. У ті часи вважалося, що рік триває 360 діб. Тому весь річний шлях Сонця небосхилом — так зване зодіакальне коло — теж ділився на 360 подвійних кроків, тобто градусів, а його половина, відповідно, — на 180 градусів.

Нарешті, свій вплив на вибір основи для визначення градуса могло мати й те, що у Давньому Вавилоні застосовувалася шістдесяткова система числення, а число 180 ділиться без остачі на основу 60 цієї системи. З цим пов'язано і ділення градуса на 60 минут, а минути — на 60 секунд.

В античну епоху старовинну вавилонську систему перейняли грецькі астрономи, зокрема, найвидатніший з них, Клавдій Птолемей (I–II ст. н.е.). Авторитет Птолемея сприяв тому, що ця система набула повсюдного поширення в епоху Відродження, а потім і в пізніші часи. У результаті ми й тепер, як і давні вавилоняни, як давні греки та середньовічні європейці вимірюємо кути в градусах, уважаючи, що розгорнутий кут має 180° , а повний — 360° .

Цікаве походження позначення для градусної міри. Кути величиною 1° Птолемей називав мойрами, що в перекладі з грецької мови означає «частини». Слово *μοιρα* він скорочував двома першими літерами, причому другу писав меншою від першої і вгорі — μ° . Пізніше залишилася лише маленька літера $^\circ$. Це скорочення застосовується й досі.

Мінути тепер позначають за допомогою значка $'$, а секунди — за допомогою значка $''$. Наприклад, кут, що має 23 градуси 18 минут і 42 секунди скорочено записують так: $23^\circ 18' 42''$.

Гради. Існують й інші одиниці для вимірювання кутів. Зокрема, наприкінці XVIII ст. у Франції, одночасно із запровадженням метричної системи для вимірювання довжин, було запропоновано удосконалення для вимірювання кутів. Для цього пропонувалася нова одиниця *град*. Її назва утворювалася від того самого латинського слова *gradus*, але величина бралася іншою. А саме: повний кут пропонувалося ділити не на 360 градусів, а на 400 градусів. Крім цього, гради ділилися не на 60, а на 100 минут, а минути — не на 60, а на 100 секунд.

Вилучити з математики застосування — це те ж саме, що шукати живу істоту з однією лише кістковою основою, але без м'язів, нервів і судин.

Фелікс Клейн



Клавдій Птолемей.
Старовинна гравюра

Гради позначаються значком $^{\circ}$, градусів мінути — значком $'$, а градусів секунди — значком $''$. Легко обчислити, що $90^{\circ} = 100^{\circ}$, $1^{\circ} = 54'$, $1' = 32,4''$, а $1'' = 0,324''$.

Радіани. Незважаючи на очевидні переваги градусів над градусами при проведенні обчислень, ця одиниця все ж набула дуже обмеженого застосування. Незмірно більшого поширення набула інша альтернатива градуса — радіан. Вимірювання кутів у радіанах ґрунтовно вивчатиметься в наступних класах.

3. Про неоднозначність аксіоматики геометрії

Уже вказувалося, що існують різні аксіоматики геометрії. При цьому відмінність між аксіоматиками може бути двоякою. По-перше, різними можуть бути набори основних понять, що описуються аксіомами. Наприклад, в аксіоматиці Гільберта до основних понять не належить довжина відрізка і градусна міра кута, натомість основними є поняття рівності відрізків та кутів. Відтак ця рівність не опосередковується певною мірою, а описується прямо відповідними аксіомами, як от: «Два відрізки, які рівні деякому третьому відрізку, рівні між собою». Ще приклад: в аксіоматиках, у яких до основних понять належать поняття руху, рівність відрізків і кутів означається як можливість суміщення цих фігур.

Інший тип відмінностей становлять ті, що втілюються у межах однієї й тієї самої системи основних понять. Ці відмінності значно менш принципові і здебільшого переслідують дидактичні (навчальні) цілі або відображають певні естетичні уподобання авторів-розробників.

Наприклад, замість першої з аксіом належності в аксіоматиці О.В. Погорелова можна було б прийняти значно «слабшу» аксіому: «На кожній прямій існує принаймні дві точки. Існує принаймні три точки, які не лежать на одній прямій» (до слова, саме в такій формі ця аксіома приймається в «Основах геометрії» Гільберта).

Справді, нехай A, B, C — три точки, що не лежать на одній прямій, існування яких гарантується наведе-

Коли мова йде про те, щоб дослідити основи якої-небудь науки, то слід установити систему аксіом, які містять точний і повний опис тих відношень, що існують між елементарними поняттями цієї науки. Ці аксіоми є одночасно означеннями цих елементарних понять.

