

О.М. Афанасьєва
Я.С. Бродський
О.Л. Павлов
А.К. Сліпенко

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Підручник для закладів
загальної середньої освіти

Профільний рівень



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512(075.3)
А94

Афанасьєва О.М.
А94 Геометрія : підручник для 10 кл. закладів загальн. серед. освіти : профільний рівень. / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2018. — 464 с. : іл.

ISBN 978-966-10-5438-6

Пропонований підручник відповідає чинній програмі з математики для 10-го класу профільного рівня загальноосвітньої школи. Він спрямований на забезпечення готовності учнів широко і свідомо застосовувати геометрію при описанні об'єктів навколишнього світу. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

Для учнів класів профільного рівня і вчителів закладів загальної середньої освіти.

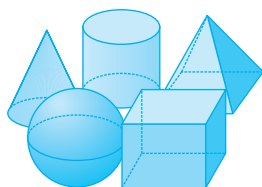
УДК 512(075.3)

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу авторів чи видавництва*

*Підручник доповнено електронним додатком, який можна відкрити за посиланням:
<http://www.bohdan-digital.com/edu10/>*

ISBN 978-966-10-5438-6

© Афанасьєва О.М., Бродський Я.С.,
Павлов О.Л., Сліпенко А.К., 2018
© Навчальна книга – Богдан, 2018



! Звернення до учнівства

Дорогий юний друже!

Навчання у старших класах пов'язане з розв'язанням надскладної задачі: вибором професії, сфери майбутньої діяльності, підготовкою до навчання за обраним напрямом. Оволодіння математикою старшої школи допоможе вам у її розв'язанні. Математика здатна допомогти, як кажуть, і розум у порядок привести, і світ пізнати.

Загальновизнано, що геометрія є одним із найкращих засобів розвитку розумових здібностей, вміння логічно міркувати і робити правильні висновки. Крім того, геометрія також допомагає орієнтуватись у навколишньому середовищі. Особливе значення має ця наука для майбутніх інженерів, техніків, науковців, кваліфікованих робітників, бо хоча й на уроках геометрії йдеться здебільшого про «абстрактні» об'єкти, цілком реальними і застосовними є властивості цих об'єктів для опису (моделювання) предметів і явищ навколишнього світу.

Вивчаючи планіметрію, ви, мабуть, звернули увагу на певну обмеженість її моделюючих можливостей. Вона допомагає, наприклад, обчислити площу поверхні стін кімнати, але при визначенні місткості посудини зарадити вже не зможе. Річ у тім, що посудина краще моделюється **просторовою** геометричною фігурою. Саме властивості просторових фігур вивчаються в курсі **стереометрії**, одному з розділів геометрії.

Перед вами підручник стереометрії для 10 класу. Його головне призначення полягає у наданні вам допомоги в оволодінні геометрією простору, її застосуваннями до опису просторових форм і відношень між ними, розвитку просторового і логічного мислень.

Підручник складається зі вступу і трьох розділів.

Вступ дає уявлення про розвиток геометрії, її роль у пізнанні навколишнього світу.

Розділи підручника поділено на параграфи. Запис 2.4 означає другий розділ, параграф 4.

Перший розділ присвячено повторенню і систематизації понять, фактів і методів планіметрії, які ви вивчали у 7 – 9 класів. Тому викладення навчального матеріалу в ньому суттєво відрізняється від наступних розділів.

Викладення навчального матеріалу у кожному параграфі двох наступних розділів поділено на три частини. У першій частині (її позначено літерою **Б**) викладаються головні поняття і факти, іноді без формальних обґрунтувань, за аналогією, на основі спостережень, шляхом узагальнення тощо. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного. Тому природним є і його символічне позначення – перша сходинка засвоєння теми.

У другій частині (її позначено літерою **О**) забезпечується перехід на другу сходинку засвоєння теми: завершується обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення і поглиблення. Матеріал, викладений у перших двох частинах, в головному забезпечує оволодіння геометрією відповідно до вимог програми на профільному рівні навчання. Третя частина параграфа (її позначено літерою **П**) завершує розширення і поглиблення навчального матеріалу з геометрії.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв’язанням задач і прикладів. Як правило, твердження, що містяться у задачах, мають характер теорем і застосовуються при розв’язанні задач, які пропонуються учням для самостійної роботи. Приклади мають ілюстративний характер, надають зразки розв’язання типових задач. Початок і кінець доведень теорем, а також розв’язань прикладів і задач позначено знаками $\square$ і $\blacksquare$.

Означення основних понять виділено синім кольором, формулювання тверджень — напівжирним шрифтом. Важливі зауваження відзначено знаком оклику.

Кожна з указаних частин навчального матеріалу завершується запитаннями для самоконтролю і завданнями певного характеру: вправами на рисунках, графічними вправами і дослідницькими завданнями. Вони мають забезпечити свідоме засвоєння понять і фактів у їхньому взаємозв’язку, підготувати до розв’язання задач.



Наприкінці кожного параграфа наведено контрольні запитання і задачі, які мають три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*». Система задач до кожного параграфа розподілена за допомогою спеціального знака на групи за різними ознаками: характером вимог до задач, видом фігур тощо.

Більшість задач має сюжетний характер, тобто для однієї фігури чи геометричної конструкції формулюється низка завдань різного рівня складності, частина яких є незалежною від інших. У сукупності ці завдання є певним дослідженням конструкцій. Завершується система задач параграфа вправами для повторення, що мають за мету забезпечити готовність до опанування наступним матеріалом.

Наприкінці кожного параграфа стисло викладено його основний зміст у вигляді інформаційних схем.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю, задач для повторення, тесту для діагностики засвоєння теми, зразка тематичної контрольної роботи, таблиць для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу. Таку саму структуру має матеріал для підготовки до підсумкового оцінювання з геометрії за 10 клас.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Читання книги не є легкою справою. Деякі фрагменти доведень залишені для самостійного опрацювання. Не минайте їх!

Щиро бажаємо успіхів!

Колектив авторів

Умовні позначення

Позначення для орієнтування



— три сходинки засвоєння навчального матеріалу



— зверніть увагу



— початок розв'язання задачі, доведення теореми



— кінець розв'язання задачі, доведення теореми



° — задачі першого рівня складності

* — задачі третього рівня складності



— запитання для самоконтролю



— контрольні запитання



— вправи на рисунках



— графічні вправи



— запитання для осмислення, завдання для роздумів



— межі для різних типів задач



— вправи для повторення



— завдання для дослідження

Математичні позначення

α, ABC — позначення площин

A, B, A_i — позначення точок

a, b, a_p, AB — позначення прямих

$ABCD$ — позначення двогранного кута

$\angle A$ — позначення кута з вершиною A

$M \in a$ — точка M належить прямій a

$M \notin a$ — точка M не належить прямій a

$l \subset \alpha$ — пряма l належить площині α

$l \not\subset \alpha$ — пряма l не належить площині α

$a \cap b = M$ — прямі a і b перетинаються в точці M

$\parallel$ — паралельність (прямих, прямої і площини, площин)

$\perp$ — перпендикулярність (прямих, прямої і площини, площин)

$\dot{\perp}$ — мимобіжність прямих

$\sim$ — подібність фігур

$=$ — рівність фігур, математичних виразів

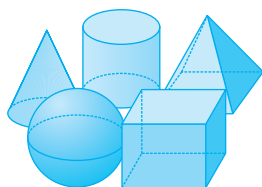
$S(D)$ — площа фігури D

$\exists$ — існує об'єкт

$\exists!$ — існує єдиний об'єкт

$\Rightarrow$ — знак логічного слідування (якщо ..., то ...)

$\Leftrightarrow$ — рівносильність (тоді і тільки тоді)



! Вступ

Ви вже знайомі з одним із розділів геометрії — планіметрією. У ньому вивчаються властивості плоских геометричних фігур і відношень між ними. Але ми живемо у просторі, в якому, на відміну від площини, три виміри. Для його сприйняття і дослідження, для розв'язання життєвих задач знань планіметрії недостатньо. Знайомство з геометрією простору вкрай необхідно людині для її загального розвитку і професійного становлення.

Насправді знайомство з геометрією простору починається з дитинства, і протягом життя людина набуває певних знань цієї геометрії. Однак ці знання носять емпіричний характер, вони дещо хаотичні і застосовні лише для орієнтування у просторі, при розв'язанні найпростіших практичних задач. Систематизувати ваші знання і просторові уявлення, розширити і поглибити їх, надати їм наукового змісту, підготувати до застосування геометрії у різних сферах діяльності — ось головні завдання цього підручника і науки, яку він представляє.

Геометрія простору — це математична наука про просторові геометричні фігури і відношення між ними, а також про їхні властивості. Називають її стереометрією.

Геометрія — грецьке γεωμετρία (*geometria*) — землевпорядкування (землеміряння), від γη (*ge*) або γῆα (*gea*) — земля і μέτρον (*metreo*) — міряю, вимірюю.



Планіметрія — від латинського *planit* — плоска поверхня, площа і грецького *μετρεω* — міряю, вимірюю.

Стереометрія — від грецьких *στερεος* (*stereos*) — просторовий і *μετρεω* — міряю, вимірюю.

Виникнувши з практики, постійно звертаючись до неї в процесі свого розвитку, геометрія стала однією з найважливіших математичних наук для опису навколишнього світу. Основні «діючі особи» в геометрії — геометричні фігури. Вони є абстракціями об'єктів реального світу, в яких відображається лише їх форма і розміри. Інакше кажучи, геометричні фігури є математичними моделями об'єктів навколишнього середовища. Так, наприклад, точку в просторі можна розглядати як математичну ідеалізацію реальних об'єктів — зірок на небі, сліду голки на папері, кінчика олівця тощо. Точка в геометрії не має звичних розмірів (довжини, ширини, висоти). Вона застосовується для моделювання різних фізичних тіл маленьких розмірів. Безумовно, маленьких відносно інших тіл (у деяких випадках футбольний м'яч можна вважати точкою, наприклад, на футбольному полі).

Один і той самий предмет може моделюватися різними фігурами в залежності від мети, якою ми при цьому керуємось. Наприклад, можна вважати, що кришка даного столу має форму прямокутного паралелепіпеда, якщо нам необхідно знайти її масу, користуючись густиною деревини. Але цю саму кришку можна уявляти у формі прямокутника, якщо вам необхідно придбати скатертину.

Геометричні фігури розрізняються за своїми властивостями, вони знаходяться у різних відношеннях між собою: належності, рівності, подібності, паралельності тощо.

Як і будь-яка наука, геометрія складається з понять і тверджень, в яких встановлюються зв'язки між поняттями. Нові математичні поняття визначають через уже відомі поняття, а твердження доводять на основі раніше доведених. При цьому неминуче виникає запитання: «А з чого ж починається побудова математичної теорії?». У III ст. до н. е. створено спеціальний метод розв'язання даної проблеми. Цей метод називають **аксіоматичним**. Його сутність полягає в тому, що деякі основні поняття вважають неозначуваними,

тобто такими, яким не даються означення. В той же час зміст цих понять відображають у твердженнях про ці поняття, які вважають істинними. Ці твердження називають **аксіомами**. За яких причин визнається істинність цих тверджень, врешті, несуттєво для побудови теорії, яку називають **аксіоматичною теорією**. Як правило, **«довіра» до аксіом викликана досвідом їх використання в практичній або науковій діяльності.**

Аксіома — від грецького αξίωμα (*axioma*) — буквально: *гідність, повага, авторитет* — у переносному розумінні означає те, яке внаслідок свого авторитету не підлягає сумніву, незаперечне.

Маючи вихідний набір первісних, неозначуваних понять, можна розпочинати побудову аксіоматичної теорії. Таким чином, аксіоматична побудова теорії здійснюється за такою схемою:

- ✓ перелічуються неозначувані поняття;
- ✓ формулюються аксіоми;
- ✓ визначаються нові поняття за допомогою неозначуваних і раніше означених;
- ✓ доводяться твердження на основі аксіом і раніше доведених тверджень.

Твердження, які доводять в аксіоматичній теорії, називають **теоремами**. На практиці для зручності для теорем використовують різні назви, які відображають сутність теореми або її роль: властивість, ознака, формула, лема, наслідок тощо.

Теорема — від грецького θεωρημα (*theorema*), від θεωρεω (*theoreo*) — *придивляюсь, спостерігаю* — твердження, правдивість якого перевіряють за допомогою логічних міркувань, що спираються на аксіоми або на раніше доведені твердження, або на ті і другі.

Корисно аксіоматичну побудову математичної теорії уявляти собі як деяку інтелектуальну гру, схожу, наприклад, з грою в шахи. Шахи як гра визначаються вибором дошки, складом фігур і правилами гри. При цьому жодного значення не мають розміри дошки, форма фігур, їхня назва, а тим більше, з чого вони зроблені. До речі, в шахи можна грати, фіксуючи ходи на папері або в пам'яті комп'ютера. Безглуздо говорити про означення пі-

шака чи короля самих по собі. Їхня сутність виявляється в діях по відношенню до інших фігур. Приблизно так само сутність неозначуваних понять в аксіоматичній теорії виявляється в аксіомах. Аксіоми теорії, як і правила гри, — це умовні погодження. Доцільність вибору тієї чи іншої аксіоми може бути підтверджена використанням аксіоматичної теорії у розв'язанні тих чи інших практичних задач.

У даному підручнику буде закладено фундамент для побудови стереометрії. У ньому розглядатимуться найпростіші геометричні фігури і конструкції. Особлива увага буде приділена прямим і площинам, які природно виникають при розгляді поверхонь геометричних тіл. У центрі уваги буде відношення паралельності і перпендикулярності прямих і площин. Звідси і назви розділів.

Зародження геометрії

Перш ніж розпочати засвоєння нового і завершального для середньої школи геометричного курсу, варто кинути узагальнюючий погляд на вивчений раніше матеріал, побачити і проаналізувати рушійні сили, які сприяли і сприяють розвитку геометричних наук, визначити місце геометрії у сучасному суспільстві.

