



В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

для 21-го століття

В И Д А В Н И Ц Т В О
® **научальна книга** ®
Богдан
www.bohdan-books.com





Серія підручників з геометрії для 7 – 11 класів укладена на основі 40-річного досвіду автора з практичного навчання геометрії ліцеїстів і студентів фізико-математичного факультету, а також учнів Західноукраїнської заочної математичної школи при Тернопільському національному педагогічному університеті. В нагоді став і багатий досвід автора з популяризаторської і перекладацької діяльності.

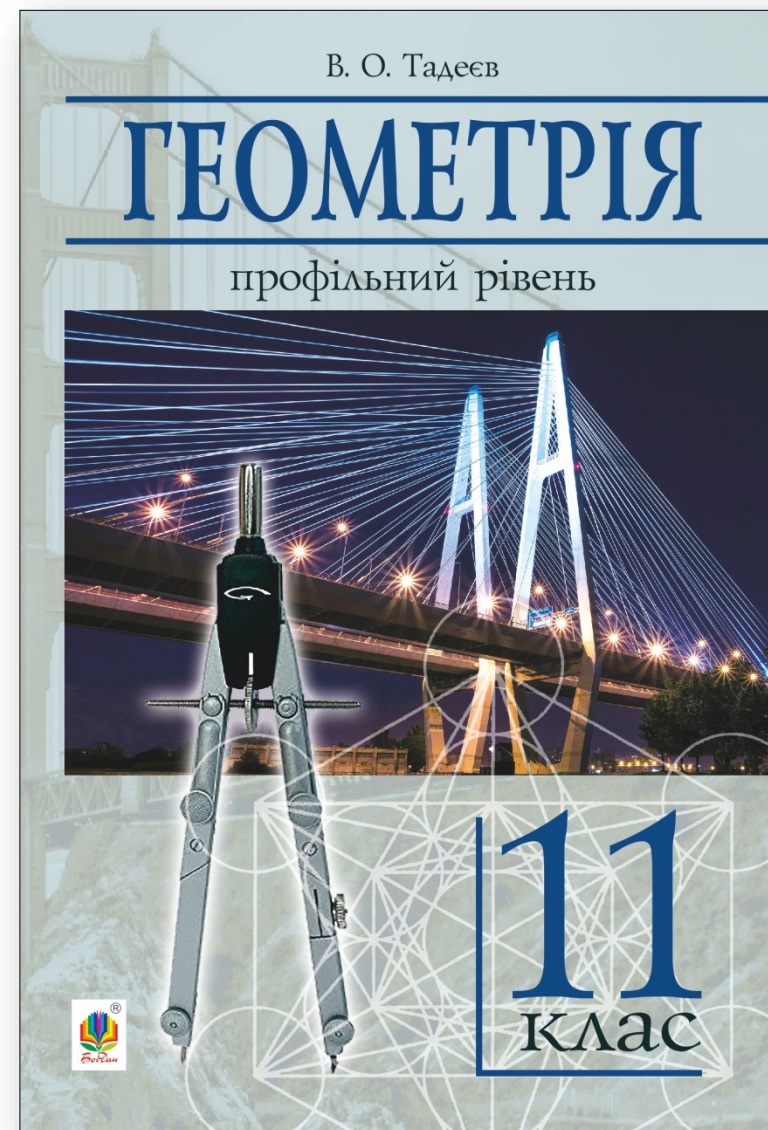
Поки ми переймалися питаннями про те, як краще навчати геометрії, виникла реальна загроза того, що невдовзі такого предмета в школі взагалі може не стати. Принаймні у тому традиційному статусі й вигляді, в якому ми поки що собі її уявляємо. Головних причин дві: «зовнішня» і «внутрішня».

«Зовнішня» причина — це надмірно запобігливе і непередумане переймання так званого «передового» зарубіжного досвіду, у якому роль геометрії зводиться до вузькоутилітарної рецептури і розчиненні її в «єдиній» математиці. Цю причину порівняно легко нейтралізувати. Достатньо сказати собі: «Живи власним розумом!».

«Внутрішньою» причиною є те, що вся наша методика у своєму розвитку зупинилася на рівні 1980-х років. За цей час кардинально змінилися суспільні мотиватори освіти, а ми й досі апелюємо до прикладної і практичної спрямованості та обов'язкових результатів навчання як до «невичерпного» джерела натхнення для теперішнього школяра. Сучасний курс геометрії повинен бути принципово іншим.

Далі коротко презентуємо підручник «Геометрія. 11 клас» для навчання на профільному рівні.

У своїх підручниках ми реалізуємо 4 основні принципи для модернізації шкільного курсу геометрії та його узгодження з новими суспільними тенденціями і досягненнями прогресивної методології та методики освіти.



I. Принцип рівневої диференціації змісту навчання

У передмовах для учнів та вчителів ми акцентуємо на ньому епіграфами з творів В.О. Сухомлинського, зокрема, таким:



Викладачі математики дають учням завдання кількох варіантів складності. Кожному надається можливість вибрати те, що йому під силу. Оскільки ж розумова праця відбувається в колективі, вона набуває характеру змагання творчих здібностей: ніхто не хоче бути слабшим, кожний прагне випробувати свої сили на складному завданні. В атмосфері змагання розкриваються таланти.

*Василь Сухомлинський.
«Павлиська середня школа»*

Про цей принцип свого часу дуже багато говорилося і писалося, але реального втілення у підручниках він здобув лише у нашій серії. У них навчальний матеріал структурований таким чином, що поряд із програмовими теоретичними питаннями (базовим рівнем) подаються питання для вивчення на поглибленому рівні — як доповнення, розширення або поглиблення останнього. Водночас, обидва ці рівні чітко розмежовані за допомогою відповідних поліграфічних засобів: матеріал для поглибленого рівня друкується трошки меншим шрифтом і на блакитному тлі.

Ось приклад сторінок із матеріалом про многогранні кути

Аналогічно доводяться й інші потрібні нерівності. Теорему доведено.

Наслідками з двох останніх теорем є такі важливі твердження.

Наслідок 1.

В опуклому многогранному куті сума усіх плоских кутів менша від 360° .

Наслідок 2.

Величина кожного плоского кута опуклого многогранного кута менша від суми решти його плоских кутів.

Доведення. 1. Нехай маємо опуклий многогранний кут $PA_1A_2A_3\dots A_n$ (див. рис. 3.1). Отже, визначальним для нього є опуклий многокутник $A_1A_2A_3\dots A_n$. При кожній вершині цього многокутника маємо тригранний кут. Застосовуючи до цих тригранних кутів теорему 3.2, матимемо:

$$\begin{aligned}\angle A_1A_2A_3 &< \angle A_1A_2P + \angle PA_1A_3; \\ \angle A_1A_2A_3 &< \angle A_1A_2P + \angle PA_2A_3;\end{aligned}$$

Додаючи почленно ці нерівності, в лівій частині знайденої нерівності матимемо суму кутів многокутника $A_1A_2A_3\dots A_n$, тобто величину $180^\circ(n-2)$. У правій же частині дістанемо суму кутів n трикутників $PA_1A_2, PA_2A_3, \dots$ без суми тих із них (позначимо її через S), які якраз і є плоскими кутами даного многогранного кута:

$$180^\circ(n-2) < 180^\circ \cdot n - S.$$

Звідси $S < 360^\circ$, що й треба було довести.

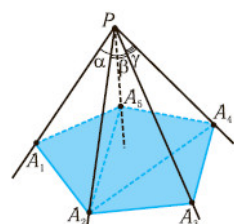


Рис. 3.12

2. Доведення другого наслідку проілюструємо на прикладі п'ятигранного опуклого кута.

Нехай маємо опуклий п'ятигранний кут $PA_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 3.12), плоскі кути $\angle A_1PA_2, \angle A_2PA_3, \angle A_3PA_4, \angle A_4PA_5, \angle A_5PA_1$ якого дорівнюють відповідно $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Проведемо з якої-небудь вершини визначального многокутника цього кута, наприклад, з A_2 , обидві його діагоналі. Цим визначиться розбиття даного п'ятигранного кута на три тригранні кути $PA_1A_2A_3, PA_2A_3A_4$ та $PA_2A_4A_5$. Застосовуючи теорему 3.2 до кожного із цих тригранних кутів, запишемо нерівності:

$$\begin{aligned}\alpha &< \varepsilon + \angle A_2PA_3; \quad \angle A_2PA_3 < \delta + \angle A_2PA_4; \\ \angle A_2PA_4 &< \gamma + \beta.\end{aligned}$$

Із цих нерівностей послідовно дістаємо:

$$\alpha < \varepsilon + \delta + \angle A_2PA_4 < \varepsilon + \delta + \gamma + \beta.$$

Таким самим способом можемо вивести й інші аналогічні нерівності. Твердження доведено.