Давид Гільберт

ною вище аксіомою Гільберта, а l — довільна пряма площини. Якщо б не була пряма l , вона не проходить принаймні через одну з точок A, B, C . Нехай вона не проходить через точку A (рис. 40), а E, F — дві точки прямої l , існування яких гарантується тією самою послабленою аксіомою Гільберта. За аксіомою 6 зі списку аксіом Погорелова, на півпрямій EF від точки E можна відкласти відрізок будь-якої довжини і тільки один. Оскільки різних довжин безліч, то можна відкласти безліч відрізків, а тому існує безліч їхніх кінців P, Q, R . Отже, на прямій l існує безліч точок $P, Q, R, \dots$. Далі, через кожну з точок $P, Q, R, \dots$ і точку A проходить пряма, а на ній, як щойно показано, існує безліч своїх точок. При цьому на самій прямій l може розміщуватись щонайбільше по одній із цих точок. Отже, усі решта, і їх безліч — поза прямою l , що й треба було довести.

Інша видозміна аксиоматики в межах однієї й тієї самої системи основних понять — за допомогою заміни окремих аксіом на рівносильні їм твердження. Дві аксіоми називаються *рівносильними* або *еквівалентними*, якщо твердження кожної з них можна вивести з іншої, залучаючи, в разі потреби, одні й ті самі додаткові аксіомы.

Розглянуті щойно аксіомы належності у формулюванні Погорелова і Гільберта — не еквівалентні, оскільки аксіома Гільберта впливає з аксіомы Погорелова безпосередньо, а аксіома Погорелова з аксіомы Гільберта — лише при застосуванні аксіомы відкладання відрізків.

А от аксіома 4 з аксиоматики Погорелова еквівалентна такій аксіомі Паша, необхідність якої вперше (у 1882 р.) помітив німецький математик Моріц Паш (1843–1930): «Пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, але перетинає його сторону, перетинає одну, і тільки одну, з двох інших сторін».

Доведемо, що з аксіомы 4 Погорелова справді впливає аксіома Паша.

Нехай пряма a не проходить через жодну з вершин трикутника ABC і перетинає його сторону

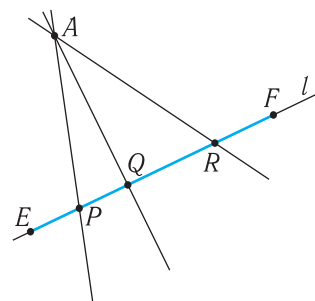


Рис. 40



Моріц Паш

Математичні істини є похідними від невеликої кількості аксіом, з яких вони розвиваються шляхом низки бездоганних умовиводів; вони закладені не тільки в природі нашого пізнання, а й у сутності самої природи.

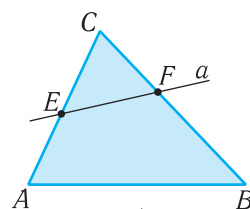
Анрі Пуанкаре

АС у деякій точці E (рис. 41). Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Точки A і C лежать у різних півплощинах, оскільки відрізок AC перетинає граничну пряму a . Для точки B існує дві можливості: 1) або вона лежить в одній півплощині з точкою A , а отже, у різних півплощинах з точкою C , і тоді відрізок AB не перетинає прямої a , а відрізок BC перетинає її у деякій точці F (рис. 41, а); 2) або точка B лежить в одній півплощині з точкою C , а отже, у різних півплощинах з точкою A , і тоді відрізок BC не перетинає прямої a , а відрізок AB перетинає її у деякій точці G (рис. 41, б). В обох випадках пряма a , окрім сторони AC , перетинає ще одну, і тільки одну з інших сторін трикутника ABC , що й треба було довести.

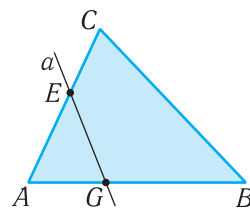
Можна довести, що й, навпаки, з аксіоми Паша впливає аксіома 4 з аксіоматики Погорелова, тобто, що кожна пряма розбиває площину на дві півплощини. У першому розділі цього підручника аналогічне твердження буде доведено стосовно площин у просторі: площина розбиває простір на два півпростори. Доведення для прямої проводиться аналогічно, тому тут на ньому не зупиняємося. Отже, аксіома 4 Погорелова і аксіома Паша справді еквівалентні.

Цілком особливе місце в історії аксіоматики геометрії займає питання про еквіваленти аксіоми про паралельні прямі. У тій формі, в якій ця аксіома подається у теперішніх підручниках, її вперше сформулював шотландський математик Джон Плейфер (1748–1819) у пристосованому для школи виданні «Начал геометрії» Евкліда 1795 р. Тому цю аксіому називають ще *аксіомою Плейфера*. А до того замість формулювання Плейфера переважно застосовувалося формулювання Евкліда, в якого воно було одним із постулатів.

В Евклідових «Началах» твердження, які приймаються без доведення, поділялися на два види. Одні з них називалися аксіомами, інші — постулатами. Аксіоми здебільшого стосувалися кількісних закономірностей. Наприклад, до аксіом Евклід відносив



а)



б)

Рис. 41



Джон Плейфер

такі твердження: «Рівні одному й тому ж, рівні між собою»; «Якщо до рівних додати рівні, то одержимо рівні», «Ціле більше від своєї частини» тощо. На противагу цьому, до постулатів відносилися власне геометричні твердження. В дослівному перекладі з грецької слово «постулат» означає «вимога». Отже, йшлося про вимогу до читача прийняти відповідні твердження без доведення.

