

БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

В.В. Прасолов

ЗАДАЧІ З ПЛАНІМЕТРІЇ

Переклад з російської
Андрія Кравчука



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 514.112
ББК 22.151.0
П70

Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року

Перекладено за виданням:

В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 6-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2007. — 640 с.: ил.

Прасолов В. В.

П70 Задачі з планиметрії / В. В. Прасолов ; пер. з рос. А. Кравчука. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. — 576 с. : іл. — (Серія «Бібліотечка фізико-математичної школи»).

ISBN 978-966-10-0427-5

Цю книгу можна використовувати як збірник задач з геометрії для 7–11 класів у тісному зв'язку з усіма діючими підручниками з геометрії. В неї увійшли нестандартні геометричні задачі дещо вищого порівняно зі шкільними задачами рівня. Збірник містить близько 1900 задач із повними розв'язками і близько 150 задач для самостійного розв'язання.

За допомогою цього посібника можна організувати передпрофільну та профільну підготовку з математики, а також елективні курси з додаткових тем планиметрії.

Матеріали даного посібника повністю покривають тематику і складність завдань олімпіад усіх рівнів і всіх видів іспитів, включаючи зовнішнє незалежне оцінювання і вступні іспити у вищі навчальні заклади.

Для школярів, викладачів математики, керівників математичних гуртків, студентів педагогічних інститутів та університетів.

УДК 514.112
ББК 22.151.0

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-0427-5

© Прасолов В.В., 2007
© Навчальна книга – Богдан, 2012

ЗМІСТ

Із передмови до п'ятого видання	9
Передмова до четвертого видання	10
Розділ 1. Подібні трикутники	11
§1. Відрізки, розміщені між паралельними прямими (12). §2. Відношення сторін подібних трикутників (13). §3. Відношення площ подібних трикутників (15). §4. Допоміжні рівні трикутники (15). §5. Трикутник, утворений основами висот (17). §6. Подібні фігури (17). Задачі для самостійного розв'язання (18). Розв'язки.....	19
Розділ 2. Вписаний кут	29
§1. Кути, що спираються на рівні дуги (30). §2. Величина кута між двома хордами (31). §3. Кут між дотичною й хордою (32). §4. Зв'язок величини кута з довжиною дуги й хорди (33). §5. Чотири точки, що лежать на одному колі (34). §6. Вписаний кут і подібні трикутники (35). §7. Бісектриса ділить дугу навпіл (36). §8. Вписаний чотирикутник з перпендикулярними діагоналями (36). §9. Три описані кола перетинаються в одній точці (37). §10. Точка Мікеля (38). §11. Різні задачі (38). Задачі для самостійного розв'язання (39). Розв'язки.....	40
Розділ 3. Кола	51
§1. Дотичні до кіл (52). §2. Добуток довжин відрізків хорд (53). §3. Дотичні кола (54). §4. Три кола з однаковим радіусом (54). §5. Дві дотичні, проведені з однієї точки (55). §6. Застосування теореми про висоти трикутника (56). §7. Площі криволінійних фігур (56). §8. Кола, вписані в сегмент (57). §9. Різні задачі (58). §10. Радикальна вісь (58). §11. Пучки кіл (60). Задачі для самостійного розв'язання (61). Розв'язки.....	61
Розділ 4. Площа	73
§1. Медіана ділить площу навпіл (74). §2. Обчислення площ (74). §3. Площі трикутників, на які розбитий чотирикутник (75). §4. Площі частин, на які	

