

В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Підручник для профільного
навчання математики
у закладах загальної
середньої освіти



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512(075.3)
Т13

Т13 **Тадеєв В.О.** Геометрія : підручник для 10 кл. закладів загальн. серед. освіти : профільний рівень. / В.О. Тадеєв. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2018. — 336 с.: іл.

ISBN 978-966-10-5424-9

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для навчання на профільному рівні у 10-х класах закладів загальної середньої освіти. Реалізоване у ньому структурування змісту допоможе вчителю з організацією диференційованого навчання, а учням — у задоволенні їхніх додаткових пізнавальних потреб. У підручнику явно виділений той обсяг теоретичного матеріалу, який визначається державним стандартом, а також його розширення та поглиблення для профільного рівня. Рубрика «Сторінки історії» буде особливо корисною для учнів з гуманітарними нахилами та уподобаннями.

У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

УДК 512(075.3)

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

Підручник доповнено електронним додатком, який можна відкрити за посиланням:
<http://www.bohdan-digital.com/edu10/>

ISBN 978-966-10-5424-9

© Навчальна книга – Богдан,
майнові права, 2018

Переднє слово до учнів

Я піклувався про те, щоб діти були вдумливими дослідниками і відкривачами світу, щоб істина поставала перед ними не як готовий висновок, переданий педагогом, а як яскрава картина навколишнього світу, яку вони пережили з хвилюючим биттям серця. Якщо відкриття схвилювало дитину, істина стає особистим переконанням, яким людина дорожить усе життя.

Василь Сухомлинський.
«Серце віддаю дітям»

Шановні друзі! Ви розгорнули ще один підручник із геометрії — тепер уже для 10 класу. У цьому році ви розпочинаєте систематично вивчати геометрію у просторі, або *стереометрію*. Як і планіметрія (тобто геометрія на площині), стереометрія теж споконвіку вважалася школою мудрості. Переказують, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, було вирізьблено напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!».

За що ж так цінувалася геометрія? — За те, що розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися давні греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед сімох легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали своїми духовними учителями, на перше місце вони завжди ставили Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим, і як стверджують легенди, довів лише декілька простих геометричних теорем. Однак у такий спосіб він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей феномен став основою західної цивілізації.

Отже, навчаючись стереометрії, ви й далі навчатиметеся мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю сучасного демократичного суспільства.

Переміщаючись «машиною часу» далі, потрапляємо у XVII ст. Виникло нове природознавство: Галілей, Кеплер, Декарт, Паскаль, Ньютон... Давня геометрія не тільки не стала осторонь нових тенденцій, а й перетворилася на теоретичну основу експериментальної науки, водночас залишаючись основою раціоналістичної філософії. Своєрідне відображення цієї нової тенденції знаходимо у мандрах казкового Гуллівера Джонатана Свіфта. Прибувши на літаючий острів Лапуту, Гуллівер найбільше здивувався тому, що все життя його мешканців оберталось довкола геометрії. Навіть буденна мова лапутян рясніла геометричними термінами. Та якби Гуллівер був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, у нього не було б. Геометричними термінами тепер пронизані не тільки природничі і технічні науки, а й гуманітарні,

мистецтвознавство, мова щоденного спілкування. Ось лише найпоширеніші слова, які побутують у нашому мовленні й запозичені з геометрії: аксіома, паралелі, площа, вектор, сфера, координати, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетрія тощо. Певна річ, щоби правильно розуміти та вживати ці слова, потрібно знати їхній первісний геометричний зміст. «Книга природи», — як влучно висловився Галілей, «написана мовою геометрії».

Отже, навчаючись стереометрії, ви й далі прилучатиметеся до надбань світової культури, ставатимете обізнаними й компетентними у тих питаннях, в яких без цього відчували б себе немовби прибульцями з варварських епох.

Ми... у XXI ст. Комп'ютерна графіка і дизайн, захмарні архітектурні проекти, проникнення у глибини космосу й матерії... Геометричні ідеї та принципи лежать в основі і цих надбань. Вивчаючи геометрію, ви в цьому не раз переконаєтеся.

Отже, і з практичної точки зору стереометрія необхідна.

Навчання мистецтву аргументації, прилучення до надбань світової культури і практичні застосування геометрії — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Вони невіддільні одне від одного, як невіддільні, рівнозначні і взаємодоповнюючі Віра, Надія і Любов у християнській моралі. Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із зазначених завдань відведено належне місце.

Гортаючи підручник, ви по всьому тексту помітите такі розпізнавальні знаки:



Усі вони мають символічне значення.

Весь зміст підручника структурований за трьома потоками. Перший потік формується базовим змістом геометрії, визначеним чинною програмою для навчання у 10 класі загальноосвітніх навчальних закладів на рівні державного стандарту. Другий потік містить додатковий матеріал, який розширює або поглиблює базове ядро у напрямку, що визначається програмою профільного навчання. Цей матеріал друкується на блакитному тлі і супроводжується портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Життєвий шлях цих учених переконливо засвідчує, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці.

Третій потік — це «Сторінки історії». Його супроводжує муза історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас» (картина прикрашає завісу Львівського оперного театру). Муза тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні мотиви розвитку науки і культури. Цей матеріал буде особливо корисним для учнів

з гуманітарними нахилами та уподобаннями. Та й усім іншим додасть упевненості в обізнаності з математичною складовою духовної культури.

У кінці кожного змістового пункту програмового матеріалу, під рубрикою «Перевір себе», подаються питання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкс з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповів на її запитання.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афінa. Вибрано рельєфне зображення Афінi Парфенос, реконструйоване за описами знаменитої скульптури Фідія.

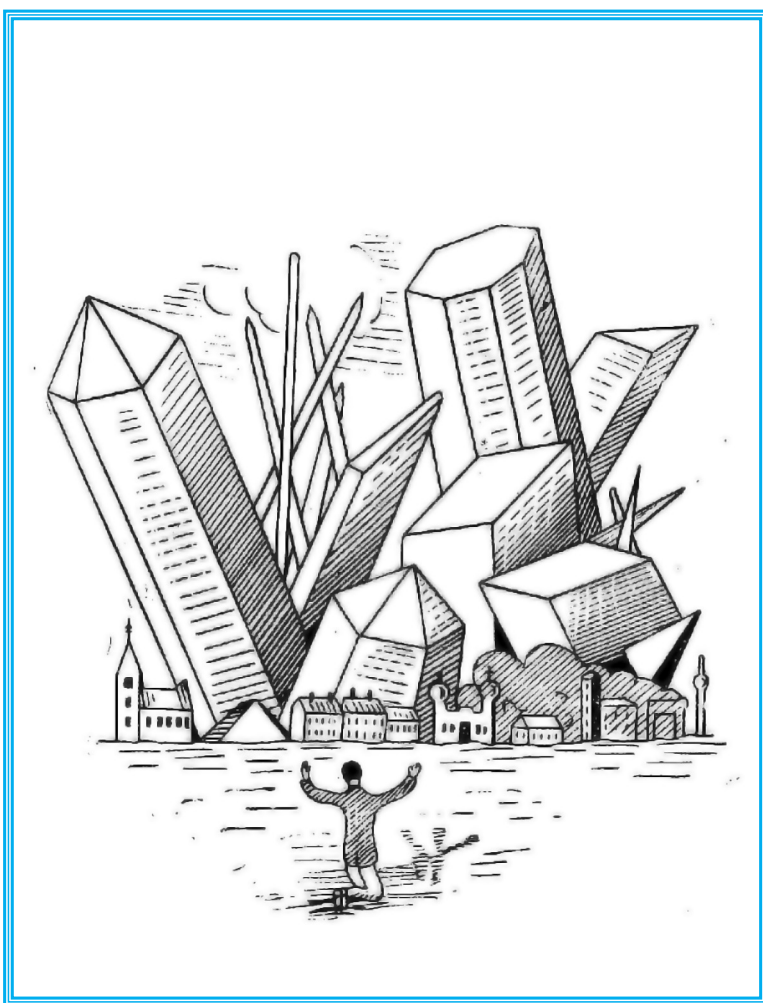
Задачі і вправи розміщені за порядком наростанням складності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а складніші — зірочкою. Задачі, які не позначені додатковими значками, хоч і не так явно, однак теж природно розбиваються на дві групи: перші — простіші, а наступні — складніші. Отже, загалом задачний матеріал проградуваний за чотирма рівнями складності.

У кінці великих змістових блоків подані типові завдання для тестової перевірки рівня засвоєння основних теоретичних положень та проведення контрольних робіт. Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на самостійній та контрольній роботах. Ці матеріали подаються у двох варіантах. Відтак і вчитель матиме додаткові можливості для організації самостійної роботи учнів.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем та ученицею, які разом розв'язують задачу. На поданих прикладах демонструються застосування встановлених теоретичних відомостей, а в окремих випадках — і корисні нові факти та загальні підходи, якими можна скористатися й при розв'язуванні інших задач. Крім того, ці задачі слугують прикладами завдань, які зазвичай пропонуються на різноманітних іспитах і тестуваннях, а подані розв'язання можуть слугувати взірцями для оформлення, яких рекомендується дотримуватись.

У кінці кожного розділу подається зведений перелік усього вивченого в ньому теоретичного матеріалу.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!



Людина і кристали. Рисунок Карела Чапека

Так відомий письменник передав своє захоплення кристалічними формами, які є одним із найдосконаліших утілень ідеальних геометричних форм

Вступ

Ще раз про геометрію

Для цієї мети я винайшов особливий, досі невідомий метод викладання: я запросив для мого старшого помічника двох викладачів. При цьому один навчав його з початку, з абетки, а інший — з кінця. ... Рівно через три тижні мій старший помічник доніс мені рапортом, що обидва викладачі довчили його до середини, і, таким чином, завдання виконане.

Андрій Некрасов. «Пригоди капітана Врунгеля»

Здається, — пригадав слоник, — я про цю математику чув ...

Григорій Остер. «38 папуг»

Шановні десятикласники! Ви вже три роки вивчали геометрію в основній школі. Перед продовженням її вивчення у старшій школі доречно провести невеличку систематизацію вивченого та окинути поглядом найближчі горизонти.

Що ж таке геометрія?

З глибин віків. Геометрія — дуже давня наука. Старшою від неї серед усіх наук можна вважати хіба що астрономію. Втім, коли астрономія з описового (спостережного) рівня перейшла на теоретичний (прогностичний), вона завжди вдавалася до послуг геометрії.

Тисячоліттями тривало накопичення геометричних фактів дослідним шляхом. Оформлення геометрії у струнку наукову систему відбулося у Давній Греції в період розквіту її культури (у VI – IV ст. до н. е). Греки дуже полюбили пов'язувати вигоди своїх досягнень з давніми епохами. Зокрема, вони вважали, що геометрія перейшла до них з Єгипту, де вона нібито зародилася з потреби вимірювання земельних ділянок після щорічних розливів ріки життя — Нілу. Звідси й історична назва цієї

науки — геометрія, що в дослівному перекладі з грецької означає «вимірювання землі», «землемірство».

Однак «вимірюванням землі» геометрія у Давній Греції була хіба що в тому розумінні, що грецькі вчені у своїх дослідженнях часто вдавалися до креслення фігур на піску. А по суті геометрія стала у них виключно теоретичною наукою про властивості геометричних фігур, арсенал якої значно перевершив потреби будь-яких практичних вимірювань. Зокрема, геометрія «вийшла у простір» і фактично розділилася на дві частини — плоску й просторову. За плоскою частиною збереглася її історична назва — геометрія, а просторову частину стали називати стереометрією (від грецького «стерео» — просторовий). Такий поділ виявився особливо зручним для навчання, оскільки давав змогу спочатку опановувати простіші для сприйняття відомості про плоскі фігури, а вже потім переходити до складніших, просторових фігур. Цей поділ через віки дійшов і до нашого часу. Єдине удосконалення відбулося в тому, що плоску частину геометрії перейменували у планіметрію (латинське слово *plano* означає «площина»), а під історичною назвою «геометрія» об'єднали разом планіметрію і стереометрію.

Отже, на даний час геометрія складається із двох частин — геометрії на площині (планіметрії) та геометрії у просторі (стереометрії). У 7–9 класах ви в основному вивчали планіметрію, знайомлячись лише з елементами стереометрії. А тепер розпочинаєте систематичне вивчення стереометрії.

Сучасне трактування змісту та значення геометрії. Геометрію в сучасному значенні цього слова можна означити як науку про просторові форми реального або мислимого світу. А оскільки просторові форми ще інакше називають геометричними фігурами, то, отже, геометрія — це наука про геометричні фігури, а саме: про їхні види, властивості, вимірювання, взаємне розміщення та перетворення. Самі ж геометричні фігури — це ідеальні мисленнєві образи. Найпростіші з них виникають у нашій свідомості при зосередженні уваги лише на формі та розмірах реальних твердих фізичних тіл й абстрагуванні від будь-яких інших їхніх характеристик — кольору, маси, температури, речовини, вартості тощо. Складніші фігури можуть конструюватися свідомістю уже без посередництва реальних тіл у результаті мисленневих операцій з найпростішими фігурами — об'єднання, перетину, доповнення, відрізання, вкладання, вилучення, переміщення, деформування й т.ін.

У шкільному курсі геометрії, який ще інколи називають елементарною (тобто найпростішою) геометрією, обмежуються лише дуже незначним набором геометричних фігур. А саме, з плоских фігур вивчають точки, прямі, відрізки, півпрямі (промені), кути, трикутники, чотирикутники, правильні багатокутники, коло, круг і деякі комбі-

нації цих фігур. Плоскі фігури вивчаються у 7–9 класах. Із просторових фігур обмежуються вивченням прямих, площин, найпростіших багатогранників (призм і пірамід), круглих тіл (циліндрів, конусів і кулі), а також деяких комбінацій цих фігур.

Просторові фігури систематично вивчаються у курсі геометрії старшої школи. При цьому в 10 класі ви детально вивчатимете прямі і площини, а також найпростіші багатогранники — паралелепіпеди і тетраедри. Пізніше вивчення цих питань буде поглиблено із застосуванням координат і векторів. В 11 класі детально вивчатимуться тіла обертання — циліндр, конус і куля, а насамкінець — вимірювання геометричних тіл, тобто їхніх об'ємів та площ поверхонь.

Поза елементарною (шкільною) геометрією залишається величезний обсяг накопичених людством геометричних знань. Одні з них з'явилися внаслідок поглибленого дослідження фігур елементарної геометрії, інші — за рахунок збільшення арсеналу геометричних фігур, а ще інші — за рахунок різноманітних перетворень цих фігур. Є й такі геометрії, де простори мають «викривлення» і вищі розмірності. Таку «вищу» геометрію вивчають на фізико-математичних спеціальностях у вищих навчальних закладах. У цій геометрії проводять свої дослідження вчені-математики. А застосовують її у фізиці, астрономії, хімії, теоретичній і технічній механіці, інженерії, економіці тощо. Крім цього, геометричні ідеї мають численні застосування в інших напрямках математичних досліджень — в алгебрі, теорії чисел, математичному аналізі, теорії ймовірностей, а через них — у ще більшому спектрі прикладних наук. Попри усе це первинним джерелом для пробудження мисленнєвої просторової уяви, фантазії та інтуїції була й залишається звичайна елементарна геометрія, яка через те й вивчається у школі.

Вивчаючи властивості геометричних фігур — ідеальних об'єктів, ми водночас дістаємо певні знання про просторові властивості реальних предметів і можемо застосовувати їх при проектуванні та експлуатуванні. Цим визначається значення геометрії для кожної культурної людини, а особливо для тих, хто проектуватиме та зводитиме нові об'єкти.

Важливим залишається застосування геометрії і для вирішення тих практичних задач, які колись послужили одним із найпотужніших джерел для її зародження — для вимірювання землі. Щоправда, тепер це відбувається в основному через посередництво окремої прикладної інженерної науки — геодезії. За допомогою геодезичних зйомок складають плани і карти місцевості, а також здійснюють «прив'язку» до місцевості плану кожної споруди чи магістралі перед її будівництвом.

Приклад новітнього застосування геометрії.

Безперечно, про усі згадані застосування ви вже маєте уявлення з уроків геометрії та інших предметів у попередніх класах, а також із найрізноманітніших джерел додаткової інформації. Значно менш відомими є принципи геометричного моделювання на рівні тонких структур матерії, які, проте, в сучасній науці набувають дедалі ширшого застосування.