3.3. Теорема косинусів для тригранних кутів



Що ж до величин двогранних кутів многогранного кута, то для тригранних кутів вони повністю визначаються їхніми плоскими кутами. Цей висновок ми виведемо як наслідок з наступної фундаментальної теореми.

Теорема 3.3 (косинусів для тригранних кутів).

Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута $Pabc$: $\alpha = \angle bpc, \beta = \angle apc, \gamma = \angle apb$ (рис. 3.13), а через $\angle C$ позначено величину протилежного кута γ двогранного кута при ребрі c , то

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cos \angle C. \quad (*)$$

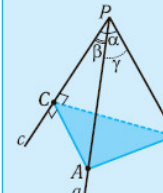


Рис. 3.13

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли обидва кути α і β — гострі (рис. 3.13). Візьмемо тоді на ребрі c яку-небудь точку C , відміну від P , і проведемо через неї у гранях Pac і Pbc прямі CA і CB , перпендикулярні до ребра c . Оскільки кути β і α — гострі, то існують точки A, B перетину цих прямих з променями a, b . Тоді $\angle ACB$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі c .

Вважатимемо для спрощення, що довжина відрізка PC дорівнює одиниці (цього завжди можна досягти відповідним вибором одиниці вимірювання відрізків). Тоді з прямокутних трикутників PCA і PCB :

$$PA = \frac{1}{\cos \beta}, \quad PB = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad CA = \tan \beta, \quad CB = \tan \alpha.$$

Застосовуючи теорему косинусів до трикутників PAB і CAB , матимемо:

$$AB^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{2}{\cos \beta \cos \alpha} \cdot \cos \gamma; \quad AB^2 = \tan^2 \beta + \tan^2 \alpha - 2 \tan \beta \tan \alpha \cdot \cos \angle C.$$

Порівнюючи тепер праві частини цих рівностей, після елементарних тригонометричних перетворень дістанемо потрібний результат:

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos \angle C.$$

Покажемо далі, що це ж співвідношення залишатиметься істинним і в тих випадках, коли не виконуватимуться умови, за яких воно виведено, тобто коли хоча б один із кутів — α чи β — не буде гострим.



Рис. 3.14

I. Нехай кути α і β — обидва тупі. Проведемо з точки P промінь c' , доповняльний до променя c (рис. 3.14). Тоді у тригранному куті $Pabc'$ плоский кут $\angle ab'c' = \gamma$, плоскі кути $\angle bc'p = 180^\circ - \alpha, \angle ac'p = 180^\circ - \beta$ — гострі, а двогранний кут при ребрі c' дорівнює $\angle C$. Тому, за щойно доведеним:

$$\cos \gamma = \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \beta) + \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \beta) \cdot \cos \angle C.$$

Звідси $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \angle C$. Тобто співвідношення (*) істинне і в цьому випадку.

II. Нехай тепер кути α і β обидва прямі (рис. 3.15). Тоді $\angle C = \gamma$, і отже, $\cos \gamma = \cos \angle C$. Але ця ж сама рівність виходить

Окрім зазначеного поєднання профільного й поглибленого рівнів, для реалізації цього принципу в підручнику запроваджено рубрику «Для тих, хто хоче знати більше». Навчальний матеріал цієї рубрики часом виходить навіть за програму поглибленого рівня, однак все ще тісно пов'язаний з ним і часто викладається у спеціалізованих фізико-математичних школах (ліцеях, гімназіях). Він друкується на світло-сірому фоні й адресується, перш за все, тим учням, які проявляють підвищений інтерес до теоретичних питань математики та її застосувань і в майбутньому планують пов'язати з цим свою професійну діяльність.

Приклади таких сторінок із матеріалом про правильні многогранники

74 Розділ І. Многогранники

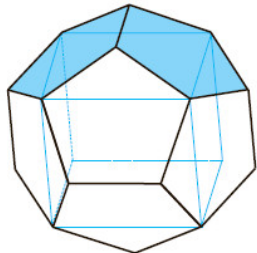


Рис. 4.7

3. Правильний додекаедр (дванадцятигранник).
Проведемо тепер через кожне ребро куба площину, яка, крім точок цього ребра, інших спільних точок з кубом не має. Причому проводимо ці площини так, щоб ті з них, які проходять через два протилежні ребра однієї грані, були нахилені до неї під деяким гострим кутом α , а ті, що проходять через два інші протилежні ребра цієї грані — під гострим кутом $\beta = 90^\circ - \alpha$ (рис. 4.7). У результаті взаємними перетинами проведених дванадцяти площин визначиться деякий опуклий дванадцятигранник (додекаедр). Гранями цього многогранника будуть п'ятикутники, а в кожній вершині сходиться по три його ребра. Можна показати, що кут α можна підібрати таким чином, щоб грані побудованого додекаедра були правильними п'ятикутниками, тобто щоб цей додекаедр був правильним.

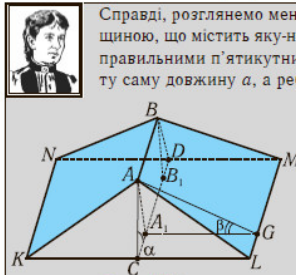


Рис. 4.8

Справді, розглянемо меншу частину побудованого додекаедра, яка відрізнена площиною, що містить яку-небудь грань куба (рис. 4.8). Якщо грані додекаедра будуть правильними п'ятикутниками, то відрізки AB, AK, AL, BN, BM матимуть одну й ту саму довжину a , а ребро q куба дорівнюватиме діагоналі цього п'ятикутника. Нехай A_1, B_1 — проекції точок A, B на площину LKM ; C, D — точки перетину прямої A_1B_1 з ребрами KL, MN куба. Тоді $A_1B_1 = AB = a$, $AC \perp KL$, $BD \perp MN$, а $\angle ACA_1 = \angle BDB_1 = \alpha$. Відомо, що внутрішні кути правильного п'ятикутника дорівнюють по 108° . Тому $\angle KAC = 54^\circ$, і з прямокутного трикутника ACK ($\angle C = 90^\circ$):
 $AC = a \cdot \cos 54^\circ$; $KC = a \cdot \sin 54^\circ$.
 Далі, з прямокутного трикутника AA_1C ($\angle A_1 = 90^\circ$):
 $CA_1 = AC \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos 54^\circ \cdot \cos \alpha$.
 Для визначення шуканого значення α скористаємося рівністю: $CD = 2CA_1 + A_1B_1$. Підставляючи сюди знайдені значення CA_1 , $A_1B_1 = a$, а також $CD = KL = 2KC = 2a \cdot \sin 54^\circ$, дістанемо:
 $2a \cdot \sin 54^\circ = 2a \cdot \cos 54^\circ \cdot \cos \alpha + a$.
 Звідси:

$$\cos \alpha = \frac{2 \sin 54^\circ - 1}{2 \cos 54^\circ}. \quad (1)$$

 Значення $\sin 54^\circ$ і $\cos 54^\circ$ неважко обчислити. Позначимо для спрощення кут 18° через φ . Тоді $2\varphi = 36^\circ$, а $3\varphi = 54^\circ$. Оскільки ж $36^\circ = 90^\circ - 54^\circ$, то $\cos 2\varphi = \sin 3\varphi$. Звідси за формулами подвійного і потрійного аргументів приходимо до співвідношення:
 $1 - 2x^2 = 3x - 4x^3$,
 де $x = \sin \varphi$. Або:
 $(x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$.

