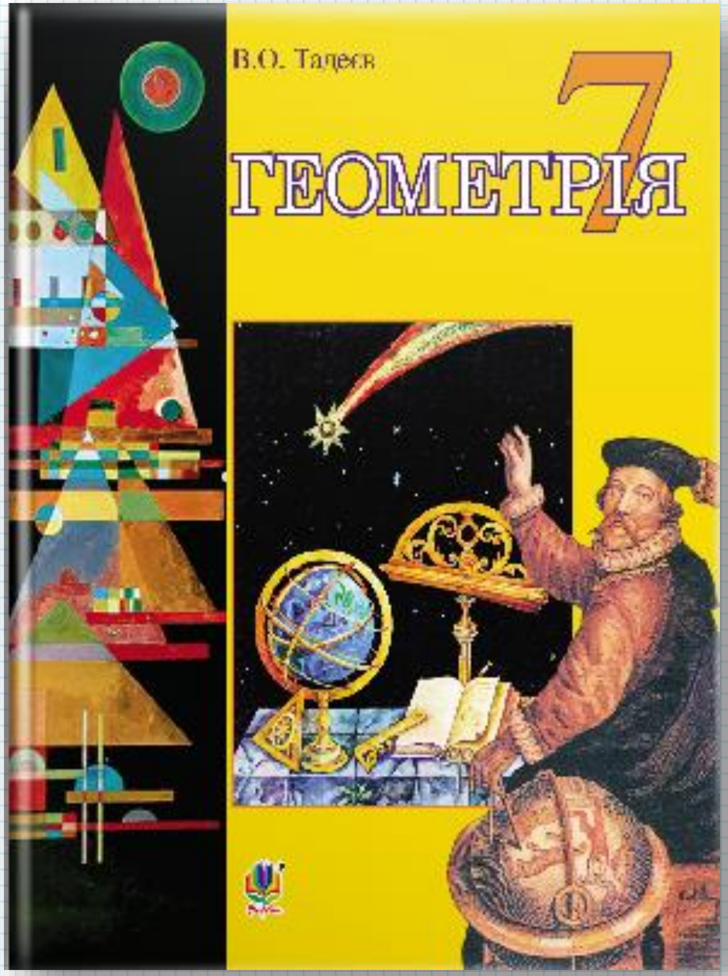
ВІТАЄМО ВАС, ШАНОВНІ КОЛЕГИ, ВЧИТЕЛІ МАТЕМАТИКИ!

Дозвольте коротко представити наш підручник з геометрії для 7 класу:



Геометрія. Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти

(автор: Тадеєв В.О.;
Навчальна книга – Богдан,
2023-24. – 272 с.)

Він укладений за модельною програмою О.С. Істера

Модельна навчальна програма
«Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автор Істер О. С.)

Ми вибрали саме цю програму серед інших, рекомендованих Міністерством освіти і науки України, не тому, що вона полонила нас якимись особливими новаціями або оригінальними підходами.

Радше, навпаки, — тому, що у своїй змістовій частині вона найбільше орієнтована на ті традиції, і можна сказати, «класику», що склалися у шкільній математичній освіті за останні 30–40 років.

Тут дуже важливе уточнення «у своїй змістовій частині», бо все те, що в цій програмі передує цій частині, — це здебільшого загальні декларації добрих намірів, почасти абсолютно нереалістичних для вікової категорії учнів 7–9 класів. Наприклад:

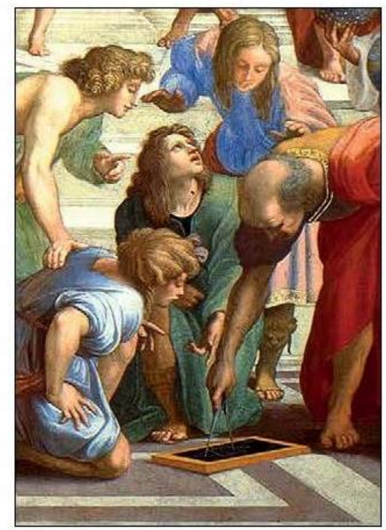
6	**Екологічна компетентність**	***Уміння:*** розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, які можна розв'язати, використовуючи засоби математики, оцінювати, прогнозувати вплив людської діяльності на довкілля через побудову та дослідження математичних моделей природних процесів і явищ

А загалом, з усіх 11 зазначених у програмі так званих ключових компетенцій нетривіальністю, конкретикою та досяжністю характеризується, здається, тільки передостання, десята:

10	**Культурна компетентність**	***Уміння:*** бачити математику у творах мистецтва, будувати фігури, графіки, схеми, діаграми тощо, унаочнювати математичні моделі, здійснювати потрібні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспектив, створення об'ємно-просторових композицій ***Ставлення:*** усвідомлення взаємозв'язків математики та культури на прикладах із живопису, музики, архітектури тощо, розуміння важливості внеску математиків у загальносвітову культуру

Дякувати й за те, хоча ми вважаємо, що цю компетентність потрібно було би «підняти» в цьому рейтингу значно вище.
Тому, зокрема, в нашому підручнику зв'язкам з геометрії з мистецтвом — із живописом, графікою та архітектурою — приділяється велика увага. Ось лише кілька ілюстрацій:

Жан Леблон (бл. 1594—1666).
Геометрія.
Гравюра (1636 р.)