розбитий чотирикутник (75). §5. Різні задачі (76). §6. Прямі та криві, що ділять фігури на рівновеликі частини (77). §7. Формули для площі чотирикутника (78). §8. Допоміжна площа (78). §9. Перегрупування площ (80). Задачі для самостійного розв'язання (80).	
Розв'язки.....	81
Розділ 5. Трикутники	92
§1. Вписане й описане кола (93). §2. Прямокутні трикутники (94). §3. Правильний трикутник (95). §4. Трикутник з кутом 60° або 120° (96). §5. Цілочисельні трикутники (96). §6. Різні задачі (97). §7. Теорема Менелая (100). §8. Теорема Чеві (101). §9. Пряма Сімсона (104). §10. Подерний трикутник (105). §11. Пряма Ейлера і коло дев'яти точок (106). §12. Точки Брокара (107). §13. Точка Лемуана (108). Задачі для самостійного розв'язання (110).	
Розв'язки.....	111
Розділ 6. Багатокутники	137
§1. Вписані й описані чотирикутники (138). §2. Чотирикутники (139). §3. Теорема Птолемея (141). §4. П'ятикутники (142). §5. Шестикутники (142). §6. Правильні багатокутники (143). §7. Вписані й описані багатокутники (145). §8. Довільні опуклі багатокутники (146). §9. Теорема Паскаля (146). Задачі для самостійного розв'язання (147).	
Розв'язки.....	148
Розділ 7. Геометричні місця точок	166
§1. ГМТ — пряма або відрізок (167). §2. ГМТ — коло або дуга кола (167). §3. Вписаний кут (168). §4. Допоміжні рівні або подібні трикутники (169). §5. Гомотетія (169). §6. Метод ГМТ (169). §7. ГМТ із ненульовою площею (170). §8. Теорема Карно (170). §9. Коло Ферма-Аполлонія (171). Задачі для самостійного розв'язання (171).	
Розв'язки.....	172
Розділ 8. Побудови	179
§1. Метод геометричних місць точок (180). §2. Вписаний кут (180). §3. Подібні трикутники та гомотетія (180). §4. Побудова трикутників за різними елементами (181). §5. Побудова трикутників за різними точками (181). §6. Трикутник (182). §7. Чотирикутники (182). §8. Кола (183). §9. Коло Аполлонія (183). §10. Різні задачі (184). §11. Незвичайні побудови (184). §12. Побудови однією лінійкою (184). §13. Побудови за допомогою двосторонньої лінійки (185). §14. Побудови за допомогою прямого кута (186). Задачі для самостійного розв'язання (186).	
Розв'язки.....	187
Розділ 9. Геометричні нерівності	201
§1. Медіана трикутника (202). §2. Алгебраїчні задачі на нерівність трикутника (202). §3. Сума довжин діагоналей чотирикутника (203). §4. Різні задачі на нерівність трикутника (203). §5. Площа трикутника не перевищує по-	

ловини добутку двох сторін (204). §6. Нерівності для площ (204). §7. Площа. Одна фігура лежить усередині іншої (205). §8. Ламані всередині квадрата (207). §9. Чотирикутник (207). §10. Багатокутники (208). §11. Різні задачі (209). Задачі для самостійного розв'язання (210). Додаток. Деякі нерівності.....	210
Розв'язки.....	211
Розділ 10. Нерівності для елементів трикутника	230
§1. Медіани (230). §2. Висоти (230). §3. Бісектриси (231). §4. Довжини сторін (231). §5. Радіуси описаного, вписаного і зовнівписаних кіл (231). §6. Симетричні нерівності для кутів трикутника (232). §7. Нерівності для кутів трикутника (233). §8. Нерівності для площі трикутника (233). §9. Навпроти більшої сторони лежить більший кут (234). §10. Відрізок усередині трикутника менший від найбільшої сторони (234). §11. Нерівності для прямокутних трикутників (234). §12. Нерівності для гострокутних трикутників (235). §13. Нерівності у трикутниках (236). Задачі для самостійного розв'язання (236). Розв'язки.....	237
Розділ 11. Задачі на максимум і мінімум	249
§1. Трикутник (249). §2. Екстремальні точки трикутника (250). §3. Кут (251). §4. Чотирикутники (252). §5. Багатокутники (252). §6. Різні задачі (252). §7. Екстремальні властивості правильних багатокутників (253). Задачі для самостійного розв'язання (253). Розв'язки.....	254
Розділ 12. Обчислення й метричні співвідношення	264
§1. Теорема синусів (264). §2. Теорема косинусів (265). §3. Вписане, описане і зовнівписане кола; їхні радіуси (266). §4. Довжини сторін, висоти, бісектриси (267). §5. Синуси і косинуси кутів трикутника (267). §6. Тангенси і котангенси кутів трикутника (268). §7. Обчислення кутів (268). §8. Кола (269). §9. Різні задачі (270). §10. Метод координат (270). Задачі для самостійного розв'язання (271). Розв'язки.....	272
Розділ 13. Вектори	282
§1. Вектори сторін багатокутників (283). §2. Скалярний добуток. Співвідношення (284). §3. Нерівності (284). §4. Суми векторів (285). §5. Допоміжні проєкції (286). §6. Метод усереднення (286). §7. Псевдоскалярний добуток (287). Задачі для самостійного розв'язання (288). Розв'язки.....	288
Розділ 14. Центр мас	298
§1. Основні властивості центра мас (298). §2. Теорема про групування мас (299). §3. Момент інерції (300). §4. Різні задачі (301). §5. Баріцентричні координати (301). §6. Трилінійні координати (304). Розв'язки.....	305