Ще видатний філософ Платон у IV ст. до н.е., узагальнюючи й розвиваючи погляди піфагорійців, учив про існування чотирьох основних стихій — вогню, повітря, води і землі, з яких у відповідних пропорціях складається усе суще. Найдрібнішим структурним елементам цих стихій Платон приписував форми правильних багатогранників (рис. 1), а саме: вогню — форму тетраедра (рис. 1, а), повітря — октаедра (рис. 1, в), воді — куба (рис. 1, б), а землі — ікосаедра



Платон

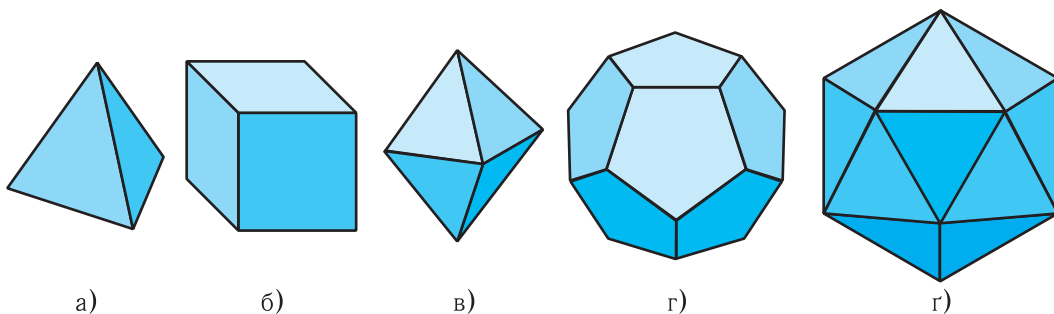


Рис. 1

(рис. 1, г). А оскільки в геометрії уже було відомо, що загалом існує п'ять видів правильних багатогранників, то форму п'ятого — додекаедра (рис. 1, г) — Платон відвів для усього Космосу (відгомонам цієї ідеї стало зображення додекаедра на відомій картині Сальвадора Далі «Таємна вечере», відтворений на 2-му форзаці цього підручника).

До цих уявлень давніх мудреців могли привести спостереження за природними багатогранниками — кристалами (рис. 2). Наприклад, гірський кришталі Аристотель уважав закам'янілим льодом, а Пліній про нього писав, що «гладкість граней його така

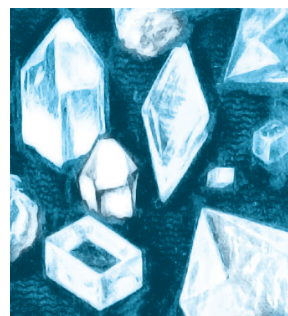


Рис. 2

досконала, що того ніяким мистецтвом створити неможливо».

У середні віки уявлення про те, що саме в кристалах заховані усі таємниці буття, знайшло своє відображення у приписуванні їм надприродної чудодійної сили. Не випадково в одній зі старовинних легенд про чорнокнижника Фауста, які послужили Гете першоджерелом для його знаменитого твору, доктор Фауст бесідує з духом на ймення «Кристалос».

У свій спосіб захоплення кристалами передав відомий чеський письменник Карел Чапек, рисунок якого «Людина і кристали» вміщено на заставці до цього вступу (с. 6) та на обкладинці підручника.

Перші спроби наукового пояснення дивовижно точних багатогранних форм природних кристалів належать ще до XVII–XVIII ст. А найбільшим досягненням у вивченні кристалів на основі візуального спостереження стало створення у середині XIX ст. французьким фізиком і кристалографом Огюстом Браве (1811–1863) так званої решітчастої теорії.

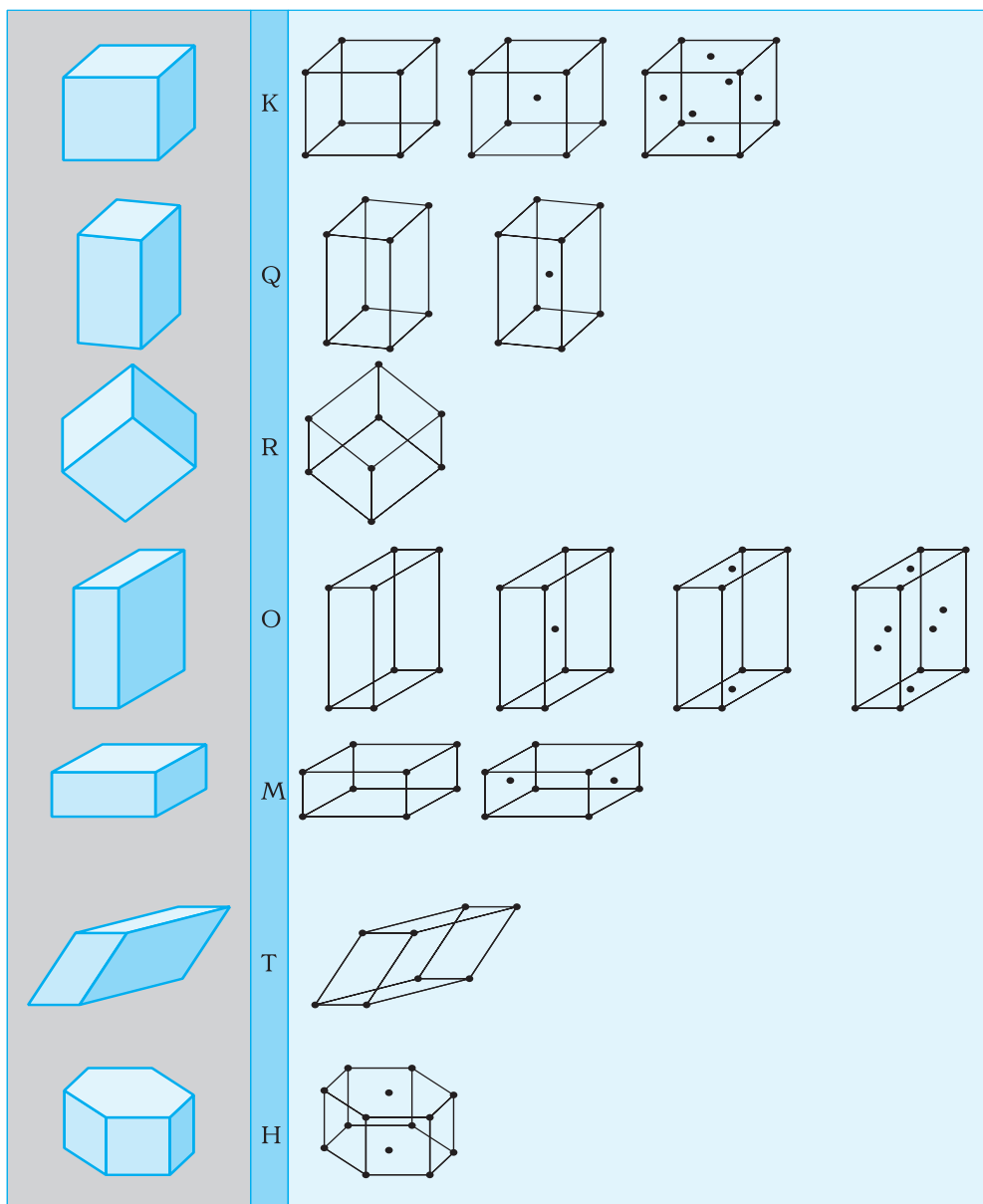
У 1849 р. Браве, який, за словами Володимира Вернадського, «дивився на природу очима геометра», після численних спостережень і обмірювань кристалів опублікував працю «Дослідження про багатогранники симетричної форми». У ній він, зокрема, висунув продуктивну гіпотезу про те, що в основі правильних геометричних форм кристалів лежать правильні багатогранні форми їхньої внутрішньої структури. Основу цієї структури, за Браве, утворює решітка, яка складається із закономірно розміщених вузлів (центрів ваги корпускул, або атомів). Браве вважав, що у процесі росту кристала його решітка розростається із фундаментальної первісної багатогранної форми шляхом переміщень і з'єднання цілими гранями. На основі цієї ідеї він виділив 14 типів можливих фундаментальних форм — так званих решіток Браве (рис. 3).



Огюст Браве

Застосування — корисні і фактично необхідні для теорії, оскільки вони ставлять перед теорією нові запитання. Можна сказати, що застосування й теорія перебувають у такому самому відношенні, як листок і дерево: дерево тримає листок, але листок живить дерево.

Жак Адамар



Фундаментальні форми кристалів (ліворуч) і відповідні їм 14 видів кристалічних решіток Браве. Зверху вниз: куб, прямокутний паралелепіпед з квадратною основою (правильна чотирикутна призма), ромбоєдр, прямокутний паралелепіпед загального виду, прямий паралелепіпед з основою у формі паралелограма, косий паралелепіпед загального виду, правильна шестикутна призма.

Рис. 3

Решітки Браве дали змогу пояснити багато феноменів кристалографії, а в геометрії стали джерелом для низки важливих задач про щільні заповнення простору багатогранниками. Проте у своїй основі ця ідея залишалася лише гіпотетичною аж до вирішального фізичного експерименту німецького фізика Макса фон Лауе (1879–1960), який у 1912 р. незаперечно довів саме існування атомної структури кристалів.

Як відомо, атомну структуру речовини неможливо помітити візуально навіть при збільшенні у найпотужнішому мікроскопі. Причиною є надто велика довжина світлових хвиль у видимому діапазоні, які на своєму шляху «не помічають» атомів. Лауе у своєму експерименті використав рентгенівські промені, які теж невидимі для ока, але довжина їхніх хвиль сумірна з розмірами атомів, а тому ці промені на своєму шляху «помічають» атоми і заломлюються на них. Схема його експерименту зображена на рис. 4. Вузький пучок рентгенівських променів спрямовувався на монокристал (чистий кристал однорідної структури), а після проходження через кристал фіксувався на фотопластинці. Виявлене розсіювання пучка свідчило про дифракцію променів, причиною якої могла бути лише атомна структура кристалу, який, таким чином, відігравав роль дифракційної решітки. Симетричне ж розміщення слідів розсіяних променів свідчило про симетричне розміщення відповідних граней кристалічної решітки. Пізніше з'ясувалося, що геометричний аналіз рентгенограми дає змогу навіть повністю відтворити просторову будову кристалічної решітки.

Первісною метою досліджу Лауе було підтвердження за допомогою дифракції на кристалічній решітці хвильової природи рентгенівських променів. І за цей результат йому було присуджено Нобелівську премію 1914 р. Але одночасно було підтверджено й атомну структуру кристалів і це дало потужне практичне застосування — можливість дослідження



Макс фон Лауе

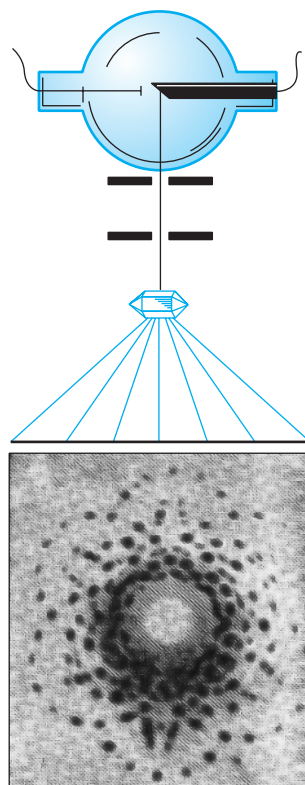


Схема досліджу Лауе

Рис. 4

структури речовини на основі рентгеноскопічного аналізу.

Рентгеноскопічний аналіз — це синтез фізичного способу одержання рентгенограми атомної структури речовини та геометричних методів відтворення на цій основі її просторової кристалічної решітки.

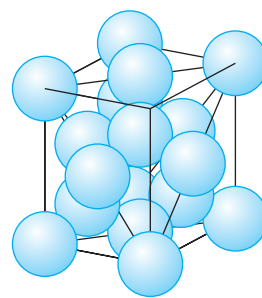
У свою чергу, побудована кристалічна решітка дає змогу пояснити відомі або передбачити нові фізичні властивості кристалів при зміні фізичних умов їхнього утворення (температури, тиску тощо).

На рис. 5, а), б) для прикладу зображені кристалічні решітки алмазу і графіту. Хімічний склад обох цих матеріалів один і той самий — атоми вуглецю. Але наскільки різні їхні властивості: графіт — м'який, чорний і вогнетривкий, а алмаз — твердий, прозорий і у вогні згоряє дотла! Усе це — наслідки особливої структури кристалічної решітки.

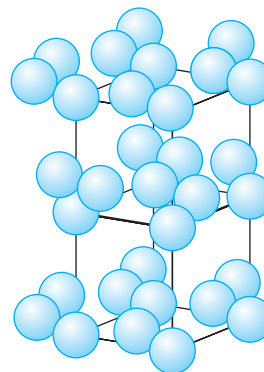
Згодом ідеї й методи рентгеноскопічного аналізу з кристалографії поширилися на хімію, а потім — і на біологічні структури. У 1964 р. професор Дороті Кроуфут-Ходжкін (1910 – 1994) засобами рентгеноструктурного аналізу з'ясувала структуру низки складних фізіологічних утворень, у тому числі пеніциліну (у 1946 р.) та вітаміну B_{12} (у 1956 р.). За ці досягнення їй у 1964 р. було присуджено Нобелівську премію. У 1962 р. Нобелівську премію одержали американський біохімік Джеймс Вотсон (нар. 1928) та англійський біофізик і генетик Френсіс Крік (1916 – 2004), які у 1953 р. створили модель структури ДНК (рис. 6). Це відкриття поклало початок молекулярній генетиці.

Таким чином, геометричне моделювання просторових структур неорганічної та органічної природи нині перебуває на передньому краї науки. У цьому — великі перспективи для створення нових матеріалів, нових біологічних форм і нових лікарських засобів.

У свою чергу, проблеми кристалографії, стереохімії та мікробіології стимулюють і розвиток геометричних теорій. Зокрема, рентгеноскопічний



а)



б)

Моделі атомної будови алмазу (вгорі)
і графіту (внизу)

Рис. 5



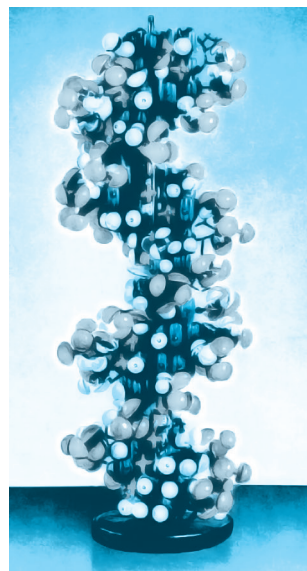
Дороті Кроуфут-Ходжкін

аналіз, виявляючи конкретну решітчасту форму атомної структури кристалів, все ще не дає відповіді на питання, чому ця форма є саме такою і які взагалі можливі кристалічні решітки. Геометрія ж уже знайшла відповіді на деякі з питань такого гатунку. Примітно, що до цих визначних успіхів причетні вітчизняні учені, які можуть бути взірцем для наслідування усім, хто обирає собі шлях у науку.

У 1932 р. колишній випускник Київського університету Борис Миколайович Делоне (1890–1980) на основі декількох найзагальніших припущень про можливе взаємне розміщення атомів у кристалах запропонував значно досконалішу, ніж свого часу Браве, класифікацію кристалічних решіток. Усі можливі кристалічні решітки він розбив на 24 види, залежно від форми так званих паралеледрів Діріхле — опуклих багатогранників певного виду з попарно паралельними гранями.

У своїх спогадах Б.М. Делоне зазначав, що про проблему правильних просторових решіток він дізнався ще у підлітковому віці з бесід свого батька Миколи Борисовича Делоне (1856–1931) зі всесвітньо відомим українським математиком Георгієм Феодосійовичем Вороним (1868–1908). Перший у ті часи був професором Варшавського політехнічного інституту, а другий — професором Варшавського університету. Сам же Георгій Вороний у 1908 р. розв'язав фундаментальну математичну проблему про можливість щільного заповнення паралеледрома n -вимірною простору. Цей його результат знайшов несподівані практичні застосування в сучасних інформаційних системах.

