1. РЯД ПРОСТИХ ЧИСЕЛ

Число 6 дорівнює добутку двох чисел: 2 і 3. Число 7 не можна розкласти таким самим способом на два співмножники. Тому 7 називають *простим* числом. Взагалі простим, або первісним, числом називається ціле додатне число, яке не можна розкласти на два менших співмножники. 5 і 3 теж прості числа; навпаки, число 4 — не просте, оскільки $4 = 2 \cdot 2$. Сама двійка теж є простим числом. Щодо 1 це означення втрачає свій сенс. Таким чином, перші прості числа такі:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots .$$

Вже з першого ж погляду видно, що цей ряд дещо чудернацький; жодного простого закону в його будові безпосередньо не виявляється.

Будь-яке число можна розкладати на співмножники доти, поки воно не розпадеться на самі лише прості числа. Записавши 6 у вигляді $2 \cdot 3$, ми переконуємося у цьому для 6 безпосередньо; $30 = 5 \cdot 6$, але у свою чергу $6 = 2 \cdot 3$, а тому $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ є добутком трьох простих співмножників; $24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ розкладається на чотири співмножники, з яких один, а саме 2, повторюється декілька разів. Зрозуміло, що коли допускаються такі повтори, то такий розклад на прості множники можна здійснити для будь-якого числа. Тому прості числа є в цьому сенсі немовби основними елементами, з яких побудований увесь числовий ряд.

У IX книзі «Начал» Евкліда[1)] ставиться запитання: *чи має ряд простих чисел кінець*? І там же дається відповідь, а саме, доводиться, що *цей ряд не має кінця, тобто за кожним простим числом можна вказати ще одне, більше просте число* [1][2)].

Доведення Евкліда надзвичайно дотепне. Воно ґрунтується на такому простому зауваженні. Таблиця, яка одержується при множенні послідовних чисел на 3:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots,$$

містить усі числа, до яких входить як множник число 3; в жодне інше число множник 3 не входить, зокрема, він не входить до жодного з тих чисел, що йдуть безпосередньо за числами цієї послідовності, тобто за кратними числа 3, якими, наприклад, є числа $19 = 6 \cdot 3 + 1$, $22 = 7 \cdot 3 + 1$ тощо.

---

1) **Евклід** Александрійський (бл. 340 – бл. 287 рр. до н. е.) — один із найбільших математиків античного світу, фундатор класичної геометрії, яку називають також евклідовою геометрією. Його славетна праця «Начала геометрії» стала своєрідною енциклопедією давньогрецької математики, а потім упродовж майже 2 500 років виконувала роль підручника для початкового вивчення геометрії. Окрім, власне, геометрії, у «Началах» викладалися й основи арифметики та алгебри у геометричній формі. За цією методологією, числам відповідали відрізки, сумі та різниці чисел — сума та різниця відрізків, добутку чисел — прямокутник (і його площа), сторони якого дорівнюють даним числам, квадрату числа — квадрат із даною стороною, добуванню квадратного кореня — знаходження катета рівнобедреного прямокутного трикутника за його гіпотенузою тощо. Виняткова повнота і строгість обґрунтувань, широта охопленого змісту, а головне, — послідовне застосування аксіоматичного методу перетворили «Начала» Евкліда на класичний взірець наукової теорії. Написав також декілька інших наукових праць, зокрема, з оптики і музичної гармонії, в яких теж послідовно застосовував аксіоматичний метод.

Незважаючи на виняткову славу наукового доробку Евкліда, про його життя майже нічого невідомо. Невідомо навіть те, де він народився. Одні вважають — що в Афінах і там був учнем Платона, інші — що в грецькій колонії Александрії, у дельті Нілу (тому й додають до ім'я уточнення Александрійський). Достеменно відомо тільки те, що в Александрії Евклід тривалий час жив і працював у знаменитому тамтешньому науковому центрі — Мусейоні. — *Прим. ред.*

2) Так позначаються номери приміток в «Доповненнях і примітках» редактора до третього російського видання. Ми зберегли ці позначення і в нашому перекладі. — *Прим. ред.*

Так само й число 5 не може бути множником числа, що йде безпосередньо за числами, кратними 5, наприклад, числа $21 = 4 \cdot 5 + 1$; те саме буде правильним щодо 7, 11 і т.д.