§4. Правильні многогранники 75

Враховуючи можливе значення для x , легко знаходимо, що $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Тоді
 $\sin 54^\circ = \sin 3\varphi = 3x - 4x^3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos 54^\circ = \cos 3\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 3\varphi} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Підставляючи ці значення у формулу (1), дістаємо:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}. \quad (2)$$

 Оскільки $\sqrt{10+2\sqrt{5}} > 2$, то $\cos \alpha < 1$. Отже, шуканий кут α існує.
 Знайдемо тепер кут β між площинами ALM та KLM і покажемо, що $\beta = 90^\circ - \alpha$. Проведемо для цього $AG \perp LM$ ($L \in LM$). Тоді буде: $A_1G \perp LM$. Отже, $\beta = \angle AGA_1$. З прямокутного трикутника AA_1G ($\angle A_1 = 90^\circ$):
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{AA_1}{A_1G} = \frac{AA_1}{KC}$.
 З трикутника AA_1C ($\angle A_1 = 90^\circ$): $AA_1 = AC \cdot \sin \alpha = AC \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} =$
 $= a \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{10+2\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}$. З урахуванням цього, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, і тому

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}. \quad (3)$$

 Порівнюючи тепер рівності (2) і (3), бачимо, що $\sin \beta = \cos \alpha$. Отже, $\beta = 90^\circ - \alpha$, що й треба було довести.
 Таким чином, провівши в описаних побудовах додекаедра площини під знайденими кутами α і β до граней куба, ми справді побудуємо *правильний додекаедр*.

Чи існують інші правильні многогранники, крім побудованих п'яти (рис. 4.9)? У самому кінці знаменитих «Начал» Евкліда доводиться твердження про те, що — не існують.

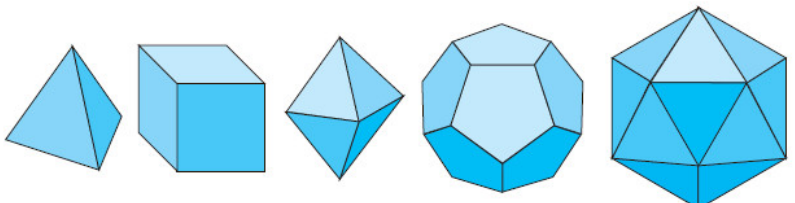


Рис. 4.9

Таким чином, кожен учень, незалежно від того, в якій школі чи класі він навчається, навіть у найпрестижнішому ліцеї чи найвіддаленішій сільській школі, має змогу вибирати та опановувати програму того рівня навчання, яка відповідає його інтересам і можливостям. Так само й учитель матиме додаткові засоби для реалізації диференційованого навчання.

Окрім зазначених поліграфічних засобів (шрифтів і кольорів), навчальний матеріал для поглибленого рівня та додаткового ознайомлення супроводжується портретами геніальних математиків Михайла Остроградського  і Софії Ковалевської.  Це має символічне значення, адже життя цих видатних учених засвідчує, зокрема, що математика однаково доступна як для чоловіків, так і для жінок, а також що успіхи в науці не залежать від місця народження — Остроградський народився на полтавському хуторі, а Ковалевська — у Москві. Біографії цих видатних математиків є яскравим прикладом того, що для досягнення успіху потрібно бути наполегливим та цілеспрямованим: і Остроградський, і Ковалевська з різних причин спочатку не здобули визнання на батьківщині, однак, завдячуючи таланту й сумлінній праці, згодом «підкорили» всю Європу.

II. Принцип історичної перспективи або історичного підходу

Окрім величезного значення для гуманітаризації навчання, для підвищення інтересу до вивчення наук, для виховання моральності та поваги до інших народів і культур, цей принцип має ще й важливу дидактичну функцію. При його реалізації учні у своєму розвитку неначе проходять важливими етапами, які пройшла сама наука, не перескакуючи через них і не опиняючись час від часу несподівано на тих рівнях, які їм ще недоступні.

Реалізація історичного підходу здійснюється двома шляхами. По-перше, поданням історичних відомостей під час розгортання основного змісту, а по-друге, введенням спеціальної рубрики «Сторінки історії», в якій подаються додаткові відомості про наукові дослідження у різні епохи, які безпосередньо пов'язані з темою, що вивчається. Хоча матеріал цієї рубрики не є обов'язковим для вивчення, однак він суттєво розширює кругозір і допомагає збагнути деякі внутрішні й зовнішні мотиви у розвитку математики, а отже, сприяє глибшому розумінню основ цієї науки. «Сторінки історії» друкуються на світло-блакитному фоні з музою історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас»: у правій руці муза тримає книгу та перо, а красномовним жестом лівої руки спонукає озирнутись.

Приклад рубрики «Сторінки історії» до теми «Об'єм піраміди»

Задача. Висота піраміди поділена на три рівні частини. Через точки поділу проведені площини, паралельні основі. Знайти відношення об'ємів частин, на які ці площини ділять дану піраміду.

Розв'язання. Як ми вже знаємо, перерізи P_1 , P_2 піраміди проведені площинами (рис. 5.13) подібні основі P піраміди, причому коефіцієнти подібності k_1 , k_2 дорівнюють відношенню відповідних частин висоти даної піраміди до всієї висоти. Отже, $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = \frac{2}{3}$. Якщо утворені перерізи прийняти за основи нових пірамід з тією ж вершиною, що й у даної піраміди, то, внаслідок подібності, відношення їхніх об'ємів до об'єму заданої піраміди дорівнюватимуть відповідно $k_1^3 = \frac{1}{27}$ та $k_2^3 = \frac{8}{27}$. Звідси об'єм меншої з утво-

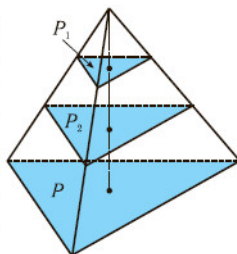


Рис. 5.13

рених пірамід дорівнюватиме $\frac{1}{27}V$, а об'єм більшої — $\frac{8}{27}V$, де V — об'єм заданої піраміди. Вся піраміда з об'ємом V розіб'ється на піраміду з об'ємом $\frac{1}{27}V$ та ще дві зрізані піраміди. Об'єм меншої зрізаної піраміди дорівнює $\frac{8}{27}V - \frac{1}{27}V = \frac{7}{27}V$, а об'єм більшої зрізаної піраміди — $V - \frac{8}{27}V = \frac{19}{27}V$.

Отже, шукане відношення об'ємів частин дорівнює $\frac{1}{27} : \frac{7}{27} : \frac{19}{27}$, тобто $1 : 7 : 19$.

Відповідь $1 : 7 : 19$. ■

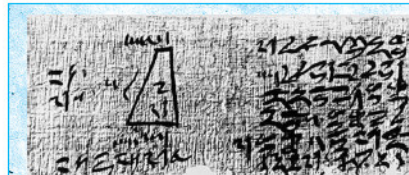


СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Обчислення об'єму піраміди: від давніх єгиптян — до 3-ої проблеми Гільберта

Давні єгиптяни. Піраміда з давніх-давен привертала увагу допитливих шукачів істини. В одній з небагатьох пам'яток математичної культури давніх єгиптян, що дійшли до нас, — так званому Московському папірусі (назва походить від місця теперішнього його зберігання) — міститься фрагмент, присвячений обчисленню об'єму зрізаної піраміди. Ось переклад цього фрагмента.

«Якщо тобі називають піраміду 6 ліктів висотою, 4 лікті в нижній стороні і 2 лікті у верхній стороні, то обчисли з цими 4, піднісши їх до квадрата; виходить 16. Подвоївши 4, матимеш 8. Обчисли з цими 2, піднісши їх до квадрата; матимеш 4. Склади ті 16 з тими 8 і з цими 4; матимеш 28. Розділи 6 на 3; матимеш 2. Обчисли 28 двічі; матимеш 56. Дивись: вона є 56. Ти знайшов правильно».



Неважко зрозуміти, що тут йдеться про обчислення об'єму зрізаної піраміди з квадратними основами розмірами 4×4 та 2×2 лікті і висотою 6 ліктів, і що це обчислення проводиться у повній відповідності з правильною для цього випадку формулою $V = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2)$, де a , b — сторони квадратних основ піраміди, H — її висота.

Яким же чином прадавній жрець-математик міг знайти такий феноменальний результат? Про це зараз можна лише гадати. Наявні пам'ятки про це не співіщують. Існує декілька вірогідних гіпотез.