Георгій Вороний народився у селі Журавка Полтавської губернії (тепер Варвинський район на Чернігівщині). Середню освіту здобував у Бердянській (до 5-го класу) і Прилуцькій гімназіях, в яких директорував його батько — магістр філології, колишній випускник Київського університету. Закінчив Петербурзький університет (у 1889 р.). Наукові дослідження проводив у руслі Петербурзької школи

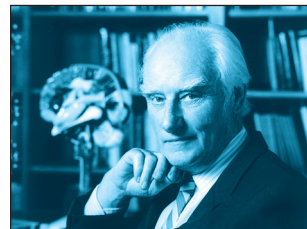


Просторова модель молекули ДНК

Рис. 6



Джеймс Вотсон



Френсіс Крік

теорії чисел. Після захисту магістерської дисертації у 1896 р. до кінця свого короткого життя працював професором Варшавського університету.

Борис Делоне народився в Петербурзі. У 16 років з батьками переїхав до Києва, де батько працював професором політехнічного інституту. Закінчив екстерном Київську гімназію, а у 1913 р. — Київський університет. До 1916 р. викладав у цьому ж університеті, потім (у 1916–1922 рр.) — у Київському політехнічному інституті. Подальша трудова і наукова діяльність Б.М. Делоне була пов'язана з Ленінградським і Московським університетами, а також з Математичним інститутом ім. В.А. Стеклова. Основні наукові дослідження проводив на стику алгебри й геометрії. У 1978 р. удостоєний престижної міжнародної премії ім. Лобачевського. На початку 30-х рр. XX ст. Делоне був серед перших ініціаторів проведення в СРСР математичних олімпіад серед школярів. Був майстром спорту з альпінізму. У 1926 р. здійснив сходження на одну з головних вершин системи Белухи на Алтаї, пізніше названої піком Делоне. Звісно, цією назвою відзначені не так спортивні, як наукові здобутки Б.М. Делоне, які ознаменували собою один із «піків» геометрії XX ст.

Особливості шкільного курсу геометрії.

Винятково влучну характеристику особливостям предмета геометрії дав видатний геометр XX ст. О.Д. Александров (1912–1999). У низці підручників для школи, створених під його керівництвом, він пояснював учням: «Своєрідність геометрії полягає в нерозривному зв'язку живої уяви зі строгою логікою. Можна сказати, що геометрія у своїй суті і є просторовою уявою, яка пронизана й організована строгою логікою. У будь-якому справді геометричному твердженні, чи то аксіомі, означенні, теоремі, чи то задачі, неодмінно присутні обидва ці елементи: наочна картина і строге формулювання, строгий логічний висновок.



Г.Ф. Вороний



Б.М. Делоне



Пік Делоне

Наочність, уява належать більше до мистецтва, а строга логіка — привілей науки. Сухість точного висновку і життєдайність наочної картини — геометрія поєднує в собі ці дві протилежності. Так її й потрібно вивчати: поєднуючи наочні картини зі строгими формулюваннями й доведеннями».

І далі відомий геометр дає таку настанову учням:

«Тому основне правило полягає в тому, що стикаючись із означенням, теоремою або задачею, потрібно перш за все зрозуміти їхній зміст: подати наочно, нарисувати або ще краще, хоча й важче, уявити те, про що йде мова. Нічого не намагайтеся завчити, не нарисувавши, не уявивши того, про що йде мова, не зрозумівши, яким чином це наочне уявлення точно виражається у формулюванні означення, теореми або задачі».

Таким чином, геометрія — одночасно школа логіки й творчої уяви. Звідси той тісний зв'язок геометрії з мистецтвом та історією культури, який супроводжує її на всіх щаблях історичного розвитку. А тому геометричні знання абсолютно необхідні для розуміння історії культури. У цьому ж і джерело їхньої невичерпної цікавості для вивчення.



О.Д. Александров

Життя прикрашають дві речі — заняття математикою та її викладання.

Сімеон Дені Пуассон



Моріс Ешер. Рептилії

Гравюра вдало ілюструє один із найважливіших принципів стереометрії — вихід із «плоского» двовимірного світу і періодичне занурення у нього.

Розділ I

Вступ до стереометрії. Перетин і паралельність прямих та площин у просторі

Я гадаю, що ніколи досі ми не жили в такий геометричний період. Варто лише поміркувати над минулим, згадати те, що було раніше, і ми будемо спантеличені, побачивши, що світ, який нас оточує, — це світ геометрії, чистої, справжньої, бездоганної в наших очах. Усе довкола — геометрія. Ніколи ми не бачили настільки прозоро таких форм, як круг, прямокутник, кут, циліндр, куля, виконаних так чітко, з такою ретельністю й так упевнено.

Ле Корбузьє

Усі доказові науки послуговуються аксіомами. Аксіоми мають найвищий ступінь загальності і є началом усього.

Аристотель

Нерозважно вчинили б математики, якби вони, відкинувши найпростіші поняття, почали досліджувати складні.

Михайло Ломоносов

Ви вже знаєте, що предметом вивчення у геометрії є просторові форми. Інакше ці форми називаються геометричними фігурами. Саме ж вивчення геометричних фігур відбувається шляхом зведення складніших із них до простіших. Найпростішими геометричними фігурами вважаються точки, прямі і площини, основні властивості яких описуються аксіомами. Інші властивості цих найпростіших фігур доводяться на основі аксіом логічним шляхом. Цьому, в основному, і присвячуються перший та другий розділи підручника.

§1. Аксиоми стереометрії

У шкільній геометрії вивчаються ідеалізовані просторові форми навколишнього світу, який сприймається людиною за допомогою її органів чуттів. Інакше ці форми називаються *геометричними фігурами*. Отже, геометричні фігури — це мисленеві образи, які утворюються в нашій свідомості внаслідок абстрагування, тобто нехтування усіма властивостями предметів, окрім їхньої протяжності у просторі, взаємного розміщення та розмірів.

Окремі геометричні фігури є плоскими, і їх можна вважати розміщеними в одній площині. Властивості таких фігур вивчає планіметрія.

Інші фігури не є плоскими, або їх уже не можна вважати розміщеними в одній площині. Такими є, наприклад, куб, куля, циліндр, конус, їхні комбінації. Властивості таких фігур вивчаються у стереометрії. Стереометрія значною мірою базується на планіметрії.

Найпростішими геометричними фігурами, які вивчаються у планіметрії, вважаються *точки* і *прямі*. У стереометрії до них долучаються *площини*.

Точки є ідеалізованими мисленневими образами дуже дрібних предметів, розмірами яких за даних умов можна взагалі знехтувати (наприклад, пилінок, слідів тонко загостреного олівця на папері чи палиці на піску). Прямі — це мисленневі образи довгих напнутих ниток чи мотузок, світлових променів тощо. Площини — мисленневі образи великих рівних поверхонь, наприклад, стола, стіни, водного плеса, рівного поля тощо. Площини, як і прямі, ми уявляємо нескінченними і без будь-якої товщини. Кожна площина нескінченна в усіх напрямках.

Точки і прямі позначаються й зображаються у стереометрії так само, як і в планіметрії. Площини

Найпершою запорукою непогрішності математичного мислення вважається те, що вихідним пунктом міркувань і дій у цій науці слугують аксиоми.

Іван Сеченов

Геометрія — це застосування строгої логіки до самоочевидних і, отже, безсумнівних особливостей простору. Але точність цієї науки іде ще далі, оскільки будь-яка особливість, якою б вона не була очевидною, обов'язково підлягає доведенню, якщо тільки воно можливе. Завдання полягає в тому, щоб усі геометричні істини довести на основі якомога меншої кількості припущень.

Августус де Морган

Аксиоми та доведення науки проникають у розум, захоплюють його і тримають так міцно, що він не може вирватися.

Френсіс Бекон

Аксиома — це твердження, на яке не вистачило доведення.

З учнівського гумору

ж позначаються малими грецькими літерами α , β , γ тощо. А оскільки уявлення про площину пов'язано з названими вище поширеними прямокутними формами, які при зоровому сприйнятті найчастіше здаються паралелограмами, то на рисунках площини, як правило, зображають у вигляді цих паралелограмів. Інколи для надання рисункові більшої колоритності від цих паралелограмів «відламують» певні частини (на рис. 1.1 наведено декілька можливих зображень площини). Крім того, ті фігури або їхні частини, які «закриваються» іншими фігурами, у стереометрії зображаються пунктирними лініями. З урахуванням цього на рис. 1.2 зображено дві площини α і β , які мають спільну пряму a , а також пряму b , що належить площині β .

Фундамент стереометрії складають декілька найзагальніших властивостей точок, прямих і площин, сформульованих на основі віковичного життєвого досвіду людей, а також на основі ретельного логічного аналізу вчених. Як і в планіметрії, ці властивості називаються *аксіомами* (в перекладі з грецької мови, як уже вказувалося у вступі, слово «аксіома» означає «повага», «авторитет», «незаперечна істина»).

Сукупність усіх аксіом окремої наукової теорії називається її *аксіоматикою*. Можливі різні аксіоматики стереометрії. У нашому підручнику викладається та з них, яка найбільшою мірою узгоджується з історичною традицією у побудові навчальних курсів геометрії. За цією традицією, зокрема, стереометрія вивчається після планіметрії і, отже, ґрунтується на ній. Це й відображає перша аксіома.

Аксіома 1.

У просторі існують площини. У кожній площині здійснюється планіметрія.

Перше твердження цієї аксіоми приймається для запобігання логічно можливому зведенню стереометрії до планіметрії, тобто до ситуації, коли у просторі існує одна-єдина площина. Друге ж твердження означає, що в кожній площині існують усі фігури

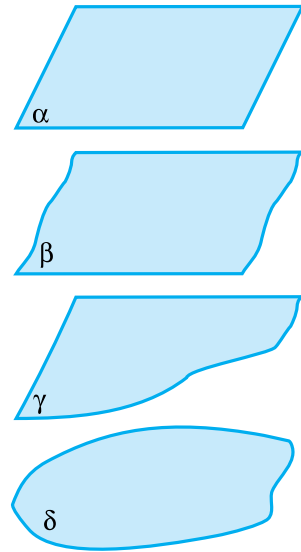


Рис. 1.1

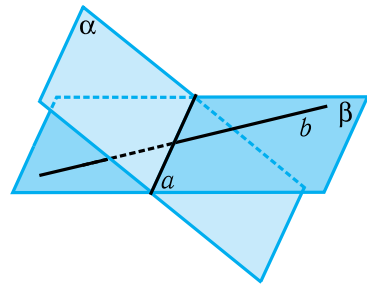


Рис. 1.2

Геометрія є мистецтвом правильно міркувати на неправильних рисунках.

Нільс Хенрік Абель

і здійснюються всі факти, відомі з планіметрії, наприклад: аксіома паралельних прямих, ознаки рівності та подібності трикутників, теорема Піфагора, формула для обчислення довжини кола тощо.

Наступною аксіомою встановлюється єдиний масштаб вимірювання відрізків у всьому просторі, який, взагалі кажучи, можна було б уявляти і різним для різних площин.

Аксіома 2.

Якщо дві точки належать одночасно кожній із двох площин, то відстані між цими точками у кожній з площин рівні між собою.

Отже, введення цієї аксіоми дає змогу вести мову про відстані між точками у просторі, не конкретизуючи, в якій саме площині ці відстані вимірюються. А це, у свою чергу, є передумовою для поширення на стереометрію фундаментальних понять рівності та подібності фігур, а також означень переміщення та перетворення подібності.

Означення

(рівності та переміщення фігур).

Дві просторові фігури F і F' називаються **рівними** (записують: $F = F'$), якщо між точками цих фігур можна встановити взаємно однозначну відповідність (тобто відповідність, при якій кожній точці однієї фігури відповідає одна і лише одна точка іншої), причому для довільних двох точок X , Y фігури F і відповідних їм точок X' , Y' фігури F' відрізки XU та $X'Y'$ рівні між собою (рис. 1.3).

Відповідність між фігурами F і F' , яка має зазначену властивість, називається *переміщенням*, або *рухом* фігури F у фігуру F' .

Давно помічено, що геометрія — це чудова логіка. І справді, коли означення чіткі, коли постулати незаперечні, а аксіоми безсумнівні, коли властивості фігур випливають зі строгого спостереження та порівняння за допомогою неперервної і добре узгодженої послідовності, а предмети постійно перебувають у полі зору, тоді звикають міркувати точно, послідовно і методично; ця звичка підсилює та шліфує розум і приносить користь при пошуку істини в інших галузях.

Джордж Берклі

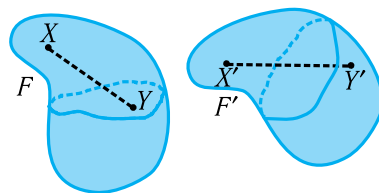


Рис. 1.3

Означення

(подібності та перетворення подібності фігур).

Дві просторові фігури F і F' називаються **подібними** (записують: $F \sim F'$), якщо між точками цих фігур можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій для будь-яких двох точок X, Y фігури F і відповідних їм точок X', Y' фігури F' відношення довжин відрізків $X'Y'$ та XY дорівнює одному і тому ж числу k ($k > 0$) (рис. 1.4). Число k називається **коефіцієнтом подібності** фігур F і F' .

Відповідність між фігурами F і F' , яка має зазначену властивість, називається **перетворенням подібності** фігури F у фігуру F' .

(Нагадаємо, що в геометрії будь-яку взаємно однозначну відповідність між точками двох фігур називають **перетворенням** однієї фігури в іншу).

Без будь-яких змін переноситься із планіметрії у стереометрію й чимало інших понять та відношень, пов'язаних з поняттям відстані, наприклад: центральної симетрії і центрально симетричних фігур, гомотетії і гомотетичних фігур тощо.

Означення

(центральної симетрії і центрально-симетричних фігур).

Точки X та X' у просторі називаються **симетричними відносно точки O** (центра симетрії), якщо точка O є серединою відрізка XX' (рис. 1.5). Точка O вважається симетричною самій собі.

Центральною симетрією, або **симетрією відносно точки O** , називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , при якому кожна точка X фігури F переходить у таку точку X' фігури F' , яка є симетричною точці X відносно даної точки O (рис. 1.6). При

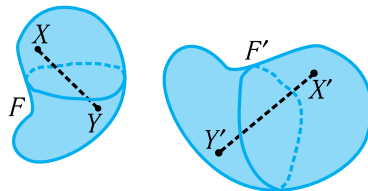


Рис. 1.4

— Коли я вживаю якесь слово, — показав Шалам-Балам майже глузливо, — то воно означає лише те, що я хочу, щоб воно означало, — не більше й не менше...

Льюїс Керролл.
«Аліса в Задзеркаллі»

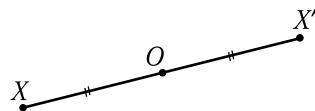


Рис. 1.5

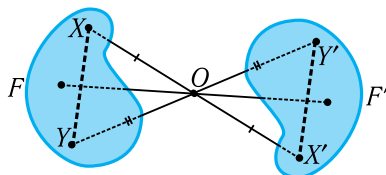


Рис. 1.6

цьому фігури F і F' називаються *центрально-симетричними* відносно точки O .

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається *центрально-симетричною*, а точка O — *центром її симетрії*.

Центрально-симетричними фігурами на площині є, наприклад, коло і прямокутник, а в просторі — сфера і прямокутний паралелепіпед.

Означення

(гомотетії і гомотетичних фігур).

Гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k > 0$ називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , при якому довільна точка X фігури F переходить у таку точку X' фігури F' , яка належить променю OX і при цьому справджується рівність: $OX' = k \cdot OX$ (рис. 1.7). При цьому фігури F і F' називаються *гомотетичними* з центром гомотетії O і коефіцієнтом гомотетії k .

У решті аксіом стереометрії фіксуються основні властивості відношення *належності* для найпростіших стереометричних фігур — точок, прямих і площин.

Окрема точка може належати прямій або площині, а пряма — площині. Кажуть також, що тоді пряма або площина проходить через (або містить) точку, а площина проходить через (або містить) пряму.

Кожну пряму і площину, як і взагалі будь-яку фігуру, ми уявляємо складеною з точок. Тому вислів «пряма належить площині» означає, що кожна точка цієї прямої належить даній площині.

Аксіоми належності формулюються наступним чином.

Аксіома 3.

Якби не були дві різні точки, у просторі існує пряма, і до того ж — тільки одна, яка проходить через ці точки.

— Перестань зараз же! — закричав Знайко. — Від твоєї музики вуха болять!

— Це тому, що ти до моєї музики ще не звик. Ось звикнеш — і вуха перестануть боліти.

Микола Носов.

