

## Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатися перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед усіх різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформуванню вибору майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку його проводили для учнів Донецької області, згодом ці межі розширили, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

Завдання конкурсу складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість завдань не є оригінальною, вона запозичена з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптована для конкурсу.

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2009 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005, 2006, 2007, 2008 роки надруковано у першому, другому, третьому і четвертому випусках «Математичний конкурс. 4–9 класи», що вийшли в серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для вчителів.

## Завдання заочного туру конкурсу

### 4–5 класи

#### Перша частина завдань

1. В автобусі 40 місць. На кожних чотирьох пасажирів, що сидять, припадає ще одне вільне місце. Скільки пасажирів в автобусі?

| А  | Б  | В  | Г  |
|----|----|----|----|
| 24 | 30 | 32 | 36 |

2. На шкільному подвір'ї було 11 дівчаток і 9 хлопчиків. Яка найменша кількість дівчаток і хлопчиків має до них приєднатися, щоб їх усіх можна було поділити на 5 груп з однаковою кількістю дівчаток і хлопчиків у кожній групі?

| А     | Б     | В     | Г     |
|-------|-------|-------|-------|
| 4 і 1 | 1 і 4 | 0 і 0 | 5 і 5 |

3. Листоноша сказав: «Я сьогодні 5 разів піднімався на 10-й поверх і 10 разів на 5-й. Якби я не спускався кожного разу, то вже піднявся би на ...»

| А            | Б           | В           | Г           |
|--------------|-------------|-------------|-------------|
| 100-й поверх | 85-й поверх | 86-й поверх | 99-й поверх |

4. У прямокутному кінозалі кількість рядів у 36 разів менша від загальної кількості місць і в 3 рази менша від кількості місць у кожному ряду. На скільки більше місць в ряду, ніж рядів у кінозалі?

| А     | Б     | В     | Г     |
|-------|-------|-------|-------|
| На 18 | На 12 | На 24 | На 48 |

5. В учнів трьох класів проходив урок фізкультури. У шеренгу вишикувалося 90 учнів, чий спортивні форми були пронумеровані від 10 до 99. Тренер з гімнастики відібрав для занять тих учнів, номери яких ділилися на 4. З них старший тренер з гімнастики відібрав для удосконалення опорного стрибка учнів, номери яких ділилися і на 3. Скільки учнів відібрав старший тренер?

| А | Б | В | Г  |
|---|---|---|----|
| 7 | 8 | 9 | 12 |

6. Турнір з боксу проходив за олімпійською системою: той, хто програв, вибуває. Відпочивальників немає. Скільки боксерів брало участь у турнірі,

якщо по його закінченню з'ясувалося, що рівно 32 спортсмени виграли боїв більше, ніж програли?

| А   | Б   | В  | Г  |
|-----|-----|----|----|
| 256 | 128 | 64 | 48 |

7. У числа 148 будь-які дві цифри відрізняються одна від одної не менше, ніж на 3. Скільки всього трицифрових чисел, що не містять нулів у своєму записі, мають цю властивість?

| А  | Б  | В  | Г  |
|----|----|----|----|
| 10 | 20 | 30 | 60 |

8. Усі учні класу займаються гімнастикою або легкою атлетикою. Серед гімнастів кожен п'ятий — легкоатлет, а серед легкоатлетів кожен шостий — гімнаст. Кого в класі більше: гімнастів чи легкоатлетів?

| А         | Б            | В                  | Г                   |
|-----------|--------------|--------------------|---------------------|
| Гімнастів | Легкоатлетів | Однакова кількість | Визначити неможливо |

9. Маємо пластинки доміно, на половинках яких зображено очки 0, 1, 2, 3, 4. Яка сума очок на даних пластинках?

| А  | Б   | В   | Г   |
|----|-----|-----|-----|
| 60 | 100 | 108 | 168 |

10. У спортивній секції менше 40 учнів. Вони стрибають у довжину, висоту, з жердиною і виконують потрійні стрибки. Кожен тренується тільки в одному виді стрибків. Десята частина стрибає з жердиною, третя виконує потрійний стрибок, половина стрибає у довжину. Скільки учнів стрибають у висоту?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 |