Геометрію вважають однією з найдавніших, якщо не найдавнішою, з наук, створених людством. Її зародження пов'язане з необхідністю задовольнити нагальні потреби наших предків у вимірюваннях відстаней, розмірів, визначенні і порівнянні форм навколишніх об'єктів. У папірусах стародавніх єгиптян, які належать до II тисячоліття до н. е., чи у глиняних табличках давнього Вавилону вчені знаходять розв'язання побутових, економічних, архітектурно-будівельних задач, які потребують дуже серйозних геометричних знань. Тож даремно видатний грецький вчений Геродот (бл. 484 – 425 рр. до н. е.) вважав, що саме в Єгипті було започатковано геометрію, яка потім почала динамічно розвиватися в Греції.

Не заперечуючи ролі стародавнього Єгипту у відшукуванні та накопиченні численних фактів, які належать зараз до геометрії, і спираючись на дані історії, можна стверджувати, що геометрія як наука сформувалась у Греції. Процес створення геометрії під значним впливом сусіднього Єгипту тривав декілька століть. Грецькі вчені переосмислили основні поняття і факти геометрії, абстрагувались від конкретики, що дало змогу, з одного боку, зробити геометрію універсальним засобом дослідження навколишнього

світу, а з іншого — глибше вивчати фізичні об'єкти і відношення між ними. А головне — був уведений у геометрію **дедуктивний метод** її побудови, при якому виділяються базові поняття і факти, а решта фактів суто логічно виводяться, виходячи з основних.

Геометрія як дедуктивна наука

Найвидатнішим ученим, який сприяв становленню дедуктивної геометрії, давньогрецька історико-математична наука вважає Фалеса Мілетського (бл. 640 – 548 рр. до н. е.) — засновника і лідера знаменитої філософської школи. Йому належить відкриття і доведення багатьох теорем планіметрії, а також застосувань геометрії для розв'язування прикладних задач (зокрема, він вимірював висоту єгипетських пірамід).

У розвиток геометричних досліджень суттєвим є внесок піфгорійської та афінської наукових шкіл (VI – IV ст. до н. е.). Наприклад, Піфагор (близько 580 – 500 рр. до н. е.) довів теорему про суму кутів трикутника, відкрив той факт, що між сторонами квадрата і його діагоналлю не існує спільної міри та ін. Хоча один з найвидатніших представників афінської наукової школи Платон (427 – 347 рр. до н. е.) значного внеску в геометрію не зробив, але і він сам, і його учні сприяли її розвитку. На дверях Академії Платона був напис: «Нехай той, хто не знає геометрії, не входить сюди». Його учнем був також знаменитий Евклід (III ст. до н. е.).

Ім'я Евкліда є одним з найшанованіших у світовій науці, а його книгу «Начала» деколи називають математичною біблією. Ця книга пронесла через тисячоліття математичні знання наших великих предків, а аксіоматично-дедуктивний метод, реалізований у ній, став зразком для побудови всіх математичних наук — і не тільки для них.

Евкліда вважають одним із перших представників знаменитої александрійської наукової школи, яка існувала близько 700 років і до якої належали майже всі значні вчені того періоду: Архімед (бл. 287 – 212 рр. до н. е.), який мешкав у Сиракузах (Сицилія), Аполлоній Пергський (бл. 262 – 190 рр. до н. е.) з Малої Азії, Герон Александрійський (старший) (ймовірно, I ст.), Папп Александрійський (III ст.) і Менелай (I ст.), який проживав у Римі, і багато ін. Їхніми іменами названо теореми, задачі, методи, конструкції.

«Начала» Евкліда, їхнє значення для світової науки

Евклідові «Начала» складаються з 13 книг. Перша книга містить означення, аксіоми і постулати. За допомогою означень вводяться математичні поняття. Наприклад, за Евклідом, «точка є те, що не має частин», «куб є просторова фігура, що міститься між шістьма однаковими квадратами» і т. ін. Такі означення багато разів і безуспішно намагались удосконалити. У наш час первісні об'єкти вводяться без формальних означень, а їхній зміст розкривається за допомогою первісних тверджень — аксіом (у Евкліда йдеться про постулати і аксіоми). Аксіом у Евкліда дев'ять: «дві величини, які рівні тій самій величині, є рівними між собою», «ціле більше за частину» та ін. Постулатів у Евкліда п'ять. Вони обґрунтовують усі геометричні побудови й алгоритмічні операції. Наприклад, «через дві точки можна провести пряму», «з усякого центра довільним радіусом можна описати коло» та ін.

Ще однією характерною особливістю «Начал» є відсутність прикладної спрямованості матеріалу. Зрозуміло, що аксіоматичний метод давав змогу доводити нові і нові теореми, для яких були відсутні реальні застосування, бо ці результати не відповідали стану розвитку економіки, суспільства, науки. Книга Евкліда працювала на майбутнє. Засвоїти її і оцінити могла невелика група інтелектуалів, «аристократів духу». Це дало змогу Евклідові, за легендою, з гордістю сказати правителю країни, що в геометрії немає царської дороги.

А ще вважалось не гідним від занять математикою очікувати матеріальних вигод. Творці геометрії були справжніми лицарями науки. Щоб оцінити рівень їхніх досліджень, складність задач, які вони ставили перед собою, достатньо лише згадати три знамениті задачі на побудову:

- ✓ задачу про **трисекцію кута** (довільний кут поділити на три рівні частини);
- ✓ задачу про **квадратуру круга** (маючи круг із радіусом r , побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі круга);
- ✓ задачу про **подвоєння куба** (маючи куб з ребром a , побудувати куб із вдвічі більшим об'ємом).

Інструментарієм побудови є циркуль і лінійка.

Про складність цих задач говорить той факт, що їхнє повне розв'язання математики відшукали тільки в XIX ст., а саме — неможливо за допомогою циркуля та лінійки виконати такі побудови.

Післяєвклідів період розвитку грецької геометрії

Своїх вершин давньогрецька геометрія досягла у працях Архімеда та Аполлонія. Застосовуючи методи, які у XVII ст. привели до створення математичного аналізу, Архімед розв'язував задачі на екстремум, обчислював площі та об'єми фігур, обмежених кривими чи поверхнями складної форми, наприклад, площу параболічного сегмента, об'єм тіла обертання еліпса навколо осі симетрії та ін. Один із творців математичного аналізу Г. Лейбніц (1646 — 1716) писав, що вивчаючи праці Архімеда перестаєш дивуватись із успіхів сучасних математиків.

Не можуть не викликати захоплення результати Аполлонія та його книга «Конічні перерізи», якою суттєво скористалися математики при створенні аналітичної геометрії у XVII ст.

А ще слід підкреслити, що період пізньої античності характеризується поверненням інтересу до практичних застосувань геометрії. Йдеться, зокрема, про книгу Герона «Метрика», яка містить правила для точного і наближеного визначення площ і об'ємів, а також описання геодезичних інструментів.

Геометрія відігравала чільну роль серед інших математичних наук. Геометричною мовою викладались і геометричними методами доводились більшість результатів, які належать зараз до теорії чисел та алгебри.

Відродження європейської геометрії

Більша частина надбань грецької математики дійшла до нас через арабську культуру, яка зберегла кращі твори античних математиків і навіть у деяких напрямках розвинула їхні ідеї. Інтерес до математики у Європі пробуджується лише у XII — XVII ст., хоча нових результатів європейські вчені в цей період майже не отримували. Загальний рівень математичних знань був невисоким.

Нові, можна сказати революційні відкриття були зроблені у першій половині XVII ст., коли видатні французькі математики Р. Декарт (1596 — 1650) та П. Ферма (1601 — 1665) започаткували **аналітичну геометрію**. Йдеться про введення у звичайну «євклідову» геометрію алгебраїчних методів дослідження шляхом звернення до системи координат, характеристики точок площини за допомогою пар чисел, а слідом за цим — описання геометричних об'єктів за допомогою рівнянь чи інших алгебраїчних (аналітичних) співвідношень.

Значення результатів Декарта і Ферма не стільки в тім, що вони відкрили ефективний метод розв'язання геометричних задач, вони ввели в математику змінні величини і функції — основний об'єкт сучасної математики і основний засіб моделювання реальних процесів і явищ.

XVII століття деколи називають золотим для математики. Були відкриті нові методи, нові математичні науки (теорія чисел, теорія ймовірностей, диференціальне та інтегральне числення та ін.).

Суттєві зміни почали відбуватися і в геометрії. У цьому віці французьким математиком та інженером Ж. Дезаргом (1591 – 1661) були закладені основи **проективної і нарисної геометрії**. Плідними виявилися застосування математичного аналізу до дослідження кривих і поверхонь, які привели до створення **диференціальної геометрії**.

Перебудова геометрії у XIX ст.

Поряд з поглибленням і розширенням геометричних знань, які спостерігаються у XVII — XVIII ст., європейські математики стали переосмислювати основи евклідової геометрії. Зокрема, привертав до себе увагу п'ятий постулат Евкліда, зміст якого у тому, що в площині через точку, що лежить поза даною прямою, проходить тільки одна пряма, яка не перетинає дану (в Евкліда цей постулат сформульовано дещо по-іншому). Цей постулат, особливо у формулюванні Евкліда, є значно складніший від інших. Тому були зроблені численні спроби довести його як теорему на базі решти основних тверджень.

Зокрема, спроби довести цю теорему методом «від супротивного» ніяк не приводили до суперечності. Це викликало думку про можливість побудови неевклідової геометрії, отриманої з евклідової шляхом заміни п'ятого постулату новим: на площині через точку, що не лежить на даній прямій, проходять принаймні дві прямі, які не перетинають дану.

Історично першим реалізував цю ідею російський математик М. Лобачевський (1792 – 1856), а трохи пізніше і незалежно від нього угорець Я. Больяй (1802 – 1860).

Із суто формальних позицій евклідова геометрія і геометрія Лобачевського (як сукупності наслідків відповідних систем аксіом) цілком рівнозначні, хоча, звичайно, зміст багатьох теорем у цих геометріях різний (наприклад, у геометрії Евкліда сума кутів трикутника дорівнює 180° , а у геометрії Лобачевського вона мен-

ша за 180°). Однак сучасники сприймали геометрію Лобачевського як, може, й цікаву, але зовсім непридатну теорію, тому що вона ніякою мірою не відповідає реальному фізичному простору.

Заслуга М. Лобачевського в тому, що він глибше за інших спробував осмислити будову навколишнього «фізичного» простору, вірив, що його геометрія в космічних масштабах може моделювати цей простір, і навіть спробував це довести шляхом астрономічних вимірювань.

Якоюсь мірою передбачення М. Лобачевського виправдались, бо якщо і не сама його геометрія, але так звана геометрія просторів змінної кривини, яка виникла під очевидним впливом ідей Лобачевського, знайшла застосування у фізичній теорії відносності.

Про сучасний стан розвитку геометрії

У XIX ст. і потім у XX ст. ідеї і методи геометрії набули подальшого розвитку. До XIX ст. геометрія вивчала тривимірний евклідов простір. Точки цього простору можна ототожнити з трійками дійсних чисел (координатами точок). Тому цілком природно (з формальних позицій) є ідея побудови геометрій впорядкованих четвірок, п'ятірок, ..., n -нок (і навіть нескінченних послідовностей) дійсних чисел.

І такі геометрії у XIX — XX ст. були побудовані й набули широкого застосування. Звичайно, вони далекі від тієї наочності, яку ми маємо для евклідової геометрії, але їхні моделюючі можливості і для явищ фізичного світу, і для математичних об'єктів — величезні.

Звернемо увагу ще на одну цікаву і важливу геометричну науку — **топологию**, яку ще деколи називають геометрією гумових плівок. Як ми пам'ятаємо, геометрія виникла із задач, пов'язаних з вимірюванням. Власне кажучи, вимірювання у топології не відіграють важливої ролі, оскільки вона вивчає властивості математичних об'єктів, які не змінюються при неперервних деформаціях (як би ми не надували рятувальний круг, але на кулю він не перетвориться). Інакше кажучи, йдеться про вивчення топологією не кількісних, а якісних властивостей об'єктів.

Якщо дати загальну характеристику сучасного стану геометрії, то вона є провідною математичною наукою, яка продовжує розвиватись. Вона породила десятки цілком самостійних розділів математики, які створені на геометричних ідеях і продовжують ними керуватись. І, звичайно, геометрія продовжує успішно виконувати основне своє призначення — допомагати людині пізнати світ, в якому вона живе.

Для чого варто вивчати геометрію

Які ж висновки можна робити з того, що сказано раніше?

Геометрія зародилась як **наука для вирішення практичних проблем** кожної людини і людської спільноти в цілому. І надалі саме практичні задачі (у широкому розумінні цього слова) стимулювали найбільш значні зміни в її змісті, методах, завданнях.

Геометрія першою з наук взяла на озброєння дедуктивний метод побудови, коли її результати отримують як логічний наслідок основних, базових. Тому і зараз вивчення геометрії є одним з найкращих способів навчання правильно міркувати, робити логічні висновки, без чого неможлива творча праця людини в сучасному суспільстві.

Хоча в курсі геометрії вивчаються абстрактні конструкції і побудови, але вони правильно і точно характеризують просторові форми і відношення реального світу, що допомагає глибшому його сприйняттю.

І нарешті повернемося знову до практичних застосувань геометрії. Адже для переважної більшості людей геометрія може стати надійним помічником у розв'язанні повсякденних побутових і виробничих задач. В основі розв'язання таких задач лежить ідея математичного (геометричного) моделювання.

Застосування математики при розв'язанні практичних задач зводиться до їхнього перекладу на мову математики, розв'язання одержаної математичної задачі, тлумачення розв'язку.

Розглянемо задачу, яка ілюструє застосування методу математичного моделювання на практиці.

По один бік від шосе знаходяться два населених пункти. Де варто збудувати автобусну зупинку?

Розв'язання цієї задачі починається із з'ясування того, чим визначається вибір місця для побудови зупинки. Якщо немає ніяких обмежень, то природно шосе зобразити прямою l , населені пункти — точками A і B (рис. 1). Залишилось з'ясувати критерій, за яким вибирається місце для зупинки, яке будемо зображати точкою C на прямій l . Якщо не враховувати чисельності

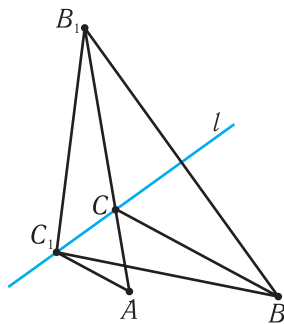


Рис. 1

населення в пунктах A і B , то зупинка повинна бути розміщеною так, щоб сума відстаней від пунктів A і B до зупинки C була найменшою. Тоді витрати часу на шлях до зупинки будуть найменшими. Таким чином, математичною моделлю даного завдання буде така математична задача.

