

**Натисніть тут, щоб  
купити книгу на сайті  
або замовляйте за телефоном:  
(0352) 51-97-97, (067) 350-18-70,  
(066) 727-17-62**

# ЗАДАЧІ

## Розділ 1

### ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПЛОЩИНІ

Позначення:  $a, b, c$  — сторони трикутника;  $A, B, C$  — кути, що лежать навпроти цих сторін, відповідно;  $m_a$  — медіана сторони  $a$ ;  $l_A$  — бісектриса кута  $A$ ;  $h_a$  — висота, опущена на сторону  $a$ ;  $R$  — радіус описаного кола;  $r$  — радіус вписаного кола;  $P$  — периметр багатокутника.

*Довжиною бісектриси зовнішнього кута  $A'$  відносно внутрішнього кута  $A$  трикутника називається відрізок бісектриси, що сполучає точку  $A$  і точку перетину бісектриси з продовженням сторони  $a$ .*

*Відношення площ двох трикутників, що мають спільний кут, дорівнює відношенню добутків сторін, що утворюють цей спільний кут.*

Формула, що виражає довжину медіани трикутника через довжини його сторін:  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ .

Якщо в багатокутник можна вписати коло, то його площа  $S = pr$ , де  $P = \frac{p}{2}$  — півпериметр багатокутника.

Площа чотирикутника:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$ , де  $d_1$  і  $d_2$  — довжини його діагоналей, а  $\alpha$  — кут між ними.

При розв'язанні планіметричних задач доводиться застосовувати похідні пропорції.

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd}.$$

$$\text{Якщо } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}, \text{ то}$$

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \dots \pm b_n} = \frac{c}{d} \text{ і } \frac{m_1 a_1 \pm m_2 a_2 \pm m_3 a_3 \pm \dots \pm m_n a_n}{m_1 b_1 \pm m_2 b_2 \pm m_3 b_3 \pm \dots \pm m_n b_n} = \frac{c}{d},$$

де комбінація знаків береться будь-якою, але однаковою для чисельника і знаменника.

**1.1.** Навколо правильного трикутника  $ABC$  описано коло  $O$  радіусом  $R$ . Коло  $O_1$  дотикається до двох сторін  $AB$  і  $BC$  трикутника і кола  $O$ . Знайдіть відстань від центра кола  $O_1$  до вершини  $A$ .

**1.2.** Висота рівнобедреного трикутника з кутом  $\alpha$  при основі більша від радіуса вписаного в нього кола на  $m$ . Визначте основу трикутника і радіус описаного кола.

**1.3.** Доведіть, що радіус кола, яке ділить навпіл сторони трикутника, вдвічі менший від радіуса кола, описаного навколо цього трикутника.

**1.4.** У трикутнику сполучені основи бісектрис. Знайдіть відношення площі даного трикутника до площі трикутника, що утворився, якщо сторони даного трикутника співвідносяться як  $p : q : l$ .

**1.5.** Дано кути  $A, B, C$  трикутника  $ABC$ . Нехай коло дотикається до сторін  $BC, AC$  і  $AB$  трикутника відповідно в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Знайдіть відношення площі трикутника  $A_1B_1C_1$  до площі трикутника  $ABC$ .

**1.6.** Дано трикутник  $ABC$ , кути  $B$  і  $C$  якого співвідносяться як  $3 : 1$ , а бісектриса кута  $A$  ділить площу трикутника у співвідношенні  $2 : 1$ . Знайдіть кути трикутника.

**1.7.** Знайдіть довжину  $l$  бісектриси зовнішнього кута відносно кута  $A$  трикутника, якщо задано його сторони  $b$  і  $c$  і кут  $A$  між ними ( $b \neq c$ ).

**1.8.** У трикутнику площею  $S$  з гострим кутом  $\alpha$  при вершині  $A$  бісектриса кута  $A$  в  $p$  разів менша від радіуса описаного і в  $q$  разів більша від радіуса вписаного круга. Знайдіть сторону трикутника, що лежить навпроти кута  $A$ .

**1.9.** У трикутнику  $ABC$  проведені бісектриси  $AM$  і  $BN$ . Нехай  $O$  — точка їх перетину. Відомо, що

$$AO : OM = \sqrt{3} : 1, \text{ а } BO : ON = 1 : (\sqrt{3} - 1).$$

Знайдіть кути трикутника.

