В. А. Ясінський

МАТЕМАТИКА

Олімпіадні задачі

ВИПУСК 1

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН
2003

ББК 22.1я721.6
Я81

Головний редактор
Б.Є. Будний

Рецензенти:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
В.Д. Галан
кандидат фізико-математичних наук, доцент
В.О. Тадеєв

Ясінський В.А.
Я81 Математика: Олімпіадні задачі. Випуск 1. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. — 40 с.

ISBN 966-692-097-2

У посібнику подано понад 250 задач з математики, які пропонувалися при підготовці команд різних країн світу до участі у міжнародних математичних олімпіадах (1996–2002 р.р.).

Для учнів, викладачів математики, керівників математичних гуртків, студентів, всіх, хто захоплюється математикою.

ББК 22.1я72

ISBN 966-692-097-2

Передмова

У посібнику зібрано більше 250 задач підвищеної складності з математики олімпіадного рівня, для розв'язування яких потрібні кмітливість та нестандартність мислення. У ньому, на відміну від аналогічних збірників не подано розв'язки задач. Така форма більше притаманна активному, творчому вивченню математики. Адже шлях до відповіді – це цікавий науковий пошук. І цей творчий процес не варто замінювати вивченням лише рецептів розв'язування нестандартних олімпіадних задач.

Більшість задач, які увійшли до збірника, взято з матеріалів підготовки команд різних країн світу до участі у Міжнародних математичних олімпіадах, зокрема членів нашої команди школярів, у 1996–2002 роках.

Збірник задач стане у пригоді учням, викладачам математики, керівникам математичних гуртків, студентам фізико-математичних факультетів педінститутів та університетів, а також усім, хто захоплюється математикою. Якщо ж деякі із задач виявляться заскладними хай це буде лише спонукою до більш глибокого вивчення математики.

Автор висловлює вдячність керівникові української команди В.М.Радченко (Національний університет імені Т. Шевченка, м.Київ), В.М.Лейфурі (педінститут, м.Миколаїв) та І.М.Мітельману (Рішельєвський ліцей, м. Одеса) за надані матеріали та корисні поради щодо створення даного збірника задач.

В.А. Ясінський

Зміст

1. АРИФМЕТИКА

1.1. Відомо, що рівняння $x^2 + y^2 = a(z^2 + t^2)$, де a – ціле число, має ненульовий розв'язок у цілих числах (тобто існує такий набір цілих чисел x_0, y_0, z_0, t_0, не всі з яких дорівнюють нулю, що $x_0^2 + y_0^2 = a\left(z_0^2 + t_0^2\right)$). Довести, що тоді й рівняння $x^2 + y^2 = az^2$ має ненульовий розв'язок в цілих числах.

1.2. Чи існує нескінченна послідовність натуральних чисел така, що суму будь-яких декількох членів цієї послідовності не можна подати у вигляді степеня цілого числа з натуральним показником більшим за 1?

1.3. Довести, що існує число виду 5^n (n – натуральне), десятковий запис якого містить 100 нулів, записаних підряд.

1.4. Які натуральні числа можна подати у вигляді $\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$, де n – натуральне число?

1.5. Знайти всі цілі числа a, b, c, d такі, що $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2$.

1.6. Довести, що існує така перестановка $p_1, p_2, \dots, p_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, що для всіх $k = 1, 2, \dots, n - 1$ сума чисел $p_1 + p_2 + \dots + p_k$ ділиться на p_{k+1}.

1.7. Знайти найменше натуральне число n таке, що числа $2n + 1$ та $37n + 1$ – квадрати деяких цілих чисел.

1.8. Знайти цілі додатні розв'язки рівняння

$$17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0.$$

1.9. Розв'язати в цілих числах систему рівнянь

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 8.$$

1.10. Доведіть, що існують як завгодно великі натуральні числа N такі, що рівняння $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = N$ має розв'язок в цілих числах лише при $n \geq 16$.

1.11. Доведіть, що коли рівняння $x^2 - 2y^2 = n$, $n \in N$, має розв'язки в цілих числах, то існує такий його розв'язок, для якого $0 < x < \sqrt{2n}$.

1.12. Розв'язати в цілих числах рівняння $ix^3 - y^3 = 2xy + 8$.

1.13. Розв'язати в цілих додатних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, \\ a^2 = 2(b + c). \end{cases}$$

1.14. З'ясуйте, чи скінченною буде множина таких натуральних чисел n, для яких кожне з чисел n, $n + 1$, $n + 2$ можна подати у вигляді суми квадратів двох цілих чисел?

1.15. Довести, що рівняння $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$ не має розв'язків у натуральних числах x, y, z, два з яких є степенями різних простих чисел.

1.16. Для будь-якого натурального числа n будується послідовність n, $\tau(n)$, $\tau(\tau(n)), \ldots$, де $\tau(k)$ – кількість натуральних дільників числа k ($k \in N$). Знайти всі такі n, для яких у відповідній послідовності немає квадратів цілих чисел.

1.17. До натуральних чисел a і b, $a > 6$, застосовують алгоритм Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника цих чисел. Довести, що кількість кроків алгоритму (ділень з остачею) не перевищує $5p$, де p – кількість цифр в десятковому записі числа b.

1.18. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$x^n + y^n = (x - y)^{n+1}, \; n \in N.$$

1.19. Знайти всі пари (p, q) простих чисел такі, що число $2^p - 1$ ділиться на q і серед простих дільників числа $q - 1$ є лише числа 2, 3, 5 та 7.

1.20. Довести, що при жодному цілому k; число $k^2 + k + 1$ не ділиться на всі числа виду $6m - 1$ (m – натуральне).

1.21. Знайти всі цілі невід'ємні числа n, m, k ($n \neq 0$) такі, що

$$(n^k - 1) \, \vdots \, (n^m + 1).$$

1.22. Розв'язати в цілих додатних числах рівняння $(m + n)^2 = m + n!$

1.23. Нехай $n \geq 4$. Довести, що існує натуральне число a таке, що $1 \leq a \leq \frac{n}{4} + 1$ і число $a^n - a$ не ділиться на n^2.

1.24. Дано ціле число $n \geq 2$. Припустимо, що цілі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не діляться на n і більше того, їхня сума не ділиться на n. Довести, що існує принаймні n різних послідовностей $e_1, e_2, \ldots, e_n$, які складаються з нулів та одиниць, таких, що числа $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$ діляться на n.

1.25. Довести, що найбільший спільний дільник цілих чисел n та $a^n - b^n$ дорівнює найбільшому спільному дільнику чисел n та $\frac{a^n - b^n}{a - b}$.

1.26. Довести, що для будь-якого непарного числа n число $2^{n!} - 1$ ділиться на $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$.

1.27. Розв'язати в цілих числах рівняння $2^m + 3^n = k^2$.

1.28. Для кожного натурального $k \geq 4$ знайти найменше натуральне $n(n > k)$, для якого рівняння $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ має розв'язок в натуральних числах.

1.29. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^3 + y^3 = (2xy + 1)^2$.

1.30. Розв'язати в натуральних числах рівняння $2^x + 3^y = 5^z$.

1.31. Довести, що для будь-якого простого числа p і натурального числа n, $n \geq p$, число p ділить $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} (-1)^k C_n^{pk}$.