Нехай дано дві точки A і B по один бік від прямої l . Знайти на прямій таку точку C , щоб сума відстаней від A до C і від B до C була найменшою.

Ця задача міститься у багатьох посібниках з геометрії. Вважають, що її автором є відомий математик античності Герон Александрійський. Тому цю задачу називають задачею Герона. Її розв'язання ґрунтується на ідеї симетрії.

Побудуємо точку B_1 , симетричну точці B відносно прямої l . З'єднаємо точки B_1 і A . Тоді точка перетину прямої AB_1 з прямою l буде шуканою. Зверніть увагу на те, що ця точка існує!

Дійсно, для довільної точки C_1 , яка відрізняється від C , має місце нерівність

$$AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1 > AB_1 = AC + CB_1 = AC + CB.$$

Для її доведення ми скористались властивостями симетрії, з яких випливають рівності $C_1B = C_1B_1$, $CB = CB_1$, а також нерівність трикутника. Отримана нерівність свідчить про те, що точка C є шуканою.

Нам залишилось з'ясувати, в якій мірі розв'язок математичної задачі, яка є моделлю даної задачі, є її розв'язком. Для цього слід уточнити декілька питань. Чи можна реалізувати розв'язок практично? Якщо відстані незначні, то за допомогою топографічних приладів це зробити неважко. У тому випадку, коли це неможливо зробити, потрібно продовжити дослідження математичної задачі і навчитись характеризувати точку C іншими засобами.

Але ще важливішими і складнішими є уточнення розв'язку в зв'язку з тим, що чисельність населення в пунктах A і B різна. Врахування цього фактора значно ускладнює задачу. Ще складнішою стає ситуація, якщо враховувати й інші природні умови, наприклад, коли навпростець іти неможливо. Врахування всіх факторів майже неможливе у загальному випадку. Але за конкретних умов математик завжди побудує математичну модель для цієї задачі і запропонує придатний варіант її розв'язання.

Щоб досліджувати математичні моделі, необхідно мати певні математичні знання і навички. Потреби у використанні матема-

тики для вивчення економічних, соціальних процесів і інших нетрадиційних сфер її застосувань вимагають розробки нових математичних ідей і методів. У цьому проявляється вплив практики на розвиток математики у теперішній час.

Розв'язування одержаної при моделюванні математичної задачі не завершує розв'язування даної, для якої була побудована математична модель. Одержані результати використовуються для прийняття якихось рішень чи прогнозування поведінки процесу, що вивчається. І повинна бути впевненість, що одержаними результатами можна скористатися для цих цілей. Іншими словами, необхідно мати впевненість у відповідності побудованої моделі явищу, яке вивчається (зрозуміло, що у тій мірі, наскільки цього вимагає дана задача).

Дослідження адекватності математичної моделі явищу, яке вивчається, виявлення того, наскільки близькі до реальних результати, одержані за допомогою математичної моделі, є найбільш складним і відповідальним етапом математичного моделювання. На цьому етапі в існуючу модель можуть вноситись зміни, які роблять її більш реальною, досконалою, хоча, як правило, і складнішою. Необхідність в уточненні математичних моделей визнається вимогами практики.

Підбиваючи підсумки, процес математичного моделювання можна зобразити як процес, що складається з трьох етапів:

вибір чи побудова математичної моделі для описування даної задачі;

дослідження побудованої моделі, тобто розв'язування математичної задачі;

змістовне тлумачення результатів дослідження, встановлення відповідності одержаного результату меті досліджень.

За необхідності уточнюється сама математична модель і результати, які з неї випливають.

Зрозуміло, що успіхи математичного моделювання засобами геометрії пов'язані з наявністю різноманітних математичних моделюючих засобів і знань про їхні властивості. Стереометрія відкриває у цьому напрямі нові й широкі горизонти.



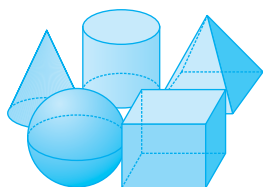
Розділ 1.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Ми починаємо вивчення геометрії простору, або стереометрії (від грецького « $\zeta\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\zeta$ » — просторовий, « $\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ » — вимірюю). Виникнувши з потреб практики, постійно розвиваючись, геометрія є однією з найважливіших математичних наук для описання навколишнього світу. Знання планіметрії, тобто геометрії площини, недостатньо для моделювання реальних об'єктів. Разом з тим, при вивченні стереометрії ми будемо спиратись на планіметрію, використовуючи її поняття, факти, методи. Так, метод побудови стереометрії — аксіоматичний — уже використовувався в планіметрії. Як і в планіметрії, основними об'єктами вивчення будуть геометричні фігури — ідеалізовані образи реальних фізичних об'єктів. Деякі з цих фігур (такі, як точка, пряма, трикутник тощо) вже вивчались у геометрії, хоча раніше вони розглядались на площині. З іншими «неплоскими» фігурами — такими, як куб, паралелепіпед, куля — ми зустрічались і в математиці, і в інших науках, і у практичній діяльності. Стереометрія вивчає властивості просторових фігур та відношення між ними.

У цьому розділі ми розглянемо варіанти взаємного розміщення прямих, прямої і площини, двох площин. Особлива увага буде приділена відношенню паралельності між прямими і площинами, яке має важливе теоретичне і прикладне значення.

Будуть також розглянуті основні правила та закони зображення фігур, які дають змогу розпізнати просторову фігуру і виявити її властивості за рисунком.

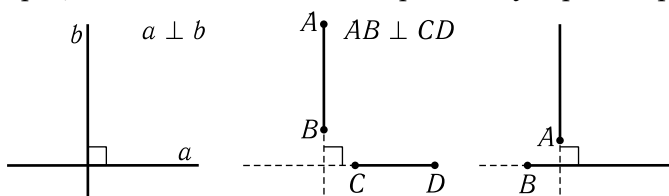


Готуємось до вивчення теми «Паралельність прямих і площин»

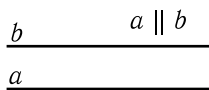
Таблиця 1

Паралельність і перпендикулярність прямих на площині

Дві прямі називаються **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки, промені — перпендикулярні, якщо вони належать перпендикулярним прямим.

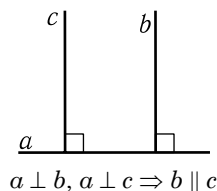


Дві прямі на площині, які не мають спільних точок, називаються **паралельними**. Відповідно і промені, відрізки називаються паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямим.

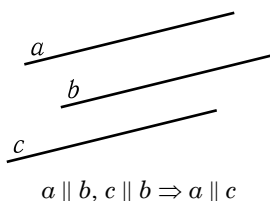


Ознаки паралельності прямих

Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні між собою.



Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.



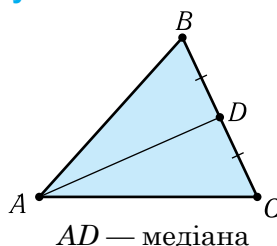
Таблиця 2

Трикутник, його елементи і види

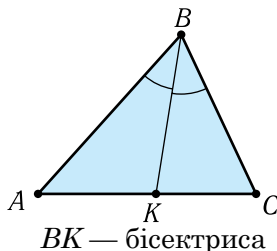
Трикутником називається частина площини, обмежена трьома відрізками, які з'єднують три точки площини, що не лежать на одній прямій.

Найважливіші відрізки трикутника

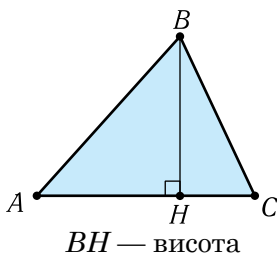
Медіана трикутника — відрізок, який з'єднує вершину трикутника із серединою протилежної сторони.



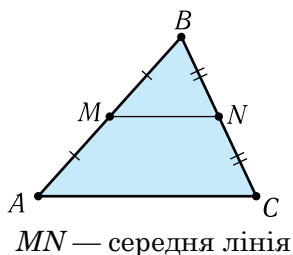
Бісектриса трикутника — відрізок бісектриси кута (променя, що виходить з вершини кута і поділяє його навпіл) трикутника, який з'єднує вершину трикутника з точкою на протилежній стороні трикутника.



Висота трикутника — перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить його протилежну сторону.



Середня лінія трикутника — відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника.



Рівність трикутників

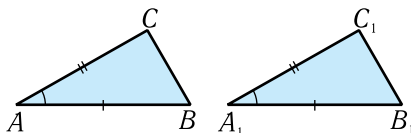
Трикутники називаються рівними між собою, якщо їх можна сумістити переміщенням (рухом).

Позначається рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ так:

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1.$$

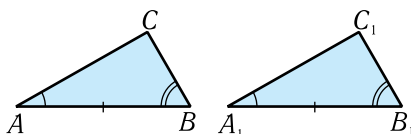
Ознаки рівності трикутників

1. Якщо дві сторони і кут, що лежить між ними, одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту, що лежить між ними, другого трикутника, то такі трикутники рівні.



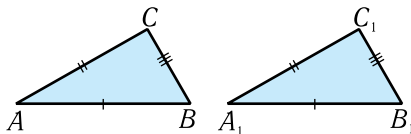
$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

2. Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.



$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

3. Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.



$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Таблиця 4

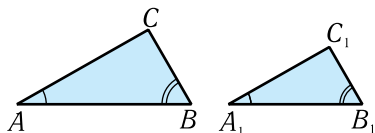
Подібність трикутників

Два трикутники називаються подібними, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Позначається подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ так:
 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

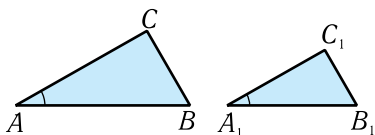
Ознаки подібності трикутників

1. Якщо два кути одного трикутника рівні двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.



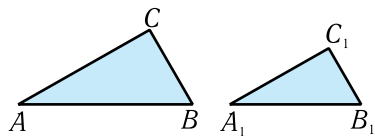
$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

2. Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути між ними рівні, то такі трикутники подібні.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

3. Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.

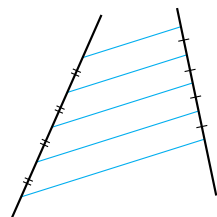


$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Пропорційні відрізки

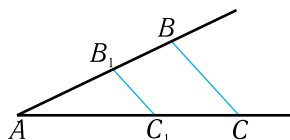
Теорема Фалеса.

Якщо на одній із двох прямих відкласти послідовно декілька рівних відрізків і через їхні кінці провести паралельні прямі, що перетинають другу пряму, то вони відтинають на другій прямій рівні між собою відрізки.



Теорема про пропорційні відрізки.

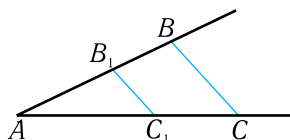
Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки.



$$BC \parallel B_1C_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{AB_1}{B_1B}$$

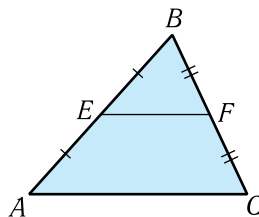
Теорема, обернена до теореми про пропорційні відрізки.

Якщо прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки, то ці прямі — паралельні.



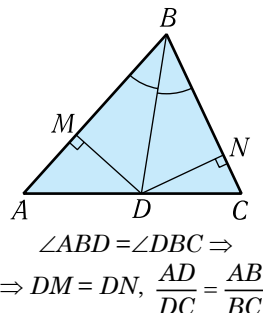
$$\frac{AC_1}{C_1C} = \frac{AB_1}{B_1B} \Rightarrow BC \parallel B_1C_1$$

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін, а її довжина дорівнює половині довжини цієї сторони.

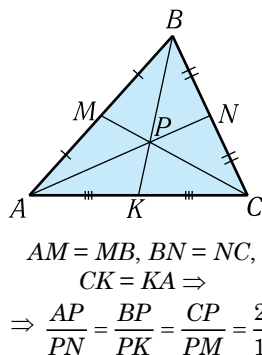


$$\begin{aligned} AE &= \frac{1}{2} AB, CF = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \\ \Rightarrow EF &\parallel AC, EF = \frac{1}{2} AC \end{aligned}$$

Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам, а її точки рівновіддалені від сторін кута.



Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка поділяє кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.



Таблиця 6

Рівнобедрений трикутник

Трикутник називається рівнобедреним, якщо він має дві рівні сторони. Ці сторони називаються бічними, їхня спільна вершина — вершиною рівнобедреного трикутника, третя сторона — його основою.

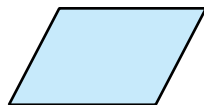
Властивості

1. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні між собою.
2. Медіана, бісектриса, висота, проведені з вершини рівнобедреного трикутника, збігаються.
3. Бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника рівні між собою.
4. Медіани, проведені до рівних сторін рівнобедреного трикутника, рівні між собою.
5. Висоти, проведені до рівних сторін рівнобедреного трикутника, рівні між собою.

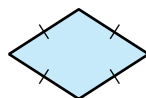
Геометрія чотирикутників

Означення

Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого паралельні.



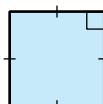
Якщо в паралелограмі рівні суміжні сторони, то він називається **ромбом**.



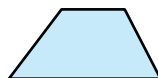
Паралелограм з прямими кутами називається **прямокутником**.



Прямокутник з рівними сторонами називається **квадратом**.

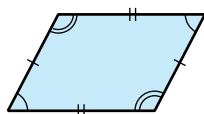


Трапецією називають чотирикутник, у якого тільки дві сторони (основи) є паралельними. Інші дві сторони називають бічними. Відрізок, що з'єднує середини бічних сторін, називають **середньою лінією** трапеції.

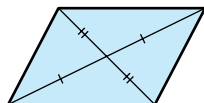


Властивості

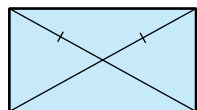
У паралелограма протилежні сторони рівні між собою, як рівними є і протилежні кути.