Розділ 15. Паралельне перенесення	317
§1. Перенесення допомагає розв'язати задачу (317). §2. Побудови й геометричні місця точок (318). Задачі для самостійного розв'язання (319). Розв'язки.....	319
Розділ 16. Центральна симетрія	324
§1. Симетрія допомагає розв'язати задачу (325). §2. Властивості симетрії (325). §3. Симетрія у задачах на побудову (326). Задачі для самостійного розв'язання (326). Розв'язки.....	327
Розділ 17. Осьова симетрія	331
§1. Симетрія допомагає розв'язати задачу (332). §2. Побудови (332). §3. Нерівності й екстремуми (333). §4. Композиції симетрій (333). §5. Властивості симетрій та осей симетрії (334). §6. Теорема Шаля (334). Задачі для самостійного розв'язання (335). Розв'язки.....	335
Розділ 18. Поворот	342
§1. Поворот на 90° (343). §2. Поворот на 60° (343). §3. Повороти на довільні кути (345). §4. Композиції поворотів (346). Задачі для самостійного розв'язання (347). Розв'язки.....	347
Розділ 19. Гомотетія і поворотна гомотетія	355
§1. Гомотетичні багатокутники (356). §2. Гомотетичні кола (356). §3. Побудови й геометричні місця точок (357). §4. Композиції гомотетій (358). §5. Поворотна гомотетія (358). §6. Центр поворотної гомотетії (359). §7. Композиції поворотних гомотетій (360). §8. Коло подібності трьох фігур (360). Задачі для самостійного розв'язання (362). Розв'язки.....	362
Розділ 20. Принцип крайнього	372
§1. Найменший або найбільший кут (372). §2. Найменша або найбільша відстань (373). §3. Найменша або найбільша площа (373). §4. Найбільший трикутник (374). §5. Опукла оболонка й опорні прямі (374). §6. Різні задачі (375). Розв'язки.....	376
Розділ 21. Принцип Діріхле	382
§1. Скінченна кількість точок, прямих тощо (382). §2. Кути й довжини (383). §3. Площа (384). Розв'язки.....	385