**1.10.** Всередині кута  $\alpha$  узято точку  $M$ . Її проєкції  $P$  і  $Q$  на сторони кута віддалені від вершини  $O$  кута на відстані  $OP = p$  і  $OQ = q$ . Знайдіть відстані  $MP$  і  $MQ$  від точки  $M$  до сторін кута.

**1.11.** У гострокутному трикутнику дві висоти дорівнюють  $3$  см і  $2\sqrt{2}$  см, а їхня точка перетину ділить третю висоту у співвідношенні  $5 : 1$ , рахуючи від вершини трикутника. Знайдіть площу трикутника.

**1.12.** У трикутнику  $ABC$  різниця кутів  $B$  і  $C$  дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ .

Визначте кут  $C$ , якщо відомо, що сума сторін  $AC$  і  $AB$  становить  $k$ , а висота, опущена з вершини  $A$ , дорівнює  $h$ .

**1.13.** У трикутнику  $ABC$  є точка  $O$ , така, що кути  $ABO$ ,  $BCO$  і  $CAO$  дорівнюють  $\alpha$ . Виразіть  $\text{ctg } \alpha$  через площу трикутника і його сторони.

**1.14.** У трикутнику  $ABC$  дано різницю  $\varphi$  кутів  $A$  і  $B$  ( $\varphi = A - B > 0$ ). Відомо, що висота, опущена з  $C$  на  $AB$ , дорівнює  $BC - AC$ . Знайдіть кути трикутника.

**1.15.** Дано довжини висот  $AA_1 = h_a$  і  $BB_1 = h_b$  трикутника  $ABC$  і довжина  $CD = l$  бісектриси кута  $C$ . Знайдіть кут  $C$ .

**1.16.** У трикутник з основою  $a$  і протилежним кутом  $\alpha$  вписано коло. Через центр цього кола і кінці основи трикутника проведено друге коло. Знайдіть його радіус.

**1.17.** Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, то центр кола, вписаного в цей трикутник, і точка перетину його медіан лежать на прямій, паралельній середній за довжиною стороні трикутника.

**1.18.** У трикутнику  $ABC$  радіус вписаного кола дорівнює  $r$ , сторона  $BC$  більша від  $r$  у  $k$  разів, а висота, опущена на цю сторону, більша від  $r$  вчетверо. Знайдіть півпериметр  $p$ ,  $\text{tg } \frac{A}{2}$ , сторони  $b$  і  $c$ .

**1.19.** Кути  $C$ ,  $A$ ,  $B$  трикутника  $ABC$  утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2. Нехай  $O$  — центр кола, вписаного в трикутник  $ABC$ ,  $K$  — центр зовнішньовписаного кола, що дотикається до сторони  $AC$ ,  $L$  — центр зовнішньовписаного кола, що дотикається до сторони  $BC$ . Доведіть, що трикутники  $ABC$  і  $OKL$  подібні.

**1.20.** У трикутнику  $ABC$  кути  $A$ ,  $B$  і  $C$  утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2. Доведіть, що

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

**1.21.** Доведіть, що якщо  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — відповідно точки перетину кожної зі сторін  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  (або їх продовжень) трикутника  $ABC$  з деякою прямою, то

$$\frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot QC \cdot BP} = 1$$

(теорема Менелая).

**1.22.** Точка  $D$  знаходиться на стороні  $BC$  трикутника  $ABC$ . Доведіть, що

$$AB^2 \square DC + AC^2 \square BD - AD^2 \square BC = BC \square DC \square BD$$

(теорема Стюарта).

**1.23.** На сторонах трикутника  $ABC$  узяті точки  $P$ ,  $Q$  і  $R$  так, що три прямі  $AP$ ,  $BQ$  і  $CR$  перетинаються в одній точці. Доведіть, що

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(теорема Чеві).

**1.24.** Через довільну точку  $O$ , узятую всередині трикутника  $ABC$ , проведені прямі  $DE$ ,  $FK$ ,  $MN$ , паралельні відповідно  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , причому  $F$  і  $M$  лежать на  $AB$ ,  $E$  і  $K$  — на  $BC$ ,  $N$  і  $D$  — на  $AC$ . Доведіть, що

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

**1.25.** Через центр  $O$  правильного трикутника  $ABC$  провели довільну пряму. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин трикутника до цієї прямої не залежить від розміщення прямої.