«Пригоди Незнайки та його друзів»

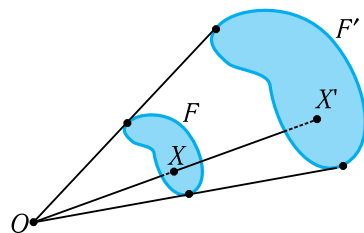


Рис. 1.7

Навчатися можна тільки весело... Аби перетравити знання, потрібно поглинати їх з апетитом.

Анатоль Франс

Аксиома 4.

Якби не були три різні точки простору, що не лежать на одній прямій, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка проходить через ці точки.

Аксиома 5.

Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають і спільну пряму, яка проходить через цю точку.

Зауважимо, що коли йдеться про дві точки, дві прямі чи про дві площини, то, як правило, мають на увазі, що їх справді дві, тобто що вони різні, а не збігаються. Цього правила надалі будемо дотримуватися і ми. Але в окремих випадках, як, приміром, у щойно поданих аксіомах, доречно підсилити це за допомогою уточнення — «різні».

Призначення аксіоми 3 у певному сенсі аналогічне призначенню аксіоми 2. Відповідною аксіомою у планіметрії стверджується існування та єдиність прямої, яка проходить через дві точки площини. Але у просторі логічно допустимою є ситуація, коли у різних площинах ці прямі є різними — подібно до того, як на глобусі через полюси N і S проходять різні меридіани (рис. 1.8). Із прийняттям аксіоми 3 таке унеможливується.

З аксіоми 3 одразу випливає, що дві різні прямі у просторі не можуть мати більше однієї спільної точки. Справді, якби дві прямі мали хоча б дві спільні точки, то, за аксіомою 3, вони збігалися б.

Означення

(перетинних прямих).

Дві прямі, які мають тільки одну спільну точку, називаються перетинними. Про них кажуть також, що вони перетинаються у цій точці.

Властивість, яка зафіксована в аксіомі 3, застосовується навіть у простих життєвих ситуаціях, наприклад, при плануванні грядок і газонів за допо-

На однастайну думку усіх, хто стосовно своїх знань хоче стояти вище від натовпу, математичний метод, за допомогою якого з означень, постулатів та аксіом виводяться наслідки, при дослідженні та передачі знань є найкращим і найнадійнішим шляхом для знаходження та повідомлення істини.

Бенедикт Спіноза

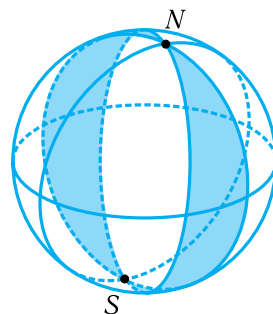


Рис. 1.8

могою шнура або при поділі сільськогосподарських угідь на ділянки за допомогою візування на певні орієнтири. Узагалі, будь-яке візування є умовним проведенням прямої (зорового променя) через точку, в якій перебуває спостерігач, і точку-об'єкт, за яким здійснюється спостереження. Аксиома 3 є також вихідним положенням класичної геометричної оптики, виступаючи у формі постулату про прямолінійне поширення світлових променів в однорідному середовищі.

Підтвердженням аксиоми 4 у повсякденній практиці слугує, наприклад, стійкість на площині підлоги будь-якої тринogi (стола чи табурета на трьох ніжках, штатива тощо). Три точки A, B, C , які є кінцями ніжок тринogi, завжди можна розмістити у площині підлоги α (рис. 1.9). А ось із чотирьох ніжок прямокутного стола кінець однієї може «висісти», піднімаючись над площиною, в якій лежать кінці трьох інших. Тоді стіл хитається: чотири точки в одній площині лежать не завжди.

Інший приклад. Рухома площина дверей, що проходить через дві фіксовані точки A і B , розташовані в місцях кріплення завісів до одвірка, фіксується (стає визначеною) третьою точкою якого-небудь обмежника: наприклад, кілочком C у підлозі для запобігання вдарення об стіну, або замком D у протилежному одвірку (рис. 1.10).

Відповідно до аксиоми 4, поряд із позначенням площини грецькими літерами, застосовують і позначення за допомогою трьох великих латинських літер, які позначають точки, розташовані на цій площині. Наприклад, якщо площина α проходить через точки A, B, C , що не лежать на одній прямій, то її позначають через ABC . Те, що α і ABC — одна й та сама площина, записують так: $\alpha = ABC$.

Аксиому 5 можна проілюструвати за допомогою пилки і дерев'яного бруска (рис. 1.11). Пилка, яка спочатку торкається до поверхні бруска лише в одній точці його ребра, під час різання залишає на плоских поверхнях суміжних граней прямолінійні

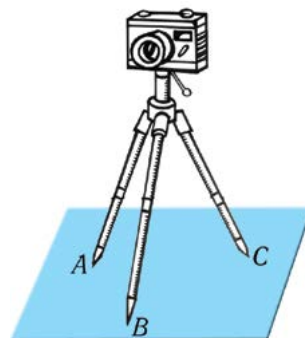


Рис. 1.9

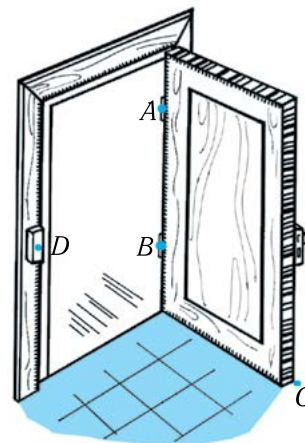


Рис. 1.10

сліди. Перетин двох площин по прямій добре ілюструють і численні приклади з царини будівництва та архітектури, де моделями площин виступають стіни, стелі, підлоги, схили дахів тощо.

З аксіом 4 і 5 випливає, що коли дві різні площини мають спільні точки, то цих точок є безліч і всі вони лежать на одній прямій. Справді, якщо дані площини містять хоча б одну спільну точку, то, за аксіомою 5, вони містять цілу пряму спільних точок. Припущення ж про те, що існує ще хоча б одна спільна точка поза цією прямою, означало б, за аксіомою 4, що ці площини збігаються.

Означення (перетинних площин).

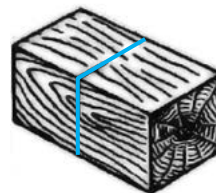
Дві площини, які мають спільну пряму, називаються перетинними. Кажуть також, що дані площини перетинаються по цій прямій.

Для скорочення записів, що характеризують відношення належності, часто вживають спеціальні математичні символи. Належність та належність точки прямій чи площині позначають за допомогою символів $\in$ та $\notin$. Наприклад, записи $A \in a$, $B \notin a$ означають, що точка A належить прямій a , а точка B не належить площині a . Належність чи належність прямої площині позначають за допомогою символів $\subset$ та $\not\subset$. Наприклад, записи $a \subset \alpha$, $b \not\subset \gamma$ означають, відповідно, що пряма a належить площині α , а пряма b не належить площині γ . Те, що площини α і β перетинаються по прямій a , записують так: $a = \alpha \cap \beta$. А запис $A = a \cap b$ означає, що точка A є точкою перетину прямих a і b .

Наступні два наслідки з прийнятих аксіом сформулюємо у вигляді теорем. У деяких підручниках з геометрії твердження цих теорем приймають за аксіоми.



а)



б)

Рис. 1.11

Поняття, які не мають жодної опори в природі, можна порівняти з північними лісами, в яких дерева не мають коріння. Досить пориву вітру, досить незначного факту, щоб перевернути весь цей світ дерев та ідей.

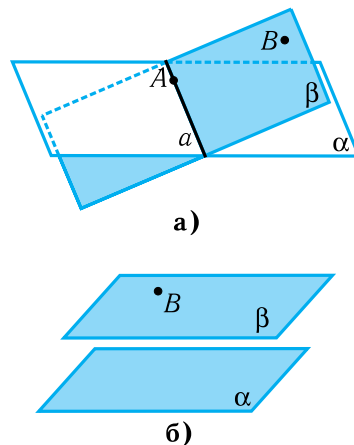
Дені Дідро

Геометричні істини в певному сенсі є асимптотами до фізичних істин, тобто перші нескінченно близько наближаються до других, ніколи, однак, повністю не досягаючи їх.

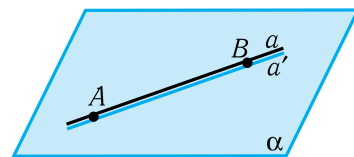
Жан Лерон Д'Аламбер

Теорема 1*(про існування точок поза площиною).**Яка б не була площина, існують точки простору, які їй не належать.*

Доведення. Нехай α — задана площина. Відповідно до аксіоми 1, існує принаймні ще одна площина β . Якщо площини α і β мають спільну точку A (рис. 1.12, а), то, за аксіомою 5, вони мають і деяку спільну пряму a , якій належать усі спільні точки цих площин. Тоді кожна точка B площини β , яка не належить прямій a , не належить і площині α . Якщо ж площини α і β не перетинаються (у тому, що така ситуація справді можлива, ми переконаємося пізніше), то взагалі кожна точка B площини β не належить площині α (рис. 1.12, б). Теорему доведено.

**Рис. 1.12****Теорема 2***(ознака належності прямої площині).**Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.*

Доведення. Нехай точки A і B прямої a належать площині α (рис. 1.13). Оскільки, за аксіомою 1, у кожній площині здійснюється планіметрія, то у площині α можна провести, і до того ж — тільки одну, пряму a' , яка проходить через задані точки A і B . Але, за аксіомою 3, ця пряма — єдина в усьому просторі, тобто збігається з a . Пряма a' належить площині α , тому й пряма a належить цій площині. Теорему доведено.

**Рис. 1.13**

Доведеною ознакою належності прямої площині часто користуються теслярі для перевірки того, чи є оброблена поверхня плоскою. Для цього до поверхні у різних напрямках прикладають ребро добре вивіреної лінійки і дивляться, чи немає між ним і поверхнею просвітів. Навпаки, за допомогою вивіреної плоскої поверхні (наприклад, поверхні станини верстата) описаним способом можна перевірити якість обробки прямолінійних деталей.

Математика є мовою особливого гатунку, яка має ідеї, лише їй притаманні, і знаки для вираження цих ідей.

Михайло Остроградський

Із ознаки належності прямої площині випливає, що площина і пряма, яка не належить цій площині, можуть мати щонайбільше одну спільну точку. Справді, якби таких точок було хоча б дві, то, за вказаною ознакою, дана пряма належала б площині.

Означення

(перетинних прямої і площини).

Пряма і площина, які мають тільки одну спільну точку, називаються перетинними. Про них кажуть також, що вони перетинаються у цій точці.

Те, що пряма a і площина α перетинаються у точці A , символічно можна записати так: $A = a \cap \alpha$.



Розв'язуємо разом

Задача.

Чи можна стверджувати, що якою б не була пряма у просторі, існують точки, які їй не належать?

Розв'язання. Нехай a — задана пряма, α — деяка площина (існування площини α гарантується аксіомою 1). Якщо пряма a має дві спільні точки з площиною α , тобто належить цій площині (рис. 1.14, а), то кожна точка B , яка не належить α , не належить і прямій a . (За аксіомою 1, точки, які не належать прямій a , є і в самій площині α).

Якщо пряма a має з площиною α лише одну спільну точку A (рис. 1.14, б), то кожна точка B площини α , відмінна від цієї спільної точки, не належить прямій a .

Якщо ж пряма a і площина α не мають спільних точок (рис. 1.14, в), то взагалі кожна точка B площини α не належить прямій a .

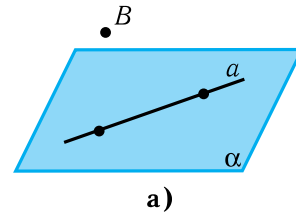
Отже, завжди можна стверджувати, що, якою б не була пряма, існують точки простору, які їй не належать.

Не дивись на доведення, як на процес, який примушує тебе, — дивись на нього, як на процес, який веде тебе.

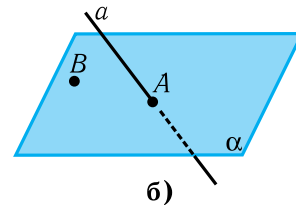
Людвіг Вітгенштайн

Гучні та урочисті диспути вчених часто перетворюються в суперечки стосовно слів і назв, а розважливіше було б (відповідно до звичаю та мудрості математиків) з них і розпочати — для того, щоб за допомогою означень упорядкувати їх.

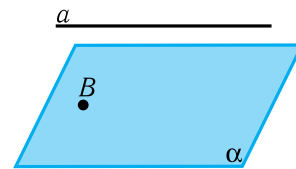
Френсіс Бекон



а)



б)



в)

Рис. 1.14



СТОРИНКИ ІСТОРІЇ

Декілька штрихів до «портрета» геометрії

Характерною особливістю геометрії, яка вирізняє її з-поміж інших математичних наук, є те, що геометричні поняття й відношення між ними перебувають у безпосередній відповідності з просторовими формами фізичного світу, який сприймаються людиною візуально та з допомогою інших органів відчуття. У зв'язку з цим кажуть, що геометричні поняття є наочними, а їхнє дослідження зазвичай супроводжуються графічними ілюстраціями (рисунками). Це не тільки значно полегшує вивчення геометрії, а й слугує джерелом для плідного застосування геометричних моделей в інших розділах математики, а також в інших науках: графіків функцій — в алгебрі, геометричного змісту похідної — в аналізі, правила паралелограма для додавання сил — в механіці, силових ліній — в електромагнетизмі тощо. Маючи на увазі саме цю особливість геометрії, Галілео Галілей писав, що «книга природи» написана мовою, алфавіт якої складають «трикутники, чотирикутники, круги, кути, конуси, піраміди та інші геометричні фігури».

Водночас у самій геометрії графічна ілюстрація не є засобом для встановлення відповідних наукових фактів. Єдиним таким засобом є доведення (виведення, обґрунтування) на основі раніше доведених тверджень (теорем, властивостей, ознак, критеріїв тощо) або безпосередньо на основі аксіом — найпростіших геометричних істин, які приймаються без доведення. У зв'язку з цим кажуть, що геометрія є **дедуктивною** (тобто вивідною) наукою. Втім, дедуктивною є кожна математична наука. Проте у шкільних підручниках строго дедуктивно, починаючи від самих аксіом, викладається лише геометрія.

А зразком для побудови систематичного курсу геометрії ось уже майже 2,5 тисячі років слугують «Начала геометрії», створені давньогрецьким математиком Евклідом Александрійським у III ст. до н.е. За цим зразком спочатку подається перелік найпростіших геометричних понять і відношень між ними

— Та хіба ж я такий? — закричав Гунька з ляку.

— Звичайно, такий. А який же іще?.. Ви не здогадалися тому, що тут підпису немає. Я зараз підпишу, і все буде зрозуміло.

Він взяв олівець і підписав під портретом друкованими літерами: «ГУНЬКА».

Микола Носов.

«Пригоди Незнайки та його друзі»



Алегорія геометрії

(«точка», «пряма», «площина», «відстань», «проходити через», «лежати на», «лежати між» тощо), основні властивості яких фіксуються у вигляді аксіом. Потім за допомогою логічних міркувань з аксіом виводять інші властивості найпростіших понять. Далі вводяться означення нових понять, і на основі аксіом та вже доведених властивостей встановлюються властивості уже цих нових понять, і т.д.

Залежно від вибору основних понять і основних відношень між ними, існують різні аксіоматичні бази геометрії. Можливі навіть різні геометрії — залежно від аксіом, покладених у їхню основу. До цього останнього відкриття прийшов у XIX ст. російський геометр Микола Лобачевський (1792–1856), за що англійський математик Джеймс Сильвестр (1814–1897) назвав його «Коперником геометрії». З того часу класична геометрія — та, яка вперше у систематизованій формі була викладена Евклідом, а тепер вивчається у школі і найбільше застосовується на практиці, часто називається **евклідовою**, або **елементарною геометрією**. Інші геометрії називаються **неевклідовими геометріями**. Найважливіші з неевклідових геометрій мають свої назви, наприклад: геометрія Лобачевського, геометрія Рімана, проективна геометрія, багатовимірна геометрія, псевдоевклідова геометрія тощо. Коли ж ведуть мову про геометрію без додаткових уточнень, то, як правило, мають на увазі класичну евклідову геометрію. У такому значенні вживається ця назва і в школі.