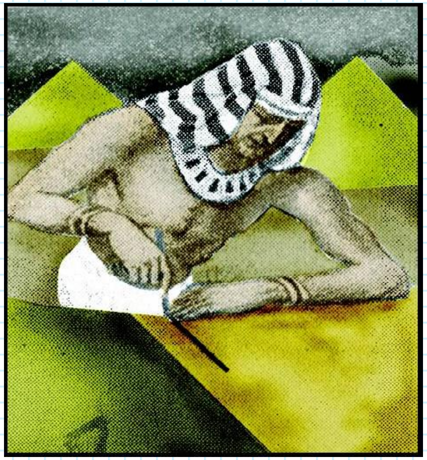


Евклід з учнями.
Деталь із фрески Рафаеля «Афінська школа» (1509—1511 рр.)

Рівнобедрені трикутники в архітектурі

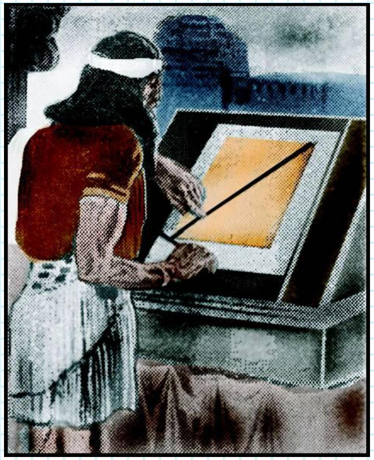
Ще одна важлива і реально досяжна для формування в 7 класі компетентність, на жаль зазначена в модельній програмі дуже завуальовано і без належної конкретики (компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій) — це належне уявлення про топографічні, географічні та астрономічні вимірювання. Формування цієї компетентності здійснюється за рахунок вступних актуалізацій та історичних екскурсів.

Зокрема, у підручнику є дві поширені історичні довідки про вимірювання відстаней і кутів, якими завершуються теми про основні властивості цих величин. Тут подано кілька ілюстрацій до цих довідок.



Міра лікоть

Міра долоня



Міра палець

Вимірювання кутів для визначення положення світил і навігації

Тепер перейдемо власне до змістової частини. Цілком повне уявлення про неї дає зміст підручника:

Зміст

Бачимо, що в підручнику містяться 4 традиційні теми з доволі традиційним переліком параграфів. Певною особливістю є подання четвертої теми «Коло і круг».
Тут, по-перше, приділяється дещо підвищена увага до поняття геометричного місця точок.

Спочатку це поняття ілюструється на прикладі кола, а згодом — серединного перпендикуляра до відрізка і бісектриси кута. Останні два випадки дають змогу строго довести не тільки існування описаного і вписаного кіл для трикутника, а й єдиність цих кіл. Бо зазвичай єдиність немовби вважається зрозумілою «сама по собі». І тоді факти перетину в одній точці серединних перпендикулярів до сторін трикутника і бісектрис його кутів залишаються без строгого обґрунтування.

236 Розділ IV. Коло і круг

Побудова 4.

Заданий нерозгорнутий кут поділити навпіл.

Інакше кажучи: побудувати бісектрису заданого нерозгорнутого кута.

Розв'язання. Нехай потрібно побудувати бісектрису кута O (рис. 4.92). За допомогою циркуля проведемо яке-небудь коло з центром O. Нехай A і B — точки перетину цього кола зі сторонами кута. Проведемо ще два кола з тим самим радіусом OA — з центрами A і B. Однією точкою їхнього перетину буде точка O. Нехай C — інша точка перетину. Тоді промінь OC — шукана бісектриса.

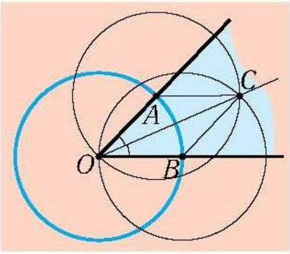
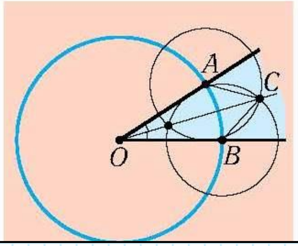


Рис. 4.92

Справді, трикутники OAC і OBC рівні за трьома сторонами. Тому рівними є їхні кути AOC і BOC, що лежать проти рівних сторін AC і BC. А це й означає, що OC — бісектриса кута A.