Умовний рисунок піраміди, поміщений у тексті фрагмента, здається, вказує на те, що одне з бічних ребер піраміди мислиться перпендикулярним до основ. Якщо справді розглядався саме такий випадок, то міркування могли бути такими. Провівши через дві суміжні сторони верхньої основи піраміди, які належать похилим бічним граням, площини, перпендикулярні до основ (рис. 5.14), відістанемо розбиття даної зрізаної піраміди на декілька простіших многогранників. А саме: на прямокутний паралелепіпед з вимірами b , $a - b$, H ; на дві прямі трикутні призми, які після відповідного прикладання однієї до одної дадуть ще один прямокутний паралелепіпед з вимірами b , $a - b$, H , та на повну чотирикутну піраміду з квадратною основою розміром $(a - b) \times (a - b)$ і висотою H . Тому

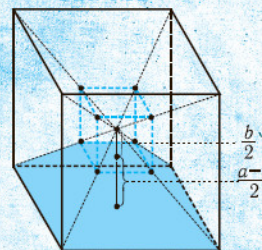


Рис. 5.14

$$V = b^2 \cdot H + b(a - b) \cdot H + \frac{1}{3}(a - b)^2 \cdot H = \frac{1}{3}H(a^2 + ab + b^2).$$

Проте вірогідніше, з огляду на весь характер тієї епохи, що малась на увазі все-таки *правильна* чотирикутна зрізана піраміда. Таку фігуру можна дістати з куба, ребро якого a , якщо вилучити з нього менший куб з ребром b (рис. 5.15). Центри кубів мають збігатися, а їхні грані — бути паралельними (такі куби гомотетичні). Якщо сполучити відрізками вершини нижньої основи меншого куба з відповідними вершинами нижньої основи більшого, то якраз і відістанемо правильну зрізану чотирикутну піраміду з ребрами основ a і b . Якщо ж такі піраміди «прив'язати» до кожної грані більшого куба, то відістанемо розбиття цього куба на 6 таких пірамід і менший куб. Отже, об'єм однієї зрізаної піраміди дорівнюватиме:

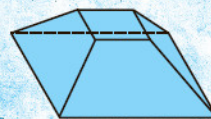


Рис. 5.15

$$V = \frac{1}{6}(a^3 - b^3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

Якщо ж, нарешті, візьмемо до уваги, що величина $\frac{a-b}{2}$ є висотою H зрізаної піраміди, то звідси й вийде потрібна формула для її об'єму.

На такий спосіб міркувань давнього дослідника могло навести простіше спостереження, що куб легко розбивається на 6 повних правильних чотирикутних пірамід (рис. 5.16). Звідси, до речі, єгиптяни могли дістати і добре відому їм формулу для обчислення об'єму таких пірамід: $V = \frac{1}{3} S \cdot H$.

Щоправда, як у першій, так і в цій другій зі знайдених таким способом формул величини a , b , H — взаємозалежні (у першій $\frac{a-b}{2} = H$, а в другій — $\frac{a}{2} = H$). Але ця обставина в той час могла сприйматися як несуттєва, і знайдені часткові результати могли без ваган поширюватися на загальний випадок.

Демокріт і Кавальєрі. Демокріт з міста Абдери жив у V ст. до н. е. і прославився як один з найвпливовіших грецьких філософів. Кредо його філософії природи полягало в гіпотезі про існування найдрібніших неподільних структурних елементів речовини — так званих атомів. Ця гіпотеза в різні епохи то заперечувалася, то відновлювалася знову, і загалом справила і продовжує справляти величезний вплив на розвиток наукових ідей.

Жодної праці самого Демокріта до нас не дійшло. Залишилися лише свідчення пізніших учених, зокрема Архімеда, які сповідають, що свої атомістичні уявлення Демокріт поширював і на геометрію і що це дало йому змогу строго довести формулу для обчислення об'єму піраміди. Геометричні тіла Демокріт уявляв складеними з тонких паралельних пластинок, товщина яких дорівнює величині одного атома. Як насправді можна було зробити цю ідею результативною, ми можемо побачити на прикладі «Геометрії» італійського ученого Бонавентури Кавальєрі (1598–1647), в якій через багато століть були застосовані до геометрії правдані атомістичні ідеї Демокріта.

Нехай маємо піраміду і призму, наприклад, трикутні (рис. 5.17) з рівновеликими основами і рівними висотами. Позначимо через V_1 , V_2 їхні об'єми. Припустимо, що площі основ цих фігур містять по n^2 квадратних одиниць. Поділимо їхні висоти на n рівних частин і через точки поділу проведемо площини, паралельні основі. Тоді сума площ трикутників, що утворилися в перерізі піраміди

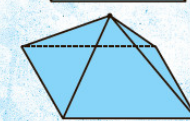
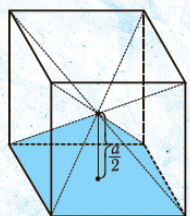


Рис. 5.16



Демокріт

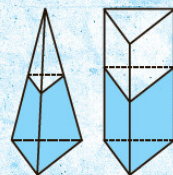


Рис. 5.17



Кавальєрі

відповідно до наслідку з теореми 5.2), разом з основою дорівнюватиме $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$ квадратних одиниць. В алгебрі доводиться, що це число дорівнює $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Сума ж площ відповідних перерізів піраміди дорівнюватиме $n^2 + n^2 + \dots + n^2 = n^2 \cdot n = n^3$ квадратних одиниць. Відповідно до атомістичного принципу, відношення цих сум $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ приймається за наближене значення відношень об'ємів даних фігур. Причому, — наближення тим точнішим, чим більше число n . Оскільки квадратні одиниці для вимірювання площ можна як завгодно подрібнювати, то й число n можна зробити як завгодно великим. За рахунок цього число $\frac{1}{n}$ можна зробити як завгодно малим. Тому $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$. Отже, $V_1 = \frac{1}{3} V_2$. Знаючи формулу $V = S \cdot H$ для об'єму піраміди, звідси легко виводиться формула для об'єму піраміди: $V = \frac{1}{3} S \cdot H$.



Архімед.

З картини Доменіко Фетті

Третя проблема Гільберта. З точки зору класичної математики сталих величин, виведення формули для об'єму піраміди за способом Архімеда теж було недосконалим, оскільки передбачало оперування з нескінченно малими і нескінченно великими величинами. А чи не можна обійтися без цього — так, як ми виводимо

формулу для площі трикутника або об'єму призми — тобто лише добудовою, розрізанням і перебудовою піраміди у рівновелику їй призму?

Ця проблема стала однією зі знаменитих 23-х проблем Гільберта (третьою за списком), які цей видатний математик виділив як «заповіт дев'ятнадцятого століття двадцятому».

Давид Гільберт (1862–1943) був одним з найвидатніших математиків усіх епох, «останнім енциклопедистом у царині математики», інтереси й вагомні наукові результати якого обіймали практично всю сучасну йому математичну науку. Свою знамениту доповідь, в якій були сформульовані найбільші математичні проблеми для XX ст., Гільберт прочитав у серпні 1900 р. в Парижі на II Міжнародному математичному конгресі. А вже через рік 3-тю із них розв'язав Макс Ден (1878–1952), учень Гільберта (деякі з проблем Гільберта не розв'язані й досі). Макс Ден з'ясував необхідні умови, за яких многогранник одного виду можна перебудувати у рівновеликий йому многогранник іншого виду. Тетраедри і призма ці умови в загальному випадку не задовольняють. Отже, в загальному випадку вивести формулу для об'єму піраміди без здійснення в тій чи іншій формі граничного переходу неможливо. Демокріт і Архімед мали рацію!

Коли Макс Ден зайнявся третьою проблемою Гільберта, йому не виповнилося й 22 років, і він, мабуть, ще добре пам'ятав той час, коли сам вивчав шкільну геометрію. Пам'ятав... і продовжував займатися нею.

Бажаємо й вам з таким же захопленням вивчати геометрію.

формулу для площі трикутника або об'єму призми — тобто лише добудовою, розрізанням і перебудовою піраміди у рівновелику їй призму?

Ця проблема стала однією зі знаменитих 23-х проблем Гільберта (третьою за списком), які цей видатний математик виділив як «заповіт дев'ятнадцятого століття двадцятому».