Евклід будує числа:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 3 + 1 &= 7; \\
2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 &= 31; \\
2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 &= 311; \\
2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 &= 2\,311; \\
2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 &= 30\,031 \text{ і т.д.,}
\end{aligned}
$$

які одержуються множенням декількох перших простих чисел і додаванням одиниці до цього добутку.

Як легко помітити, утворені у такий спосіб числа не можуть містити серед своїх множників тих простих чисел, за допомогою яких вони самі були побудовані. Наприклад, останнє з написаних вище чисел не ділиться на 3, оскільки воно на 1 більше від числа, кратного 3; так само воно на 1 більше від числа, кратного 5 чи будь-якого іншого, використаного для його утворення простого числа. Жодне з чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13 не може, отже, увійти до нього множником. Тому якби, на противагу числам 7, 31, 211, 2 311, які є простими, число 30 031 було не простим, то все-таки можна було б бути впевненим у тому, що жодне з чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13 вже не входить до нього як множник і що найменший його простий множник повинен бути більшим за 13. І справді, за допомогою декількох спроб можна виявити, що $30\,031 = 59 \cdot 509$, причому обидва одержані множники 59 і 509 — прості числа, більші за 13.

Ці міркування будуть правильними і в тому разі, якщо ми продовжимо процес утворення описаних чисел як завгодно далеко. Нехай p — яке-небудь просте число; утворимо з усіх простих чисел від 2 до p число

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1 = N;$$

тоді жодне із задіяних тут простих чисел 2, 3, 5, 7, ..., p не увійде множником до N. У такому разі або саме N буде простим числом, причому значно більшим за p, або N розкладатиметься на прості множники, вочевидь відмінні від чисел 2, 3, 5, ..., *p*, тобто більші за *p*. Як в одному, так і в іншому випадку повинні існувати прості числа, більші за *p*. За кожним простим числом має існувати, таким чином, ще одне більше число. А це й треба було довести [2].

Невідомо, що має нас найбільше дивувати у цьому тексті Евкліда: чи те, що грецькі математики узагалі могли поставити таке питання заради нього самого, із внутрішнього потягу до математичного мислення, тобто з мотивів, не властивих жодному з давніших народів і переданих у спадок пізнішим культурам лише грецькою традицією; чи те, що вони поставили саме о ц е питання, яке так легко вислизає від наївного спостерігача, здаючись йому пустим і тривіальним, питання, вся складність та глибина якого розкривається лише тому, хто марно намагався відшукати простий закон для ряду простих чисел, закон, який дає змогу необмежено продовжувати цей ряд. Мабуть, найдивовижнішим тут слід вважати те, що греки зуміли обійти відсутність цієї закономірності тим майстерним способом доведення, з яким ми щойно ознайомилися.

Адже доведення Евкліда вказує аж ніяк не н а й б л и ж ч е, наступне за *p*, просте число, а загалом лише якесь число, яке зазвичай лежить доволі далеко від *p*; наприклад, для простого числа, яке явно лежить після 11, доведення вказує не 13, а 2 311; за 13 воно вказує просте число 59 і т.д. І справді, як правило, між тим простим числом, яке вказує нам доведення Евкліда, і найближчим простим числом знаходиться багато інших простих чисел. У цьому саме й полягає свідчення того великого відчуття такту, з яким грецький математик, так мудро обмежуючи себе, прокладав шлях у такому складному за своєю структурою ряді простих чисел [3].

Аби подати тут дещо конкретніші уявлення про складність цієї структури, ми покажемо, що у *ряді простих чисел можуть бути дуже великі пропуски*. Покажемо, наприклад, що серед тисячі чисел, які йдуть одне за одним, може не виявитися жодного простого числа. Ми відштовхуємося при цьому від міркувань, дуже близьких до евклідових [4].

Вище ми зауважили, що число $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5. Скористаємося тепер з тієї простої обставини, що сума двох чисел, які діляться на 3, теж ділиться на 3, і що аналогічна властивість залишається істинною для 5, 7, а також і для будь-якого іншого дільника. Звідси ми робимо висновок, що жодне із чисел

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 32; \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 = 33; \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 = 34;$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 5 = 35; \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 6 = 36$$

не може бути простим; адже число, яке додається до 30, ділиться в усіх цих випадках або на 2, або на 3, або на 5, а оскільки 30 теж ділиться на них, то ділиться й сума. Лише відносно наступної за ними суми $2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37$ так міркувати уже не можна; і справді, число 37 не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 5, і тому воно само є простим числом.