Зауваження. Побудову точки C шуканої бісектриси OC можна проводити й за допомогою інших рівних кіл з центрами A і B, наприклад, з радіусом, що дорівнює довжині відрізка AB (рис. 4.93). Трикутники OAC і OBC так само будуть рівними за трьома сторонами, а тому кут AOC дорівнюватиме куту BOC.



Другою особливістю в цьому розділі є чіткий перелік найпростіших геометричних побудов, що здійснюються за допомогою лінійки і циркуля. Складніші побудови пропонується зводити до цих основних.

Однією із функцій підручника ми вважаємо глибше зацікавлення математикою схильних до неї учнів. Цей дуже рідкісний «мінерал» ми не можемо губити. Для таких учнів у підручнику запроваджена рубрика «Для тих, хто хоче знати більше» (одна тема на розділ).

Подається вона на тлі національних кольорів — жовтого та блакитного, і супроводжується портретом видатного українського математика Михайла Остроградського. При цьому це не просто словесні розповіді про певні додаткові питання, а змістовно-математичний їхній розгляд. Таким, зокрема, є §10 про різні форми аксіоми про паралельні прямі:

Окремі фрагменти із цих рубрик учитель може подавати і в актуалізуючих розповідях при подачі нового матеріалу для всього класу або використовувати в позакласній роботі.

§10. Інші форми аксіоми про паралельні прямі **103**

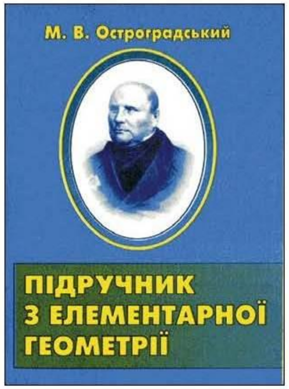
ричні особливості реального простору. Однією із ключових просторових характеристик, які активно використовуються у найрізноманітніших практичних застосуваннях, є напрямок. При цьому напрямок визначається прямою, а будь-яка інша паралельна їй пряма визначає той самий напрямок. Цей факт Остроградський і фіксує у своїй аксіомі про паралельні.

Аксіома Остроградського про паралельні прямі.

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

У попередньому параграфі ця властивість виведена з аксіоми Плейфера про паралельні прямі. Неважко показати, що й, навпаки, з аксіоми Остроградського випливає аксіома Плейфера. Отже, ці аксіоми *еквівалентні*.

Справді, нехай маємо точку A, розміщену поза прямою b (рис. 2.87). На підставі ознаки паралельності прямих, через точку A легко провести пряму a, паралельну прямій b. Тому доведення потребує лише *єдиність* цієї прямої a. Припустимо, що існує ще інша пряма a', яка теж проходить через точку A і паралельна прямій b. Тоді, оскільки обидві прямі a і a' паралельні прямій b, то, за аксіомою Остроградського, вони паралельні між собою. Але ж ці прямі мають спільну точку A. Дійшли суперечності. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, пряма a — єдина, яка проходить через точку A і паралельна прямій b, що й треба було довести.



Обкладинка перевидання підручника М.В. Остроградського до 200-річчя з дня народження ученого (2001 р.)

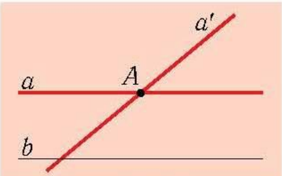


Рис. 2.87

Тій самій меті, але вже з більшим охопленням учнівської аудиторії, служить рубрика «Сторінки історії».

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Задача про трисекцію кута

Уже античні геометри помітили, що не всі задачі на побудову можна розв'язати проведенням прямих і кіл, тобто за допомогою лінійки та циркуля. Можливо, це їх не здивувало б і не стурбувало, якби то були якісь спеціально вигадані задачі, обтяжені складними комбінаціями заданих і шуканих фігур. Та серед таких нерозв'язних задач виявилися і вкрай прості за формулюванням. Однією з найвідоміших серед них стала *задача про трисекцію кута*, яка полягає у тому, щоб заданий кут поділити на три рівні частини.

Для деяких кутів цю задачу неважко розв'язати. Наприклад, прямий кут AOB на три рівні частини можна поділити так. На одній зі сторін кута від його вершини відкладаємо довільний відрізок OA і на ньому, як на основі, всередині кута будуємо рівносторонній трикутник OAC (рис. 4.110). Потім проводимо бісектрису OD кута AOC. Тоді промені OC і OD поділять даний прямий кут на три рівні частини.