Геометрія настільки вже набула характеру фундаментального або первинного поняття, що багато явищ легше означити за допомогою геометрії, ніж геометрію — за допомогою чогось іншого. У самій геометрії первинні поняття не означаються прямо, а описуються в неявному вигляді за допомогою аксіом. Це слід розуміти так, що точки, прямі і площини — це такі геометричні фігури, властивості яких описуються аксіомами геометрії. Аналогічно можна сказати, що геометрія — це така наука, поняття якої й відношення між ними описуються аксіомами, означеннями й теоремами геометрії. Самі ці поняття, відношення, аксіоми, означення й теореми відображають найфундаментальніші властивості фізичного простору, який людина сприймає за допомогою органів відчуття.



Згідно з античним міфом, богиня пам'яті Мнемосіна, покровителька наук і мистецтв, мала дев'ятьох прекрасних дочок, яких називали музами. Кожна з муз опікувалася певною ділянкою з широкої сфери турбот своєї матері. З-поміж тогочасних наук такої опіки удостоїлися лише історія (її музою була Кліо) та астрономія (муза Уранія). Немає жодного сумніву, що якби цей міф з'явився трохи пізніше, коли утвердилася геометрія, то в ньому неодмінно була б і муза цієї науки.

Численні алегоричні зображення геометрії з'явилися в епоху Відродження. Обов'язковими атрибутами геометричної музи вважалися пристрої для вимірювання відстаней і кутів. І це не випадково, адже вся геометрія базується на цих метричних поняттях. Іншими атрибутами музи геометрії є багатогранники.

Тут і на попередній сторінці відтворено два анонімних алегоричних зображення геометрії, що належать до XVII ст.



Перевір себе

1. Що таке геометричні фігури?
2. Що вивчає планіметрія і що вивчає стереометрія?
3. Які геометричні фігури у просторі вважаються найпростішими? Як їх уявляють і як зображають?
4. Сформулюйте та проілюструйте рисунками аксіоми стереометрії.
5. Дайте означення рівності та подібності фігур у стереометрії.
6. Дайте означення переміщення та перетворення подібності фігур у стереометрії та окремих видів цих перетворень — центральної симетрії та гомотетії.
7. Дайте означення перетинних прямих, перетинних прямої і площини та перетинних площин.
8. Доведіть теорему про існування точок поза даною площиною.
9. Доведіть, що коли дві точки прямої належить площині, то й уся пряма належить цій площині.



Вправи і задачі

- 1°. Доведіть, що дві різні прямі у просторі не можуть мати більше однієї спільної точки.
- 2°. Доведіть, що пряма, яка не належить даній площині, не може мати з цією площиною більше однієї спільної точки.
- 3°. Одна з теорем стереометрії в «Началах» Евкліда формулюється так: «У прямої лінії яка-небудь частина не може лежати в одній площині, а яка-небудь інша частина — в іншій площині». Доведіть цю теорему.
- 4°. У планіметрії пряма, що перетинає одну зі сторін трикутника, обов'язково перетинає ще одну сторону цього трикутника. Чи істинне це твердження у стереометрії?
- 5°. Трикутник ABC належить площині α , а точка D лежить поза цією площиною. Доведіть, що жодні три з чотирьох точок A, B, C, D не лежать на одній прямій.
- 6°. Чи істинне твердження: «Якщо дві (три) точки кола належать площині, то й усе це коло належить даній площині»?
7. У просторі дано чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Розглядаються площини, які проходять через кожні три з цих точок, а також прямі, що проходять через кожні дві з них. Скільки всього налічується таких площин і скільки прямих?
8. Доведіть, що через три точки, які лежать на одній прямій, проходять принаймні дві різні площини.
9. Доведіть, що якою б не була точка, існує площина, яка через неї проходить.
10. Доведіть, що якою б не була точка, існує безліч прямих, які через неї проходять.

§2. Способи задання площин

Аксіомою 4 визначається спосіб задання площини за допомогою трьох точок, що не лежать на одній прямій. Зараз доведемо дві теореми, якими визначаються ще два способи для задання площини — за допомогою прямої і точки, що не належить цій прямій, та за допомогою двох перетинних прямих.

Теорема 1

(про задання площини прямою і точкою).

Якими б не були пряма і точка, що не належить цій прямій, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка через них проходить.

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A , яка їй не належить (рис. 1.15). Візьмемо на прямій a будь-які дві точки B і C . Точки A , B , C не лежать на одній прямій, тому що через точки B і C , за аксіомою 3, проходить тільки одна пряма — пряма a , а точка A , за умовою, цій прямій не належить. За аксіомою 4, через точки A , B , C проходить тільки одна площина α , яка, згідно з ознакою належності прямої площині, містить і пряму a . Доведено, таким чином, що існує площина, яка проходить через пряму a і точку A .

Припущення про те, що може існувати ще якась інша площина β , яка проходить через пряму a і точку A (наприклад, можна було б припустити, що при іншому виборі точок B , C на прямій a дістали б іншу площину, яка проходить через пряму a і точку A), одразу ж призводить до суперечності. Справді, площина β так само, як і α , проходила б через точки A , B і C . Але через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить тільки одна площина (аксіома 4). Тому β збігається з α . Теорему доведено.

Мені часто доводилося це бачити, але я не надавав цьому значення.

Готфрід Рудольф Еріх Распе.
«Пригоди барона фон Мюнхгаузена»

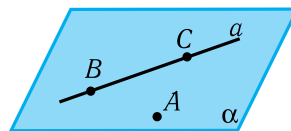


Рис. 1.15

Я волів би, щоб намагалися довести навіть аксіоми Евкліда, як це пробували робити деякі давні автори.

Готфрід Вільгельм Лейбніц

Теорема 2

(про задання площини двома перетинними прямими).

Якими б не були дві різні прямі, що перетинаються, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка через них проходить.

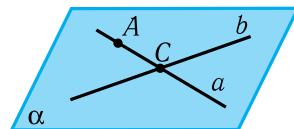
Доведення. Нехай дано прямі a і b , які перетинаються у точці C (рис. 1.16). Візьмемо на прямій a деяку точку A , відмінну від точки C . Точка A не лежить на прямій b , оскільки через точки A і C проходить тільки пряма a (аксіома 3). За попередньою теоремою 1, через точку A і пряму b проходить, і до того ж — тільки одна, площина α , яка містить і пряму a (бо вона містить точки A і C прямої a). Доведено, таким чином, що існує площина, яка проходить через прямі a і b .

Припустимо, що через дані прямі a і b проходить ще якась інша площина β . Тоді ця площина проходить і через пряму b та точку A . Але, як уже доведено, через пряму і точку, що їй не належить, проходить єдина площина. Тому β збігається з α . Теорему доведено.

**Розв'язуємо разом****Задача**

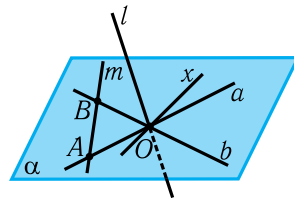
Дано дві перетинні прямі. Довести, що всі прямі, які перетинають ці прямі і не проходять через точку їхнього перетину, лежать в одній площині. Як відносно цієї площини розміщені прямі, що проходять через точку перетину даних прямих?

Розв'язання. Нехай a , b — задані прямі, O — точка їхнього перетину, t — довільна пряма, яка перетинає прямі a , b у різних точках A і B , тобто так, що точка O не належить t (рис. 1.17). За теоремою 2 про задання площини двома перетинними прямими, існує єдина площина α , яка містить прямі a , b . Пряма t , яка має з площиною α дві спільні

**Рис. 1.16**

Доведення від супротивного — спосіб доведення, який так любив Евклід, — є одним із наймогутніших знарядь математики. У ньому пожертва сягає набагато далі, ніж у будь-якому гамбіті, — шахіст, щоб досягти успіху, віддає пішака або фігуру, натомість математик жертвує всією грою.

Годфрі Харді

**Рис. 1.17**

Усі міркування геометра закінчуються словами: «Що й треба було довести». Цією формулою корисно закінчувати усі міркування: як усні, так і письмові.

Дені Дідро

точки A і B , належить α (ознака належності прямої площині). Отже, усі прямі, які перетинають прямі a , b і не проходять через точку O , належать α .

У площині α , звісно, є безліч і таких прямих x , які проходять через точку O (аксіома 1). Усі ж інші прямі l , які проходять через точку O , але не належать α , перетинають площину α .

Щоб найкраще зрозуміти метод проведення переконливих доведень, потрібно лише продемонструвати той, який застосовується в геометрії.

Блез Паскаль



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Легендарна історія про те, як Паскаль став геометром

Біографи Блеза Паскаля (1623–1662) — різностороннього вченого, філософа, першовідкривача відомого фізичного закону про тиск рідин і газів — розповідають про такий дивовижний факт з його життя. Змалечку, прислухаючись до розмов, що велися в оселі Паскалів під час зібрань провідних тогочасних учених, Блез, звісно, часто чув про геометрію. Тому й запитав у батька одного разу, що це таке геометрія. Той, не бажаючи обтяжувати хворобливого і кволого сина ще й математичними заняттями і вбачаючи його майбутнє у вивченні стародавніх мов, неохоче відповів, що геометрія — це, мовляв, така не вельми поважна наука, яка вивчає властивості різноманітних паличок, кружечків, колішаток та інших подібних речей. Проте навіть такого «пояснення» юному Паскалю вистачило для того, аби самостійно відкрити основи геометрії. Ввівши свою власну термінологію, креслячи фігури крейдою на підлозі, він самостійно за допомогою логічних міркувань дійшов до теореми про суму кутів трикутника. Яким же було здивування батька, коли одного разу він застав сина за доведенням геометричної теореми! Батько зрозумів, бо й сам був добрим геометром, що Блез має іскру Божу до математики і вже не тільки не перешкоджав, а й усіляко сприяв розвитку обдарування сина.

Цей, без сумніву, дещо прикрашений біографіями, епізод, з одного боку, яскраво ілюструє дедуктивний характер геометрії, а з іншого — красномовно вказує на основне джерело виникнення геометрії — на

Усе повинно бути доведено, і при доведенні не можна використовувати нічого, крім аксіом та раніше доведених теорем.

Блез Паскаль



Блез Паскаль

Предмет математики настільки серйозний, що не варто нехтувати жодною нагодою, щоб зробити його ще й трохи цікавим.

Найкращі книги — це ті, при читанні яких кожен вірить у те, що він і сам міг би їх написати.

Міркуючи про речі земні, ми кажемо: потрібно їх пізнати, щоб полюбити.

З «Думок» Блеза Паскаля

логічний аналіз мисленневих образів предметів, які реально існують у навколишньому світі.

Додамо у зв'язку з цим, що ретельного логічного аналізу потребували навіть найпростіші геометричні поняття точки, прямої і площини. Ще Евклід у своїх «Началах геометрії» давав їм явні означення. Наприклад, точку він означав як «те, що не має частин», лінію — як «довжину без ширини», а пряму — як «лінію, що однаково розміщена відносно всіх своїх точок». Але дати чомусь явне означення — це означає підвести це «щось» під поняття, яке вважається відомим. Наприклад, коли ми означаємо ромб як паралелограм, у якого всі сторони рівні, то вважаємо, що поняття паралелограма нам уже відоме. Зрозуміло, що цей процес зведення не може тривати нескінченно. Тому в сучасних викладах геометрії він зупиняється на найпростіших поняттях, означень яких у явному вигляді не приймають (інколи неправильно кажуть, що ці поняття взагалі приймаються без означень), а означають в неявному вигляді за допомогою аксіом.

Слід, однак, зауважити, що первісні поняття геометрії є найпростішими тільки з погляду логіки, тобто у тому розумінні, що вони найпростіше означаються — аксіомами, і всі одразу. Натомість з погляду сприйняття, тобто створення у нашій уяві відповідних образів, їх найпростішими не назвеш. Наприклад, уявити необмежену пряму значно важче, ніж обмежений відрізок. Однак поняття прямої в геометрії є первісним, а поняття відрізка — похідним.

Що ж до відбору самих аксіом, то в історії геометрії це було якщо не найважчою, то, безперечно, найдраматичнішою сторінкою. Зокрема, як уже згадувалося, вельми складною виявилася історія аксіоми про паралельні прямі, яку впродовж двох тисячоліть намагалися довести як теорему.

— А в тебе здібності є? — запитав Квітик.

— Звичайно, є. Я дуже здібний, — відповів Незнайко.

— Це потрібно перевірити, — сказав Квітик.

Микола Носов.

«Пригоди Незнайка та його друзів»



Перевір себе

1. Доведіть, що якими б не були пряма і точка поза нею, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка через них проходить.
2. Доведіть, що якими б не були дві перетинні прямі, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка через них проходить.



Вправи і задачі

- 11°. Чотири точки не лежать в одній площині. Чи можуть які-небудь три з них лежати на одній прямій?
- 12°. Чотири точки не лежать в одній площині. Чи можуть перетинатися дві прямі, які попарно сполучають ці точки?
- 13°. Доведіть, що коли дві прямі не лежать в одній площині, то вони і не перетинаються.
14. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через точку поза нею, належать одній площині. Чи заповнюють ці прямі усю площину?
15. У просторі дано пряму a і точку A . Чи можна стверджувати, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a , обов'язково лежать в одній площині?
16. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються, то його вершини лежать в одній площині.
17. У просторі дано чотири прямі, які проходять через одну точку. Жодні три з цих прямих не лежать в одній площині. Розглядаються площини, які проходять через кожні дві з даних прямих. Скільки усього налічується таких площин?
- 18*. Доведіть, що яка б не була пряма, у просторі існує безліч площин, які через неї проходять.

§3. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Якщо дві прямі лежать в одній площині, то, як відомо з планіметрії, вони або перетинаються, або паралельні. Оскільки у кожній площині здійснюється планіметрія, то ці випадки взаємного розміщення двох прямих можливі і в стереометрії. Але у просторі можливий ще один варіант розміщення: коли дві прямі не лежать в одній площині (зрозуміло, що тоді вони й не перетинаються).

Справді, нехай α — деяка площина, A, B, C — три довільні її точки, що не лежать на одній прямій, а D — точка, яка не належить α (рис. 1.18). Тоді прямі AD і BC не лежать в одній площині. Адже, якби вони лежали в одній площині, то цією площиною могла б бути тільки площина α , оскільки через три вибрані точки A, B, C проходить єдина площина. Але ж точка D і, відповідно, пряма AD цій площині не належать. Отже, прямі AD і BC не лежать в одній площині.

Означення

(мимобіжних прямих).

Дві прямі, які не лежать в одній площині (і вже тому не перетинаються), називаються мимобіжними.

З проведеного обґрунтування, яким установлено існування мимобіжних прямих, випливає наступна теорема.

Теорема 1

(ознака мимобіжних прямих).

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а інша перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі — мимобіжні.

В сучасному місті повинна панувати пряма лінія. Житлові будівлі, водопровідні та каналізаційні лінії, шосе, тротуари — усе повинно будуватися по прямій. Пряма лінія оздоровлює місто. Крива ж несе йому ступошення, всілякі небезпеки та труднощі, паралізує життя.

Ле Корбузье

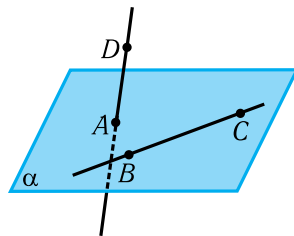


Рис. 1.18

Дуже важливо не приймати жодних припущень, а ще важливіше — не користуватися словами, якщо їм не надано цілком певного змісту.

Вільям Кліффорд

Означення*(паралельних прямих).*

Дві прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, називаються паралельними.

Для позначення відношення паралельності прямих у стереометрії застосовують той самий знак $\parallel$, що й у планіметрії. Наприклад, якщо пряма a паралельна прямій b , то це записують так: $a \parallel b$.

Отже, у просторі існують три види взаємного розміщення двох прямих:

- 1) дві прямі лежать в одній площині і мають одну спільну точку — перетинні прямі;
- 2) дві прямі лежать в одній площині і не мають спільних точок — паралельні прямі;
- 3) дві прямі не лежать в одній площині — мимобіжні прямі.

Усі можливі варіанти розташування прямих можна бачити на численних матеріальних носіях, зокрема, у межах класної кімнати. Наприклад, на рис. 1.19 прямі a і b перетинаються, b і c — паралельні, a і l — мимобіжні.

Наочними моделями прямих є також рівні ділянки автомобільних доріг. На рис. 1.20 зображено усі три характерні випадки взаємного розміщення двох доріг: a і b — паралельні, l і m — перетинні, p і q — мимобіжні.

Потрібно добирати такі слова, які бувають, а не придумувати.

Микола Носов.