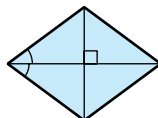
Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.



Діагоналі прямокутника рівні між собою.

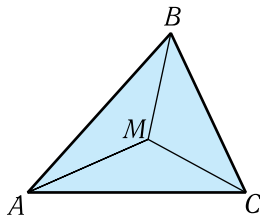
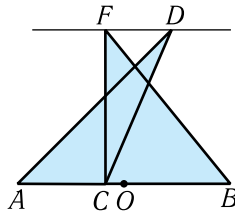
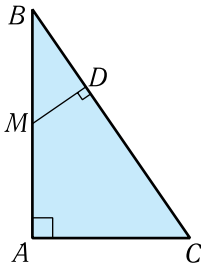


Діагоналі ромба — перпендикулярні. Вони є бісектрисами кутів ромба.



Тест для діагностики готовності до вивчення стереометрії

- Куті трикутника відносяться, як $1 : 2 : 3$. Цей трикутник ...
А. гострокутний; **Б.** тупокутний;
В. прямокутний; **Г.** може бути будь-яким.
- Довжини сторін трикутника виражаються різними цілими числами: одна сторона дорівнює 5 м, друга — 4 м. Довжина третьої сторони не може дорівнювати ...
А. 2 м; **Б.** 7 м; **В.** 8 м; **Г.** 9 м.
- З однієї точки, яка розташована поза прямою, проведено до цієї прямої перпендикуляр довжиною 6 см і похилу довжиною 10 см. Довжина проекції похилої на пряму дорівнює ...
А. 4 см; **Б.** $\sqrt{136}$ см; **В.** 8 см;
Г. величині, яка відрізняється від наведених.
- У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60° , а катет, що прилягає до нього, дорівнює 12 см. Гіпотенуза дорівнює ...
А. $12\sqrt{3}$ см; **Б.** 18 см; **В.** $18\sqrt{3}$ см; **Г.** 24 см.
- У прямокутному трикутнику ABC ($\angle A = 90^\circ$) через середину M катета AB проведено перпендикуляр MD до гіпотенузи BC , $AB = 12$ см, $BD = 4$ см. Гіпотенуза BC дорівнює ...
А. 18 см;
Б. 16 см;
В. 24 см;
Г. 36 см.
- Точка O — середина відрізка AB , $FD \parallel AB$. Порівняйте площі трикутників ADC та FCB , які дорівнюють S та S_1 відповідно.
А. $S < S_1$.
Б. $S = S_1$.
В. $S > S_1$.
Г. Порівняти неможливо.
- У трикутнику ABC кут A дорівнює 40° , кут B дорівнює 70° , M — точка перетину бісектрис. Кут AMB дорівнює ...
А. 30° ; **Б.** 125° ;
В. 105° ; **Г.** 70° .



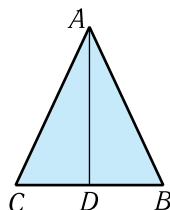


8. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона дорівнюють, відповідно, 12 см і 10 см. Висота, яка опущена на його основу, дорівнює ...

А. 6 см; Б. 13 см; В. $\sqrt{119}$ см; Г. 8 см.

9. Медіана AD рівнобедреного трикутника ABC з основою BC дорівнює 6 см, а периметр трикутника ABD дорівнює 27 см. Периметр трикутника ABC дорівнює ...

А. 54 см;
Б. 66 см;
В. 42 см;
Г. 30 см.

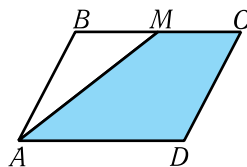


10. Кут між висотами паралелограма дорівнює 25° . Кути паралелограма відповідно дорівнюють ...

А. 25° і 155° ; Б. 50° і 130° ;
В. 65° і 115° ; Г. 40° і 140° .

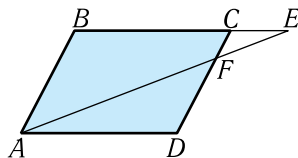
11. Площа паралелограма дорівнює S , $MB = MC$. Чому дорівнює площа заштрибованої фігури?

А. $\frac{2}{3}S$. Б. $\frac{3}{4}S$.
В. $\frac{7}{8}S$. Г. $\frac{5}{6}S$.



12. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, $AD = 12$ см, $CE = 4$ см. Відношення площ трикутників ABE та CFE дорівнює ...

А. 4 : 1; Б. 8 : 1;
В. 64 : 1; Г. 16 : 1.

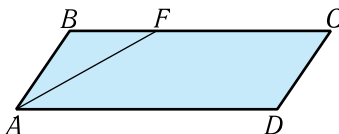


13. Бісектриса AF кута A в паралелограмі $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки 7 см і 14 см (рахуючи від вершини B). Периметр паралелограма дорівнює ...

А. 56 см; Б. 42 см; В. 28 см; Г. 70 см.

14. Два рівних відрізки точкою перетину поділяються навпіл. Їхні кінці послідовно з'єднали. Отриманий чотирикутник є ...

А. трапецією; Б. квадратом;
В. ромбом; Г. прямокутником.



15. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 5 см і 17 см, а більша бічна сторона — 13 см. Висота трапеції дорівнює ...
А. 12 см; Б. 11 см; В. 5 см; Г. 8 см.
16. Через точку даного кола проведено дві хорди, кожна з яких дорівнює радіусу. Кут між ними дорівнює ...
А. 150°; Б. 120°; В. 135°; Г. 60°.
17. Через точку, яка лежить зовні кола, проведені до нього дві взаємно перпендикулярні дотичні. Радіус кола дорівнює 10 см. Довжина відрізків кожної дотичної від даної точки до точки дотику дорівнює ...
А. 10 см; Б. 5 см; В. $\frac{10}{\sqrt{2}}$ см;
Г. величині, яка відрізняється від наведених.
18. Визначте взаємне розміщення двох кіл, радіуси яких дорівнюють, відповідно, 4 см і 6 см, а центри віддалені один від одного на 8 см.
А. Одне знаходиться всередині другого.
Б. Перетинаються у двох точках.
В. Одне знаходиться зовні другого.
Г. Дотикаються одне до одного.
19. У колі провели хорду довжиною 8 см, яка віддалена від центра на 3 см. Діаметр кола дорівнює ...
А. 5 см; Б. 12 см; В. 10 см;
Г. числу, яке відрізняється від наведених.
20. Найбільша і найменша відстані від точки, що розміщена всередині кола, до точок кола дорівнюють 10 см та 4 см відповідно. Радіус кола дорівнює ...
А. 3 см; Б. 7 см; В. 14 см; Г. 6 см.
21. Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін трикутника, є точкою перетину ...
А. висот трикутника; Б. медіан трикутника;
В. бісектрис трикутника;
Г. серединних перпендикулярів до сторін трикутника.
22. Скільки кіл можна провести через три дані точки?
А. Один. Б. Два. В. Чотири.
Г. Відповідь відрізняється від наведених.
23. Чому дорівнює внутрішній діаметр труби, якщо її зовнішній діаметр дорівнює 100 мм, а товщина стінки — 5 мм?
А. 95 мм. Б. 90 мм. В. 80 мм. Г. 97,5 мм.

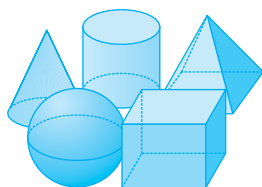


24. Середини сторін опуклого чотирикутника послідовно з'єднали. Отриманий чотирикутник є ...
А. паралелограмом; Б. прямокутником;
В. ромбом; Г. трапецією.
25. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника можуть бути пропорційні числам ...
А. 1 і 2; Б. 1 і 3; В. 1 і 4; Г. 3 і 5.

Зразок контрольної роботи

Дано рівнобедрений трикутник ABC , $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см.
Знайдіть:

- а) висоти трикутника;
- б) медіани трикутника;
- в) радіус кола, вписаного в трикутник, і радіус кола, описаного навколо нього;
- г) відстань між центрами вписаного й описаного кіл;
- г*) радіус кола, побудованого на основі трикутника, як на хорді, і радіус кола, що дотикається до бічних сторін трикутника;
- д) відношення, в якому центр вписаного кола поділяє бісектрису кута при основі;
- е) довжину відрізка, кінці якого збігаються з основами висот, проведених до бічних сторін;
- е) довжину відрізка, кінці якого збігаються з точками перетину бісектрис кутів при основі з бічними сторонами трикутника;
- ж*) суму периметрів трьох трикутників, що відтинаються від даного трикутника трьома дотичними, проведеними до кола, вписаного в даний трикутник.



1.1. Основні поняття й аксіоми стереометрії

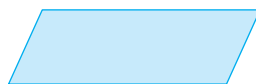
Розглядаються основні фігури стереометрії, відношення між ними, їхні властивості.



Щоб закласти фундамент для вивчення стереометрії, нам потрібно ввести основні (неозначувані) фігури стереометрії. Зміст відповідних їм понять виражатимуть властивості, які характеризують відношення між фігурами. Ці властивості приймають без доведення, тобто вони є **аксіомами** стереометрії. На основі аксіом ми зможемо довести нові твердження, які розвивають і доповнюють базові властивості фігур.

Основними неозначуваними фігурами стереометрії є **точка**, **пряма**, **площина**. Уявлення про них ви отримали, вивчаючи планіметрію, а зміст відповідних їм понять буде розкрито в аксіомах.

Насамперед домовимося стосовно позначень і зображень основних фігур. Точка і пряма зображаються й позначаються так само, як і в планіметрії. Площину частіше зображають за допомогою паралелограма (рис. 2, а), бо саме так виглядають найпоширеніші фізичні моделі площин: аркуш паперу, кришка стола, класна дошка та ін. Щоб підкреслити безмежність площини, її іноді зображають як ділянку «неправильної» форми (рис. 2, б). Площини позначають малими грецькими буквами: α , β , γ тощо.



а)



б)

Рис. 2

Поряд з основними неозначуваними поняттями стереометрії будемо вважати відомими з планіметрії такі поняття, як **відрізок** і його **довжина**, **промінь**, **кут** і його **величина** і т. ін., а також поняття, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин: **точка A належить прямій l і площині β , пряма l лежить у площині α , площина α проходить через точку A та ін.**

Відношення належності точок часто позначають знаком $\in$: $M \in l$; $M \in \alpha$, а відношення належності прямих — знаком $\subset$: $l \subset \alpha$.

Запис $M \notin \alpha$ означає, що точка M не належить площині α . Аналогічний зміст має запис $l \not\subset \alpha$.

Зображення фігур повинні враховувати їхнє взаємне розміщення. Наприклад, рис. 3 має уявляти те, що точка M не належить площині α , відрізок AB лежить у площині α , прямі a і b не лежать у цій площині, а пряма b перетинає площину α . Частину прямої b на рис. 3, закритої зображенням площини α , позначено штриховою лінією.

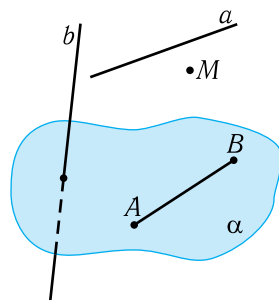


Рис. 3

Уся сукупність точок, що розглядаються у стереометрії, утворює **простір**. Будь-яку частину простору, тобто деяку сукупність його точок, називають **фігурою**.

Фігура — від латинського figura — образ, вигляд.

Фігура називається **плоскою**, якщо всі її точки розміщені в одній площині. З багатьма плоскими фігурами ви вже ознайомилися, вивчаючи планіметрію. Деякі неплоскі фігури — куб, куля, циліндр — також відомі вам.

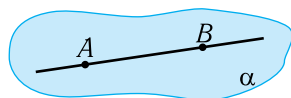
Якщо різні фігури мають спільні точки, то кажуть, що вони **перетинаються**. Тому, наприклад, вираз «площини перетинаються» означає, що у цих площин є спільні точки. Перетин, тобто спільну частину фігур, позначають знаком $\cap$: $l \cap \alpha$, $\alpha \cap \beta$.



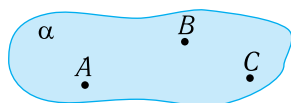
Будемо виходити з того, що простір у стереометрії містить нескінченну кількість площин. Тобто за межами кожної площини існує нескінченна кількість площин, а разом з цим — і точок, і прямих.

Розглянемо основні властивості, які характеризують неозначуване поняття площини і його зв'язки з іншими основними поняттями.

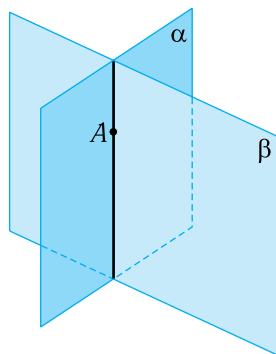
C_1 . Якщо пряма проходить через дві точки даної площини, то вона повністю лежить у цій площині.



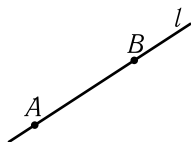
C_2 . Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.



C_3 . Якщо дві різні площини мають спільну точку, то їхнім перетином є пряма, що проходить через цю точку.



C_4 . Через дві довільні точки простору можна провести одну і тільки одну пряму.



Ці властивості, з урахуванням зроблених вище припущень, і візьмемо за систему аксіом нашого курсу стереометрії.

Зміст аксіом добре узгоджується з властивостями фізичних об'єктів і величин, які моделюються за допомогою основних геометричних понять. Справді, спробуйте притиснути до стола кінці добре натягнутої нитки і побачите, що вона щільно прилягає до поверхні стола, зливається з нею. Саме таку властивість моделює аксіома C_1 .

На трьох ніжках стіл стоїть, не хитаючись, навіть якщо вони мають різну висоту (звичайно, висоти ніжок повинні незначно відрізнятися за довжиною). Стійкість такого стола пояснюється тим, що кінці трьох його ніжок завжди розміщуються у площині



підлоги і навіть визначають її (аксіома C_2). Натомість стіл з чотирма ніжками іноді може хитатися. Аксіома C_2 вказує на один із способів задання площини. Зрозуміло, що площину однозначно визначають пряма і точка, яка лежить поза цією прямою, а також дві прямі, що перетинаються. Обґрунтування цих тверджень буде наведено далі. Рівносильність указаних способів задання площин природна: маючи три точки, що не лежать на одній прямій, можна побудувати перетинні прямі (навіть три пари перетинних прямих), дві перетинні прямі дозволяють вибрати три точки, що не лежать на одній прямій, і т. д.