Справді, оскільки $\angle COA = 60°$, то $\angle AOD = \angle COD = 30°$. Тоді $\angle BOC = 90° - 60° = 30°$.

Аналогічним способом можна здійснити трисекцію кута AOB, що дорівнює 45° (рис. 4.111). А саме, побудувавши рівносторонній трикутник OAC, дістанемо кут $\angle BOC = 60° - 45° = 15°$. Залишається відкласти цей кут від сторін OA і OB заданого кута AOB всередину нього.

Можна довести, що трисекція можлива для будь-якого кута з величиною $\frac{180°}{2^n}$, при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Довга історія пошуку розв'язання задачі в загальному випадку завершилася аж у XIX ст., коли французький математик П'єр Лоран Ванцель (1814 – 1848) довів, що в загальному випадку здійснити трисекцію кута за допомогою циркуля і лінійки неможливо.

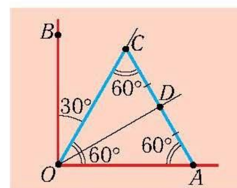


Рис. 4.110

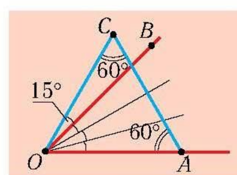
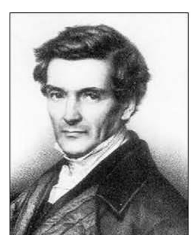


Рис. 4.111

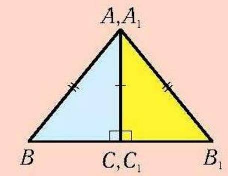


П'єр Лоран Ванцель

Подані в цій рубриці відомості спрямовані на розширення культурно-історичного кругозору учнів, а також можуть допомагати їм збагнути деякі важливі внутрішні рушії розвитку математики.

Стосовно дидактичних аспектів підручника, то тут ми переважно реалізовуємо традиційні вже елементи: вправи і задачі після кожного параграфа (проградуйовані за чотирма рівнями складності), запитання для самоперевірки і завдання для повторення та проведення контрольних (самостійних) робіт — у кінці розділу; приклади розв'язування вправ у тексті.

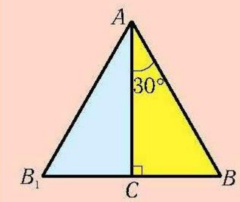
Водночас відрізняються від традиційних зведені переліки основних теоретичних відомостей у кінці розділі. Тут теореми не тільки ще раз формулюються, а й подаються скорочені їхні доведення, інколи відмінні від тих, що подані в основному тексті.



4. За катетом і гіпотенузою. ***Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сумістилися катети AC і A_1C_1, а вершини B і B_1 розмістилися по різні боки від прямої AC. Дістанемо рівнобедрений трикутник ABB_1, у якому AC — висота, проведена до основи BB_1. Оскільки вона є й бісектрисою, то $\angle BAC = \angle B_1AC$. Отже, трикутники ABC і $A_1C_1B_1$ рівні за першою ознакою.

Властивість і ознака прямокутного трикутника з кутом 30°



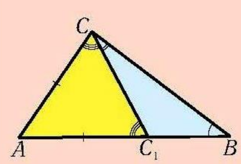
Теорема. ***Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.***

Навпаки, якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний гострий кут дорівнює 30°.

Доведення. Нехай у ΔACB $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 3.130). Тоді $\angle B = 60°$. Відкладемо на промені BC відрізок $CB_1 = BC$. $\Delta ACB_1 = \Delta ACB$. Тому $\angle B = \angle B =$ $= 60°$. Отже, ΔABB_1 — рівносторонній і $AB = BB_1$. Але $BB_1 = 2BC$. Тому $AB = = 2BC$.

Навпаки, якщо $AB = 2BC$, то AC є медіаною і висотою у ΔABB_1. Отже, цей трикутник рівнобедрений, а тому й рівносторонній. Тому $\angle B = 60°$, а $\angle A = 90° - 60° = 30°$.

Співвідношення між сторонами і кутами в довільному трикутнику



Теорема (*про співвідношення між сторонами і кутами трикутника*). ***У будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона***

Доведення. Нехай $AB > AC$. Відкладемо $AC_1 = AC$. ΔACC_1 рівнобедрений, тому $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. $\angle ACC_1$ є частиною кута ACB, тому $\angle ACB > ACC_1$. З іншого боку, $\angle AC_1C$ є зовнішнім для ΔCC_1B. Тому $\angle AC_1C > \angle B$.

Отже, $\angle C$ більший, а $\angle B$ — менший від рівних кутів ACC_1 і AC_1C. Тому $\angle C > \angle B$, що й треба було довести.

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі III (фрагмент)

Дякую за увагу!