Евклід сформулював п'ять таких постулатів-вимог. Першими чотирма з них були такі:

I. *Будь-які дві точки можна сполучити відрізком;*

II. *Будь-який відрізок можна як завгодно далеко продовжити за кожен із його кінців;*

III. *З будь-якого центра будь-яким радіусом можна описати коло;*

IV. *Будь-які два прямих кути можна сумістити один із одним (тобто такі кути рівні).*

А п'ятим був постулат:

V. *Якщо при перетині двох прямих січною утворюються внутрішні односторонні кути, які в сумі не дорівнюють двом прямим кутам, то дані прямі перетинаються.*

Можна довести, що коли виконується V постулат Евкліда, то виконується й аксіома про паралельні прямі Плейфера.

Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею (рис. 42). Проведемо через A довільну січну c , а потім — пряму b так, щоб сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 дорівнювала 180° . Тоді, за ознакою паралельності, $b \parallel a$. Якщо після цього проведемо через A довільну іншу пряму b' , то сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і $2'$ уже не буде дорівнювати 180° , а отже, за V постулатом Евкліда, пряма b' перетне пряму a . Таким чином, пряма b буде єдиною, яка проходить через точку A і паралельна прямій a , тобто справджуватиметься аксіома про паралельні прямі.

Навпаки, з аксіоми Плейфера про паралельні прямі випливає твердження V постулату Евкліда. Справді,

Справжній учень вміє виводити відоме з невідомого і цим наближається до учителя.

Йоганн Вольфганг Гете

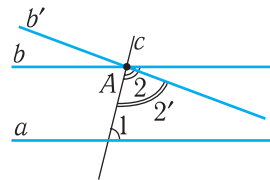


Рис. 42

нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею, а пряма b' проходить через точку A і при цьому сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і $2'$ не дорівнює 180° (див. рис. 42). Проведемо через точку A таку пряму b , для якої сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 уже дорівнює 180° . Тоді, відповідно до ознаки паралельності, прямі a і b — паралельні. Але, за аксіомою Плейфера про паралельні, b — єдина пряма, яка проходить через A і не перетинає прямої a . Тому пряма b' неодмінно перетне пряму a . Отже, й виходить, що коли сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і $2'$ не дорівнює двом прямим кутам, то прямі a і b' перетинаються, тобто справджується V постулат Евкліда, що й треба було довести.

Оскільки з V постулату Евкліда випливає аксіома Плейфера про паралельні прямі, а з аксіоми Плейфера — V постулат Евкліда, то ці твердження еквівалентні.

Інший еквівалент аксіоми про паралельні прямі запровадив у своєму «Підручнику з елементарної геометрії» знаменитий український математик М.В. Остроградський. Замість постулату Евкліда або аксіоми Плейфера, Остроградський приймає твердження, яке, на його погляд, значно виразніше характеризує геометричні властивості реального простору. Одним із ключових просторових понять, яке активно застосовується у різних науках, є напрямок. При цьому кожен два взаємно протилежних напрямки визначаються якою-небудь однією прямою з усієї сукупності паралельних прямих. Цей факт Остроградський і фіксує у своїй формі аксіоми про паралельні прямі: «Дві прямі площини, які паралельні третій прямій цієї площини, паралельні між собою».

У більшості сучасних підручників твердження аксіоми Остроградського виводиться з аксіоми Плейфера і називається або ознакою паралельності прямих, або теоремою про транзитивність відношення паралельності прямих. Для доведення застосовують метод «від супротивного». Припускають, що якісь прямі a і b , кожна з яких паралельна деякій



Маловідомий портрет
М.В. Остроградського

Багато хто вважає, що математика — наука суха, нудна і полягає лише в умінні рахувати. Це нісенітниця. Цифри в математиці грають найдріб'язковішу, найостаннішу роль. Це — найвища філософська наука, наука найбільших поетів.

Михайло Остроградський



Рис. 43



Титульна сторінка оригінального видання 2-ї частини «Підручника з елементарної геометрії» М.В. Остроградського (1857 р.)



Обкладинка українського перекладу підручника М.В. Остроградського, виданого тернопільським видавництвом «Підручники і посібники» до 200-ліття з дня народження ученого (2001 р.)

прямій c , не паралельні, а перетинаються у деякій точці M (рис. 43). Тоді через точку M проходитиме дві прямі a і b , кожна з яких паралельна прямій c . Оскільки це суперечить аксіомі Плейфера, то зроблене припущення неправомірне, і тому $a \parallel b$.

Але й, навпаки, з аксіоми Остроградського випливає аксіома Плейфера. Справді, нехай у площині маємо точку A , розміщену поза прямою l (рис. 44). Тоді, як уже зазначалося, через точку A проходить пряма a , паралельна прямій l . Тому доведення потребує лише єдиності цієї прямої a . Припустимо, що існує ще якась інша пряма a' , яка теж проходить через точку A і паралельна прямій l . Оскільки обидві прямі a і a' паралельні прямій l , то, за аксіомою Остроградського, вони паралельні між собою. Однак ці прямі мають спільну точку A . Дійшли до суперечності. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, пряма a — єдина, яка проходить через точку A і паралельна прямій l . Аксіому Плейфера доведено.