Розділ 22. Опуклі й неопуклі багатокутники	392
§1. Опуклі багатокутники (392). §2. Ізопериметрична нерівність (393). §3. Симетризація за Штейнером (394). §4. Сума Мінковського (394). §5. Теорема Хеллі (395). §6. Неопуклі багатокутники (396).	
Розв'язки.....	397
Розділ 23. Подільність, інваріанти, розфарбування	413
§1. Парність і непарність (413). §2. Подільність (414). §3. Інваріанти (415). §4. Допоміжні розфарбування у шаховому порядку (416). §5. Інші допоміжні розфарбування (416). §6. Задачі про розфарбування (417).	
Розв'язки.....	418
Розділ 24. Цілочисельні решітки	428
§1. Багатокутники з вершинами у вузлах решітки (428). §2. Формула Піка (428). §3. Різні задачі (429). §4. Навколо теореми Мінковського (429).	
Розв'язки.....	430
Розділ 25. Розрізування, розбиття, покриття	437
§1. Рівноскладені фігури (437). §2. Розрізування на частини, що мають спеціальні властивості (438). §3. Властивості частин, отриманих при розрізуваннях (438). §4. Розрізування на паралелограми (439). §5. Площина, розрізана прямими (439). §6. Різні задачі на розрізування (440). §7. Розбиття фігур на відрізки (441). §8. Покриття (441). §9. Замощення кітками доміно й плитками (442). §10. Розташування фігур на площині (442).	
Розв'язки.....	443
Розділ 26. Системи точок і відрізків. Приклади й контрприклад	462
§1. Системи точок (462). §2. Системи відрізків, прямих і кіл (463). §3. Приклади й контрприклад (463).	
Розв'язки.....	464
Розділ 27. Індукція і комбінаторика	469
§1. Індукція (469). §2. Комбінаторика (470).	
Розв'язки.....	470
Розділ 28. Інверсія	473
§1. Властивості інверсії (474). §2. Побудова кіл (474). §3. Побудови одним циркулем (475). §4. Зробимо інверсію (475). §5. Точки, що лежать на одному колі, і кола, що проходять через одну точку (476). §6. Ланцюжки кіл (479).	
Розв'язки.....	479
Розділ 29. Афінні перетворення	489
§1. Афінні перетворення (489). §2. Розв'язання задач за допомогою афінних перетворень (491). §3. Комплексні числа (492). §4. Еліпси Штейнера (495).	
Розв'язки.....	495

Розділ 30. Проективні перетворення	510
§1. Проективні перетворення прямої (510). §2. Проективні перетворення площини (512). §3. Переведемо дану пряму на нескінченність (515). §4. Застосування проективних перетворень, що зберігають коло (516). §5. Застосування проективних перетворень прямої у задачах на доведення (517). §6. Застосування проективних перетворень прямої у задачах на побудову (517). §7. Неможливість побудов за допомогою однієї лінійки (518).	
Розв'язки	519
Розділ 31. Еліпс, парабола, гіпербола	531
§1. Класифікація кривих другого порядку (531). §2. Еліпс (532). §3. Парабола (534). §4. Гіпербола (535). §5. Пучки конік (536). §6. Коніки як геометричні місця точок (538). §7. Раціональна параметризація (538). §8. Коніки, пов'язані з трикутником (539).	
Розв'язки	540
Доповнення	556
Предметний покажчик	568
Програми елективних курсів з геометрії	573

ІЗ ПЕРЕДМОВИ ДО П'ЯТОГО ВИДАННЯ

У нове видання додано майже 200 задач. Додавлено також новий розділ 31, присвячений еліпсу, параболі та гіперболі. (Такий параграф був у найпершому виданні цієї книги, проте його вилучили з усіх наступних видань).

Принагідно усунуті друкарські помилки, які були в попередньому виданні, а також істотно оновлені формулювання і розв'язки деяких задач.

Електронну версію цієї книги можна знайти в Internet за адресою:
<http://www.mccme.ru/prasolov/>.

ПЕРЕДМОВА ДО ЧЕТВЕРТОГО ВИДАННЯ

У цьому збірнику задач представлені майже всі теми планіметрії, які вивчаються у школі, в тому числі й у спеціалізованих класах. Його основу складають задачі, що пропонувалися в різний час на математичних олімпіадах, і задачі з архівів математичних олімпіад та математичних гуртків.

Для зручності користування в книзі прийнята детальна рубрикація. Задачі розподілені за 30 розділами, кожен з яких розбитий на декілька параграфів (від двох до чотирнадцяти). За основу класифікації прийняті методи розв'язання задач. Головна мета цього розбиття полягає в тому, щоб допомогти читачеві орієнтуватися у настільки широкому наборі задач. У нове видання увійшов детальний предметний покажчик, що призначений тій же меті.

Перше видання цієї книги вийшло у світ 15 років тому. Відгуки, які надійшли до мене, свідчать про те, що книга знайшла набагато ширше застосування у школі, ніж я сподівався, коли починав її писати.

