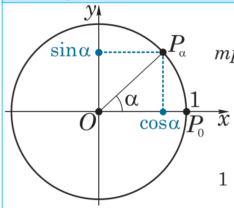
Основні формули тригонометрії (1)

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — *основна тригонометрична тотожність.*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;\qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Числові функції

Функція — це відповідність між змінними x та y, при якій *кожному* значенню змінної x відповідає *єдине* значення змінної y.

$y = f(x)$ — функція;

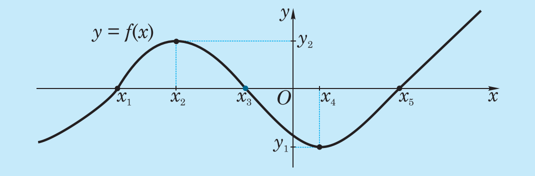
x — незалежна змінна, *аргумент*;

y — залежна змінна, *функція*.

Область визначення функції ($D(y)$) — це множина всіх значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент).

Область значень функції ($E(y)$) — це множина всіх значень, яких набуває залежна змінна (функція).

Функція $y = f(x)$ задана графічно.



$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

x_1, x_3, x_5 — нулі функції;

$x_{max} = x_2$, $x_{min} = x_4$ — точки екстремуму;

$y_{max} = y_2$, $y_{min} = y_1$ — екстремальні значення.

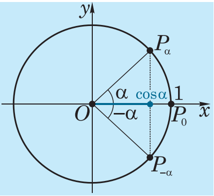
Проміжки монотонності:

$(-\infty; x_2]$, $[x_4; +\infty)$ — проміжки зростання;

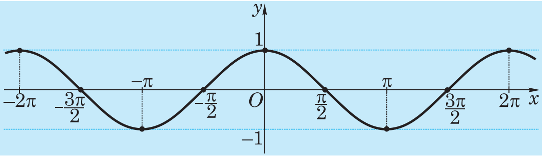
$[x_2; x_4]$ — проміжок спадання.

10

Властивості та графік функції $y = \cos x$



Косинус числа α — це ***абсциса*** точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 при повороті навколо центра кола на кут α рад.



$D(y) = (-\infty; +\infty)$ — область визначення.

$E(y) = [-1; 1]$ — область значень.

$\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, $n \in \mathbb{Z}$ — функція періодична.

$\cos(-x) = \cos x$ — функція парна.

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — нулі функції.

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких значення функції додатні.

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких значення функції від'ємні.

$x_{\max} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — точки максимуму; $y_{\max} = 1$.

$x_{\min} = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — точки мінімуму; $y_{\min} = -1$.

$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких функція зростає.

$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких функція спадає.

26 Основні теореми про границі

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя єдина.

Теорема 2. Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ у точці x_0 мають границі, то сума і різниця цих функцій також мають границі у цій точці, до того ж:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x).$$

▲ $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4x)=\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}4x=(-1)^2+4\cdot(-1)=-3;$

$\lim\limits_{x\to 2}(x-3^x)=\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3^x=2-3^2=-7.$ ▼

Теорема 3. Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ у точці x_0 мають границі, то добуток цих функцій також має границю у цій точці, до того ж:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

▲ $\lim\limits_{x\to -5}((3x+4)\cdot(x^2-7))=\lim\limits_{x\to -5}(3x+4)\cdot\lim\limits_{x\to -5}(x^2-7)=$
$=(3\cdot(-5)+4)\cdot((-5)^2-7)=-11\cdot 18=-198.$ ▼

Теорема 4. Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ у точці x_0 мають границі та $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$, то частка цих функцій також має границю у точці x_0, до того ж:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{8x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-x+2)}{x(8+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x+2}{8+x}=$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x+2)}{\lim\limits_{x\to 0}(8+x)}=\dfrac{0^2-0+2}{8+0}=\dfrac{1}{4}.$ ▼