Давид Гільберт (1862–1943) був одним з найвидатніших математиків усіх епох, «останнім енциклопедистом у царині математики», інтереси й вагомні наукові результати якого обіймали практично всю сучасну йому математичну науку. Свою знамениту доповідь, в якій були сформульовані найбільші математичні проблеми для XX ст., Гільберт прочитав у серпні 1900 р. в Парижі на II Міжнародному математичному конгресі. А вже через рік 3-тю із них розв'язав Макс Ден (1878–1952), учень Гільберта (деякі з проблем Гільберта не розв'язані й досі). Макс Ден з'ясував необхідні умови, за яких многогранник одного виду можна перебудувати у рівновеликий йому многогранник іншого виду. Тетраедри і призма ці умови в загальному випадку не задовольняють. Отже, в загальному випадку вивести формулу для об'єму піраміди без здійснення в тій чи іншій формі граничного переходу неможливо. Демокріт і Архімед мали рацію!

Коли Макс Ден зайнявся третьою проблемою Гільберта, йому не виповнилося й 22 років, і він, мабуть, ще добре пам'ятав той час, коли сам вивчав шкільну геометрію. Пам'ятав... і продовжував займатися нею.

Бажаємо й вам з таким же захопленням вивчати геометрію.



Давид Гільберт



Макс Ден



Задачі і вправи

- 252°. Призма і піраміда мають спільну основу і рівні висоти. Як співвідносяться їхні об'єми V_1 і V_2 ?
- 253°. Призма і піраміда мають спільну основу, але висота призми вдвічі менша за висоту піраміди. Яка з цих фігур має більший об'єм?
- 254°. Як зміниться об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її висоту зменшити удвітеро, а сторону основи збільшити удвічі? Чи зміниться відповідь, якщо замість чотирикутної піраміди взяти довільну n -кутну?
- 255°. Знайдіть об'єм піраміди, висота якої дорівнює H , а в основі лежить прямокутник зі сторонами a і b .
- 256°. Виведіть формули для об'єму правильної піраміди зі стороною основи a і висотою h : а) чотирикутної; б) трикутної; в) шестикутної.

III. Принцип міжпредметних зв'язків та прикладної спрямованості навчання

Він дає змогу істотно підвищити мотивацію до навчання, а також постійно підтримувати пізнавальний інтерес учнів. Зокрема, великого значення у підручнику надається зв'язкам геометрії з класичним мистецтвом. З цією метою подаються репродукції живописних і графічних творів, а також зображення архітектурних споруд, що мають «геометричний» підтекст.

тобто «вогонь». У деяких середньовічних підручниках з геометрії піраміда так і називалася — «вогненне тіло».

Правильні пірамідальні форми здавна приваблювали художників. Нижче подано два приклади.



Ліворуч. «Долина пірамід». Картина литовського художника і композитора Мікалоюса Чюрльоніса (1875–1911). Використовуючи геометричні засоби, художник контрастно зіставив різні сторони буття.

Праворуч. Титульна сторінка з трактату «Аналіз краси» англійського художника і дослідника XVIII ст. Вільяма Хогарта. Трактат видано в Лондоні у 1753 р. «з метою закріпити мішані ідеї смаку». Символом естетичного кредо автора була зображена тут чотирикутна піраміда зі вписаною вигнутою лінією, яку Хогарт називав «лінійною красою». У лівовисній композиції, за Хогартом, повинні гармонійно поєднуватися геометричні і суто художні начала. Це дає змогу досягти VARIETY, тобто різноманіття.

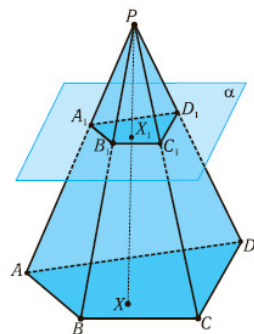
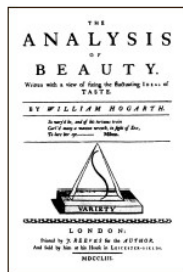


Рис. 1.21

Теорема 1.2 (про переріз піраміди площиною, паралельною основі).

Площина, яка перетинає бічні ребра піраміди у внутрішніх точках і паралельна її основі, перетинає піраміду по многокутнику, гомотетичному основі.

Доведення. Нехай для визначеності дано чотирикутну піраміду $PABCD$, а площина α , яка паралельна основі $ABCD$ піраміди, перетинає бічне ребро PA у внутрішній точці A_1 (рис. 1.21). Оскільки прямі PB, PC, PD перетинають площину ABC , то вони перетинають і паралельну їй площину α . Позначимо відповідні точки перетину через B_1, C_1, D_1 . Оскільки прямі A_1B_1 та AB є лініями перетину площини PAB з паралельними площинами α та ABC , то $A_1B_1 \parallel AB$.

паралелепіда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (див. рис. 1.24, 6). Оскільки $D_1 A_1 \parallel C_1 B_1$, а $D_1 D \parallel C_1 C$, то, за ознакою паралельності площин, площини цих граней є паралельними. А оскільки $D_1 C_1 \parallel A_1 B_1 \parallel DC \parallel AB$, то грань $C_1 B_1 BC$ можна розглядати як паралельну проекцію грані $D_1 A_1 AD$. Відповідно до означення, це й означає, що ці грані можна вважати основами даного паралелепіда.

Як наслідок, маємо таку властивість.

Протилежні бічні грані паралелепіда є паралельними (тобто лежать у паралельних площинах) і рівними між собою.

Дві вершини паралелепіда, які не належать одній грані, називаються **протилежними**. Відрізок, що сполучає дві протилежні вершини, є **діагоною** паралелепіда. Кожний паралелепіпед має 4 діагоналі. Переріз паралелепіда площиною, яка містить два його протилежних бічних ребра, а отже, і дві діагоналі паралелепіда, називається **діагональним перерізом**. У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, зображеному на рис. 1.25, діагоналями є відрізки AC_1, BD_1, CA_1 та DB_1 , а діагональними перерізами — паралелограми $DD_1 B_1 B$ та $AA_1 C_1 C$. Із того, що діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, легко вивести, що цю властивість мають і діагоналі паралелепіда, тобто, що **всі чотири діагоналі паралелепіда перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл**.

Якщо всі бічні грані паралелепіда є прямокутниками, то такий паралелепіпед називається **прямым**. А якщо, крім того, прямокутниками є й основи, то паралелепіпед називається **прямокутним**. Непрямі паралелепіпеди часто називають **похилими**.

Нижче наводяться два приклади архітектурного втілення прямокутних паралелепіпедів. Приклади такого втілення похилих паралелепіпедів зображено на першому форзаці підручника.

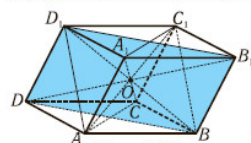


Рис. 1.25



«Прямокутні паралелепіпеди» Інституту науково-технічної та економічної інформації Національної Академії наук та Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського у Києві



§9. Куля і сфера

Якби створення земної кулі доручили людині, то вона, напевне, виточила б її на токарному верстаті, як більярдну кульку, не залишивши на ній ні шершавостей, ні складок.

Жуль Верн, «Матіас Шандор»

Циліндр, конус і взагалі тіла обертання інколи називають ще **круглими** тілами, зважаючи на те, що їхні фізичні моделі можна вільно котити по плоскій поверхні. Проте напрямком цього руху, як правило, визначається початковим положенням тіла. Так, циліндр може котитися у напрямку, який перпендикулярний до його осі, а конус — лише навколо своєї вершини. Однак є тіло, яке може котитися у будь-якому напрямку, і яке, отже, є «найкруглішим» з усіх круглих тіл. Це — куля (згадайте про м'яч на футбольному полі чи більярдну кулю на столі).