У нове видання увійшло додатково 70 задач, які стали мені відомі за останні роки. Змінені також розв'язки декількох задач. Задачі підвищеної складності в новому виданні відзначені «зірочкою». Додано також «Доповнення», у якому обговорюється декілька тем, ширших, ніж окрема задача.

Розділ 28 написаний А.Ю. Вайнтробом, а розділи 29 і 30 написані С.Ю. Оревковим. Зміст цих розділів багато в чому визначила книга І.М. Яглома «Геометрические преобразования. Т. 2, ч. 3. Линейные и круговые преобразования» (М.: Гостехиздат, 1956).

Під час підготовки першого видання велику допомогу надали мені поради і зауваження, висловлені академіком О.В. Погореловим, О.М. Абрамовим, А.Ю. Вайнтробом, М.Б. Васильєвим, М.П. Долбіліним і С.Ю. Оревковим. Усім їм я висловлюю щире подяку.

Розділ 1

ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Основні відомості

1. Трикутник ABC подібний до трикутника $A_1B_1C_1$ (позначення: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) тоді й тільки тоді, коли виконується одна з наступних еквівалентних умов:

а) $AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1$;

б) $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ і $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;

в) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ і $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2. Якщо паралельні прямі відтинають від кута з вершиною A трикутника AB_1C_1 і AB_2C_2 , то ці трикутники — подібні й $AB_1 : AB_2 = AC_1 : AC_2$ (точки B_1 і B_2 лежать на одній стороні кута, C_1 і C_2 — на іншій).

3. *Середньою лінією трикутника* називають відрізок, що сполучає середини бічних сторін. Цей відрізок паралельний третій стороні й дорівнює половині її довжини.

Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції. Цей відрізок паралельний основам і дорівнює півсумі їхніх довжин.

4. Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності, тобто квадрату відношення довжин відповідних сторін. Це впливає, напри-

клад, з формули $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$.

5. Багатокутники $A_1A_2 \dots A_n$ і $B_1B_2 \dots B_n$ називають *подібними*, якщо $A_1A_2 : A_2A_3 : \dots : A_nA_1 = B_1B_2 : B_2B_3 : \dots : B_nB_1$ і кути при вершинах A_1, \dots, A_n рівні відповідно до кутів при вершинах B_1, \dots, B_n .

Відношення відповідних діагоналей подібних багатокутників дорівнює коефіцієнту подібності; для описаних подібних багатокутників відношення радіусів вписаних кіл також дорівнює коефіцієнту подібності.

Вступні задачі

1. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1 . Доведіть, що $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. У прямокутному трикутнику ABC із прямим кутом C проведено висоту CH . Доведіть, що $AC^2 = AB \cdot AH$ і $CH^2 = AH \cdot BH$.

11.3. Доведіть, що серед усіх трикутників з фіксованим півпериметром p найбільшу площу має правильний трикутник.

11.4. Розглянемо всі гострокутні трикутники зі заданими стороною a і кутом α . Чому дорівнює максимум суми квадратів довжин сторін b і c ?

11.5. Серед усіх трикутників, вписаних у дане коло, знайдіть той, у якого максимальна сума квадратів довжин сторін.

11.6*. Периметр трикутника ABC дорівнює $2p$. На сторонах AB і AC взято точки M і N так, що $MN \parallel BC$ і MN дотикається до вписаного кола трикутника ABC . Знайдіть найбільше значення довжини відрізка MN .

11.7*. У даний трикутник помістіть центрально симетричний багатокутник з найбільшою площею.

11.8*. Площа трикутника ABC дорівнює 1. Нехай A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, CA, AB відповідно. На відрізках AB_1, CA_1, BC_1 взято точки K, L, M відповідно. Чому дорівнює мінімальна площа спільної частини трикутників KLM і $A_1B_1C_1$?

11.9*. Яку найменшу ширину повинна мати нескінченна смуга паперу, щоб з неї можна було вирізати будь-який трикутник з площею 1?