Позначивши тепер перше просте чотиризначне число (а саме, 1 009) через p і утворивши тисячу послідовних чисел:

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2, \quad 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 3, \quad \ldots, \quad 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 1\,001,$$

застосуємо до них щойно проілюстрований метод міркування. Оскільки кожне із чисел 2, 3, ..., 1 001 ділиться принаймні на одне з простих чисел 2, 3, ..., p, і добуток $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$ ділиться на всі ці числа, то кожна з написаних вище сум ділиться принаймні на одне із цих простих чисел; це означає, що жодна з них не може бути простим числом. Отже, ми знайшли *тисячу послідовних чисел, серед яких немає жодного простого*.

Звісно, потрібно зайти доволі далеко в ряді простих чисел, перш ніж зустрінеться такий великий пропуск. Однак якщо піти достатньо далеко, то можна, дотримуючись того самого принципу, знайти пропуск, який охоплює мільйон послідовних чисел, і взагалі відшукати пропуски як завгодно великої довжини.

Ця друга проблема, хоч як вона близька до першої і за характером постановки питання, і за методом доведення, не зустрічається в жодного із грецьких математиків. Її висунула нова математика, пов'язавши з нею ціле коло подальших питань, які доводяться здебільшого уже далеко не так просто; із цих питань розвинувся один з найглибших та найбільш хвилюючих своїми нерозв'язаними проблемами напрямок математичного аналізу.

Із цього кола подальших питань ми зупинимося тут на одному невеликому прикладі, який піддається дослідженню методом Евкліда і дає змогу скласти собі певне уявлення про те, в якому саме напрямку сучасна математика розширює проблематику греків. Вище ми розглядали спочатку числа 3, 6, 9, ..., які утворюються від множення послідовності чисел натурального ряду на 3, а потім — послідовність наступних за ними чисел 4, 7, 10, ...; тепер розглянемо ще числа, які залишилися після цього:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots,$$

тобто *числа, які при діленні на* 3 *дають в остачі* 2. Доведемо, що й *серед самих тільки цих чисел вже є нескінченна множина простих чисел*, тобто покажемо, що послідовність простих чисел

$$2, 5, 11, 17, 23, \ldots$$

теж не має кінця.

Доведення потребує простого попереднього зауваження. Якщо перемножити між собою два яких-небудь числа послідовності

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots,$$

то отримується число, яке належить до цієї самої послідовності. Справді, усі ці числа при діленні на 3 дають в остачі одиницю і тому мають вигляд: $3x + 1$, тобто 3, помножене на деяке ціле число x, плюс 1; якщо перемножити два таких числа, наприклад, $3x + 1$ і $3y + 1$, то одержимо:

$$(3x + 1)(3y + 1) = 9xy + 3x + 3y + 1 = 3(3xy + x + y) + 1,$$

тобто знову число, на одиницю більше від кратного трьом.

Якщо тепер перейти до n-их частин, то потрібне співвідношення одержиться одразу:

$$0 \le w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}.$$

2. У тому факті, що поблизу чисел $\sqrt{2}$ і π існують звичайні дроби (раціональні числа), немає, отже, нічого особливого. Який тоді зміст мають такі, наприклад, твердження, що π майже дорівнює $\frac{22}{7}$, а $\sqrt{2}$ майже дорівнює $\frac{7}{5}$? Зміст тут у тому, що $\frac{7}{5}$ набагато ближче до $\sqrt{2}$, ніж це забезпечується щойно доведеною теоремою. Справді, існує точніша оцінка:

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$$

і, отже, $\sqrt{2}$ відрізняється від $\frac{7}{5}$ у кожному разі менше, ніж $\frac{17}{12}$ відрізняється від $\frac{7}{5}$, тобто

$$\sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{17}{12} - \frac{7}{5} = \frac{1}{60},$$

у той час як зі співвідношень (4) виходить тільки, що ця різниця має бути меншою від $\frac{1}{5}$.