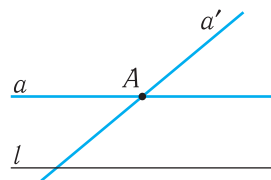


Рис. 44

Таким чином, аксіоми Плейфера і Остроградського — рівносильні.

Відомий російський учений О.Д. Александров уважав, що класичні формулювання аксіом про паралельні прямі Евкліда, Плейфера чи Остроградського надто складні при початковому ознайомленні з геометрією. Тому замість них у шкільному викладанні він пропонував застосувати рівносильну їм, але значно простішу для сприйняття учнями *аксіому прямокутника*: «Чотирикутник $ABCD$, у якому кути A і B — прямі, а сторони AD і BC — рівні, є прямокутником, тобто у ньому кути D і C теж є прямими, а сторони DC і AB — рівними» (рис. 45).

Аксіома прямокутника дає змогу доволі легко розвинути теорію вимірювання площ багатокутників і навіть вивести теорему Піфагора, а потім і численні наслідки з неї. Однак з аксіоми прямокутника не зовсім легко вивести твердження аксіоми Плейфера. У цьому проявляється своєрідний «закон збереження труднощів», який завжди в таких питаннях дає про себе знати у математиці.

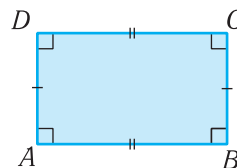


Рис. 45



Моріс Ешер. Рептилії

Гравюра вдало ілюструє один із найважливіших принципів стереометрії — вихід із «плоского» двовимірного світу і періодичне занурення у нього.

Розділ I

Вступ до стереометрії. Перетин і паралельність прямих та площин у просторі

Я гадаю, що ніколи досі ми не жили в такий геометричний період. Варто лише поміркувати над минулим, згадати те, що було раніше, і ми будемо спантеличені, побачивши, що світ, який нас оточує, — це світ геометрії, чистої, справжньої, бездоганної в наших очах. Усе довкола — геометрія. Ніколи ми не бачили настільки прозоро таких форм, як круг, прямокутник, кут, циліндр, куля, виконаних так чітко, з такою ретельністю й так упевнено.

Ле Корбузьє

Усі доказові науки послуговуються аксіомами. Аксіоми мають найвищий ступінь загальності і є началом усього.

Аристотель

Нерозважно вчинили б математики, якби вони, відкинувши найпростіші поняття, почали досліджувати складні.

Михайло Ломоносов

Ви вже знаєте, що предметом вивчення у геометрії є просторові форми. Інакше ці форми називаються геометричними фігурами. Саме ж вивчення геометричних фігур відбувається шляхом зведення складніших із них до простіших. Найпростішими геометричними фігурами вважаються точки, прямі і площини, основні властивості яких описуються аксіомами. Інші властивості цих найпростіших фігур доводяться на основі аксіом логічним шляхом. Цьому, в основному, і присвячується перший розділ підручника. Складнішими просторовими фігурами є багатогранники. У кінці першого розділу встановлені властивості найпростіших фігур застосовуються для означення двох найважливіших класів багатогранників — паралелепіпедів і тетраедрів.

§1. Аксиоми стереометрії

У шкільній геометрії вивчаються ідеалізовані просторові форми навколишнього світу, який сприймається людиною за допомогою її органів чуттів. Інакше ці форми називаються *геометричними фігурами*. Отже, геометричні фігури — це мисленеві образи, які утворюються в нашій свідомості внаслідок абстрагування, тобто нехтування усіма властивостями предметів, окрім їхньої протяжності у просторі, взаємного розміщення та розмірів.

Окремі геометричні фігури є плоскими, і їх можна вважати розміщеними в одній площині. Властивості таких фігур вивчає планіметрія.

Інші фігури не є плоскими, або їх уже не можна вважати розміщеними в одній площині. Такими є, наприклад, куб, куля, циліндр, конус, їхні комбінації. Властивості таких фігур вивчаються у стереометрії. Стереометрія значною мірою базується на планіметрії.

Найпростішими геометричними фігурами, які вивчаються у планіметрії, вважаються *точки* і *прямі*. У стереометрії до них долучаються *площини*.

Точки є ідеалізованими мисленневими образами дуже дрібних предметів, розмірами яких за даних умов можна взагалі знехтувати (наприклад, палинок, слідів тонко загостреного олівця на папері чи палиці на піску). Прямі — це мисленневі образи довгих напнутих ниток чи мотузок, світлових променів тощо. Площини — мисленневі образи великих рівних поверхонь, наприклад, стола, стіни, водного плеса, рівного поля тощо. Площини, як і прямі, ми уявляємо нескінченними і без будь-якої товщини. Кожна площина нескінченна в усіх напрямках.