«Пригоди Незнайки та його друзів»

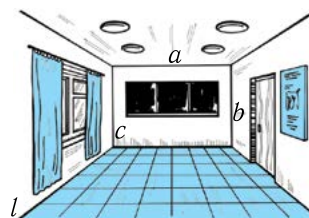


Рис. 1.19

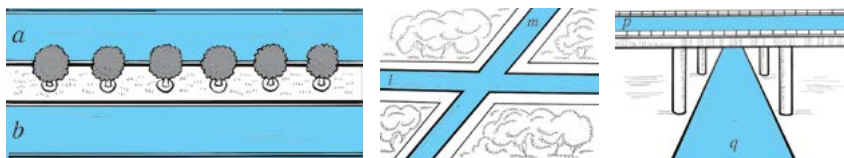


Рис. 1.20

З означення паралельних прямих випливає, що для двох таких прямих існує площина, якій вони належать. Зрозуміло також, що така площина — єдина (якби існували дві різні площини, то вони мали б дві різні спільні прямі, у той час як, за аксіомою 5, таких прямих може бути не більше однієї). А це дає ще один спосіб для задання площини, окрім

Геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей і дає нам можливість правильно мислити і розмірковувати.

Галілео Галілей

визначених аксіомою 4 (тобто за допомогою трьох точок, що не лежать на одній прямій) і теорем про задання площини (тобто прямою і точкою, яка їй не належить, та двома перетинними прямими). Йдеться про задання площини за допомогою двох паралельних прямих. Зрозуміло, однак, що ефективне практичне застосування цього способу можливе лише при наявності простої ознаки паралельності прямих, оскільки для побудови паралельних прямих на основі лише самого означення уже потрібно визначитися з площиною, в якій ці прямі лежать.

Для встановлення цієї ознаки нам потрібні будуть дві теореми, які, до того ж, мають важливе самостійне значення. Перша з теорем є стереометричним аналогом основної властивості паралельних прямих на площині.

Теорема 2

(про існування і єдиність прямої, паралельної даній).

Через будь-яку точку простору, що не лежить на даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж — тільки одна.

Доведення. Нехай дано пряму a і точку M , що не лежить на a (рис. 1.21). За теоремою про задання площини прямою і точкою, існує площина α , яка проходить через пряму a і точку M , а в цій площині, за аксіомою 1, існує пряма b , що проходить через точку M і паралельна прямій a . Існування паралельної прямої доведено.

Доведемо її єдиність. Припустимо, що існує ще інша пряма b' , яка теж проходить через точку M і паралельна прямій a . За означенням паралельних прямих, прямі a і b' все одно мають лежати в одній площині. Причому це буде та сама площина α , бо, крім прямої a , вона містить ще й ту ж саму точку M . Але в площині α , як відомо з планіметрії, через точку M проходить тільки одна пряма, паралельна прямій a . Тому пряма b' збігається з прямою b . Теорему доведено.

Думка про те, що нібито здібності до математики зустрічаються рідше, ніж до інших наук, — це лише ілюзія, породжена тими, хто береться вивчати математику або надто пізно, або без належного старання.

Йоганн Фрідріх Гербарт

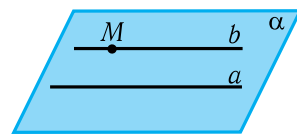


Рис. 1.21

— Світ повний чудес, — сказав кандидат, — але ми так звикли до них, що називаємо їх звичайними явищами.

Ганс Крістіан Андерсен.
«Директор лялькового театру»

Теорема 3

(про перетин площини паралельними прямими).

Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й інша пряма теж перетинає цю площину.

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b , одна з яких — скажімо, a — перетинає площину α у деякій точці A (рис. 1.22). Доведемо, що тоді інша пряма b теж перетинає площину α , тобто має з нею спільну точку, і до того ж — тільки одну.

Позначимо через β площину, яка містить паралельні прямі a і b . Оскільки різні площини α і β мають спільну точку A , то, за аксіомою 5, вони мають і деяку спільну пряму c . У площині β одна з паралельних прямих — пряма a , перетинає пряму c . Тому її перетинає й інша пряма b (якщо припустити, що $b \parallel c$, то, врахувавши умову $b \parallel a$, за відповідною теоремою з планіметрії дістали б, що $a \parallel c$, а це суперечить тому, що a перетинає c). Точка B перетину прямих b і c є спільною точкою прямої b і площини α .

Припустимо, що пряма b має з площиною α ще якусь іншу спільну точку. Тоді, за ознакою належності прямої площині, ця пряма належить α . А оскільки пряма b належить і площині β , то вона збігається з прямою c , яка є лінією перетину площин α і β . Виходить, що пряма a одночасно і перетинає пряму b , і паралельна їй. Дійшли суперечності, отже, зроблене припущення неправомірне. Теорему доведено.

Формулювання ознаки паралельності прямих у стереометрії ідентичне з відповідним формулюванням у планіметрії.

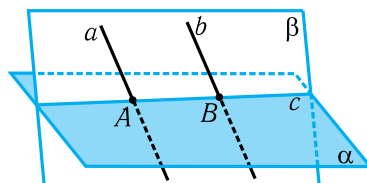


Рис. 1.22

Легкість математики ґрунтується на можливості суто логічної її побудови, трудність же, яка відштовхує багатьох, — на неможливості іншого викладу.

Гуго Штейнгауз

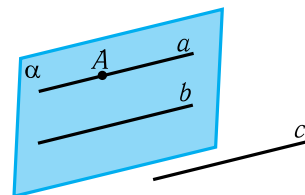
Теорема 4*(ознака паралельності двох прямих).**Дві прямі у просторі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою.*

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c . Доведемо, що $a \parallel b$. Для цього потрібно показати, що прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються.

Нехай A — яка-небудь точка прямої a , а α — площина, яка проходить через точку A і пряму b (рис. 1.23). Пряма a належить площині α . Справді, якщо припустити, що a перетинає α , то, за доведеною теоремою 3 про перетин площин паралельними прямими, пряма c теж перетинала б α . Оскільки $c \parallel b$, то, за тією ж теоремою, площину α перетинає і пряма b . А це вже суперечить вибору площини α , за яким пряма b належить α . Отже, обидві прямі a і b лежать у площині α . Якщо припустити, що вони перетинаються у деякій точці, то доведеться визнати, що через цю точку проходять дві прямі a і b , паралельні прямій c . А це суперечить теоремі 1 про існування і єдиність прямої, паралельної даній. Таким чином, теорему доведено.

Доведену ознаку паралельності двох прямих називають ще *теоремою про транзитивність відношення паралельності прямих* (від латинського *transitus* — перехід). У ній справді стверджується перехід властивості паралельності з двох пар прямих $a \parallel c$ і $b \parallel c$ на третю пару $a \parallel b$.

Відношення паралельності природним чином поширюється і на частини паралельних прямих. Наприклад, два відрізки або промені називаються паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

**Рис. 1.23**

Намагаючись допитливо осмислити загадки, які оточують нас, обдумуючи та аналізуючи власні спостереження, я прийшов врешті-решт до царства математики.

Моріс Ешер

Щодо мене, то я все своє життя не могла вирішити: до чого в мене більше хисту — до математики чи до літератури.

Софія Ковалевська



Теорема 5

(про перетин трьох площин).

Якщо три площини попарно перетинаються і дві з прямих перетину мають спільну точку, то через цю точку проходить і третя пряма перетину. Якщо ж дві прямі перетину паралельні, то й третя пряма паралельна їм.

Доведення. Нехай α, β, γ — дані площини, $a = \alpha \cap \beta$, $b = \beta \cap \gamma$, $c = \alpha \cap \gamma$ — прямі їхнього перетину. Розглянемо спочатку ситуацію, коли дві прямі — наприклад, b і c — перетинаються у деякій точці P (рис. 1.24, а).

Якби пряма a не проходила через точку P , то, за ознакою мимобіжних прямих, пряма b була б мимобіжною з a . А це суперечить тому, що прямі a і b лежать в одній площині β . Отже, пряма a проходить через точку P .

Припустимо тепер, що дві з прямих перетину — наприклад, прямі b і c — є паралельними (рис. 1.24, б). Якби пряма a перетинала c , то, відповідно до першого твердження теореми, прямі b і c теж перетиналися б. Отже, прямі a і c не перетинаються. А оскільки вони лежать в одній площині α , то $a \parallel c$. Аналогічно показуємо, що $b \parallel c$. Теорему доведено.

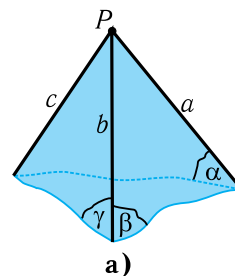
Теорема 6

(про розміщення прямих, які перетинають одну з прямих і паралельні іншій).

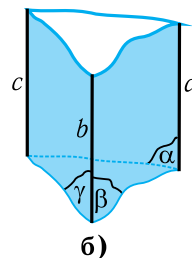
Якщо прямі a і b не паралельні (тобто перетинаються або мимобіжні), то усі прямі, які паралельні прямій b і перетинають пряму a , лежать в одній площині.

Доведення. Нехай C — деяка точка прямої a , c — пряма, що проходить через точку C і паралельна прямій b , α — площина, що проходить через прямі a і c (рис. 1.25). Позначимо через x довільну пряму, яка паралельна прямій b і перетинає пряму a у деякій точці X . Покажемо, що x належить α .

Оскільки $x \parallel b$ і $c \parallel b$, то, за ознакою паралельності двох прямих, $x \parallel c$. Паралельні прямі x і c лежать в одній площині. Ця площина містить пряму c і пряму a (оскільки їй належать точки X і C прямої a),



а)



б)

Рис. 1.24

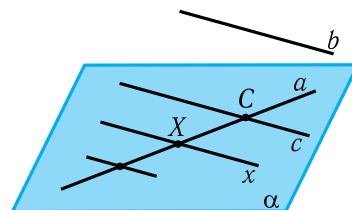


Рис. 1.25

тобто вона збігається з площиною α . Отже, пряма x належить α . Теорему доведено.



Розв'язуємо разом

Задача 1

Косим чотирикутником у просторі називається сукупність чотирьох точок, що не лежать в одній площині, і чотирьох відрізків, які послідовно сполучають ці точки. Довести, що середини сторін будь-якого косого чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — заданий косий чотирикутник, K, L, M, N — середини його сторін AB, BC, CD, DA (рис. 1.26).

Оскільки KL — середня лінія у трикутнику ABC , а MN — у трикутнику ADC , то $KL \parallel AC$, а $MN \parallel AC$. Тоді, за ознакою паралельності прямих, $KL \parallel MN$ і, отже, прямі KL і MN лежать в одній площині.

А оскільки, крім цього, $KL = \frac{1}{2} AC$, а $MN = \frac{1}{2} AC$, то $KL = MN$. Виходить, що чотирикутник $KLMN$ лежить в одній площині, а його протилежні сторони KL і MN є паралельними і рівними. Отже, це — паралелограм. Твердження задачі доведено.

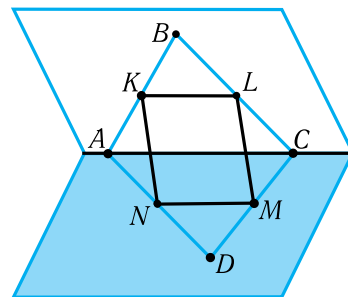


Рис. 1.26

Задача 2

Відрізок AB перетинає площину α . Через його кінці A, B і точку L , яка ділить відрізок у відношенні $9 : 5$, беручи від точки A , проведено паралельні прямі, що перетинають площину α відповідно у точках A_1, B_1, L_1 . Відомо, що $AA_1 = 35$ см, $LL_1 = 8$ см. Визначити довжину відрізка BB_1 .

Розв'язання. Оскільки прямі AA_1, BB_1, LL_1 паралельні і перетинають пряму AB , то вони лежать в одній площині, нехай, β (рис. 1.27). Точки A_1, B_1, L_1 лежать на одній прямій — прямій перетину площини β з площиною α .

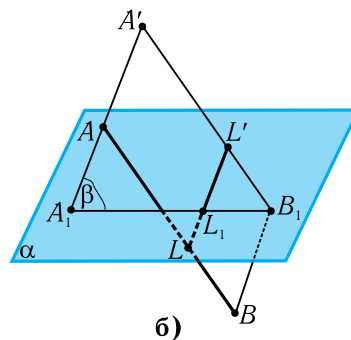
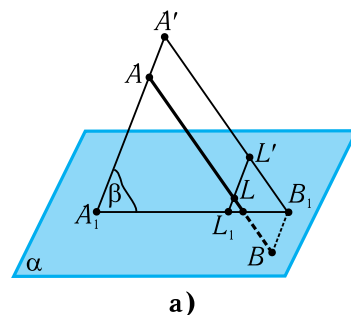


Рис. 1.27

Проведемо у площині β через точку B_1 пряму $B_1A' \parallel BA$. Нехай A' — точка перетину цієї прямої з прямою AA_1 , а L' — з прямою LL_1 . Оскільки $BB_1L'L$, $BB_1A'A$ — паралелограми, то $LL' = AA' = BB_1$. Позначимо довжину цих відрізків через x . Тоді $A_1A' = AA' + AA_1 = x + 35$, $L_1L' = LL' \pm LL_1 = x \pm 8$ (взаємне розміщення точок L , L_1 , L' не задано). З подібності трикутників B_1L_1L' та B_1A_1A' маємо:

$$\frac{L_1L'}{A_1A'} = \frac{B_1L'}{B_1A'} = \frac{BL}{BA} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}.$$

Отже, $\frac{x \pm 8}{x + 35} = \frac{5}{14}$.

Звідси $x = 7$ (см) або $x = \frac{287}{9}$ (см).

Відповідь. 7 см або $\frac{287}{9}$ см.

*Завзяття все перемагає.
Козьма Прутков*



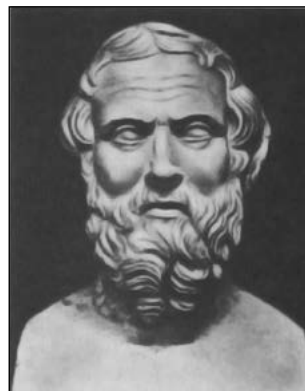
СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Геродот і Аристотель про походження геометрії

Уже зазначалося, що слово «геометрія» утворене від двох давньогрецьких слів «гео» — земля і «метрео» — вимірюю, отже, дослівно означає «землемірство». (Корінь «гео» входить до назв й інших наук, як-от: географія, геологія, геодезія, геомеханіка, геофізика, геохімія тощо).

Про походження геометрії «батько історії» Геродот у V ст. до н.е. дослівно писав так:

«Єгипетські жерці говорили, що цар Сесотріс розділив землю між усіма єгиптянами, давши кожному по прямокутній ділянці; з цього він почав отримувати дохід, наказавши щорічно сплачувати податок. Якщо ж від якої-небудь ділянки Ніл відрізав якусь частину, то власник, приходячи до царя, сповіщав про це. Цар же посилав людей, які повинні були обстежити ділянку й виміряти, наскільки меншою вона стала, аби власник сплачував податок з решти площі, пропорційно до встановленого. Мені здається, що саме



Геродот

так було винайдено геометрію, яка потім з Єгипту була перенесена в Елладу».

Отже, Геродот пов'язував походження геометрії з практичними потребами людини, а саме — з вимірюванням і межуванням земель.

Через два століття після Геродота енциклопедист античного світу Аристотель висловив зовсім іншу думку про походження геометрії. Основне джерело виникнення цієї науки він вбачав у вільній розумовій діяльності наділених дозвіллям людей: «Математичне мистецтво найперше було створене у Єгипті, оскільки там жерці мали час для дозвілля».

Однак істина, мабуть, поєднує обидва ці припущення. Вочевидь важливими були і практичні потреби, і вільна розумова діяльність.

Від прадавньої єгипетської епохи до нас дійшли лише дві цілісні математичні пам'ятки. Це — записані на папірусі збірники задач із розв'язаннями. Глибоко символічним є початок і кінець папірусного тексту, автор якого називає себе писарем Ахмесом. Перша фраза є своєрідним пророцтвом майбутніх злетів математики у царині духу: «Способи, за допомогою яких можна дійти до розуміння сутності усіх потаємних речей, усіх таємниць, що містяться в речах». А остання — ніби застерігає від нехтування земними проблемами: «Лови гадів, мишей, виполой бур'яни, дбай про пишну пряжу, проси в бога Ра тепла, вітру та високої води». Так споконвіку поєднуються у математиці ці дві сили — вільна розумова фантазія і зв'язок з життям у природному та суспільному середовищах.