Аналогічний зміст має і твердження Архімеда[1)] стосовно числа π. Знайдена ним точніша оцінка:

---

1) **Архімед** Сіракузький (бл. 287 – 212 рр. до н.е.) — легендарний давньогрецький учений, народився і жив у Сіракузах (на о. Сицилія), навчався у знаменитому науковому центрі в Александрії (Єгипет). Загинув під час штурму Сіракуз римлянами у другій Пунічній війні. У своїх математичних дослідженнях систематично застосовував ідеї наближення складних фігур простішими, що стало провідним методом у математиці майже через 2 000 років по тому. Зокрема, наближення для числа π знайшов, послідовно вписуючи в круг та описуючи навколо нього правильні многокутники з дедалі більшою кількістю сторін та визначаючи їхні периметри: розпочав із 6-кутників, а закінчив 96-кутниками. — *Прим. ред.*

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

означає, що

$$\frac{22}{7}-\pi<\left(3+\frac{10}{70}\right)-\left(3+\frac{10}{71}\right)=\frac{10}{70}-\frac{10}{71}=\frac{10}{70\cdot 71}=\frac{1}{497},$$

тоді як наша теорема визначає для такої різниці межу, що дорівнює $\frac{1}{7}$.

Однак вираз «набагато ближче» теж не входить до словника математика. Доведемо тепер теорему, яка вносить у ці питання повну визначеність.

Теорема 2. *Якщо w — ірраціональне число, а N — яке-небудь ціле число, то існує деякий дріб $\frac{m}{n}$, знаменник якого не перевищує N і який відрізняється від w менше ніж на $\frac{1}{Nn}$. Тому існує нескінченно багато дробів $\frac{m}{n}$, які відрізняються від w менше ніж на $\frac{1}{n^2}$.*

Для двох розглянутих вище числових прикладів це означає, що різниця $\sqrt{2}-\frac{7}{5}$ менша, ніж $\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$, а різниця $\frac{22}{7}-\pi$ менша, ніж $\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$. Хоча в обох цих випадках відомі уже оцінки набагато кращі від тих меж, які встановлюються цією новою теоремою, проте остання все-таки дає значне уточнення, порівняно із тривіальною першою теоремою.

Для доведення цієї другої теореми розглянемо не тільки Nw і найближче до нього менше число, а й, окрім цього, ряд чисел:

$$w,\ 2w,\ 3w,\ \ldots,\ Nw;$$

позначимо найближчі до них і менші від них цілі числа відповідно через

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots,\ g_N,$$

так що

$$0 < w - g_1 < 1, \quad 0 < 2w - g_2 < 1, \quad \ldots, \quad 0 < Nw - g_N < 1.$$

Найкраще ми розглянемо це на прикладі ($w = \sqrt{2}$, $N = 13$):

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1{,}414\ldots = 1 + 0{,}414\ldots;\\
2\sqrt{2} &= 2{,}828\ldots = 2 + 0{,}828\ldots;\\
3\sqrt{2} &= 4{,}242\ldots = 4 + 0{,}242\ldots;\\
4\sqrt{2} &= 5{,}656\ldots = 5 + 0{,}656\ldots;\\
5\sqrt{2} &= 7{,}071\ldots = 7 + 0{,}071\ldots;\\
6\sqrt{2} &= 8{,}485\ldots = 8 + 0{,}485\ldots;\\
7\sqrt{2} &= 9{,}899\ldots = 9 + 0{,}899\ldots;\\
8\sqrt{2} &= 11{,}313\ldots = 11 + 0{,}313\ldots;\\
9\sqrt{2} &= 12{,}727\ldots = 12 + 0{,}727\ldots;\\
10\sqrt{2} &= 14{,}142\ldots = 14 + 0{,}142\ldots;\\
11\sqrt{2} &= 15{,}556\ldots = 15 + 0{,}556\ldots;\\
12\sqrt{2} &= 16{,}970\ldots = 16 + 0{,}970\ldots;\\
13\sqrt{2} &= 18{,}384\ldots = 18 + 0{,}384\ldots .
\end{aligned}$$

Із 13 надлишків над найближчими цілими числами п'ятий, вочевидь, є найменшим: $5\sqrt{2} - 7 = 0{,}071\ldots$, а дванадцятий — найбільшим: $12\sqrt{2} = 16 + 0{,}970\ldots = 17 - 0{,}030\ldots$; звідси $17 - 12\sqrt{2} = 0{,}030\ldots$.