Нас оточують численні прояви аксіоми C_3 : по прямій перетинається багато плоских об'єктів (стіни кімнати, деталі ящика тощо).

Легко знайти і фізичні аналоги аксіоми C_4 . Адже, наприклад, дві натягнуті нитки зливаються, якщо їхні кінці співпадають.

Вивчаючи стереометрію, широко використовуватимемо відповідність між об'єктами реального світу, відношеннями між ними та їхніми геометричними образами і відношеннями між ними. Ця відповідність буде слугувати не тільки ілюстрацією геометричних понять і фактів, а навіть і неформальним обґрунтуванням їхньої змістовності. При цьому слід мати на увазі, що строгі доведення тверджень існують і при певних зусиллях можуть бути наведені.

Відмітимо також, що стереометрія має багато аналогій у планіметрії. Зокрема, подібно до того, як пряма на площині розбиває її на дві півплощини,



простір розбивається кожною площиною на два півпростори, причому точки A, B належать одному півпростору тоді і лише тоді, коли відрізок AB не перетинає дану площину.

Вважатимемо також, що на кожній площині простору можна користуватись відомими поняттями і фактами планіметрії.

Поняття точки, прямої, площини, відрізка тощо належать до основних понять у стереометрії, бо з них починається її побудова. Але ж головною метою стереометрії є вивчення суто просторових фігур. Тому, щоб зробити побудову стереометрії змістовнішою, ми із самого початку будемо використовувати деякі прості просторові фігури — куб, паралелепіпед, піраміду, кулю та ін. (рис. 4), відклавши їхнє детальне вивчення на майбутнє. Ці фігури ви вже неодноразово розглядали, починаючи з молодших класів.

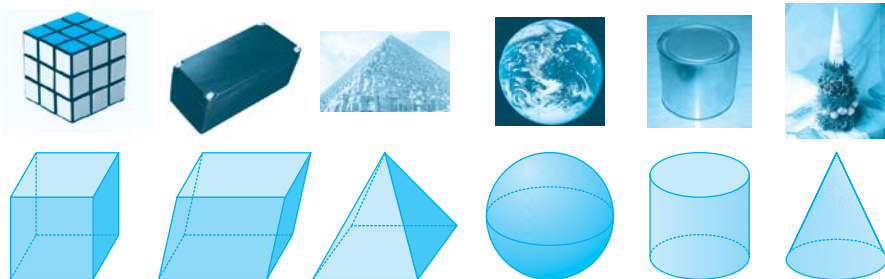


Рис. 4

Згадаємо, насамперед, про деякі **многогранники**, що являють собою частини простору, обмежені многокутниками. Многокутники, що обмежують многогранник, називають його **гранями**, їхні сторони — **ребрами**, а вершини — **вершинами** многогранника.

Куб — це многогранник, який має 6 граней і всі вони є квадратами. У нього 8 вершин і 12 ребер (рис. 5).

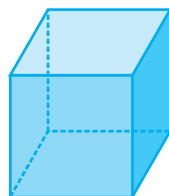
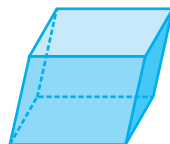


Рис. 5

Куб — від грецького κυβος (*kibos*) — гральна кістка, тіла однакової з нею форми були названі кубами.

Паралелепіпед — це многогранник, який має 6 граней і всі вони — паралелограми, і таку ж кількість вершин і ребер, як куб (рис. 6, а). Паралелепіпед, усі грані якого є прямокутниками, називається **прямокутним** паралелепіпедом (рис. 6, б).

Куб є окремим випадком прямокутного паралелепіпеда. Його грані не тільки прямокутники, а навіть квадрати.



а)



б)

Рис. 6

Паралелепіпед — від грецьких παραλληλος (*parallelos* — паралельний) і επιπεδος (*epipedos* — рівне, плоске) — шестигранник, обмежений шістьма попарно паралельними площинами.

Тетраедр — це многогранник, який має 4 грані, що є трикутниками (рис. 7). Якщо всі грані тетраедра є правильними трикутниками, то тетраедр називається **правильним тетраедром**.

Тетраедр — від грецьких *tettares* — чотири), у складних словах *тетра-* (*tetra-*) і *едра* (*hedra* — основа, поверхня, сторона) — чотиригранник, усі грані якого — трикутники.

Піраміда — це многогранник, у якого одна грань — довільний многокутник, а решта граней — трикутники із спільною вершиною (рис. 8). Перша грань називається **основною**, а інші — **бічними** гранями, їхня спільна вершина — **вершиною** піраміди. Ребра, які сходяться у вершині піраміди, називають **бічними**. Тетраедр є окремим випадком піраміди. Кожна його грань може слугувати основою.

Піраміда — від грецького *pyramis*), можливо, від єгипетського *peretuis* — діагональ основи.

Якщо основою піраміди є n -кутник, то піраміда називається **n -кутною**. Трикутна піраміда — це тетраедр. Якщо основою піраміди є правильний n -кутник, а бічні грані є рівними рівнобедреними трикутниками з вершинами у вершині піраміди, то піраміда називається **правильною n -кутною**. Зображається вона при $n = 5$ так, як показано на рис. 9. Правильний тетраедр є окремим випадком правильної трикутної піраміди.

Куля з центром у точці O з радіусом R — це множина точок простору, які знаходяться від точки O на відстані, що не перевищує R (рис. 10).

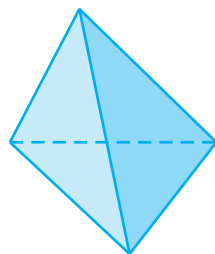


Рис. 7

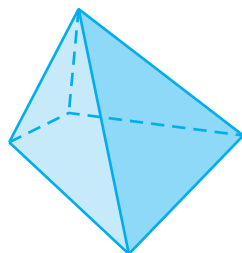


Рис. 8

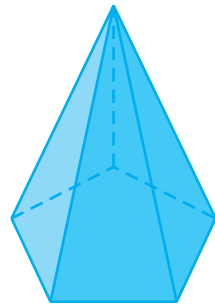


Рис. 9

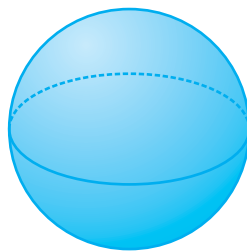


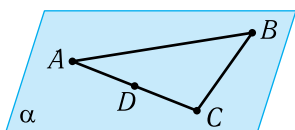
Рис. 10

? Запитання для самоконтролю

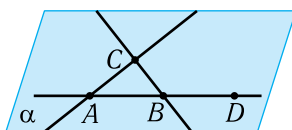
1. Кінці відрізка належать площині. Чи належить їй середина відрізка?
2. Дві вершини трикутника належать площині. Чи належить їй третя вершина?
3. Чи завжди через три точки можна провести єдину площину?
4. У землю вбили три стовпці. Чи завжди на них можна покласти лист фанери?
5. Чи правильно, що дві площини або мають безліч спільних точок, або не мають жодної?
6. Чи правильно, що пряма є лінією перетину двох різних площин, які мають спільну точку?
7. Чи існують у просторі такі дві прямі, які не можна перетяти одночасно жодною третьою прямою?
8. На скільки частин поділяють простір дві площини, які перетинаються?
9. Скільки площин можна провести через дві вершини куба?
10. Скільки площин можна провести через ребро тетраедра?

➡ Вправи на рисунках

1. Якими трьома точками, вказаними на рис. 11, а), площина α визначається однозначно?
2. Через які три точки, вказані на рис. 11, б), можна провести ще одну площину, відмінну від площини α ?



а)



б)

Рис. 11

3. Укажіть взаємне розміщення прямих a , b і площини α , зображених на рис. 12, а)–г).
4. Яка з точок D , E , F на рис. 13 може бути точкою перетину прямої AB і площини β ?
5. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Яка з точок L , M , N на рис. 14 може бути точкою перетину прямої BK з площиною α ?

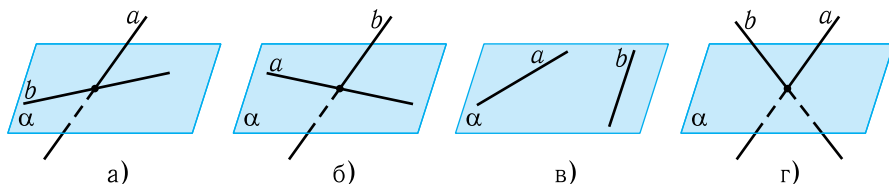


Рис. 12

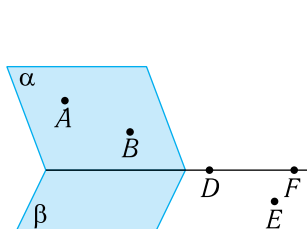


Рис. 13

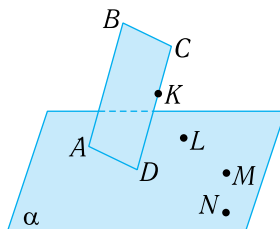


Рис. 14

6. На рис. 15, а)–г) зображені трикутник ABC і точки перетину прямих, які проходять через його сторони, з площиною α . Котрий з рисунків містить помилку?

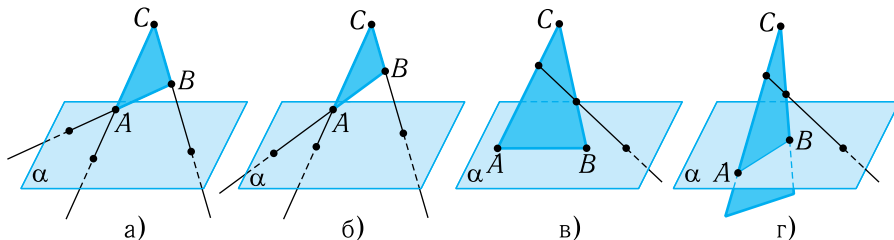


Рис. 15

7. На рис. 16, а)–г) зображені плоский чотирикутник $ABCD$ і точки перетину прямих, які проходять через його сторони, з площиною α . Котрий з рисунків містить помилку?

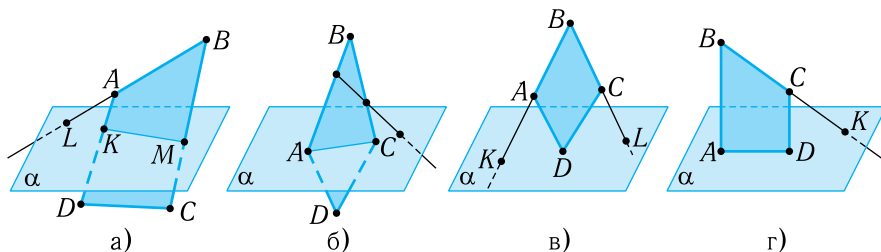


Рис. 16

8. На рис. 17 пряма AB не належить площині COD .
- 1) Скільки спільних точок мають площини AOB і COD ?
 - 2) Яка фігура є перетином площин AOC і BOD ?
 - 3) Скільки площин можна провести через точки A, B, C ?
9. На рис. 18 зображено куб.
- 1) Скільки площин можна провести через вершини A, D_1, C ?
 - 2) Скільки площин можна провести через вершини A, C і середину відрізка BD ?
 - 3) Яка фігура є перетином площин ABC і C_1D_1D ?
 - 4) Скільки спільних точок мають площини BCD і ACB_1 ?
10. Які з наступних пар точок X і Y, X і Z, Y і $T; Z$ і T не лежать в одній грані тетраедра, зображеного на рис. 19?

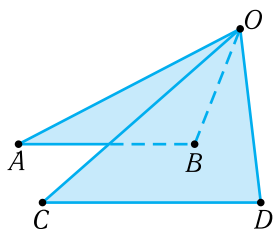


Рис. 17

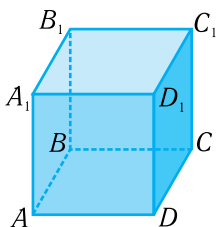


Рис. 18

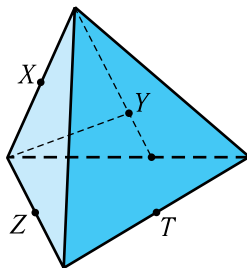


Рис. 19

11. На рис. 20 зображено площини AED і AFB .
- 1) Яка фігура є їхнім перетином?
 - 2) Скільки площин можна провести через точки F, C, E ?
 - 3) Скільки площин можна провести через точки A, E, F ?
 - 4) Яка пряма є перетином площин BCD і EAC ?

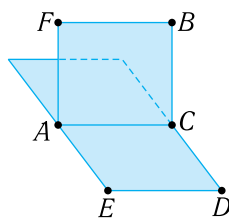


Рис. 20



Отже, маємо низку основних понять і аксіом стереометрії. Побудову теорії почнемо з доведення твердження, рівнозначного за змістом аксіоми C_2 . Ця аксіома визначає один із способів задання площини у просторі, що, до речі, дозволяє площину, яка визначається точками A, B, C , називати площиною ABC . Проте за допомогою точок і прямих площину можна задати інакше. Досвід підказує, що площина однозначно визначається прямою і точкою поза нею

або ж двома прямими, які перетинаються. Згідно з правилами побудови стереометрії на аксіоматичній основі, ці твердження необхідно довести, виходячи з аксіом.

Теорема 1.1

(про площину, яка проходить через пряму і точку).

Через пряму і точку, що не лежить на цій прямій, проходить площина і до того ж лише одна.

□ Нехай дано пряму a і точку A , яка не лежить на цій прямій. Візьмемо на прямій a дві точки B і C (рис. 21). Згідно з аксіомою C_4 , пряма a — єдина пряма, що проходить через точки B і C . Оскільки точка A , за умовою теореми, не належить прямій a , то точки A , B і C не можуть лежати на одній прямій.

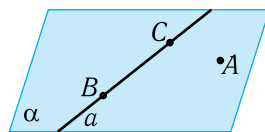


Рис. 21

Згідно з аксіомою C_2 , існує площина α , яка містить точки A , B , C , і, відповідно до аксіоми C_1 , ця площина містить пряму a . Отже, шукана площина існує.