**1.26.** Навколо трикутника  $ABC$ , в якому  $a = 2$ ,  $b = 3$  і кут  $C = 60^\circ$ , описано коло. Визначте радіуси кіл, що проходять через дві вершини трикутника і центр описаного кола.

**1.27.** Сторони трикутника зв'язані співвідношенням  $a^2 = c(b + c)$ . Доведіть, що кут  $A$  удвічі більший від кута  $C$ .

**1.28.** Нехай  $O$  — центр кола, вписаного в трикутник  $ABC$ . Доведіть, що якщо  $OA^2 = OB \square OC$ , то

$$\cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}.$$

**1.29.** Площа  $S$  трикутника  $ABC$  задовольняє співвідношення  $S = a^2 - (b - c)^2$ . Знайдіть кут  $A$ .

**1.30.** На сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані квадрати. Доведіть, що відстань між центрами квадратів, побудованих на бічних сторонах, дорівнює відстані від центра квадрата, побудованого на основі, до протилежної вершини трикутника.

**1.31.** У трикутнику  $ABC$  одиничної площі проведений відрізок  $AD$ , що перетинає медіану  $CF$  у точці  $M$ , причому  $FM = \frac{1}{4}CF$ .

Знайдіть площу трикутника  $ABD$ .

**1.32.** Доведіть, що добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних сторін (*теорема Птолемея*).

**1.33.** Відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює їхній піврізниці. Знайдіть суму кутів при більшій основі трапеції.

**1.34.** Через центр квадрата  $ABCD$  провели пряму, що перетинає сторону  $AB$  у точці  $N$ , причому  $AN : NB = 1 : 2$ . На цій прямій узяли довільну точку  $M$ , яка лежить всередині квадрата. Доведіть, що відстані від точки  $M$  до сторін квадрата  $AB$ ,  $AD$ ,  $BC$  і  $CD$ , узяті в названому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

**1.35.** Квадрат і правильний трикутник, які мають спільну вершину, вписані в коло одиничного радіуса. Знайдіть площу, покриту і квадратом, і трикутником.

**1.36.** У коло вписані трапеція і рівнобедрений гострокутний трикутник площею  $S$  таким чином, що більша основа трапеції співпадає з діаметром кола, а бічні сторони паралельні бічним сторонам трикутника. Середня лінія трапеції дорівнює  $l$ . Знайдіть висоту трапеції.

**1.37.** Знайдіть відношення площі трапеції  $ABCD$  до площі трикутника  $AOD$ , де  $O$  — точка перетину діагоналей трапеції, якщо відомо, що  $\frac{BC}{AD} = p$ .

**1.38.** Два правильні многокутники з периметрами  $a$  і  $b$  описані навколо кола, а третій правильний многокутник вписаний в це коло. Другий і третій многокутники мають кожен удвічі більше сторін, ніж перший. Знайдіть периметр третього многокутника.

**1.39.** Усередині кута  $AOB$ , меншого від  $\pi$ , дано точку  $M$ , що знаходиться на відстані  $a$  від вершини кута. Відрізок  $OM$  утворює кути  $\alpha$  і  $\beta$  зі сторонами кута  $AOB$ . Знайдіть радіус  $R$  кола, що проходить через  $M$  і відсікає на сторонах кута  $AOB$  хорди, що дорівнюють  $2a$ .

**1.40.** Із зовнішньої точки  $A$  провели дві взаємно перпендикулярні січні  $ABD$  і  $ACE$  до кола з центром  $O$ . Площі трикутників  $ABC$  і  $ADE$  співвідносяться як  $m : n$ . Визначте величини дуг  $BC$  і  $DE$ , кожна з яких менша від півкола.

**1.41.** З точки  $A$ , що лежить на колі радіуса  $r$ , проведено дві хорди  $AC$  і  $AB$ . Ці хорди лежать по один бік від діаметра кола, що проходить через точку  $A$ . Довжина більшої хорди дорівнює  $b$ , а кут  $BAC$  дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кола, яке дотикається до хорд  $AB$  і  $AC$  та дуги  $BC$ .