Уявімо собі, що ці 13 надлишків, то зростаючі, то спадні у нашій таблиці, будуть розташовані у порядку їхнього зростання; тоді на проміжку між числами 0 і 1 ми матимемо 13 чисел, які розбивають цей проміжок на 14 інтервалів. Звичайно, ці інтервали не будуть рівними, і їхні величини трохи відхилятимуться від $\frac{1}{14}$. Однак принаймні один із них буде меншим від $\frac{1}{14}$, бо якби усі вони були $\geq \frac{1}{14}$, то разом дали б у сумі, щонайменше, $\frac{14}{14}$ = 1, причому ця сума не перевищувала б 1 лише у тому єдиному випадку, якби кожний інтервал дорівнював $\frac{1}{14}$. Варто лише о д н о м у інтервалу бути більшим від $\frac{1}{14}$, і наша сума перевищить 1. Однак якби усі вони дорівнювали по $\frac{1}{14}$, то й $\sqrt{2}$, як одне з наших 13 чисел, мав би надлишок, кратний $\frac{1}{14}$: $\sqrt{2} = 1 + \frac{m}{14}$, тобто $\sqrt{2}$ був би раціональним числом.

Оскільки w — ірраціональне, за припущенням, а про ірраціональність $\sqrt{2}$ ми знаємо з теми 4 (стор. 38), то можна дійти висновку, що принаймні один з інтервалів буде неодмінно меншим від $\frac{1}{14}$; для нас не має жодного значення, між якими кратними $\sqrt{2}$ лежить цей інтервал. Нехай $a\sqrt{2} - g_a = r_a$ — нижня, а $b\sqrt{2} - g_b = r_b$ — верхня межа цього інтервалу. Отже,

$$0 < r_b - r_a = \left(b\sqrt{2} - g_b\right) - \left(a\sqrt{2} - g_a\right) < \frac{1}{14}.$$

Звідси

$$0 < (b - a)\sqrt{2} - (g_b - g_a) < \frac{1}{14}.$$

Оскільки тут a і b — довільні числа з ряду 0, 1, ..., 13, то абсолютне значення різниці $b - a$ є теж одним із цих чисел, тобто $-13 \le b - a \le 13$. Цим самим ми довели, що для одного із тринадцяти чисел, кратних $\sqrt{2}$, а саме, для $(b - a)\sqrt{2}$, або, якщо $b - a$ — від'ємне, — для $(a - b)\sqrt{2}$, надлишок над найближчим меншим цілим числом або недостача до найближчого більшого цілого числа менші від $\frac{1}{14}$. Позначивши абсолютне значення різниці $b - a$ через n, а $g_b - g_a$ — через m, маємо:

Про датського математика Ґеорґа Мора (Georg Mohr) (народився у 1640 р. в Копенгагені, помер у 1697 р. в Кіслінгсвальді поблизу Герліца, де він як гість провів два останніх роки свого життя у свого приятеля, відомого математика Вальтера Чірнгауза (Walter v. Tschirnhausen)) ми знаємо лише за його книгою «Датський Евклід» («Euclides Danicus». — Амстердам, 1672), випадково знайденою у 1928 р. відомим датським геометром Єльмслевом у букіністичній крамниці в Копенгагені; перша частина цієї книги присвячена згаданій задачі. (Втім, останнім часом з'явилося повідомлення, що знайдено ще одну книгу Ґ. Мора). Тепер «Датський Евклід» перевиданий (Kobenhavn, 1928) Датським королівським науковим товариством і доповнений перекладом на німецьку мову Ю. Паля (Julius Pal).

Щодо доведення результату Мора–Маскероні див., наприклад: Р. Курант и Г. Роббинс. Что такое математика. — М.–Л.: Гостехиздат, 1947, с. 214–219; И.М. Яглом. Геометрические преобразования, II. — М.: Гостехиздат, 1956, с. 209–214; Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. Геометрические построения на плоскости. — М.: Учпедгиз, 1957, с. 228–238; А. Адлер. Теория геометрических построений. Л.: Учпедгиз, 1940, розд. III.