Будь-яка інша площина β , яка проходить через пряму a і точку A , містить точки B і C . Оскільки через точки A , B , C можна провести лише одну площину (аксіома C_2), то площина β збігається з площиною α . А це означає, що шукана площина — єдина. ■

Аналізуючи доведення теореми, неважко дійти висновку, що через кожную пряму проходить нескінченна кількість площин. Розташування кожної з них визначається деякою точкою, що не лежить на даній прямій. Це можна проілюструвати, наприклад, обертаючи двері відносно нерухомих завес. Ще один спосіб задання площини сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 1.2

(про площину, яка проходить через дві прямі, що перетинаються).

Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина і до того ж лише одна.

□ Нехай прямі a і b мають одну спільну точку O . Візьмемо на двох прямих довільні точки A і B , відмінні від точки O (рис. 22). Точки A , O , B не лежать на одній прямій, тому існує площина α , яка містить ці точки (аксіома C_2). Площина α містить прямі a і b (аксіома C_1). Отже, через дані прямі проходить площина.

Кожна інша площина β , що проходить через прямі a і b , містить точки A , O , B , і, згідно з аксіомою C_2 , повинна збігатися з площиною α , оскільки ці точки не лежать на одній прямій. ■

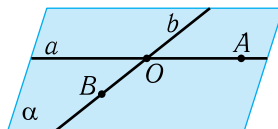


Рис. 22

Наступні задачі містять твердження, які будуть корисними при подальшому вивченні стереометрії.

Задача 1.

Довести, що для кожної площини знайдеться пряма, яка не належить цій площині.

□ Нехай A — деяка точка площини α (рис. 23, а). Оскільки простір містить нескінченну кількість площин, то в довільній площині β , відмінній від площини α , виберемо точку B , яка не належить площині α (рис. 23, б). Така точка існує, у супротивному випадку обрана площина співпадала би з площиною α . Пряма AB не лежить в площині α , оскільки $B \notin \alpha$. ■

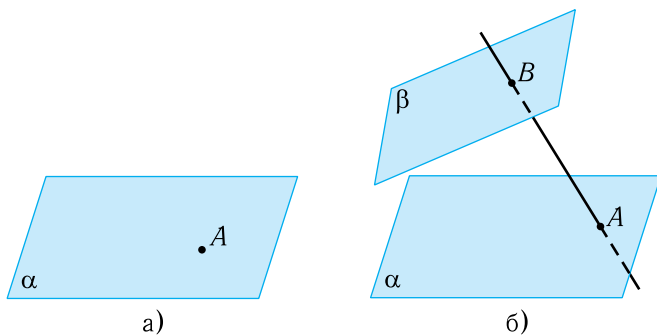


Рис. 23

При розв'язанні задачі ми довели, що поза кожною площиною лежить точка, і таких точок є безліч, адже пряма AB і площина α мають єдину спільну точку A (чому?), решта точок прямої AB лежить поза площиною α . Таким чином, з умови існування безлічі площин випливає існування безлічі точок і прямих поза даною площиною. Розв'язання задачі 1 ілюструє можливість зменшення при побудові аксіоматичної теорії кількості тверджень, які приймають без доведення.

Задача 2.

Довести, що у просторі існують чотири точки, які не лежать в одній площині.

□ Необхідно довести існування чотирьох точок, які не можна помістити у площину, тобто, що не існує площини, яка проходить через ці чотири точки.

Візьмемо довільну площину α і в ній виберемо три точки A, B, C , які не лежать на одній прямій (рис. 24, а). Оскільки поза площиною α існують точки простору, то виберемо з них довільну точку D (рис. 24, б). Не існує площини β , яка б містила точки A, B, C, D . У супротивному випадку площини α і β співпадали би, за аксіомою C_2 , і точка D належала б площині α . ■

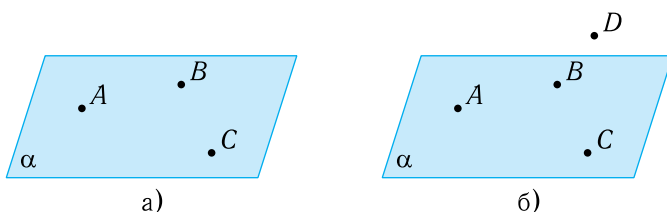


Рис. 24

У наведених аксіомах і теоремах йшлося про прямі і площини, які задавались тим чи іншим способом. Нам і надалі доведеться будувати у просторі різні фігури, спираючись на їхні властивості. Задачі на побудову в стереометрії аналогічні до задач на побудову в планіметрії. Однак у стереометрії немає інструментарію для побудови площини. Та й зображення просторових побудов на плоскому рисунку не завжди адекватно відтворює реальність. Тому **в стереометрії під побудовою розуміють доведення можливості всіх кроків процесу побудови**. При цьому вважається, що площина побудована, якщо визначені три точки, які не лежать на одній прямій, або пряма і точка поза прямою, або дві прямі, що перетинаються, або ж інші елементи, що визначають площину. Для побудови прямої досить мати дві її точки.

Природно вважати, що **на кожній площині можливі всі побудови, відомі з планіметрії**.

Приклад 1.

Сторона AB трикутника ABC лежить у площині α , а вершина C — поза нею. Точка M ділить відрізок BC у відношенні $4 : 3$, рахуючи від точки B , а точка N ділить відрізок AC у відношенні $4 : 1$, рахуючи від точки A . Побудувати точку перетину прямої MN з площиною α .

□ Умовам прикладу відповідає рис. 25, а). Пряма MN лежить у площині ABC . Перетином цієї площини з площиною α є пряма AB . Тому шукана точка перетину розміщена на прямій AB . Прямі AB і MN лежать у площині ABC і, як це випливає з умови, перетинаються. Знайдемо їхню точку перетину, продовживши відрізки AB і MN до перетину в точці K (рис. 25, б). Це і є шукана точка перетину прямої MN і площини α . ■

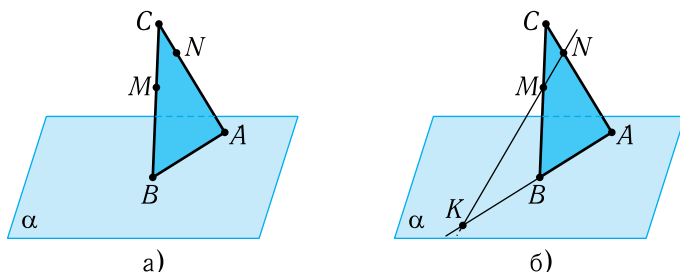


Рис. 25

Побудова точки перетину прямої з площиною (точки «зустрічі» прямої і площини) є складовою багатьох побудов в стереометрії. Приклад 1 є ілюстрацією такої побудови.

! Щоб побудувати точку перетину прямої з площиною треба побудувати точку перетину даної прямої і прямої, яка є лінією перетину даної площини і площини, що проходить через дану пряму.

Приклад 2.

Побудувати лінію перетину площини, що проходить через вершини A_1, C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і середину K ребра BB_1 , з площиною грані $ABCD$.

□ Щоб побудувати шукану пряму перетину, досить знайти дві її точки. Для знаходження цих точок скористаємось розв'язанням прикладу 1. Оскільки пряма $C_1 K$ лежить у площині грані $BCC_1 B_1$, то точка M перетину прямих $C_1 K$ і CB є однією з точок шуканої прямої перетину (рис. 26), а друга точка N є точкою перетину прямих AB і $A_1 K$ у площині грані $ABB_1 A_1$. Пряма MN є шуканою. ■

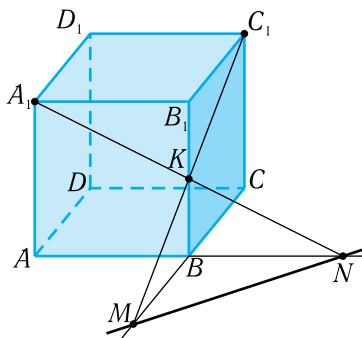


Рис. 26

Побудова лінії перетину двох площин є ще однією з базових побудов в стереометрії. Приклад 2 ілюструє таку побудову.

Щоб побудувати лінію перетину двох площин треба побудувати точки перетину двох прямих однієї площини з другою і через них провести пряму.

Для введення геометричних фігур, як плоских, так і просторових, можна застосовувати конструктивний підхід. Цей підхід передбачає побудову фігур з відрізків. Продемонструємо його на наступних прикладах.

Нехай у деякій площині α маємо відрізок BC і точку A , що лежить поза прямою BC (рис. 27, а). З'єднаємо відрізками всі точки відрізка BC з точкою A (рис. 27, б). Фігура, що складається з точок усіх побудованих відрізків, є трикутником.

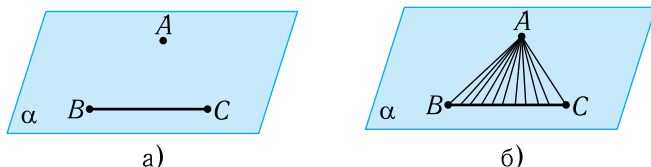


Рис. 27

Якщо ж маємо відрізок BC і по один бік від прямої BC відкладемо рівні і паралельні між собою відрізки (рис. 28), то кінці цих відрізків утворюють відрізок AD (доведіть!), а фігура, що утворена з усіх точок цих відрізків, є паралелограмом.

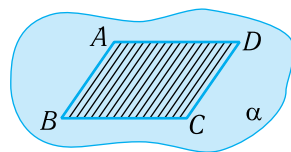


Рис. 28

Тепер зрозуміло, як у просторі можна конструктивно ввести деякі фігури, наприклад, піраміди, зокрема тетраедри.

Візьмемо чотирикутник $ABCD$ в площині α , а також точку S поза площиною α . Сполучимо точку S з усіма точками чотирикутника $ABCD$ (рис. 29).

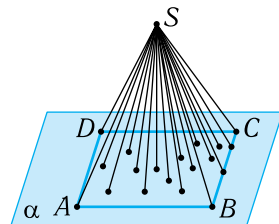


Рис. 29

Сукупність усіх точок відрізків, які сполучають точку S з точками чотирикутника $ABCD$, утворює фігуру, яка є чотирикутною пірамідою. Точка S є вершиною піраміди,

чотирикутник $ABCD$ — основою, а трикутники SAB , SBC , SCD , SDA — бічними гранями піраміди. Зазвичай чотирикутну піраміду зображають так, як це зроблено на рис. 30.

Аналогічно будують піраміди, основами яких є багатокутники з довільним числом сторін. Докладніше про це йтиметься у наступних розділах.

Для вивчення просторових фігур доцільно розглядати перетин цих фігур з площинами. Такі перетини називаються **перерізами**, якщо по обидві сторони від площини перетину — **січної площини** — є точки фігури.

Неважко перекоонатися в тому, що перерізами паралелепіпеда чи піраміди є багатокутники. Справді, з аксіоми C_3 випливає, що перетином січної площини і грані фігури є відрізок.

Таким чином, при перетині даних фігур з площиною дістанемо обмежені відрізками фігури на площині, тобто багатокутники. Так, перерізом куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 31) площиною, що проходить через вершини A , B_1 , D_1 є трикутник $AB_1 D_1$, а перерізом піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через вершину S і діагональ AC основи є трикутник ASC (рис. 32).

Наступний приклад базується на ідеях побудов, розглянутих у прикладах 1 і 2.

Приклад 3.

Побудувати переріз піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через середини K , L ребер AD і AB основи та середину M бічного ребра SC .

□ Зрозуміло, що для побудови перерізу, який є багатокутником, необхідно знайти точки перетину січної площини з ребрами SB і SD (рис. 33, а). Це дозволить знайти ще дві вершини багатокутника (окрім K , L , M), який є перерізом піраміди площиною. Січна площина перетинає площину основи по прямій KL , яка перетинається з прямою BC у деякій точці P (рис. 33, б).

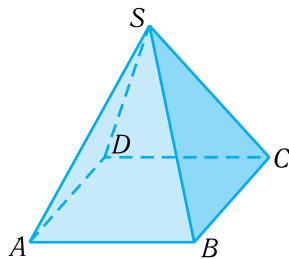


Рис. 30

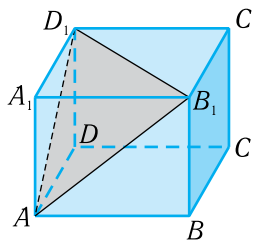


Рис. 31

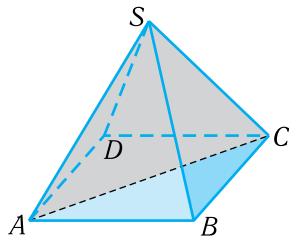


Рис. 32

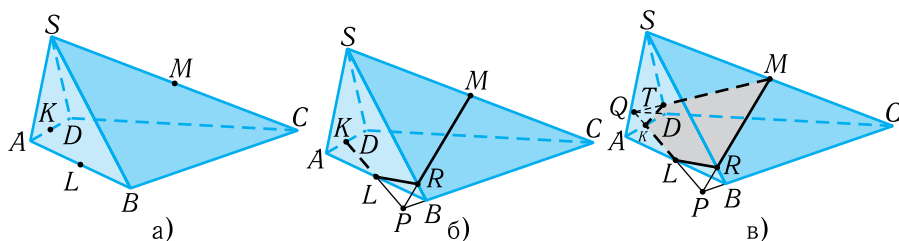


Рис. 33

Точки P і M належать як січній площині, так і площині грані SBC , тобто пряма PM є прямою перетину січної площини і площини грані SBC . Отже, точка R перетину прямих SB і PM є точкою перетину січної площини з ребром SB . Точка перетину T січної площини з ребром SD знаходиться аналогічно: знаходиться точка Q перетину прямих KL і DC , а T — точка перетину ребра SD з прямою QM . П'ятикутник $KLRMT$ і є перерізом піраміди площиною KLM (рис. 33, в). ■

? Запитання для самоконтролю

1. Чи можна стверджувати, що один з діаметрів кола належить площині, якщо дві точки кола належать цій площині?
2. Кінці мотузки завдовжки 2 м притиснули до стелі, попередньо мотузку натягнувши. Чи прилягає до стелі середина мотузки?
3. Через кінці однієї діагоналі паралелограма і середину другої проведено площину. Чи збігається вона з площиною паралелограма?
4. Щоб надати стійкості геодезичним інструментам (теодолітам, нівелірам тощо), їх зазвичай закріплюють на триногах. Чому?
5. Чи можуть три різні площини мати рівно дві спільні точки?
6. На скільки частин поділяють простір три площини, якщо вони мають рівно одну спільну точку?
7. З чотирьох даних точок через жодні три не можна провести коло. Чи можуть вони лежати в одній площині?
8. Чи завжди через чотири точки можна провести площину?
9. Чотири точки не належать одній площині. Чи можуть будь-які три з них належати одній прямій?
10. Гіпотенуза прямокутного трикутника належить площині. Чи завжди їй належить вершина прямого кута, якщо відомо, що цій площині належить центр кола, описаного навколо трикутника?