Точки і прямі позначаються й зображаються у стереометрії так само, як і в планіметрії. Площини

Найпершою запорукою непогрішності математичного мислення вважається те, що вихідним пунктом міркувань і дій у цій науці слугують аксиоми.

Іван Сеченов

Геометрія — це застосування строгої логіки до самоочевидних і, отже, безсумнівних особливостей простору. Але точність цієї науки іде ще далі, оскільки будь-яка особливість, якою б вона не була очевидною, обов'язково підлягає доведенню, якщо тільки воно можливе. Завдання полягає в тому, щоб усі геометричні істини довести на основі якомога меншої кількості припущень.

Августус де Морган

Аксиоми та доведення науки проникають у розум, захоплюють його і тримають так міцно, що він не може вирватися.

Френсіс Бекон

Аксиома — це твердження, на яке не вистачило доведення.

З учнівського гумору

ж позначаються малими грецькими літерами α , β , γ тощо. А оскільки уявлення про площину пов'язано з названими вище поширеними прямокутними формами, які при зоровому сприйнятті найчастіше здаються паралелограмами, то на рисунках площини, як правило, зображають у вигляді цих паралелограмів. Інколи для надання рисункові більшої колоритності від цих паралелограмів «відламують» певні частини (на рис. 1.1 наведено декілька можливих зображень площини). Крім того, ті фігури або їхні частини, які «закриваються» іншими фігурами, у стереометрії зображаються пунктирними лініями. З урахуванням цього на рис. 1.2 зображено дві площини α і β , які мають спільну пряму a , а також пряму b , що належить площині β .

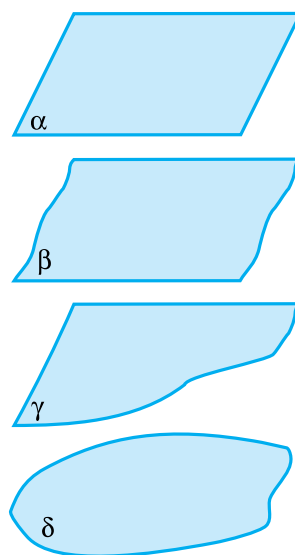


Рис. 1.1

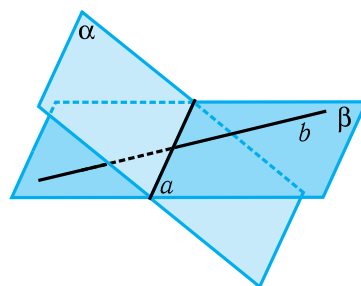


Рис. 1.2

Фундамент стереометрії складають декілька найзагальніших властивостей точок, прямих і площин, сформульованих на основі віковичного життєвого досвіду людей, а також на основі ретельного логічного аналізу вчених. Як і в планіметрії, ці властивості називаються *аксіомами* (в перекладі з грецької мови, як уже вказувалося у вступі, слово «аксіома» означає «повага», «авторитет», «незаперечна істина»).

Сукупність усіх аксіом окремої наукової теорії називається її *аксіоматикою*. Можливі різні аксіоматики стереометрії. У нашому підручнику викладається та з них, яка найбільшою мірою узгоджується з історичною традицією у побудові навчальних курсів геометрії. За цією традицією, зокрема, стереометрія вивчається після планіметрії і, отже, ґрунтується на ній. Це й відображає перша аксіома.

Аксіома 1.

У просторі існують площини. У кожній площині здійснюється планіметрія.

Перше твердження цієї аксіоми приймається для запобігання логічно можливому зведенню стереометрії до планіметрії, тобто до ситуації, коли у просторі існує одна-єдина площина. Друге ж твердження означає, що в кожній площині існують усі фігури

Геометрія є мистецтвом правильно міркувати на неправильних рисунках.

Нільс Хенрік Абель

і здійснюються всі факти, відомі з планіметрії, наприклад: аксіома паралельних прямих, ознаки рівності та подібності трикутників, теорема Піфагора, формула для обчислення довжини кола тощо.

Наступною аксіомою встановлюється єдиний масштаб вимірювання відрізків у всьому просторі, який, взагалі кажучи, можна було б уявляти і різним для різних площин.

Аксіома 2.

Якщо дві точки належать одночасно кожній із двох площин, то відстані між цими точками у кожній з площин рівні між собою.

Отже, введення цієї аксіоми дає змогу вести мову про відстані між точками у просторі, не конкретизуючи, в якій саме площині ці відстані вимірюються. А це, у свою чергу, є передумовою для поширення на стереометрію фундаментальних понять рівності та подібності фігур, а також означень переміщення та перетворення подібності.

Означення

(рівності та переміщення фігур).

Дві просторові фігури F і F' називаються **рівними** (записують: $F = F'$), якщо між точками цих фігур можна встановити взаємно однозначну відповідність (тобто відповідність, при якій кожній точці однієї фігури відповідає одна і лише одна точка іншої), причому для довільних двох точок X , Y фігури F і відповідних їм точок X' , Y' фігури F' відрізки XY та $X'Y'$ рівні між собою (рис. 1.3).

Відповідність між фігурами F і F' , яка має зазначену властивість, називається *переміщенням*, або *рухом* фігури F у фігуру F' .