11. По алеї парку двоє хлопчиків котять обручі. Довжина кола одного обруча 3 м, а другого — 2 м. Визначте довжину алеї, якщо відомо, що другий обруч зробив на тридцять обертів більше, ніж перший.

| А     | Б     | В     | Г     |
|-------|-------|-------|-------|
| 120 м | 150 м | 180 м | 240 м |

12. Уздовж дороги лежить 25 каменів на відстані 10 м один від одного. Ці камені треба зібрати в тому місці, де знаходиться середній камінь. Хлопчик може нести лише один камінь, тому він переносить їх послідовно, почавши з одного з крайніх. Який шлях пройде хлопчик, зібравши всі камені?

| А       | Б       | В       | Г       |
|---------|---------|---------|---------|
| 3 000 м | 2 500 м | 3 500 м | 2 000 м |

13. Двоє друзів — Петрик і Грицько — грають у гру. З урни з двома білими кулями і двома червоними вони навмання виймають дві кулі. Якщо обидві кулі будуть однакового кольору, то перемагає Петрик, якщо різного, то — Грицько. Хто з хлопчиків має більші шанси на виграш?

| А      | Б       | В              | Г                   |
|--------|---------|----------------|---------------------|
| Петрик | Грицько | Шанси однакові | Визначити неможливо |

14. Яку з наведених фігур не можна скласти з двох однакових деталей, зображених справа? Деталі не можна перевертати тильною стороною вгору.



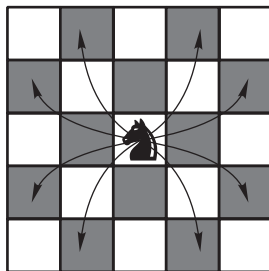
| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |

15. Буратіно та четверо його товаришів з лялькового театру вибирають поміж собою ведучого за допомогою вірша-лічилки. За правилами, той, на кого випадає останнє слово лічилки, вибуває, і лічба починається спочатку вже без нього. З якої найменшої (але більшої від двох) кількості слів має складатися вірш-лічилка, щоб Буратіно, з якого завжди починається відлік, не вибув на жодній стадії і став ведучим?

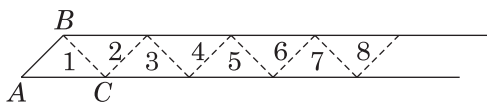
| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 8 |

### Друга частина завдань

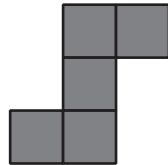
- Купили 7 книг з математики, інформатики та історії. Скільки книг придбали з кожного предмета, якщо книг з інформатики купили більше, ніж з історії, а з математики — менше, ніж з історії?
- Доведіть, не виконуючи самого ділення, що значення виразу  $200\,800 \cdot 1\,005 + 2\,008 \cdot 100\,400$  ділиться на 2 009.
- Номери автомобілів в Україні складаються з двох літер українського алфавіту і чотирьох цифр. Яку найбільшу кількість автомобілів можна забезпечити такими номерами, якщо використовувати 31 літеру українського алфавіту?
- Автомобіль пройшов відстань між двома містами за 5 годин. До того ж першу половину шляху він рухався зі швидкістю 60 км/год, а другу — зі швидкістю 40 км/год. Яка відстань між містами?
- Скількома способами можна поставити на шахівницю двох коней так, щоб вони не били один одного? Шаховий кінь ходить літерою «Г», як це показано на рисунку.



- Довгу смужку паперу розділили штриховими лініями так, як це показано на рисунку. Смужку згинають за штриховими лініями в послідовності, вказаній числами. До того ж смужка завжди займає горизонтальне положення, а трикутники зліва після згинання мають лежати зверху трикутників, що знаходяться справа. У якому положенні будуть вершини A, B, C після 2009-ти згинів?