* * *

11.10. Доведіть, що трикутники з довжинами сторін a, b, c і a_1, b_1, c_1 подібні тоді й тільки тоді, коли

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

11.11*. Доведіть, що якщо α, β, γ і $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — кути двох трикутників, то

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

11.12*. Нехай a, b і c — довжини сторін трикутника з площею S ; α_1, β_1 і γ_1 — кути деякого іншого трикутника. Доведіть, що $a^2 \operatorname{ctg} \alpha_1 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_1 + c^2 \operatorname{ctg} \gamma_1 \geq 4S$, причому рівність досягається, тільки якщо розглянуті трикутники є подібними.

11.13*. Дано трикутник зі сторонами a, b і c , причому $a \geq b \geq c$; x, y і z — кути деякого іншого трикутника. Доведіть, що

$$bc + ca - ab < bc \cos x + ca \cos y + ab \cos z \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Див. також задачу 17.21.

§2. Екстремальні точки трикутника

11.14. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC взято точку X ; M і N — її проєкції на катети AC і BC .

а) При якому положенні точки X довжина відрізка MN буде найменшою?

б) При якому положенні точки X площа чотирикутника $CMXN$ буде найбільшою?

11.15. Із точки M , що лежить на стороні AB гострокутного трикутника ABC , опущено перпендикуляри MP і MQ на сторони BC і AC . При якому положенні точки M довжина відрізка PQ є мінімальною?

11.16. Дано трикутник ABC . Знайдіть на прямій AB точку M , для якої сума радіусів описаних кіл трикутників ACM і BCM була б найменшою.

11.17. З точки M описаного кола трикутника ABC опущено перпендикуляри MP і MQ на прямі AB і AC . При якому положенні точки M довжина відрізка PQ максимальна?

11.18*. Усередині трикутника ABC взято точку O . Нехай d_a, d_b, d_c — відстані від неї до прямих BC, CA, AB . При якому положенні точки O добуток $d_a d_b d_c$ буде найбільшим?

11.19*. Точки A_1, B_1 і C_1 взято на сторонах BC, CA і AB трикутника ABC , причому відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці M . При якому положенні точки M величина $\frac{MA_1}{AA_1} \cdot \frac{MB_1}{BB_1} \cdot \frac{MC_1}{CC_1}$ є максимальною?

11.20*. Із точки M , що лежить усередині даного трикутника ABC , опущено перпендикуляри MA_1, MB_1, MC_1 на прямі BC, CA, AB . Для яких точок M усередині даного трикутника ABC величина $a/MA_1 + b/MB_1 + c/MC_1$ набуває найменшого значення?

11.21*. Дано трикутник ABC . Знайдіть усередині нього точку O , для якої сума довжин відрізків OA, OB, OC є мінімальною. (Зверніть увагу на той випадок, коли один з кутів трикутника більший 120° .)

11.22*. Знайдіть усередині трикутника ABC точку O , для якої сума квадратів відстаней від неї до сторін трикутника є мінімальною.

Див. також задачу 18.22 а).

§3. Кут

11.23. На одній стороні гострого кута дано точки A і B . Побудуйте на іншій його стороні точку C , з якої відрізок AB видно під найбільшим кутом.

11.24. Дано кут XAY і точку O всередині нього. Проведіть через точку O пряму, що відтинає від даного кута трикутник з найменшою площею.

11.25. Проведіть через дану точку P , що лежить усередині кута AOB , пряму MN так, щоб величина $OM + ON$ була мінімальною (точки M і N лежать на сторонах OA і OB).

11.26. Дано кут XAY і коло всередині нього. Побудуйте точку кола, сума відстаней від якої до прямих AH і AU є мінімальною.

11.27*. Усередині гострого кута BAC дано точку M . Побудуйте на сторонах BA і AC точки X і Y так, щоб периметр трикутника XYM був мінімальним.

11.28*. Дано кут XAY . Кінці B і C відрізків BO і CO з довжиною 1 переміщуються вздовж променів AH і AU . Побудуйте чотирикутник $ABOC$ з найбільшою площею.