Рис. 9.1



Рис. 9.2

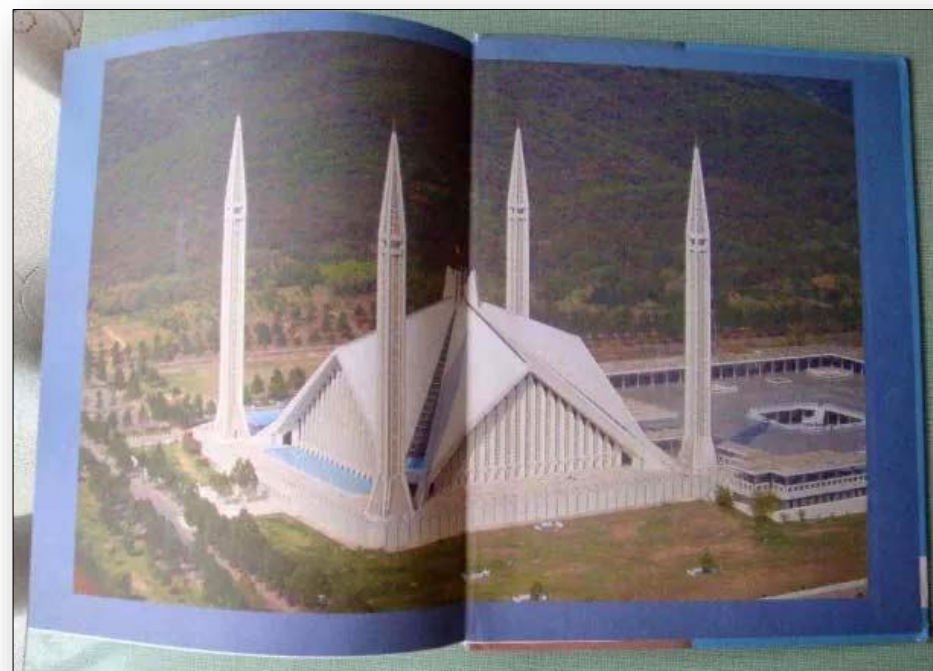
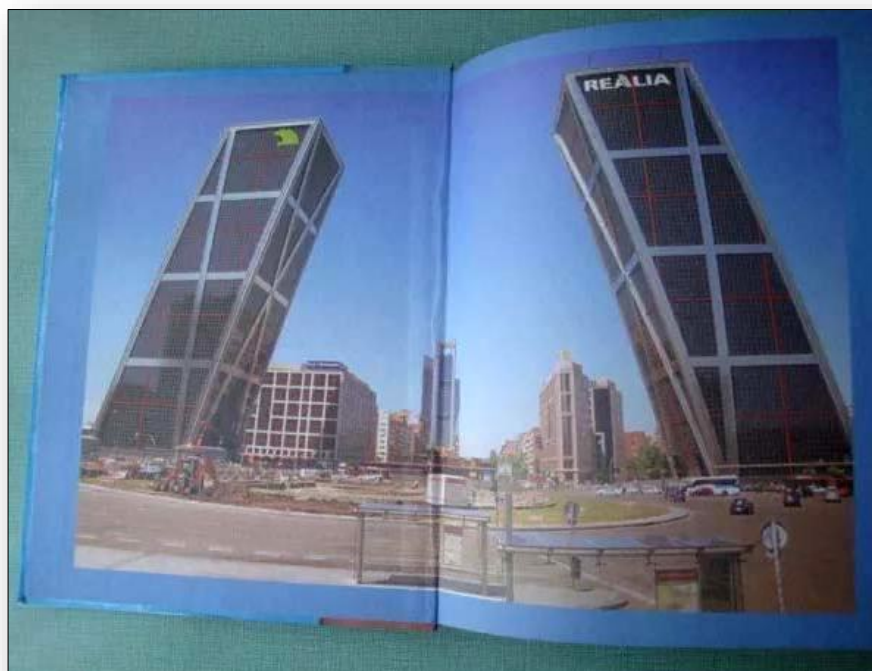
Ще давні піфагорійці вважали кулю найдосконалішим з усіх тіл, а форму її поверхні — сфери — приписували небу як найдосконалішому елементу Всесвіту. Платон, який багато в чому розвивав погляди піфагорійців, так писав про світ: «А обрисів Бог надав Всесвіту таких, які були б лише йому притаманними... Отже, він шляхом обертання округлив космос до стану кулі, поверхня якої всюди рівновіддалена від центра» (діалог «Тімей»; цікаво, що саме назва цього твору написана на корінці книги, з якою Рафаель зобразив Платона (разом з Аристотелем) у центрі своєї знаменитої фрески «Афіньська школа»).

З тих часів сфера стала основною моделлю зоряного неба, що застосовується в астрономії і донині.

Пізніше, коли були підтверджені давні здогадки про округлість Землі, кулястий глобус став основною моделлю всієї нашої планети. Відома картина Яна Вермера «Учений» (рис. 9.1) та скульптурна група Феодосія Щедріна «Морські німфи, що несуть глобус» (рис. 9.2) — яскраві приклади художнього відображення захопленості людства цими відкриттями.

Ще пізніше уже дрібні кульки стали використовуватися при моделюванні матерії на тонкому рівні — молекули, атоми, електрони тощо. А в сучасній фізиці одним із найважливіших положень є те, що кулясті і сферичні форми — це наслідок фундаментального принципу мінімуму енергії, до чого «прагне» будь-яка фізична система.

Узагалі, ілюстративному матеріалу в підручнику надається дуже великого значення. Навіть форзаци відведені не під «формули і таблиці», як це зазвичай робиться, а для зображення двох грандіозних сучасних архітектурних споруд — «Воріт Європи» (1996 р.) у Мадриді та мечеті Шай Фейсал в Ісламабаді (1986 р.). За словами видатного архітектора Ле Корбузьє, «архітектура — це геометрія в камені». Цей фактор — один із найпотужніших мотиваторів для вивчення геометрії сучасним школярем.



IV. Принцип відповідності логіки розгортання змісту навчання логіці основних методів досліджень у математиці

Геометрія у підручнику подається не догматично, не як одкровення, що зійшло на обраних і передається від учителя до учнів. Навпаки, підручник постійно спонукає учнів теоретизувати (що, до речі, у дослівному перекладі з грецької означає «придивлятися») і бути активними співучасниками у відкритті нового знання. У підручнику також витримано належний рівень математичної строгості в обґрунтуванні основних положень і в наведених розв'язаннях задач. Дуже великого значення надається обґрунтуванню способів побудови зображень геометричних тіл у паралельній проекції, хоча цей матеріал і подається для поглибленого вивчення.



Задачі і вправи

- 403°. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат зі стороною a . Визначте об'єм циліндра.
- 404°. Знайдіть відношення об'ємів двох різних циліндрів, розгорткою бічної поверхні кожного з яких є один і той самий прямокутник з відношенням сторін 1 : 2.
405. Кут між діагоналями розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює α , а сама діагональ — d . Визначте площі бічної та повної поверхні циліндра.
406. Із квадрата з діагоналлю d згорнули бічну поверхню циліндра. Визначте площу його основи.
407. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, одна зі сторін якого вдвічі більша за іншу. Площа бічної поверхні циліндра становить 20 дм^2 . Визначте площу його повної поверхні, якщо твірна циліндра дорівнює меншій стороні його розгортки.
- 408°. Два циліндри з висотами a і b мають рівні розгортки бічних поверхонь. При якому відношенні $a : b$ площа повної поверхні циліндра з висотою a вдвічі перевищуватиме площу повної поверхні іншого циліндра?
- 409°. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d і утворює зі стороною, що є розгорткою кола основи, кут α . Визначте величину кута α , при якій повна поверхня циліндра має найбільше значення.

7.4. Про побудову зображення циліндра та його перерізів



Відповідно до усталеної традиції, зображенням просторової фігури у стереометрії називається паралельна проєкція на площину деякого її каркаса в поєднанні з обрисом фігури — границею проєкцій усіх її точок.

За каркас циліндра беруться кола його основ, а також один-два осьових перерізи. Що ж до побудови проєкцій каркаса, а також обрису циліндра, то все це, природно, залежить від конкретних умов проєктування — його напрямку та розміщення площини проєкцій. Оскільки циліндр — фігура, симетрична відносно своєї осі, то для максимальної наочності його зображення потрібно забезпечити такі умови проєктування, за яких побудована проєкція буде симетричною відносно проєкції осі. Цього, зокрема, можна досягти, якщо напрям проєктування l взяти нахиленим до площини проєкцій π таким чином, щоб проєктуєча площина σ для осі s циліндра була перпендикулярною до площини проєкцій π (рис. 7.38). Тоді як сам циліндр, так і його проєкція будуть симетричними відносно цієї площини σ , а отже, проєкція — симетричною відносно зображення z осі s .