Аристотель



Давньоєгипетська статуя писаря
(кінець III тис. до н.е.;
Париж, Лувр)



Перевір себе

1. Які прямі у просторі називаються паралельними? Обґрунтуйте існування паралельних прямих.
2. Які прямі називаються мимобіжними? Доведіть ознаку мимобіжності прямих.
3. Опишіть та проілюструйте рисунками усі можливі види взаємного розміщення двох прямих у просторі. Наведіть відповідні фізичні моделі.
4. Доведіть, що через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, проходить пряма, паралельна цій прямій, і до того ж — тільки одна.

5. Доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й інша пряма теж перетинає цю площину.
6. Доведіть ознаку паралельності двох прямих.



Вправи і задачі

- 19°. У планіметрії пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й іншу. Чи істинне це твердження у стереометрії?
- 20°. Чи можуть паралельні (мимобіжні) прямі лежати у перетинних площинах?
- 21°. Доведіть, що коли дві прямі не перетинаються і не паралельні, то не існує площини, якій вони належать.
- 22°. Дві вершини паралелограма і точка перетину його діагоналей належать площині α . Чи можна стверджувати, що й дві інші вершини цього паралелограма також належать площині α ?
- 23°. Три вершини паралелограма (трапеції) належать площині α . Чи можна стверджувати, що четверта вершина фігури теж належить площині α ?
- 24°. Пряма a мимобіжна з прямою b , а пряма b — мимобіжна з прямою c . Чи впливає звідси, що пряма a мимобіжна з прямою c ? Чи зміниться відповідь, якщо слово «мимобіжна» замінити словом «перетинається»?
- 25°. Прямі a і b — не паралельні. Доведіть, що кожна пряма c у просторі не паралельна принаймні одній з прямих a чи b .
- 26°. Дві мимобіжні прямі a і b відповідно паралельні прямим a_1 і b_1 . Чи можна стверджувати, що тоді прямі a_1 і b_1 теж мимобіжні?
27. Сторони AB і BC паралелограма $ABCD$ перетинають площину α . Доведіть, що тоді прямі AD і DC теж перетинають площину α .
28. Пряма b перетинає пряму a і не перетинає прямої c , паралельної прямій a . Доведіть, що прямі b і c є мимобіжними.
29. Прямі a і b — мимобіжні, точка A належить прямій a . Доведіть, що площина, яка проходить через A і b , перетинає пряму a .
30. Одна з теорем стереометрії у «Началах геометрії» Евкліда формулюється так: «Якщо будуть дві паралельні прямі і на кожній з них узяти довільно по точці, то пряма, яка сполучає ці точки, лежатиме в одній площині з даними паралельними прямими». Доведіть цю теорему.
31. Чи істинне твердження: «Прямі a і b паралельні тоді і тільки тоді, коли існує така пряма c , що $a \parallel c$ і $b \parallel c$ »?
32. Чи можливо, щоб через точку, яка не належить жодній із двох даних мимобіжних прямих a і b , проходило дві прямі, які перетинають прямі a і b ? Відповідь обґрунтуйте.

33. Прямі a і b — паралельні. Площина α проходить через пряму a , а площина β — через пряму b . Доведіть, що коли площини α і β перетинаються, то лінія їхнього перетину паралельна прямим a і b .
34. Доведіть, що коли прямі AB і CD мимобіжні, то прямі AC і BD — теж мимобіжні.
35. Через кінці відрізка AB , який не перетинає площини α , та його внутрішню точку C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Визначте довжину відрізка CC_1 , якщо:
- 1) $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см, C — середина відрізка AB ;
 - 2) $AA_1 = 93$ см, $BB_1 = 60$ см, точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 7 : 4$;
 - 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $AC : CB = m : n$.
36. Дано паралелограм і площину α , яка не перетинає його. Через вершини A, B, C, D паралелограма і точку O перетину його діагоналей проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1 . Відомо, що $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Визначте довжини відрізків DD_1 та OO_1 .
37. Через вершини трикутника ABC , який не перетинається з площиною α , і точку G перетину його медіан проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1, B_1, C_1, G_1 . Відомо, що $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Визначте довжину відрізка GG_1 .
- 38*. Розв'яжіть задачу 35 за умови, що відрізок AB перетинає площину α .
- 39*. На сторонах AB, BC, CD і DA просторового чотирикутника $ABCD$ розміщені точки A', B', C', D' відповідно, і $\frac{AA'}{A'B} = \frac{AD'}{D'B} = \frac{CC'}{C'B} = \frac{CB'}{B'B}$. Доведіть, що чотирикутник $A'B'C'D'$ — паралелограм.
- 40*. Чотири точки розміщені так, що пряма, яка проходить через довільні дві з них, не перетинається з прямою, яка проходить через дві інші. Доведіть, що ці точки не лежать в одній площині.



Тест № 1 на тему: «Аксиоми стереометрії та найпростіші наслідки з них»

Варіант 1

- Дві прямі a і b паралельні прямій c . Яким є взаємне розміщення прямих a та b ?
 А) перетинаються; Б) паралельні;
 В) мимобіжні; Г) лежать у різних площинах.
- Прямі a , b і c попарно перетинаються, але проходять через одну точку. Скільки різних площин можна провести через кожні дві з цих прямих?
 А) одну; Б) дві; В) три; Г) жодної.
- Скільки всього різних площин можна провести через три точки, якщо вони лежать на одній прямій?
 А) одну; Б) дві;
 В) нескінченну кількість; Г) жодної.
- Точки A і C лежать у площині α , а точка B — поза нею. Які з наведених тверджень істинні?
 А) пряма AB не перетинає площини α ; Б) пряма BC не перетинає площини α ;
 В) прямі AC і BC не перетинаються; Г) прямі AB і AC перетинаються.
- Скільки всього різних площин можна провести через три точки, якщо вони не лежать на одній прямій?
 А) одну; Б) дві;
 В) нескінченну кількість; Г) жодної.
- Точки A , B , C , D не лежать в одній площині. По якій прямій перетинаються площини ABC і ABD ?
 А) AB ; Б) BC ; В) CD ; Г) AD .
- Точки A і B лежать у площині α , а точка C — поза нею. Які з наведених тверджень істинні?
 А) пряма AC лежить у площині α ; Б) пряма BC лежить у площині α ;
 В) пряма AB лежить поза площиною α ; Г) пряма AB лежить у площині α .
- Задано три точки A , B , C . Скільки площин можна провести через ці точки, якщо $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 9$ см?
 А) одну; Б) дві;
 В) нескінченну кількість; Г) жодної.
- У просторі дано три точки A , B , C , які лежать на одній прямій. Які з наведених тверджень істинні?
 А) через точки A , B , C можна провести тільки одну площину;
 Б) через точки A , B , C можна провести безліч площин;
 В) через точки A і B можна провести площину, яка не містить точки C ;
 Г) через точку A можна провести площину, яка має з прямою BC тільки одну спільну точку.

10. Дано пряму a і точку A , яка не лежить на ній. Скільки можна провести через точку A площин, які містять пряму a ?
- А) одну; Б) дві;
В) нескінченну кількість; Г) жодної.
11. Точка M не лежить у площині трикутника ABC . Яким є взаємне розміщення прямих MA і BC ?
- А) паралельні; Б) мимобіжні;
В) перетинаються; Г) можливий будь-який з варіантів А), Б), В).
12. У просторі задано пряму a і точку M , яка не лежить на ній. Скільки існує різних прямих, які проходять через M і паралельні прямій a ?
- А) жодної; Б) одна; В) нескінченна кількість; Г) жодної або одна.
13. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Яким є взаємне розміщення прямих AB і CD ?
- А) перетинаються; Б) паралельні;
В) мимобіжні; Г) лежать в одній площині.
14. Прямі AD і BC — мимобіжні. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD ?
- А) перетинаються; Б) паралельні; В) мимобіжні; Г) збігаються.
15. Вершини A і B , а також точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ лежать в одній площині. Чи належать цій площині точки C і D ?
- А) точка C належить цій площині, а точка D — ні;
Б) точка D належить цій площині, а точка C — ні;
В) точки C і D належать цій площині;
Г) точки C і D не належать цій площині.
16. Через кінці відрізка AB , який не перетинає площини α , та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1, B_1, C_1 . Чому дорівнює довжина відрізка CC_1 , якщо $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 16$ см?
- А) 8 см; Б) 14 см; В) 20 см; Г) 12 см.
17. Через кінці відрізка AB , який не перетинає площини α , та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно у точках A_1, B_1, C_1 . Чому дорівнює довжина відрізка AA_1 , якщо $CC_1 = 12$ см, $BB_1 = 16$ см?
- А) 8 см; Б) 14 см; В) 20 см; Г) 9 см.
18. Через кінець A відрізка AB проведено площину α , а через кінець B і внутрішню точку C відрізка AB — паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках B_1 і C_1 . Чому дорівнює довжина відрізка BB_1 , якщо $AC = 3$ см, $AB = 6$ см, $CC_1 = 4$ см?
- А) 12 см; Б) 2 см; В) 8 см; Г) 6 см.
19. Прямі a і b перетинаються в точці K . Пряма c , яка не проходить через точку K , перетинає прямі a і b . Які з наведених тверджень істинні?
- А) прямі a, b і c не лежать в одній площині;
Б) прямі a, b і c лежать в одній площині;
В) точка K не лежить в одній площині з прямою c ;
Г) жодне із цих тверджень не є істинним.

20. Точка C — спільна точка площин α і β , що перетинаються по прямій a . Які з наведених тверджень є істинними?
А) точка C не належить прямій a ;
Б) точка C належить обом площинам, але не належить прямій a ;
В) точка C належить прямій a ;
Г) жодне із цих тверджень не є істинним.
21. Прямі AB і CD не лежать в одній площині. Яке з наведених тверджень є істинним?
А) точки A, B, C не лежать в одній площині;
Б) точки A, B, C не лежать на одній прямій;
В) точки A, B, C, D не лежать в одній площині;
Г) прямі AC і BD перетинаються.
22. Відрізки AB, SB, SD, AC перетинають площину α . Які ще із зазначених відрізків перетинають площину α ?
А) AS ; Б) AD ; В) BC ; Г) BD .
23. Три прямі перетинаються в одній точці. Через кожні дві з них проведено площину. Скільки всього проведено площин?
А) одну або три; Б) дві; В) три; Г) безліч.
24. Прямі a і b , b і c , a і c перетинаються, причому точки їхнього перетину не збігаються. Яке із цих тверджень є істинним?
А) прямі a, b, c проходять через одну точку;
Б) точки перетину прямих лежать на одній прямій;
В) прямі a, b, c лежать в одній площині;
Г) прямі a, b, c не лежать в одній площині.

Варіант 2

1. Через три точки проведено дві різні площини. Як розміщені ці точки?
А) лежать на одній прямій; Б) не лежать на одній прямій;
В) можуть бути розміщені по-різному; Г) збігаються.
2. Дано дві перетинні прямі a і b . Через точку A , що лежить на прямій a , проведено пряму c паралельно прямій b . Скільки різних площин можна провести через кожні дві з прямих a, b, c ?
А) одну; Б) дві; В) нескінченну кількість; Г) жодної.
3. Скільки різних площин можна провести через пряму?
А) одну; Б) дві; В) нескінченну кількість; Г) жодної.
4. Точка M не належить площині чотирикутника $ABCD$. Яким є взаємне розміщення прямих MD і BC ?
А) перетинаються; Б) паралельні; В) мимобіжні; Г) збігаються.
5. Дано трикутник ABC і точку K , що не належить площині трикутника. Скільки існує різних прямих, які проходять через точку K і паралельні прямій BC ?
А) жодної; Б) одна;
В) нескінченна кількість; Г) одна або безліч.

6. Дві вершини і точка перетину діагоналей трапеції лежать у площині α . Яким є розміщення двох інших вершин трапеції відносно площини α ?
А) одна вершина лежить, а інша не лежить у площині α ;
Б) обидві вершини лежать у площині α або обидві не лежать у ній;
В) обидві вершини не лежать у площині α ;
Г) обидві вершини лежать у площині α .
7. Площини α і β перетинаються по прямій a . Точка A лежить у площині α і не належить прямій a . Яким є взаємне розміщення точки A і площини β ?
А) точка A належить площині β ;
Б) точка A не належить площині β ;
В) точка A може належати, а може й не належати площині α .
Г) за цими даними визначити неможливо.
8. Прямі AB і CD паралельні. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD ?
А) перетинаються;
Б) паралельні;
В) мимобіжні;
Г) перетинаються або паралельні.
9. Пряма a , яка не лежить у площині трикутника ABC , перетинає сторону AB . Яким є взаємне розміщення прямих a і BC ?
А) пряма a перетинає пряму BC ;
Б) прямі a і BC паралельні;
В) прямі a і BC мимобіжні;
Г) прямі a і BC паралельні або збігаються.
10. Прямі a , b і c перетинаються в точці O . Пряма d , яка не проходить через точку O , перетинає кожну з прямих a , b і c . Як розміщені прямі a , b , c , d ?
А) прямі a , b , c і d не лежать в одній площині;
Б) прямі a , b , c і d лежать в одній площині;
В) прямі a , b і d не лежать в одній площині;
Г) прямі a , c і d не лежать в одній площині.
11. Площини α і β перетинаються по прямій a . Пряма b , яка лежить у площині β , перетинає площину α в точці C . Де розміщена точка C ?
А) на площині α , але не лежить на прямій a ;
Б) на площині α і лежить на прямій a ;
В) може лежати на прямій a , а може не лежати на ній.
Г) поза площиною β .
12. Через кінці відрізка AB , який не перетинає площини α , та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Чому дорівнює довжина відрізка CC_1 , якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 10$ см?
А) 6 см;
Б) 12 см;
В) 9 см;
Г) 8 см.
13. Через кінці відрізка AB , який не перетинає площини α , та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Чому дорівнює довжина відрізка AA_1 , якщо $CC_1 = 14$ см, $BB_1 = 18$ см?
А) 10 см;
Б) 16 см;
В) 22 см;
Г) 9 см.
14. Через кінець A відрізка AB проведено площину α , а через кінець B і внутрішню точку C — паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках B_1 і C_1 . Чому дорівнює довжина відрізка CC_1 , якщо $AC = 14$ см, $AB = 18$ см, $BB_1 = 9$ см?
А) 12 см;
Б) 7 см;
В) 28 см;
Г) 8 см.

15. Пряма BC лежить у площині α , а точка A — поза площиною α . Яке з наведених тверджень істинне?
А) пряма AB не має спільних точок з площиною α ;
Б) пряма AC перетинає площину α ;
В) прямі AC і BC не перетинаються;
Г) точки A, B, C не лежать в одній площині.
16. Скільки всього різних площин можна провести через пряму a і точку A , яка лежить на прямій a ?
А) одну; Б) дві;
В) нескінченну кількість; Г) жодної.
17. Прямі AB і CD не лежать в одній площині. По якій прямій перетинаються площини ABD і BCD ?
А) AB ; Б) CD ; В) BD ; Г) AD .
18. Задано три точки A, B, C . Скільки площин можна провести через ці точки, якщо $AB = 8$ см, $BC = 17$ см, $AC = 9$ см?
А) одну; Б) дві;
В) нескінченну кількість; Г) жодної.
19. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Яке з наведених тверджень є істинним?
А) точки A, B, C не лежать в одній площині;
Б) прямі AC і BD перетинаються;
В) прямі AC і BD не перетинаються;
Г) точки A, B, C не лежать на одній прямій.
20. Відрізки AB, AC, SB і BD перетинають площину α . Який ще із зазначених відрізків перетинає площину α ?
А) BC ; Б) CD ; В) AD ; Г) SD .
21. Скільки всього площин можна провести через кожні три із чотирьох точок, які не лежать в одній площині?
А) дві; Б) три;
В) чотири; Г) нескінченну кількість.
22. Пряма c перетинає пряму a і не перетинає пряму b , паралельну прямій a . Яким є взаємне розміщення прямих b і c ?
А) паралельні; Б) перетинаються;
В) мимобіжні; Г) перетинаються або збігаються.
23. Прямі a і b — паралельні, а прямі b і c — не паралельні. Яким є взаємне розміщення прямих a і c ?
А) перетинаються; Б) мимобіжні;
В) паралельні; Г) перетинаються або мимобіжні.
24. Прямі a і b не лежать в одній площині. Прямі c і d перетинають кожен з прямих a і b . Яке із цих тверджень істинне?
А) прямі a і c не лежать в одній площині;
Б) прямі b і c не лежать в одній площині;
В) прямі c і d не лежать в одній площині;
Г) прямі c і d не перетинаються.