7. Я вдосконалюю знання іноземної мови, вивчаючи нові слова. У перший день, в понеділок я вивчаю 8 нових слів. У наступні дні тижня, до п'ятниці включно, я щодня вивчаю на 3 слова більше, ніж у попередній день. Субота і неділя відведені для самоконтролю і перевірки. У ці дні я помічаю, що, на жаль, забув п'яту частину слів. Скільки нових слів я знаю після того, як пройде тиждень?
8. В автомобілі спідометр вийшов з ладу. Коли водій виїхав з гаража, лічильник спідометра показував 51132 км. Біля стовпа з відміткою 100 км він уже показував 51 172 км, а біля стовпа з відміткою 160 км — 51 244 км. Після прибуття в пункт призначення лічильник показував 51 732 км. Яку відстань проїхав автомобіль?
9. Семеро хлопчиків зібрали разом 100 горіхів. До того ж ніхто не зібрав однакової кількості горіхів. Доведіть, що серед хлопчиків є троє, які зібрали разом не менше 50 горіхів.
10. Стінки і дно картонної коробки (без кришки) є квадратами з площею  $1 \text{ см}^2$ . Розріжте розгортку поверхні коробки, що зображена на рисунку, на три частини так, щоб з них можна було скласти квадрат з площею  $5 \text{ см}^2$ .



## 6–7 класи

### Перша частина завдань

1. Деякі будинки, що стоять з однієї сторони в двох кварталах на паралельних вулицях, мають однакові номери. Сума номерів цих будинків в одному кварталі дорівнює 135, а в другому — 235. Скільки будинків у цих кварталах мають однакові номери?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 |

2. Восьминіг підбирає набір ластів для плавання. У підводній печері він має багато ластів двох кольорів. Яку найменшу кількість ластів він має витягти навмання, щоб дістати набір ластів одного кольору?

| А | Б  | В  | Г              |
|---|----|----|----------------|
| 3 | 15 | 16 | Інша відповідь |

3. На олімпіаді з математики запропонували 5 задач, і всі призери одержали премії за успішне виконання. Відомо, що жодні четверо з премійованих не розв'язали в сукупності всіх задач, але довільні п'ятеро з них (теж у сукупності) розв'язали всі задачі. Скільки учасників олімпіади були відзначені преміями?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |

4. Дмитро полив добривами помідори на ділянці з розрахунку три лійки на чотири кущі, а треба було — чотири лійки на п'ять кущів. Скільки кущів він має полити однією лійкою, щоб виправити помилку?

| А  | Б  | В  | Г  |
|----|----|----|----|
| 25 | 20 | 15 | 10 |

5. Мураха вивпозає з початку координат на координатній прямій і рухається вздовж неї, проходячи за 1 с одиницю масштабу. В скількох точках прямої мураха може опинитися через одну хвилину, якщо вона може змінювати напрям руху через ціле число секунд?

| А   | Б   | В  | Г  |
|-----|-----|----|----|
| 121 | 120 | 61 | 60 |

6. Четверо учнів, усі різні за зростом, випадковим чином вишикувались у шеренгу. Яка ймовірність того, що вони стали за зростом (за зростанням чи спаданням)?

| А              | Б              | В             | Г             |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

7. Між цифрами двоцифрового числа поставили цифру 0, і виявилось, що отримане трицифрове число ділиться без остачі на попереднє двоцифрове. Яка найменша частка може вийти в результаті?

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 |





## Зміст

|   |    |
|---|----|
| Передмова.....                                | 3  |
| Завдання заочного туру конкурсу .....         | 5  |
| 4–5 класи .....                               | 5  |
| 6–7 класи .....                               | 9  |
| 8–9 класи .....                               | 14 |
| Завдання очного туру конкурсу.....            | 19 |
| 4 клас.....                                   | 19 |
| 5 клас.....                                   | 21 |
| 6 клас.....                                   | 24 |
| 7 клас.....                                   | 26 |
| 8 клас.....                                   | 29 |
| 9 клас.....                                   | 31 |
| Розв’язки завдань заочного туру конкурсу..... | 34 |
| 4–5 класи .....                               | 34 |
| 6–7 класи .....                               | 39 |
| 8–9 класи .....                               | 45 |
| Розв’язки завдань очного туру конкурсу .....  | 56 |
| 4 клас.....                                   | 56 |
| 5 клас.....                                   | 58 |
| 6 клас.....                                   | 61 |
| 7 клас.....                                   | 64 |
| 8 клас.....                                   | 67 |
| 9 клас.....                                   | 71 |