 Графічні вправи

Побудуйте рисунок, використовуючи наведені дані.

1. Пряма MP лежить у площині α .
2. Пряма AB перетинає площину α в точці M .
3. Площина α проходить через пряму a і точку M , яка не лежить на прямій a , і перетинає пряму c у точці M .
4. Прямі MC і MB перетинають площину α в одній точці.
5. Прямі MC і MB перетинають площину α в різних точках.
6. Точка K знаходиться поза площиною трикутника ABC , N — середина відрізка KC .
7. Площини α і β перетинаються по прямій c . Пряма AB лежить у площині α і паралельна прямій c .
8. Площини α і β перетинаються по прямій l . Пряма a лежить у площині α , а пряма b — у площині β , прямі a і b не мають спільних точок.



Перші уявлення про аксіоматичний метод ви отримали при вивченні планіметрії. Одним із завдань курсу стереометрії є розширення і поглиблення цього уявлення.

Аксіоматичний метод є одним з універсальних методів математики. Він використовується в усіх її розділах. І це цілком зрозуміло. Важливою особливістю математики як науки (можливо, найважливішою!) є дедуктивний характер побудови її теорій, який передбачає введення нових понять на основі раніше означених, доведення нових тверджень на основі раніше доведених. Послідовне дотримання цієї ідеології приводить до запитань: «А що лежить в основі теорії?», «З чого починається теорія?». Відповіді на ці запитання дає аксіоматичний метод.

Доцільність впровадження аксіоматичного методу можна обґрунтувати за допомогою такої гіпотетичної ситуації. Нехай дві особи щиро прагнуть з'ясувати істинність певного твердження, хоча, можливо, щодо цього мають протилежні погляди. Тоді вони, займаючи конструктивну позицію, намагаються дане твердження тлумачити як наслідок одного чи декількох більш простих. А ті, в свою чергу, зводять до ще простіших. Цю процедуру вони повторюють до тих пір, поки не дійдуть до таких тверджень, істинність яких не викликає сумнівів у жодної особи. Обернений ланцюжок міркувань дозволяє зробити висновок про правильність даного твердження.

У зв'язку з цим цілком зрозумілим є прагнення давньогрецьких математиків виділити твердження (аксіоми), які сприймаються істинними, а решту правильних тверджень (теорем) отримувати за допомогою ланцюжка логічних висновків (доведень) із аксіом. Досить вдалу реалізацію цієї ідеї запропонував близько III ст. до н. е. Евклід у знаменитих «Началах» — книзі, яка суттєво вплинула на зміст, побудову і розвиток багатьох розділів науки, і не тільки математики.

Аксіоматична система Евкліда ретельно вивчалась протягом тисячоліть, у певній мірі переглядалась, доповнювалась і вдосконалювалась. Досконалий з позицій сучасної математики перелік аксіом геометрії (їх близько 20) запропонував наприкінці XIX ст. німецький математик Д. Гільберт (1862–1943). Незважаючи на це, геометрію, яку ми вивчаємо, називають евклідовою геометрією, віддаючи шану засновнику аксіоматичного підходу.

Разом з удосконаленням аксіоматичної побудови геометрії поглиблювалося розуміння сутності аксіоматичного методу, можливостей його застосування. До системи аксіом сформувалися певні вимоги. Головні з них такі.

1. **Несуперечливість.** Система аксіом є несуперечливою, якщо серед тверджень, які можна отримати з аксіом за допомогою доведень, не можуть бути такі, які суперечать одне одному.

2. **Повнота.** Система аксіом є повною, якщо довільне правильне твердження теорії можна отримати з аксіом.

3. **Незалежність.** Система аксіом є незалежною, якщо жодна аксіома не є наслідком інших аксіом.

Встановлення зазначених властивостей для конкретної системи аксіом може бути дуже складним завданням. Для системи аксіом геометрії так воно і є. Варто відзначити, що аксіоматична побудова геометрії як навчального предмета в середній школі з дотриманням вказаних вимог є нереальною справою. Тому обмежуються її частковою реалізацією з широким зверненням до практичного досвіду, здорового глузду, інтуїції, як це і робиться при побудові даного курсу стереометрії. При цьому вимоги до системи аксіом значно послабляються. Це, звичайно, не стосується несуперечливості. Адже нічого не варта наука, в якій є правильним і твердження, і його заперечення. Неповнота системи аксіом стереометрії компенсується посиленнями на планіметрію, зверненням до моделей, опорою на просторові уявлення тощо. Наприклад, у запропонованій системі аксіом нічого не говориться про вимірювання відстаней. Можливість такого вимірювання в кож-

ній площині ще не гарантує, що ми отримаємо однакові значення відстані між точками, поміщуючи їх у різні площини. Можна було б додати аксіому відстані:

С₅. Для довільних двох точок A і B простору однозначно визначено деяке невід’ємне число AB , яке називається відстанню між точками і має наступні властивості:

- 1) $AB = BA$;
- 2) $AB = 0$ тоді і тільки тоді, коли точки A і B збігаються;
- 3) $AC \leq AB + BC$, причому рівність досягається в тому і лише в тому випадку, коли точка B належить відріzkу AC .

Було б правильним піднести на рівень аксіом і припущення про те, що кожна площина розбиває простір на два півпростори. Приклади поповнення системи аксіом стереометрії можна було б продовжити.

Стосовно незалежності систем аксіом геометрії, то нею часто густо жертвують заради спрощення побудови теорії чи керуючись іншими мотивами. Так, із запропонованих у даному підручнику аксіом твердження C_1 про належність прямої площині, якщо вони мають дві спільні точки, можна довести як теорему. Справді, нехай A і B — дві точки прямої a , що лежать у площині α . Оскільки в площині справджуються твердження планіметрії, то існує єдина пряма b у площині α , яка проходить через точки A і B . Але, за аксіомою C_4 , через точки простору A і B має проходити єдина пряма, тобто $a = b$, а відтак a лежить у площині α . Розгляд твердження C_1 як аксіом — це спосіб звернути увагу на важливість цього твердження у побудові стереометрії.

Слід відзначити, що геометрій існує багато. Поряд з евклідовою геометрією є аналітична, алгебраїчна, нарисна, проєктивна, диференціальна геометрії. І це дуже маленька частина геометричних теорій. Не вдаючись у пояснення сутності кожної із зазначених геометрій, можна стверджувати, що їх об’єднує мета — дослідження властивостей фігур і відношень між ними. А розрізняє їх перелік розглядуваних фігур та їхніх властивостей, методи дослідження.

Багато геометрій сумісні з евклідовою. Але існують і геометрії, які принципово відрізняються від евклідової із самого початку. Їх називають **неевклідовими**. В них частина аксіом евклідової геометрії є хибними. Простим прикладом такої геометрії є геометрія на сфері або сферична геометрія. Цілковито природно прямими на сфері називати великі кола, тобто кола на сфері, центр яких знаходиться у центрі сфери. Ці кола складаються з дуг, а маленькі



такі дуги є найкоротшими лініями, які з'єднують кінці дуги, тобто мають таку саму властивість, як і відрізки. Неважко перевірити, що в сферичній геометрії немає паралельних прямих, тобто двох великих кіл, які не перетинаються. А існують геометрії, в яких до даної прямої можна провести не одну паралельну пряму, а багато. Відкриття таких геометрій стало революцією не тільки в математиці. Вражаючим було усвідомлення, що неевклідові геометрії можуть бути застосовані у фізиці для опису реального світу.



Запитання для осмислення

1. Чи правильно сформульовані наступні висловлення?

- а) Кришка столу є паралелепіпедом.
- б) Футбольний м'яч є кулею.

Вказівка. Зверніть увагу на зв'язок між геометричними фігурами і об'єктами, які вони моделюють.

2. Чи можна дати означення поняттям, які приймаються в геометрії неозначуваними, наприклад, поняттю прямої?

Вказівка. Згадайте, як задається пряма на координатній прямій.

3. Чи може теорема бути хибною?

Вказівка. Зверніть увагу на зміст поняття теореми.

4. Чи може твердження, яке приймається за аксіому, бути теоремою при іншому виборі аксіом?

Вказівка. Проаналізуйте можливість заміни аксіоми про задання площини за допомогою трьох точок іншою аксіомою.

5. Порівняйте стереометрію і гру в шахи.

Вказівка. Скористайтесь схемами побудови стереометрії і гри в шахи.



Контрольні запитання

1. Скільки спільних точок має куб і пряма, якщо дві точки прямої належать кубу?
2. Столяр за допомогою лінійки перевіряє, чи добре відшліфована поверхня. Як він це робить?
3. Чи можна три точки розмістити так, щоб через них можна було б провести дві різні площини?
4. Чи можуть лежати в одній площині тільки три вершини паралелограма?
5. Чому триколісний велосипед у нерухомому стані стійкий, а двоколісний — нестійкий?

6. Чи можуть дві площини мати лише одну спільну точку?
7. Чи завжди пряма, що перетинає кожну з двох прямих, які, в свою чергу, перетинаються, лежить з ними в одній площині?
8. За допомогою двох шнурів столяр визначає, чи лежать кінці чотирьох ніжок стола в одній площині. Як він це робить?
9. Чи можуть три площини ділити простір на шість частин?
10. Чи можна торт розрізати на вісім частин, зробивши лише три перерізи?

Задачі

1. Доведіть, що через кожну пряму можна провести:
 - 1°) дві різні площини;
 - 2) безліч різних площин.
 2. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, розташовану поза прямою:
 - 1°) містяться в одній площині;
 - 2) утворюють площину з вилученою прямою, окрім даної точки.
 - 3°. Доведіть, що коли чотири точки не лежать в одній площині, то жодні дві прямі, які попарно сполучають ці точки, не перетинаються.
 - 4°. Доведіть, що коли чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій.
 - 5°. Дві суміжні вершини і точка перетину діагоналей трапеції лежать у площині α . Доведіть, що й інші дві вершини трапеції лежать у площині α .
 - 6°. Прямі AB і AC перетинаються з деякою прямою відповідно в точках M і N . Доведіть, що точки M, N, B, C лежать в одній площині.
 7. Точка D знаходиться поза площиною трикутника ABC , N — середина відрізка DC . Доведіть, що прямі BN і AC не мають спільних точок.
 8. Відомо, що пряма CD перетинає площину трикутника ABC . Доведіть, що прямі AB і CD не мають спільних точок.
 - 9*. Доведіть, що існують дві прямі простору, які не лежать в одній площині.
-
10. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і точка M на ребрі BB_1 , яка не співпадає з його кінцями (рис. 34). На якій прямій лежить точка перетину прямої:

- 1°) MC з площиною $A_1B_1D_1$;
- 2°) AM з площиною $B_1C_1D_1$;
- 3°) MA_1 з площиною ABD ;
- 4) AC з площиною BB_1D_1 ;
- 5) MD_1 з площиною ABC ;
- 6) DM з площиною $A_1C_1D_1$?

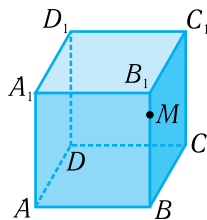


Рис. 34

- 11°. Площини α і β перетинаються по прямій s . Відрізок AB лежить у площині α і не є паралельним прямій s . Побудуйте точку перетину прямої AB з площиною β .
 - 12°. Площини α і β перетинаються по прямій l . Точки A і C лежать у площині α , причому пряма AC не паралельна прямій l , а точка B лежить у площині β . Побудуйте лінії перетину площини ABC з площинами α і β .
 13. Точки M і P лежать на різних бічних гранях тетраедра $SABC$. Побудуйте:
 - 1) точку перетину прямої MP з площиною ABC ;
 - 2) лінію перетину площини BMP з площиною ABC .
 14. Точки A, L, K лежать по один бік від площини α . Пряма AL перетинає площину α в точці B , а пряма LK — у точці M . Побудуйте точку перетину прямої AK з площиною α .
 - 15*. Побудуйте пряму, яка проходить через точку B , що не належить площині α , і не має спільних точок з α .
-
16. Дві площини α і β перетинаються по прямій m . Пряма a лежить в площині α , пряма b — в площині β . Ці прямі перетинаються в точці A . Доведіть, що точка A лежить на прямій m .
 17. Площина γ перетинає площини α і β по прямим a і b відповідно. Доведіть, що якщо прямі a і b перетинаються, то точка їхнього перетину лежить на лінії перетину площин α і β .
 - 18*. Дано дві прямі, які не лежать в одній площині. Через кожну з них проведена площина, яка перетинає іншу пряму. Доведіть, що проведені площини перетинаються по прямій, яка перетинає кожну з даних прямих.
 - 19*. Доведіть, що коли кожні дві з даних чотирьох прямих перетинаються й усі точки їхніх попарних перетинів різні, то дані прямі лежать в одній площині. Чи правильне дане твердження для п'яти прямих? Як воно зміниться, якщо відомо тільки те, що кожні дві з чотирьох прямих перетинаються?