[76] Якоб Штейнер (Jacob Steiner, 1796–1863), за походженням швейцарець, почав свою діяльність, яка заохочувалася спочатку братами Вільгельмом та Алєксандером Гумбольдтами, у Берліні, де впродовж декількох років викладав у середній школі, зазнаючи незручностей, пов'язаних з відсутністю у нього вищої освіти; з 1834 р. обійняв посаду професора університету та був обраний у члени Академії наук. Біографічний нарис про нього див., наприклад, у книзі: Д.А. Крыжановский. Изопериметры. — М.: Физматгиз, 1959, а також у книзі: Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой и постоянного круга. — М.: Учпедгиз, 1939; остання книга спеціально присвячена розглянутій тут задачі. Стосовно доведення сформульованого результату Штейнера (точніше було б сказати — Понселе–Штейнера; Жан Віктор Понселе (1788-–1867) — видатний французький геометр, творець проективної геометрії) див., крім вказаної книги Штейнера, також згадані вище книги: Р. Куранта й Г. Роббінса, с. 272–274; І.М. Яглома, с. 123–127; Б.І. Аргунова і М.Б. Балка, с. 238–246; А. Адлера, розд. II.

[77] Питання про можливість визначення центра кола за допомогою однієї лише лінійки вперше було поставлене видатним німецьким математиком кінця XIX — початку XX ст. Давидом Гіль-

бертом (D. Hilbert); він же запропонував і метод розв'язування даної задачі. Подальшого розвитку ці ідеї набули у працях його учня Д. Кауера (Detlef Cauer. Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal. — Math. Ann., **73**, 1912, c. 90–94, і **74**, 1913, c. 462–464).

[78] Можна навіть довести, що коло S можна так спроектувати в інше коло S', що центр O кола S перейде в довільно задану усередині S' точку O'. Див. з цього приводу: И.М. Яглом. Геометрические преобразования, II, §1, розд. 1 третьої частини, де міститься дещо інший виклад розглянутих тут питань.

[79] Це міркування передбачає, що задані кола не є концентричними. Справді, у противному разі відрізки K_1K_2 і L_1L_2 мали б спільну середину W, і точка O потрапила б на перпендикуляр до площини $K_1L_1L_2K_2$, поставлений у точці W; наші конуси були б не похилими, а прямими і спряжені перерізи не відрізнялися б від початкових кругових перерізів. Ця обставина не є випадковою: для двох концентричних кіл S_1 і S_2 неможливо вказати центрального проектування, яке переводило б їх знову у кола S_1' і S_2', а їхній спільний центр — у точку, що не є центром S_1' (або S_2'). Це найпростіше з'ясувати, довівши, що *спільний центр двох кіл S_1 і S_2, про які відомо, що вони є концентричними, можна знайти за допомогою однієї лінійки.* Відповідна побудова відображена на рис. 140, де AB і AB_1 — дотичні, проведені до кола S_2 із точки A кола S_1 (на питанні про побудову цих дотичних за допомогою однієї лінійки ми нижче зупинимося окремо); BA_1 — дотична до S_2, проведена із точки B; пряма PQ, що сполучає точки перетину AB_1 і BA_1, AA_1 і BB_1, проходить через спільний центр S_1 і S_2, оскільки вона є віссю симетрії рис. 140; аналогічно можна побудувати ще один діаметр P_1Q_1 кіл S_1 і S_2, перетин якого з PQ і визначить шуканий центр O.

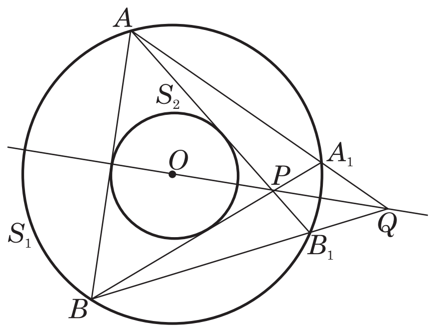

Рис. 140

Побудову однією лінійкою дотичних AM і AN до кола S, які проходять через задану точку A, відображено на рис. 141; тут AKL і AK_1L_1 — довільні січні для S; U і V — точки перетину KL_1 і LK_1,