Давно помічено, що геометрія — це чудова логіка. І справді, коли означення чіткі, коли постулати незаперечні, а аксіоми безсумнівні, коли властивості фігур випливають зі строгого спостереження та порівняння за допомогою неперервної і добре узгодженої послідовності, а предмети постійно перебувають у полі зору, тоді звикають міркувати точно, послідовно і методично; ця звичка підсилює та шліфує розум і приносить користь при пошуку істини в інших галузях.

Джордж Берклі

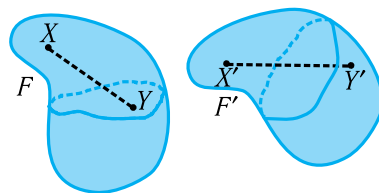


Рис. 1.3

Означення

(подібності та перетворення подібності фігур).

Дві просторові фігури F і F' називаються *подібними* (записують: $F \sim F'$), якщо між точками цих фігур можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій для будь-яких двох точок X, Y фігури F і відповідних їм точок X', Y' фігури F' відношення довжин відрізків $X'Y'$ та XY дорівнює одному і тому ж числу k ($k > 0$) (рис. 1.4). Число k називається *коефіцієнтом подібності* фігур F і F' .

Відповідність між фігурами F і F' , яка має зазначену властивість, називається *перетворенням подібності* фігури F у фігуру F' .

(Нагадаємо, що в геометрії будь-яку взаємно однозначну відповідність між точками двох фігур називають *перетворенням* однієї фігури в іншу).

Без будь-яких змін переноситься із планіметрії у стереометрію й чимало інших понять та відношень, пов'язаних з поняттям відстані, наприклад: центральної симетрії і центрально симетричних фігур, гомотетії і гомотетичних фігур тощо.

Означення

(центральної симетрії і центрально-симетричних фігур).

Точки X та X' у просторі називаються *симетричними відносно точки O* (центра симетрії), якщо точка O є серединою відрізка XX' (рис. 1.5). Точка O вважається симетричною самій собі.

Центральною симетрією, або симетрією відносно точки O , називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , при якому кожна точка X фігури F переходить у таку точку X' фігури F' , яка є симетричною точці X відносно даної точки O (рис. 1.6). При

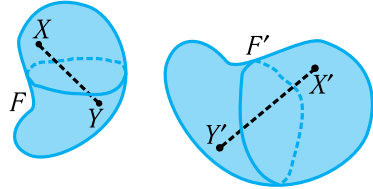


Рис. 1.4

— Коли я вживаю якесь слово, — показав Шалам-Балам майже глузливо, — то воно означає лише те, що я хочу, щоб воно означало, — не більше й не менше...

Льюїс Керролл.
«Аліса в Задзеркаллі»

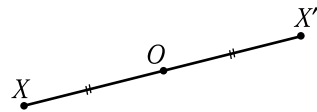


Рис. 1.5

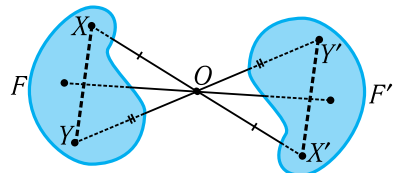


Рис. 1.6

цьому фігури F і F' називаються *центрально-симетричними* відносно точки O .

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається *центрально-симетричною*, а точка O — *центром її симетрії*.

Центрально-симетричними фігурами на площині є, наприклад, коло і прямокутник, а в просторі — сфера і прямокутний паралелепіпед.

Означення

(гомотетії і гомотетичних фігур).

Гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k > 0$ називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , при якому довільна точка X фігури F переходить у таку точку X' фігури F' , яка належить променю OX і при цьому справджується рівність: $OX' = k \cdot OX$ (рис. 1.7). При цьому фігури F і F' називаються *гомотетичними* з центром гомотетії O і коефіцієнтом гомотетії k .

У решті аксіом стереометрії фіксуються основні властивості відношення *належності* для найпростіших стереометричних фігур — точок, прямих і площин.

Окрема точка може належати прямій або площині, а пряма — площині. Кажуть також, що тоді пряма або площина проходить через (або містить) точку, а площина проходить через (або містить) пряму.

Кожну пряму і площину, як і взагалі будь-яку фігуру, ми уявляємо складеною з точок. Тому вислів «пряма належить площині» означає, що кожна точка цієї прямої належить даній площині.

Аксіоми належності формулюються наступним чином.

Аксіома 3.

Якби не були дві різні точки, у просторі існує пряма, і до того ж — тільки одна, яка проходить через ці точки.

— Перестань зараз же! — закричав Знайко. — Від твоєї музики вуха болять!

— Це тому, що ти до моєї музики ще не звик. Ось звикнеш — і вуха перестануть боліти.

Микола Носов.

«Пригоди Незнайки та його друзів»

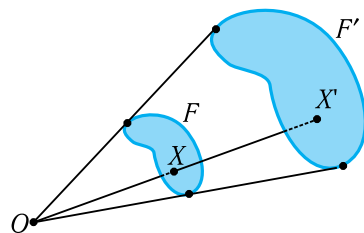


Рис. 1.7

Навчатися можна тільки весело... Аби перетравити знання, потрібно поглинати їх з апетитом.