Тема занять: геометричні місця точок і побудови (18 годин)

- Заняття 1. 7.1–7.4.
- Заняття 2. 7.6–7.9.
- Заняття 3. 7.11–7.15.
- Заняття 4. 7.19–7.21, 7.27, 7.28.
- Заняття 5. 7.31–7.36.
- Заняття 6. 7.41–7.45, 7.49
- Заняття 7. 8.1–8.5.
- Заняття 8. 8.7–8.10
- Заняття 9. 8.12–8.16.
- Заняття 10. 8.17–8.23.
- Заняття 11. 8.27–8.32.
- Заняття 12. 8.36–8.40.
- Заняття 13. 8.45–8.50.
- Заняття 14. 8.55–8.57, 8.63, 8.64
- Заняття 15. 8.72–8.77.
- Заняття 16. 8.78–8.82.
- Заняття 17. 8.83–8.86
- Заняття 18. 8.91–8.96

Тема занять: трикутники і багатокутники (18 годин)

- Заняття 1. 5.1–5.5.
- Заняття 2. 5.10–5.14.
- Заняття 3. 5.18–5.23.
- Заняття 4. 5.28–5.32.
- Заняття 5. 5.35–5.39.
- Заняття 6. 5.42–5.46.
- Заняття 7. 5.48–5.53.
- Заняття 8. 5.69–5.71, 5.78, 5.79.
- Заняття 9. 5.85–5.89.
- Заняття 10. 5.93–5.97.
- Заняття 11. 5.105–5.109.
- Заняття 12. 5.120–5.123.
- Заняття 13. 5.128–5.132.
- Заняття 14. 5.138–5.141.
- Заняття 15. 5.149–5.153.
- Заняття 16. 6.1–6.3, 6.37, 6.38.
- Заняття 17. 6.69–6.74.
- Заняття 18. 6.83, 6.89, 6.90, 6.97.

Тема занять: геометричні перетворення (18 годин)

- Заняття 1. 15.1–15.5.
- Заняття 2. 15.9–15.13.
- Заняття 3. 16.1–16.5.
- Заняття 4. 16.9–16.12.

- Заняття 5. 16.13–16.18.
- Заняття 6. 17.1–17.5.
- Заняття 7. 17.6–17.11.
- Заняття 8. 17.16–17.20.
- Заняття 9. 17.22–17.26.
- Заняття 10. 17.31–17.34.
- Заняття 11. 17.37–17.40.
- Заняття 12. 18.1–18.5.
- Заняття 13. 18.9–18.14.
- Заняття 14. 18.26–18.31.
- Заняття 15. 18.37–18.41.
- Заняття 16. 19.1–19.5.
- Заняття 17. 19.10, 19.11, 19.16–19.18.
- Заняття 18. 19.23–19.28.

Тема занять: вектори і центр мас (12 годин)

- Заняття 1. 13.1–13.5.
- Заняття 2. 13.11–13.16.
- Заняття 3. 13.21–13.25.
- Заняття 4. 13.29–13.33.
- Заняття 5. 13.37–13.40.
- Заняття 6. 13.42–13.45, 13.48.
- Заняття 7. 13.50–13.54.
- Заняття 8. 14.1–14.5.
- Заняття 9. 14.6–14.10.
- Заняття 10. 14.19–14.23.
- Заняття 11. 14.28–14.31.
- Заняття 12. 14.32–14.35, 14.40.

Тема занять: задачі на розрізування (12 годин)

- Заняття 1. 25.1–25.4.
- Заняття 2. 25.5–25.8.
- Заняття 3. 25.9–25.13.
- Заняття 4. 25.16–25.19.
- Заняття 5. 25.22–25.25.
- Заняття 6. 25.26–25.30.
- Заняття 7. 25.31–25.34.
- Заняття 8. 25.35–25.39.
- Заняття 9. 25.40–25.43.
- Заняття 10. 25.44–25.47.
- Заняття 11. 25.48–25.52.
- Заняття 12. 25.56–25.59.



Навчальне видання

Бібліотечка фізико-математичної школи

ПРАСОЛОВ Віктор Васильович

ЗАДАЧІ З ПЛАНІМЕТРІЇ

Переклад з російської

Андрія Кравчука

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Вікторія Дячун*

Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 13.07.2012. Формат 70×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century SchoolBook. Умовн. друк. арк. 42,12. Умовн. фарбо-відб. 42,12.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