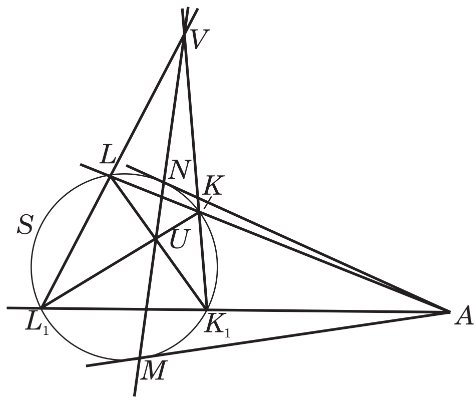

Рис. 141

KK_1 і LL_1; M і N — точки перетину UV з колом. Стосовно доведення правильності цієї побудови див., наприклад: Адамар. Элементарная геометрия, ч. 1. — М.: Учпедгиз, 1958, розд. IV доповнень до третьої книги; И.М. Яглом. Геометрические преобразования, II, задача 153.

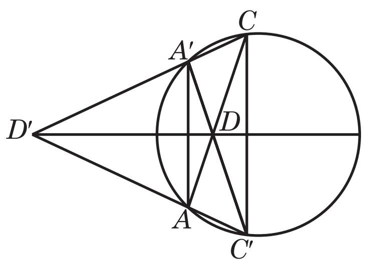

Рис. 142

[80] Обидва розглянуті нами випадки стосуються непересічних кіл. Спроби знайти перетворення за допомогою центральної проекції також і для двох пересічних кіл не дають результату. Таке перетворення свідчило б про неможливість побудови центра кола за допомогою однієї лише лінійки, тим часом як у випадку двох пересічних кіл, як про це було згадано наприкінці п. 1, така побудова можлива. Рис. 142 показує, як, маючи дві паралельні хорди AA' і CC', можна знайти діаметр: пряма DD', внаслідок симетрії, проходить через центр. За допомогою другої пари паралельних хорд можна, отже, знайти другий діаметр, який у перетині з першим дасть шуканий центр. Отже, все тепер зводиться до того, аби за допомогою однієї лише лінійки побудувати дві паралельні хорди.

Надзвичайно простий спосіб такої побудови зображений на рис. 143. Нехай хорда AA' проведена в одному з даних кіл довільно. Проведемо, починаючи з A, послідовно прямі ASB і $BS'C$, а потім, починаючи з A', — послідовно прямі $A'S'B'$ і $B'SC'$. Знайдені таким чином точки

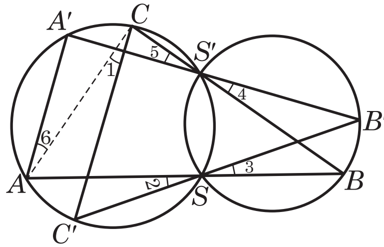

Рис. 143

C і C' будуть кінцями хорди CC', паралельної AA'. У паралельності цих хорд можна переконатися безпосередньо, розглянувши кути, позначені на рисунку цифрами 1–6. Кути 1 і 2 рівні як вписані, що спираються на ту саму дугу; з тієї ж причини $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$. Кути 2 і 3 та, відповідно, 4 і 5 рівні як вертикальні. Внаслідок зазначених рівностей кутів ми одержуємо, що й $\angle 1 = \angle 6$. А оскільки останні кути є внутрішніми різносторонніми при січній AC, то ми робимо висновок, що прямі AA' і CC' — паралельні.

Побудова за допомогою однієї лінійки центрів т р ь о х непересічних кіл значно складніша від описаних і передбачає знання складніших геометричних теорій. Таку побудову можна знайти, наприклад, у Кауера (див. примітку [77]).

[81] Стаття Бонзе (Bonse) вміщена в Archiv d. Math. u. Fhys., (3), **12**, 1907, с. 292–295. М. Денн — відомий німецький математик. Див. також: Р. Ремак (R. Remak), там само, (3), **15**, 1908, с. 186–193. У наш час наука справді пішла значно далі твердження, що $p_{n+1} < 2p_n$, але все-таки недостатньо далеко, аби вирішити, скажімо, питання про те, чи завжди між двома послідовними квадратами, наприклад, 100 і 121 або між 121 і 144, повинно лежати принаймні одне просте число.

ЗМІСТ