Анатоль Франс

Аксиома 4.

Які б не були три різні точки простору, що не лежать на одній прямій, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка проходить через ці точки.

Аксиома 5.

Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають і спільну пряму, яка проходить через цю точку.

Зауважимо, що коли йдеться про дві точки, дві прямі чи про дві площини, то, як правило, мають на увазі, що їх справді дві, тобто що вони різні, а не збігаються. Цього правила надалі будемо дотримуватися і ми. Але в окремих випадках, як, приміром, у щойно поданих аксіомах, доречно підсилити це за допомогою уточнення — «різні».

Призначення аксіоми 3 у певному сенсі аналогічне призначенню аксіоми 2. Відповідною аксіомою у планіметрії стверджується існування та єдиність прямої, яка проходить через дві точки площини. Але у просторі логічно допустимою є ситуація, коли у різних площинах ці прямі є різними — подібно до того, як на глобусі через полюси N і S проходять різні меридіани (рис. 1.8). Із прийняттям аксіоми 3 таке унеможливується.

З аксіоми 3 одразу випливає, що дві різні прямі у просторі не можуть мати більше однієї спільної точки. Справді, якби дві прямі мали хоча б дві спільні точки, то, за аксіомою 3, вони збігалися б.

Означення

(перетинних прямих).

Дві прямі, які мають тільки одну спільну точку, називаються перетинними. Про них кажуть також, що вони перетинаються у цій точці.

Властивість, яка зафіксована в аксіомі 3, застосовується навіть у простих життєвих ситуаціях, наприклад, при плануванні грядок і газонів за допо-

На однастайну думку усіх, хто стосовно своїх знань хоче стояти вище від натовпу, математичний метод, за допомогою якого з означень, постулатів та аксіом виводяться наслідки, при дослідженні та передачі знань є найкращим і найнадійнішим шляхом для знаходження та повідомлення істини.

Бенедикт Спіноза

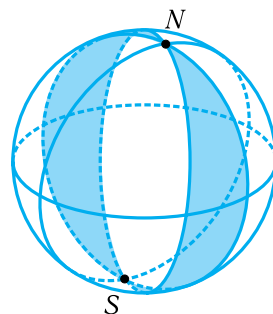


Рис. 1.8

могою шнура або при поділі сільськогосподарських угідь на ділянки за допомогою візування на певні орієнтири. Узагалі, будь-яке візування є умовним проведенням прямої (зорового променя) через точку, в якій перебуває спостерігач, і точку-об'єкт, за яким здійснюється спостереження. Аксиома 3 є також вихідним положенням класичної геометричної оптики, виступаючи у формі постулату про прямолінійне поширення світлових променів в однорідному середовищі.

Підтвердженням аксіоми 4 у повсякденній практиці слугує, наприклад, стійкість на площині підлоги будь-якої триноги (стола чи табурета на трьох ніжках, штатива тощо). Три точки A , B , C , які є кінцями ніжок триноги, завжди можна розмістити у площині підлоги α (рис. 1.9). А ось із чотирьох ніжок прямокутного стола кінець однієї може «висісти», піднімаючись над площиною, в якій лежать кінці трьох інших. Тоді стіл хитається: чотири точки в одній площині лежать не завжди.

Інший приклад. Рухома площина дверей, що проходить через дві фіксовані точки A і B , розташовані в місцях кріплення завісів до одвірка, фіксується (стає визначеною) третьою точкою якого-небудь обмежника: наприклад, кілочком C у підлозі для запобігання вдаряння об стіну, або замком D у протилежному одвірку (рис. 1.10).

Відповідно до аксіоми 4, поряд із позначенням площини грецькими літерами, застосовують і позначення за допомогою трьох великих латинських літер, які позначають точки, розташовані на цій площині. Наприклад, якщо площина α проходить через точки A , B , C , що не лежать на одній прямій, то її позначають через ABC . Те, що α і ABC — одна й та сама площина, записують так: $\alpha = ABC$.

Аксиому 5 можна проілюструвати за допомогою пилки і дерев'яного бруска (рис. 1.11). Пилка, яка спочатку торкається до поверхні бруска лише в одній точці його ребра, під час різання залишає на плоских поверхнях суміжних граней прямолінійні

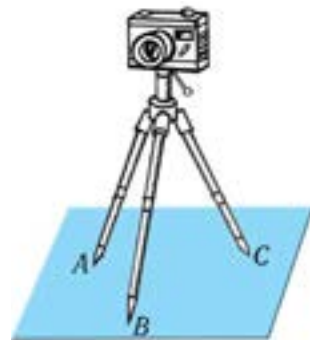


Рис. 1.9

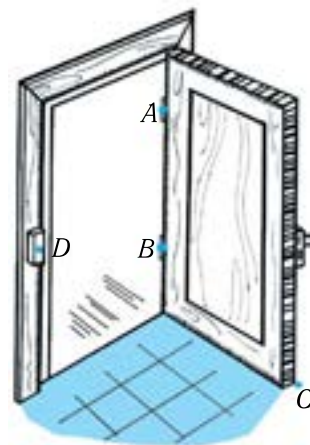


Рис. 1.10

сліди. Перетин двох площин по прямій добре ілюструють і численні приклади з царини будівництва та архітектури, де моделями площин виступають стіни, стелі, підлоги, схили дахів тощо.