Примірні завдання для контрольної роботи №1

1. а) Відомо, що через точки A, B, C проходять дві різні площини. Доведіть, що тоді через ці точки проходить безліч площин. Як розміщені точки A, B, C ?
 б) Відомо, що через пряму a і точку A проходить кілька площин. Доведіть, що тоді через пряму a і точку A проходить безліч площин. Як розміщені пряма a і точка A ?
2. а) Пряма m перетинає сторону AB паралелограма $ABCD$. Яким може бути взаємне розміщення прямих m і CD ? Відповідь обґрунтуйте.
 б) Пряма l перетинає основу BC трапеції $ABCD$. Яким може бути взаємне розміщення прямих l і AD ? Відповідь обґрунтуйте.
3. а) Прямі a і b — мимобіжні. Точки A_1, A_2 лежать на прямій a , а точки B_1, B_2 — на прямій b . Як розміщені прямі A_1B_1 та A_2B_2 одна відносно одної? Відповідь обґрунтуйте.
 б) Прямі a і b — мимобіжні. Точка A лежить на прямій a , а точка B — на прямій b . Через точку A і пряму b , а також через точку B і пряму a проведено площини α і β відповідно. Чи можуть площини α і β збігатися? Відповідь обґрунтуйте.
4. а) Чи існують такі дві паралельні прямі, кожна з яких перетинає дві задані мимобіжні прямі? Відповідь обґрунтуйте.
 б) Пряма c перетинає обидві мимобіжні прямі a і b . Доведіть, що будь-яка пряма d , яка паралельна прямій c , мимобіжна принаймні з однією із прямих a і b .
5. а) Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають площину, що не має з паралелограмом спільних точок. Довжини відрізків, що належать цим прямим і проведені від трьох послідовних вершин паралелограма до площини, дорівнюють 25 см, 46 см і 51 см. Визначте довжину такого самого відрізка від четвертої вершини паралелограма до цієї площини.
 б) Через вершини паралелограма і точку перетину його діагоналей проведено паралельні прямі, які перетинають площину, що не має з паралелограмом спільних точок. Довжини відрізків цих прямих від двох сусідніх вершин і точки перетину діагоналей паралелограма до площини дорівнюють відповідно 63 см, 47 см і 49 см. Визначте довжини таких самих відрізків від двох інших вершин паралелограма до цієї площини.

§4. Взаємне розміщення прямої і площини

Якщо дві точки прямої належать площині, то, за ознакою належності прямої площині, усі точки цієї прямої належать даній площині. Якщо якась точка прямої лежить поза площиною й існує точка прямої, що належить цій площині, то пряма перетинає дану площину (в одній точці). Логічно допустимою залишається третя можливість — коли пряма і площина не мають жодної спільної точки.

Хто добре знає пряму, той не стикнеться з труднощами у геометрії.

Гаспар Монж

Означення

(паралельних прямої і площини).

Якщо пряма і площина не мають жодної спільної точки, то вони називаються паралельними.

Відрізок (чи промінь) вважається паралельним площині, якщо він належить прямій, паралельній цій площині.

Паралельність прямої a і площини α символічно позначають так: $a \parallel \alpha$.

На думку про можливість паралельності прямої та площини наводять і буденні спостереження. Наприклад, лінії перетину стін кімнати зі стелею видаються паралельними площині підлоги, а туго натягнуті електричні проводи — площині рівної поверхні землі (рис. 1.28).

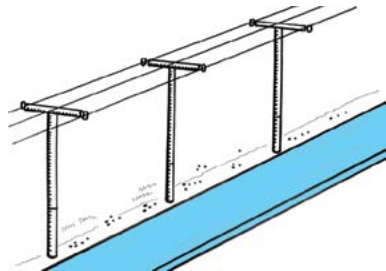


Рис. 1.28

А що така можливість у стереометрії справді реалізовується, впливає з наступної теореми.

Теорема 1

(ознака паралельності прямої і площини).

Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

Доведення. Нехай пряма a не лежить у площині α , пряма b лежить у площині α , і $a \parallel b$ (рис. 1.29). Доведемо, що $a \parallel \alpha$.

Оскільки пряма a не лежить у площині α , то a і α мають не більше однієї спільної точки. Припустимо, що така єдина спільна точка існує, тобто пряма a перетинає площину α . Тоді, за теоремою про перетин площини паралельними прямими, цю площину α перетинає і паралельна a пряма b . Але, за умовою, пряма b належить α . Дійшли суперечності. Отже, пряма a не перетинає α , тобто $a \parallel \alpha$. Теорему доведено.

Тепер зрозуміло, що, взявши, наприклад, дві перетинні площини α і β та провівши у площині β довільну пряму a , паралельну прямій b перетину цих площин, матимемо паралельні пряму a і площину α (рис. 1.30).

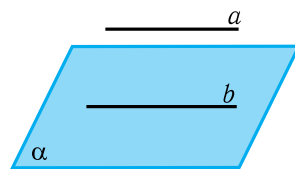


Рис. 1.29

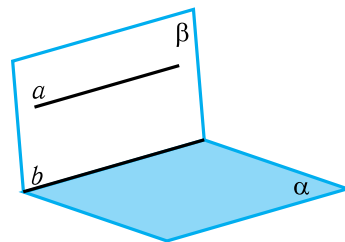


Рис. 1.30



Часто при розв'язуванні задач буває корисною теорема, обернена до ознаки паралельності прямої і площини.

Теорема 2

(обернена до ознаки паралельності прямої і площини).

Якщо пряма паралельна площині, то у цій площині існує пряма, паралельна даній.

Доведення. Нехай пряма a паралельна площині α (рис. 1.31). Візьмемо у площині α довільну точку A . Через точку A і пряму a проходить площина β . Ця площина не збігається з α , оскільки проходить через пряму a , що не належить α . Отже, β перетинає α по деякій прямій b , що містить точку A . Покажемо, що $b \parallel a$.

Прямі a і b лежать в одній площині β і не збігаються, оскільки точка A прямої b не належить прямій a . Якби вони перетиналися, то точка перетину була б спільною для прямої a і площини α . Але це неможливо, оскільки $a \parallel \alpha$. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено.

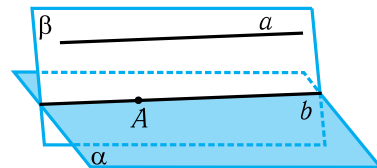


Рис. 1.31

Наслідок.

Якщо пряма паралельна площині, то через кожну точку, взяту на цій площині, проходить пряма площини, паралельна даній прямій.

Справді, кожна пряма s площини α , яка паралельна побудованій прямій b (див. рис. 1.31), за теоремою про транзитивність відношення паралельності прямих, буде паралельною і прямій a .

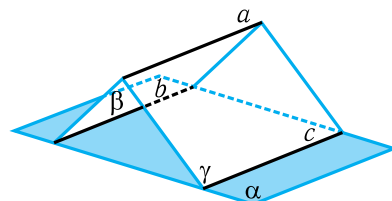
**Розв'язуємо разом****Задача.**

Довести, що коли дві площини β і γ проходять через пряму a , паралельну площині α , і перетинають цю площину (рис. 1.32), то відповідні прямі b і c перетину паралельні прямій a . Навпаки, якщо $b \parallel c$, то $a \parallel \alpha$.

Розв'язання. Прямі a і b належать площині β і в ній не перетинаються. Справді, якби вони перетиналися, то точка перетину належала б і прямій a , і площині α . Але, за умовою, $a \parallel \alpha$. Отже, $a \parallel b$.

Аналогічно доводимо, що $a \parallel c$. Тоді, за ознакою паралельності прямих, $b \parallel c$.

Нехай тепер площини β і γ , які перетинаються по прямою a , перетинають площину α по паралельних прямих b і c . Потрібно довести, що тоді $a \parallel \alpha$. Оскільки $b \parallel c$, то, за ознакою паралельності прямої і площини, $b \parallel \gamma$. Отже, з прямою $a \subset \gamma$ пряма b не перетинається. Крім цього, прямі a і b лежать в одній площині β . Тому $a \parallel b$. Тоді, за тією самою ознакою паралельності прямої і площини, $a \parallel \alpha$. Твердження задачі доведено повністю.

**Рис. 1.32**

Якби мені довелося знову розпочати своє навчання, то я послушався б поради Платона і взявся б спочатку за математику як науку, яка вимагає точності і вважає за правильне тільки те, що як наслідок випливає з уже доведеного.

Галілео Галілей

Вивчення геометрії наближає до безсмертних богів.

Платон



СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Платон і Аристотель про зміст геометрії

Не поділяючи думки Геродота про «практичне» походження геометрії, Аристотель був ще категоричнішим у визначенні завдань цієї науки. У цьому він повністю солідаризувався зі своїм знаменитим учителем Платоном, який завданням науки вважав досягнення вищих істин, не зв'язаних з життєвими проблемами.

Для науки про вимірювання землі Аристотель запропонував іншу назву — «геодезія» (дослівно: «поділ, межування землі»). З цією назвою, хоч і з дещо ширшими функціями, ця наука існує й досі. Натомість геометрія здобула статус суто теоретичної науки, яка при потребі може застосовуватися і для практичних потреб, наприклад, в тій самій геодезії. Але основним її призначенням було пізнання першооснов буття, а також розвиток самого мислення. Адже мислення вважалося тоді єдиним знаряддям для досягнення достовірного знання.

Аристотель був найвидатнішим учнем (і товаришем) Платона. Але потім радикально розійшовся з ним у поглядах на основні філософські проблеми буття і пізнання, нібито сказавши при цьому крилату фразу: «Платон — мій друг, але істина — дорожча».

Платон учив, що оскільки у навколишньому світі, який ми сприймаємо за допомогою органів чуттів, усе безперервно змінюється (як влучно сказав Геракліт, «і в одну річку не можна увійти двічі»), то вивчати такий світ не має сенсу. Вивчати ж потрібно те, що є незмінним. За Платоном, це — світ ідей, тобто ідеальних образів і форм. Цей світ існує окремо від матеріального світу. Останній же є лише недосконалим і мінливим утіленням ідеального світу, доступним людським органам чуттів. Пізнання ж ідеального світу можливе лише за допомогою найдосконалішого інструменту — мислення. Будь-які спостереження за реальним світом мають сенс лише настільки, наскільки вони сприяють прагненню розгледіти обриси цього ідеального світу.

Що є кращого? — Вивчивши минуле, звести його з теперішнім.

Козьма Прутков



Погруддя Платона.
(Національний парк «Софіївка»,
м. Умань, Черкаська обл.)

Погоджуючись із Платоном у тому, що ідеальні форми мусять існувати, Аристотель, проте, не відривав їх від матерії, а вважав, що матерія містить їх у собі — як насіння містить у собі ідею рослини, яка з нього проростає. Матерія, за Аристотелем, не безформна маса, а напружена субстанція, в якій постійно втілюються (проростають) нові форми. Саме в цьому й полягала основна причина «ідейної» суперечки між учитеlem Платоном і учнем Аристотелем.

Суперечка ця, однак, жодним чином не ставила під сумнів значення геометрії — і як науки про ідеальні просторові форми, і як засобу для розвитку логічного мислення. Переповідають, що над входом до своєї школи мудрості в Афінах — Академії — Платон звелів викарбувати лозунг: «Не заходь, не обізнаний з геометрією». А одному з бажаючих вступити до Академії він сказав: «Іди геть! Ти не знаєш геометрії, отже, в тебе немає знаряддя для вивчення філософії».

Ні Платон, ні Аристотель самі активно математикою не займалися. Проте їхній авторитет незмірно сприяв підтримці постійного інтересу до математичних проблем. Крім того, вони справили значний вплив і на саму методологію математичних досліджень.

Саме в Академії Платона виникла ідея створення систематичного курсу геометрії, тобто курсу, побудованого на аксіоматичній основі за чіткою логічною схемою, в якій кожне наступне твердження виводиться з попередніх логічним шляхом. Навіть сам термін «аксіома» вперше зустрічаємо в Аристотеля. Філософ уживав його в значенні «самоочевидної, незаперечної істини». Сукупність таких істин покладалася в основу науки. Все інше повинно виводитися з аксіом суто логічним шляхом. Цю ідею блискуче реалізував Евклід, який замолоду слухав Аристотеля, а, може, — і Платона.

Аристотель також звернув увагу на необхідність прийняття лише конструктивних означень. Стосовно геометрії це означало, що з прийняттям кожного нового описового означення повинні вказуватися й конкретні побудови (конструкції), які б ілюстрували те, що фігури чи відношення, які вводяться цим означенням, насправді існують. Цього правила безза-



Постаті Платона й Аристотеля посідали центральне місце в культурі античного світу. Так їх зобразив і Рафаель на знаменитій фресці «Афінська школа» (див. форзац) — у товаристві численних учених і мудреців, серед яких на передньому плані і знамениті математики: Піфагор (зліва, з книгою на коліні) та Архімед (справа, схилювся над кресленням). На небо, апелюючи таким способом до ідей, вказує Платон. У руці в нього книга — діалог «Тімей», в якому він докладно виклав своє вчення. На землю показує Аристотель, тримаючи у лівій руці том «Етики».

Так і крокують вони разом через віки, сперечаючись і доповнюючи один одного, символізуючи єдність небесного і земного в науці.

стережно дотримувався й Евклід. За цим принципом викладено матеріал і в нашому підручнику.

Як уже згадувалося, Платону належить і сам термін «стереометрія». Його утворено від грецьких слів «стереос» («тілесний», «просторовий») і «метрео» («вимірюю»). Термін «планіметрія» з'явився значно пізніше — за доби Середньовіччя, і був утворений від латинського слова *planum*, тобто «площина».

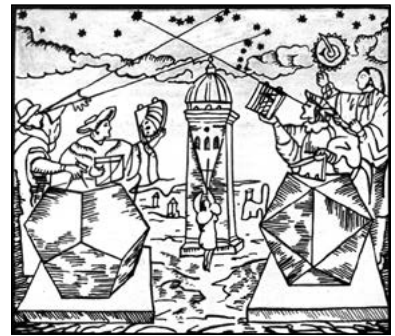
Протиставлення геометрії та стереометрії відповідало основній рисі філософського вчення Платона, в якому обґрунтовувалася принципова відмінність «нижнього» і «вищого» світів. Проте геометрії цих світів, тобто планіметрія і стереометрія, виявилися надивовижу взаємопов'язаними. Загалом можна стверджувати: стереометрія значною мірою ґрунтується на планіметрії. Цей факт фіксується в одній із аксіом стереометрії у цьому підручнику.

Планіметрію інколи напівжартома називають «геометрією мотузки», а стереометрію — «геометрією світлових променів». Йдеться про те, що фізичними прообразами прямих у планіметрії виступають туго напнуті мотузки, послугуючись якими колись проводили вимірювання на місцевості, а в стереометрії — світлові промені. Винятковою особливістю нашого світу є те, що «геометрія мотузки» узгоджується з «геометрією світлових променів». Відтворена тут ілюстрація з російського математичного рукопису XVII ст. досить красномовно відображає цю обставину.

Такий глибинний внутрішній зв'язок між стереометрією і планіметрією проявляється і в самій методології обґрунтування стереометричних фактів, яка істотно спирається на планіметрію. Дуже вдалою ілюстрацією цієї методології може слугувати гравюра М. Ешера «Рептилії», яка служить заставкою до цього розділу. Плоскі ящірки з іншого знаменитого рисунка цього ж художника, залишеного на столі серед інших предметів — книг, кутника, пляшки, моделі багатогранника (додекаедра), поступово виходять з площини, стають об'ємними, повзуть по столі і, зробивши коло, знову поринають у свій двовимірний світ. Для з'ясування й обґрунтування стереометричних фактів дуже часто доводиться «занурюватися» у планіметрію.

Геометрія залишається основним джерелом розвитку багатой і плідної математичної інтуїції, яка, у свою чергу, надає ще більш творчі сили математикам. Більшість математиків мислить геометричними схемами, навіть якщо і сліду не лишається від цього «будівельного» риштування, коли вони подають остаточний результат міркувань в аналітичній формі. Вислів Платона, що «геометрія наближає розум до істини», все це залишається в силі.

Морріс Клайн



Алегоричне зображення геометрії.

Ілюстрація з російського математичного рукопису XVII ст.