Щодо інших особливостей, які матиме зображення циліндра за таких умов проєктування, слід зазначити таке. Оскільки існують дві проєктуєчі площини A_0D_0A та B_0C_0B , які дотикаються до циліндра і перпендикулярні до площини π (їхні сліди D_0D_1 та C_0C_1 на площині α однієї з основ циліндра є дотичними до цієї основи і перпендикулярними до прямої $D_1C_1 = \pi \cap \alpha$, а твірні A_0D_0 та B_0C_0 дотичу — симетричними відносно як осі s , так і площини σ), то проєкція циліндра обмежується проєкціями AD та BC названих твірних дотичу. Отже, відрізки AD і BC входять до обрису циліндра.

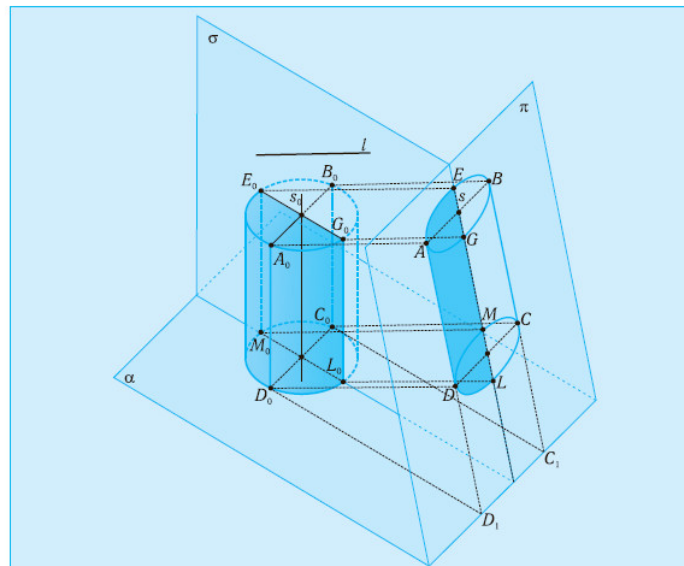


Рис. 7.38

Інші складові обрису — частини еліпсів, які є зображеннями півкіл $A_0E_0B_0$ та $C_0L_0D_0$. А оскільки згадані вище проєктуєчі площини A_0D_0A і B_0C_0B містять дотичні D_0D_1 та C_0C_1 до основи циліндра (а також відповідні дотичні до іншої основи, не зображені на рисунку), то проєкції прямих A_0D_0 і B_0C_0 збігаються з проєкціями дотичних D_0D_1 та C_0C_1 (а також і з проєкціями відповідних дотичних до другої основи). Отже, зображення AD і BC твірних, які обмежують обрис, дотикаються до зображень основ, причому в діаметрально протилежних точках. Прямокутник $ABCD$ — зображення одного з осьових перерізів циліндра.

Оскільки, далі, діаметри A_0B_0 і D_0C_0 основ циліндра перпендикулярні до площини σ , то вони паралельні площині π , а отже, проєктується на цю площину в свою натуральну величину, що дорівнює діаметру циліндра. При цьому їхні зображення AB і DC — головні діаметри зображення основ циліндра, бо при симетрії відносно прямої z у площині π вони разом зі своїми еліпсами відображаються самі в себе. Інші головні діаметри EG та ML належать осі s , бо весь осьовий переріз $E_0F_0L_0M_0$, що перпендикулярний до перерізу

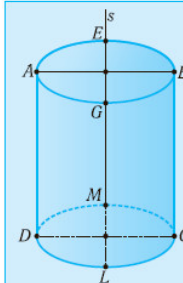


Рис. 7.39

$A_0B_0C_0D_0$, проєктується на пряму z (рис. 7.39). Звідси, зокрема, маємо такий висновок: якщо потрібно на одному рисунку зобразити два взаємно перпендикулярних осьових перерізи циліндра, то за зображення їхніх сторін, що належать основам циліндра, потрібно брати такі спряжені діаметри зображень основ, які не є головними (рис. 7.40). Осьові перерізи, зображені на рис. 7.41, згідно із цим висновком, ілюструють взаємно перпендикулярні осьові перерізи циліндра не в повній відповідності із закономірностями побудови зображень у паралельній проєкції.

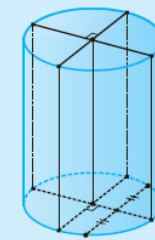


Рис. 7.40

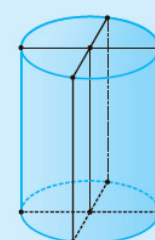


Рис. 7.41

Побудова зображень плоских перерізів циліндра нічим суттєвим не відрізняється від побудови перерізів многогранників. Як і у випадку з многогранниками, задача врешті-решт зводиться до побудови точок перетину прямої з поверхнею тіла. Відмінність лише в тому, що у випадку многогранника для побудови лінії перетину січної площини з площиною якої-небудь грані достатньо знайти лише дві точки цієї лінії (бо вона — пряма), а у випадку циліндра для побудови лінії перетину з бічною поверхнею таких точок потрібно чимало, аби точніше провести шукану лінію — еліпс чи якусь його частину.

Отже, розглянемо спосіб побудови точок перетину прямої a з поверхнею циліндра (рис. 7.42).

Проводимо через пряму a допоміжну площину α , перпендикулярну до основ циліндра, і визначаємо лінії перетину цієї площини з бічною поверхнею циліндра (твірні) та осно-

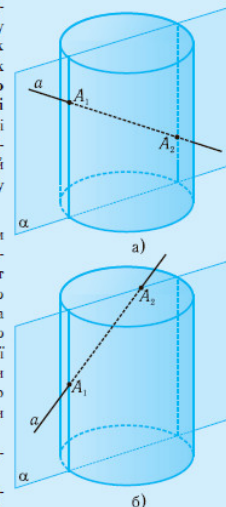


Рис. 7.42

Багато методистів і вчителів-практиків не раз схвально відгукувалися про наші підручники, а дехто навіть називав їх «підручниками майбутнього». Однак майбутнє може бути й дуже далеким, якщо ми не будемо його наближати.

Мабуть, найгостріше відчуття часу є в астрономів і космонавтів. Тому ми завершимо цю презентацію ексклюзивними передмовами, які ще зовсім недавно написали до наших підручників для 7 і 8 класів 2015 і 2016 років видання видатні українці — астрономи й астрофізики Клим Чурюмов та Світлана Герасименко, а також космонавт Леонід Каденюк.



**Напутнє слово
всесвітньо відомих українських учених-астрофізиків
Клима Чурюмова і Світлани Герасименко^{*)}**

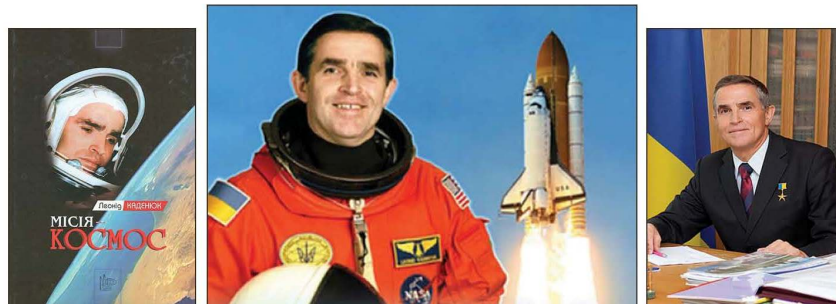
Дорогі семикласники!

Усі ми — зоряні діти. Унаслідок трансформації зір першого покоління, їхня речовина збиралася у величезні хмари, а з них народжувалися зорі другого покоління та оточуючі їх планети. Однією із зір другого покоління стало наше Сонце, а його планетою — Земля. Чи не тому таким пристрасним є прагнення людини до зір, частки яких є всередині кожного з нас? Однак для того, аби мати змогу осягати велич і гармонію Космосу, а в ньому унікальність нашої земної цивілізації, потрібно наполегливо вивчати точні науки — астрономію, фізику, математику.