З аксіом 4 і 5 випливає, що коли дві різні площини мають спільні точки, то цих точок є безліч і всі вони лежать на одній прямій. Справді, якщо дані площини містять хоча б одну спільну точку, то, за аксіомою 5, вони містять цілу пряму спільних точок. Припущення ж про те, що існує ще хоча б одна спільна точка поза цією прямою, означало б, за аксіомою 4, що ці площини збігаються.

Означення (перетинних площин).

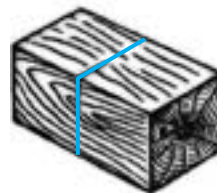
Дві площини, які мають спільну пряму, називаються перетинними. Кажуть також, що дані площини перетинаються по цій прямій.

Для скорочення записів, що характеризують відношення належності, часто вживають спеціальні математичні символи. Належність та належність точки прямій чи площині позначають за допомогою символів $\in$ та $\notin$. Наприклад, записи $A \in a$, $B \notin a$ означають, що точка A належить прямій a , а точка B не належить площині a . Належність чи належність прямої площині позначають за допомогою символів $\subset$ та $\not\subset$. Наприклад, записи $a \subset \alpha$, $b \not\subset \gamma$ означають, відповідно, що пряма a належить площині α , а пряма b не належить площині γ . Те, що площини α і β перетинаються по прямій a , записують так: $a = \alpha \cap \beta$. А запис $A = a \cap b$ означає, що точка A є точкою перетину прямих a і b .

Наступні два наслідки з прийнятих аксіом сформулюємо у вигляді теорем. У деяких підручниках з геометрії твердження цих теорем приймають за аксіоми.



а)



б)

Рис. 1.11

Поняття, які не мають жодної опори в природі, можна порівняти з північними лісами, в яких дерева не мають коріння. Досить пориву вітру, досить незначного факту, щоб перевернути весь цей світ дерев та ідей.

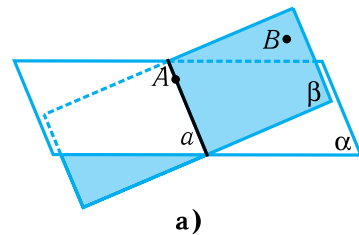
Дені Дідро

Геометричні істини в певному сенсі є асимптотами до фізичних істин, тобто перші нескінченно близько наближаються до других, ніколи, однак, повністю не досягаючи їх.

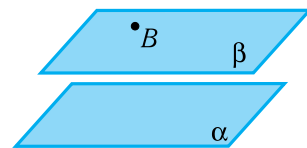
Жан Лерон Д'Аламбер

Теорема 1*(про існування точок поза площиною).**Яка б не була площина, існують точки простору, які їй не належать.*

Доведення. Нехай α — задана площина. Відповідно до аксіоми 1, існує принаймні ще одна площина β . Якщо площини α і β мають спільну точку A (рис. 1.12, а), то, за аксіомою 5, вони мають і деяку спільну пряму a , якій належать усі спільні точки цих площин. Тоді кожна точка B площини β , яка не належить прямій a , не належить і площині α . Якщо ж площини α і β не перетинаються (у тому, що така ситуація справді можлива, ми переконаємося пізніше), то взагалі кожна точка B площини β не належить площині α (рис. 1.12, б). Теорему доведено.



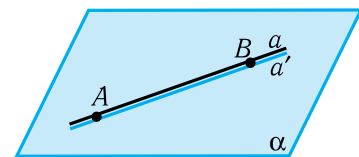
а)



б)

Рис. 1.12**Теорема 2***(ознака належності прямої площині).**Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.*

Доведення. Нехай точки A і B прямої a належать площині α (рис. 1.13). Оскільки, за аксіомою 1, у кожній площині здійснюється планіметрія, то у площині α можна провести, і до того ж — тільки одну, пряму a' , яка проходить через задані точки A і B . Але, за аксіомою 3, ця пряма — єдина в усьому просторі, тобто збігається з a . Пряма a' належить площині α , тому й пряма a належить цій площині. Теорему доведено.

**Рис. 1.13**

Доведеною ознакою належності прямої площині часто користуються теслярі для перевірки того, чи є оброблена поверхня плоскою. Для цього до поверхні у різних напрямках прикладають ребро добре вивіреної лінійки і дивляться, чи немає між ним і поверхнею просвітів. Навпаки, за допомогою вивіреної плоскої поверхні (наприклад, поверхні станини верстата) описаним способом можна перевірити якість обробки прямолінійних деталей.

Математика є мовою особливого гатунку, яка має ідеї, лише їй притаманні, і знаки для вираження цих ідей.

Михайло Остроградський