- 20*.** Фігура складається не менш ніж з двох точок і має таку властивість, що пряма, яка з'єднає дві її довільні точки, цілком належить цій фігурі. Доведіть, що дана фігура може бути лише прямою, площиною або простором.
- 21*.** П'ять точок розміщені у просторі так, що кожні чотири з них лежать в одній площині. Доведіть, що всі п'ять точок лежать в одній площині.
-
- 22.** Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через:
- 1°) пряму $A_1 C_1$ і точку B ; 2°) точки B, D, C_1 ;
 - 3°) прямі $A_1 K$ і BK , де K — середина ребра $B_1 C_1$;
 - 4) точки A_1, D і центр грані $DCC_1 D_1$;
 - 5) точку A і центри граней $ABB_1 A_1$ і $ADD_1 A_1$.
- 23.** Побудуйте переріз правильного тетраедра $SABC$ площиною, що проходить через:
- 1°) середини ребер AB, BC і SB ;
 - 2°) середини ребер AB, BC і центр грані SBC ;
 - 3) середину ребра BC і центри граней SBC, SAB ;
 - 4) центри граней SBC, SAB, SAC .

Вправи для повторення

- 24.** Дано паралелограм $ABCD$, точки M, N, P, Q — середини відповідно сторін AB, BC, CD, DA .
- 1) Встановіть розміщення прямих: а) MN і PQ ; б) MP і BC ; в) AB і PQ ; г) MQ і BD ;
 - 2) Встановіть вид чотирикутника $MNPQ$.
 - 3) Знайдіть його периметр і площу, якщо довжини діагоналей паралелограма $ABCD$ дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними дорівнює 60° .
- 25.** За даними на рис. 35 визначте, чи паралельні прямі AB і EF .
- 26.** Через внутрішню точку трикутника проведіть пряму, яка відтинає від нього трикутник, подібний даному. Скільки розв'язків може мати задача?
- 27.** Чи подібні два чотирикутники, якщо:
- 1) сторони одного чотирикутника пропорційні сторонам другого;
 - 2) кути одного чотирикутника дорівнюють кутам другого?

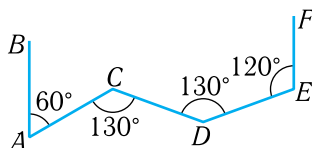
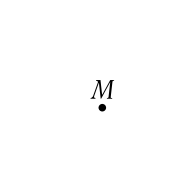
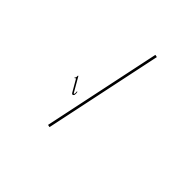
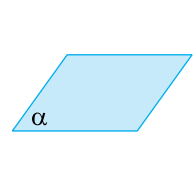


Рис. 35

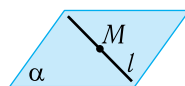
Підсумок

Основні неозначувані фігури стереометрії

Назва фігури	Фізичні моделі	Вигляд моделі	Рисунок
Точка	Зірка, вістря голки		
Пряма	Натягнута нитка, маршрут літака, лінія горизонту		
Площина	кришка столу, аркуш паперу, поверхня озера		

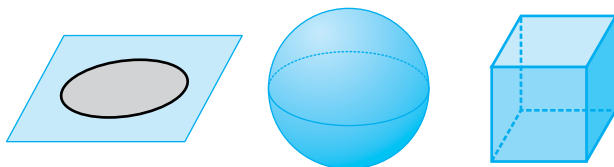
Позначення відношень

$M \in l$ — точка M належить прямій l
 $M \in \alpha$ — точка M належить площині α
 $l \subset \alpha$ — пряма l лежить у площині α

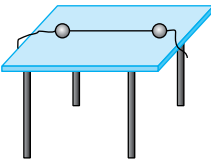
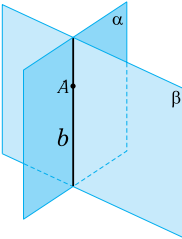
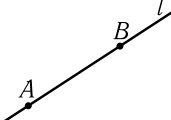
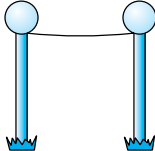


Головні означення

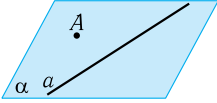
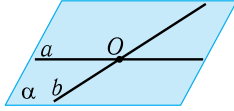
Будь-яку частину простору, тобто деяку сукупність його точок, називають *фігурою*. Фігура називається *плоскою*, якщо всі її точки розміщені в одній площині.

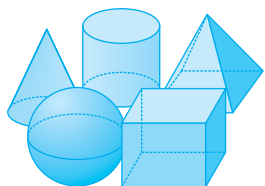


Аксіоми стереометрії

C₁. Якщо пряма проходить через дві точки даної площини, то вона повністю лежить у цій площині.	 $A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$	
C₂. Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.	 $A, B, C \text{ не лежать на одній прямій} \Rightarrow \Rightarrow \exists! \alpha: A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$	
C₃. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то їхнім перетином є пряма, що проходить через цю точку.	 $A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = b, A \in b$	
C₄. Через дві довільні точки простору можна провести одну і тільки одну пряму.	 $\exists! l: A \in l, B \in l$	

Головні твердження

<i>Теорема про площину, яка проходить через пряму і точку</i>	Через пряму і точку, що не лежить на цій прямій, проходить площина і до того ж лише одна.	 $A \notin a \Rightarrow \exists! \alpha: a \subset \alpha, A \in \alpha$
<i>Теорема про площину, яка проходить через дві прямі, що перетинаються</i>	Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина і до того ж тільки одна.	 $a \cap b = \{O\} \Rightarrow \Rightarrow \exists! \alpha: a \subset \alpha, b \subset \alpha$



1.2. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Розглядаються різні варіанти взаємного розміщення прямих, встановлюються ознаки, за якими можна розрізняти ці варіанти, властивості важливого в стереометрії відношення прямих — паралельності.



Як відомо з планіметрії, на площині дві прямі можуть збігатися, перетинатися або ж бути паралельними. Ілюстрацією цього можуть бути траєкторії руху двох пароплавів (рис. 36). Перехід від площини до простору збільшує кількість варіантів взаємного розміщення двох прямих. Наприклад, спробуйте уявити траєкторії руху двох літаків, які летять на різних висотах, і один з них рухається з півночі на південь, а другий — із заходу на схід (рис. 37). Як вони розміщені? Яскравою ілюстрацією можливостей взаємного розміщення прямих є розміщення рей на корабельних щоглах (рис. 38) тощо.



Рис. 36



Рис. 37



Рис. 38

Класифікація взаємного розміщення двох прямих у просторі і розгляд способів встановлення цього розміщення є головною метою даного пункту.

Розглядаючи прямі у просторі як геометричні образи траєкторій прямолінійного руху, ми можемо описати можливі варіанти взаємного розміщення двох прямих у просторі.

Прямі можуть **збігатися**. Для цього достатньо, щоб вони мали дві спільні точки (аксіома C_4).

Прямі можуть **перетинатися**, тобто мати тільки одну спільну точку. Такі прямі визначають певну площину, якій вони належать (теорема 1.2). І в кожній площині через довільну точку можна провести безліч прямих, що перетинаються.

Прямі можуть не мати спільних точок. Проте назвати їх паралельними (як у планіметрії) можна не завжди. Розгляд траєкторій польоту літаків, як і багато інших подібних прикладів (розміщення тунелів метро, лінії електропередач, що перехрещуються тощо) наводить на думку, що йдеться про два принципово різних способи розміщення прямих. Відмінність між цими способами полягає у тому, що для одних прямих, які не перетинаються, існує площина, в якій вони лежать (рис. 39, а), а для інших — такої площини не існує (рис. 39, б).

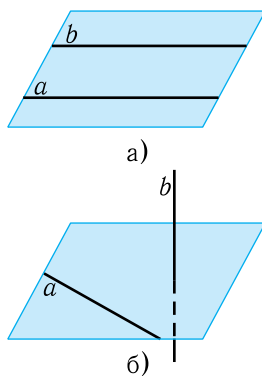


Рис. 39

Насамперед дамо означення паралельності прямих.

Дві прямі простору називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок.

Таким чином, паралельність прямих a і b у просторі зводиться до їхньої паралельності на деякій площині. Зберігається і позначення паралельності: $a \parallel b$.

Паралельний – від грецького παράλληλος (*parallelos*) – той, що йде поруч.

Існування паралельних прямих не викликає сумніву. В кожній площині можна провести безліч пар паралельних прямих.

Тепер охарактеризуємо інший спосіб розміщення прямих у просторі, які не перетинаються.

Дві прямі простору, які не лежать в одній площині, називаються мимобіжними.



Мимобіжність прямих a і b позначається так: $a \not\subset b$.

! Надалі, кажучи, що «*фігури не лежать в одній площині*», ми розумітимемо те, що *не існує такої площини, в якій знаходяться дані фігури (точки, прямі та ін.)*.

Зрозуміло, що **мимобіжні прямі не мають спільних точок**. Інакше вони збігались би, якби спільних точок було принаймні дві, чи перетинались би в одній точці. А це означає, що прямі лежать в одній площині.

Насамперед належить довести, що мимобіжні прямі існують (ілюстрації, які ми навели раніше, не можуть замінити математичного доведення). Нехай чотири точки A, B, C, D не лежать в одній площині (рис. 40). Їхнє існування є наслідком того, що за межами кожної площини існують точки простору. Звідси випливає, що прямі AB і CD є мимобіжними. Інакше б вони, як і точки A, B, C, D , які їм належать, знаходились би в одній площині.

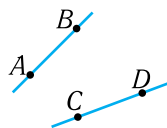


Рис. 40

Наведені міркування можна виразити таким чином.

Теорема 2.1

(ознака мимобіжності прямих).

Якщо дві прямі містять чотири точки, що не лежать в одній площині, то вони мимобіжні.

Отже, прямі у просторі можуть:

- 1) **збігатися**, якщо вони мають щонайменше дві спільні точки;
- 2) **перетинатися**, якщо вони мають тільки одну спільну точку;
- 3) **бути паралельними**, якщо вони не мають спільних точок і лежать в одній площині;
- 4) **бути мимобіжними**, якщо вони не лежать в одній площині.

Подібна класифікація ґрунтується на визначенні кількості спільних точок у прямих, хоча прямі, що не мають спільних точок, довелося поділити на два класи за іншою ознакою – належністю одній площині.

! Поняття паралельності прямих переноситься і на відрізки та промені: *паралельними вважають такі два*

відрізки, промені, які містяться на паралельних прямих. Аналогічні домовленості стосуються і мимобіжності відрізків, променів.

Приклад 1.

На рис. 41 паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Встановити взаємне розміщення прямих, які визначаються вершинами цих паралелограмів.

□ Встановлення взаємного розміщення двох прямих, які визначаються вершинами одного з паралелограмів, не викликає труднощів. Це суто планіметрична задача. На основі наведеної ознаки мимобіжності прямих можна стверджувати, що мимобіжними є, наприклад, прямі D_1C і BD , D_1C і AB , D_1C і AD , C_1D і AC (скільки ще таких пар?).

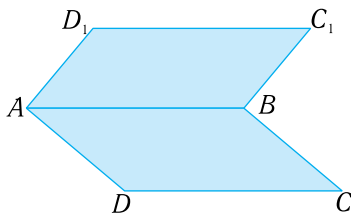


Рис. 41

А чи є серед вказаних прямих паралельні прямі, окрім тих, які лежать у площині одного з паралелограмів? Природно очікувати, що паралельними є прямі DC і D_1C_1 , C_1C і D_1D . Обґрунтування цього припущення потребує, як і в планіметрії, відповідних ознак. ■

Ознакою паралельності прямих у просторі може слугувати наступне твердження, аналог якого добре знайомий з планіметрії.

Теорема 2.2

(ознака паралельності прямих).

Якщо дві прямі простору паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

Доведення наведеної ознаки паралельності прямих буде подано пізніше. Її застосування негайно вирішує питання про паралельність прямих DC і D_1C_1 з прикладу 1. Адже $DC \parallel AB$ і $D_1C_1 \parallel AB$. Тому, за наведеною ознакою, $DC \parallel D_1C_1$. З паралельності прямих DC і D_1C_1 випливає, що точки D , C , C_1 , D_1 лежать в одній площині. А це дозволяє завершити розгляд усіх випадків з прикладу 1. Наприклад, прямі DD_1 і CC_1 — паралельні, бо чотирикутник DD_1C_1C є паралелограмом ($DC \parallel D_1C_1$, $DC = AB = D_1C_1$). А тоді прямі CD_1 і DC_1 (вони містять діагоналі паралелограма) перетинаються. На цьому завершується розгляд взаємного розміщення усіх пар прямих, які визначаються вершинами паралелограмів, зображених на рис. 41.

За означенням, паралельні прямі лежать в одній площині. Чи єдина така площина? Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 2.3

(про єдиність площини, яка містить паралельні прямі).

Через дві паралельні прямі можна провести єдину площину.

□ Існування такої площини випливає з означення паралельності прямих. Якби існували дві площини, які проходять через дані паралельні прямі, то це означало б, що через одну з паралельних прямих і через точку другої прямої проходять дві площини, а це суперечить теоремі 1.1. ■

Зрозуміло, що теоремою 2.3 можна скористатися для задання площини за допомогою двох паралельних прямих.

Приклад 2.

На рис. 42 точки D, E, F, G — середини відповідно ребер AS, SC, BC, AB тетраедра $ABCS$.

1) Встановити взаємне розміщення прямих AS і GE, DE і GF, DG і EF .

2) Знайти периметр чотирикутника $DEFG$, якщо $BS = 8$ см, $AC = 16$ см.

□ 1) Прямі AS і GE — мимобіжні, за ознакою мимобіжності (теорема 2.1), оскільки точки A, S, E, G не лежать в одній площині. Якби це було не так, то й точки A, B, C, S мали лежати в одній площині, адже точка B належить прямій AG , а точка C — прямій SE .

Прямі DE і GF — паралельні, за ознакою паралельності прямих (теорема 2.2). Справді, відрізки DE і GF паралельні відрізку AC як середні лінії трикутників ASC і ABC . Аналогічно встановлюється паралельність прямих DG і EF .

2) З паралельності відрізків DG і EF, DE і GF випливає, що чотирикутник $DEFG$ є паралелограмом. Довжини його сторін

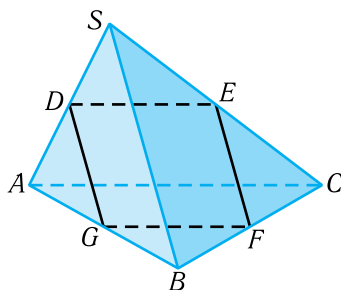


Рис. 42