За цим підручником ви приступате до вивчення геометрії — науки, котра, незважаючи на своє земне походження (а її назва в дослівному перекладі з грецької мови означає «вимірювання землі»), завжди була й космічною. Вже найдавніші учені-геометри спочатку шукали порядок і гармонію у Космосі і тільки після цього переносили її у свої земні теорії, а будівничі й митці втілювали у творіннях архітектури, техніки, живописного та декоративного мистецтва. Не меншою мірою ця космічна риса геометрії була характерною й для пізніших епох, а в нових формах — і для сьогодення. Глибоко символічно, що вимірювання довжин у метрах прийшло у геометрію з геодезії, а вимірювання кутів у градусах — з астрономії, а разом вони поєдналися в аксіоматичній основі сучасної геометрії. У цьому підручнику ви постійно матимете нагоду помічати ці космічні риси геометрії, чим він вигідно вирізняється з-поміж інших. І ми, як професійні учені, котрим доля дарувала щастя зробити свій внесок у розкриття Космічної гармонії, закликаємо вас з цікавістю й наполегливістю вивчати геометрію, що стала однією з найважливіших ланок у ланцюгу культурних надбань цивілізації і є потужним фундаментом для її майбутніх досягнень та злетів.

Вивчайте науки — і ваші зорі усміхнуться вам!

^{*)} Відкривачі комети Чурюмова–Герасименко, яку в 2004 р. Європейське космічне агентство обрало для втілення унікального міжнародного проекту «Розетта» із запуску космічного зонда та посадки спускового модуля на ядро комети. Про них і про проект «Розетта» дивіться на наступній сторінці. — Прим. видавництва.



Напутнє слово першого космонавта незалежної України, Героя України Леоніда Каденюка¹⁾

Дорогі восьмикласники!

Ми живемо в епоху небувалого розвитку науки і техніки, користуємося їхніми досягненнями: Інтернетом, мобільним зв'язком, мультимедійними технологіями. Це — чудова можливість для пізнання світу, якої у нас, дітей 60-х років минулого століття, не було. Але у нас були мрії і бажання змінювати світ, творити, досягати вершин. Переконалися, що й у вас теж є свої високі мрії.

Дитинство мого покоління припало на початок Космічної Ери — нового етапу цивілізаційного поступу людства. Перший штучний супутник Землі і перший політ людини в космос мали доленосне значення не лише для нашої планети, а й для Всесвіту в цілому. Моя дитяча мрія була пов'язана з підкоренням космосу, пізнанням таємниць Всесвіту. Нестримне бажання піднятися ввись, побачити нашу планету з космічної орбіти спонукало мене пройти непростий та надзвичайно цікавий шлях для здійснення цієї мрії. Мене часто запитують, чи важко стати космонавтом? Звичайно, важко, — відповідаю я. — Але якщо таку мрію міг втілити в життя хлопчина з буковинського села, то так само це можете зробити й ви.

Окремо хочу наголосити, що тепер найвищі вершини в усіх сферах діяльності доступні не тільки чоловікам, як було ще порівняно недавно, а й жінкам. Навіть — у космонавтиці. На початок липня 2016 р. вже 60 жінок з 10 країн світу здійснили космічні польоти. Приємно відзначити, що

¹⁾ **Леонід Костянтинович Каденюк** народився 1951 р. у с. Клішківці Хотинського району Чернівецької області в сім'ї сільських учителів. У 1967 р., після закінчення середньої школи зі срібною медаллю, вступив до Чернігівського вищого військового авіаційного училища і закінчив його у 1971 р. за спеціальністю «Пілотування і експлуатація літальних апаратів». У серпні 1976 року був відібраний до загону радянських космонавтів у групу багаторазової космічної системи «Буран». У 1988–1990 рр. пройшов інженерну та льотну підготовку як командир «Бурана», а в 1990–1992 рр. — як командир транспортного корабля «Союз-ТМ».

За час підготовки до космічних польотів пройшов підготовку з проведення наукових експериментів на борту космічних літальних апаратів у найрізноманітніших напрямках: біологія, медицина, метрологія, екологія, дослідження природних ресурсів Землі із космосу, геологія, астрономія, геоботаніка. У 1995 р. був відібраний від України для підготовки до космічного польоту на американському космічному кораблі багаторазового використання «Колумбія» як спеціаліст з корисного навантаження. З 19 листопада по 5 грудня 1997 року здійснив космічний політ на цьому кораблі з місією STS-87. Під час польоту виконував біологічні експерименти спільного українсько-американського дослідження з трьома видами рослин: ріпи, сої і мюли. Головна мета цих експериментів полягала у вивченні впливу стану невагомості на фотосинтетичний апарат рослин, на запліднення та розвиток зародків, на експресію генів у тканинах, на вміст фітогормонів, вуглеводний метаболізм та ультраструктуру клітин та інше. Крім цих експериментів, у космічному польоті виконував експерименти Інституту системних досліджень людини за напрямком «Людина і стан невагомості».

Леонід Каденюк проводить велику громадську і просвітницьку роботу, часто зустрічається з учнівською і студентською молоддю, переконуючи школярів і студентів у тому, що «зайвих знань не буває» і що для справжнього успіху потрібно наполегливо «плекати свою мрію». Його художньо-публіцистична книга «Місія — Космос» стала кращою книгою 2009 року в Україні і нагороджена дипломом «Гран-Прі» в номінації «Вибір читача» на XIII Харківському фестивалі «Світ книги» у 2011 р. — Прим. видавництва.

4 Напутнє слово

однією з них була астронавтка з українським корінням Хайдемарі Стефанишин-Пайпер, котра побувала у космосі двічі¹⁾.



Хайдемарі Стефанишин-Пайпер. Зліва направо: у формі американської астронавтки (2006 р.); в українській вишиванці у студентські роки; під час однієї із зустрічей на українській землі (2007 р.)



Леонід Каденюк серед студентської молоді напередодні Дня космонавтики 2015 р.

Дорогі друзі! Від обсягу і якості знань, здобутих вами у школі, залежить ваш подальший життєвий шлях, успіх, статус у суспільстві. Пам'ятайте, що немає тих знань, які не потрібні людині. Прагніть знати якомога більше і в найрізноманітніших царинах. Вчіться, пізнавайте, мрійте і тоді зможете піднятися до вершин своїх мрій!

Геометрія — надзвичайно цікава й корисна наука. Вона була однією з улюблених мною у школі. Перебуваючи в космосі, я переконався, що геометрія космічного простору має свої — «космічні» виміри. В земних умовах математична модель простору може бути двовимірною (планіметрія) або тривимірною (стереометрія). І для життя на Землі досі цього було достатньо. Геометрична ж сутність космічного простору полягає у його динамічній багатовимірності. Коли ми навчимося будувати багатовимірні просторові системи та застосовувати їх у космічній навігації, то зможемо по-іншому рухатися у Всесвіті, а, можливо, і переходити з одного часового виміру в інший. Такі думки підказав мені Космос. Ідеями багатовимірності послуговуються нині багато інших наук і технологій. Але для їхнього усвідомлення і реалізації потрібно досконало знати класичну геометрію. Тож бажаю вам, дорогі друзі, успіхів і натхнення в її опануванні.

Любіть і вивчайте науки на славу Україні!

¹⁾ **Хайдемарі Стефанишин-Пайпер** (Heidemarie Stefanyshyn-Piper) народилася 1963 р. в м. Сент-Пол у штаті Мінесота. Її батько Михайло Стефанишин емігрував з України до Європи, а потім до США під час Другої світової війни. Там він одружився на такій же втікачці з Німеччини, і в них народилося п'ятеро дітей: четверо синів і наймолодша донька Хайдемарі. «Батько навчив мене української мови, а мати — німецької», — часто зазначає астронавтка. У 1985 р. Хайдемарі закінчила один із найпрестижніших американських вишів — Массачусетський технологічний інститут (зі ступенем магістра за спеціальністю машинобудування) і вступила на службу до Військово-морських сил США у чині офіцер-інженера. 1 травня 1996 р. була прийнята до корпусу американських астронавтів.

Перший політ здійснила 9–21 вересня 2006 р. у складі місії STS-115 на кораблі багаторазового використання «Атлантіс» до Міжнародної космічної станції. Завданням цієї місії були, серед іншого, доставка та встановлення на космічній станції нових сонячних батарей та заміна відповідного обладнання. За встановлення батарей відповідала саме Стефанишин-Пайпер, яка стала восьмою жінкою-астронавтом NASA, що здійснила вихід у відкритий космос.