

Натисніть тут, щоб

**КУПИТИ КНИГУ НА САЙТІ**

або

**замовляйте по телефону:**

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

В.А. Тадеев

# ГЕОМЕТРИЯ

Геометрические тела.  
Векторно-координатный метод  
в стереометрии

---

**11** класс

Учебник для обучения математике  
на академическом и профильном  
уровнях в общеобразовательных  
учебных заведениях

Учебник для учащихся, которые стремятся знать больше,  
и учителей, желающих учить лучше

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины*



ТЕРНОПОЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72  
74.262.21  
Т13

Рецензенты:

*доктор физико-математических наук,  
профессор Киевского национального университета им. Тараса Шевченко  
А.Г. Кукуш*

*кандидат физико-математических наук,  
доцент Тернопольского национального педагогического университета им. Владимира Гнатюка  
В.Р. Кравчук*

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины  
(приказ МОН Украины №235 от 16.03.2011 г.)*

**Тадеев В.А.**

**Т13 Геометрия. Геометрические тела. Векторно-координатный метод в стереометрии:**  
Учебник для обучения математике на академическом и профильном уровнях в 11-х классах общеобразовательных учебных заведений. / Доп. пер. авт. с укр. — Тернополь: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 432 с.: ил.

**ISBN 978-966-10-2414-3**

Данный учебник соответствует государственному стандарту и действующей программе по математике для обучения на академическом и профильном уровнях в 11-х классах общеобразовательных учебных заведений. Кроме программного материала содержит также дополнительный, отвечающий практике обучения в специализированных физико-математических школах, лицеях и гимназиях. Учебный материал всех уровней четко разграничен, но излагается параллельно. Вследствие этого каждый ученик при пользовании учебником может выбирать для себя тот уровень усвоения каждой темы, который соответствует его стремлениям и возможностям.

В учебнике значительное внимание уделяется вопросом исторического, мировоззренческого и методологического характера.

По сравнению с украинским изданием учебник несколько дополнен и расширен.

ББК 22.1я72  
74.262.21

*Охраняется законом об авторском праве.*

*Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена  
в какой бы то ни было форме без разрешения автора или издательства*

ISBN 978-966-10-2414-3

© Навчальна книга – Богдан,  
имущественные права, 2011

## Предисловие для учеников и учителей

*Мы не допускаем, чтобы талантливые, одаренные дети работали ниже своих способностей. Если ученик, который должен быть исследователем природы, юным натуралистом, будущим ученым, скатывается до уровня посредственного зубрилы, то не в полную меру раскрываются способности и тех, у кого нет ярко выраженных задатков таланта, одаренности. Предотвращение неуспеваемости слабых учеников мы видим в том, чтобы талантливые, одаренные выходили за пределы программы по тем предметам, тем сферам творческой деятельности, к которым у них есть большие способности, задатки...*

*Преподаватели математики дают ученикам задания нескольких вариантов сложности. Каждому предоставляется возможность выбрать то, что ему по силам. Но поскольку умственный труд происходит в коллективе, он приобретает характер соревнования творческих способностей: никому не хочется выглядеть слабым, каждый стремится испытать свои силы на трудном задании. В атмосфере соревнования раскрываются таланты.*

*Василий Сухомлинский.  
«Павлишская средняя школа»*

**Уважаемые друзья!** Учебник, который вы раскрыли, является продолжением учебника «Геометрия–10». В нем завершается изложение программного материала по геометрии в пространстве (стереометрии), предусмотренного для изучения на академическом и профильном уровнях в общеобразовательных учебных заведениях. Учебный материал структурирован таким образом, что те вопросы для изучения на профильном уровне, которые выходят за пределы академического уровня, излагаются в качестве дополнения, расширения или углубления последнего — непосредственно после материала академического уровня или параллельно с ним. Вместе с тем, оба эти уровня четко разграничены с помощью соответствующих полиграфических средств: материал для профильного уровня печатается немножко меньшим шрифтом и на малиновом фоне.

*Принцип уровневой дифференциации обучения* — важнейший из тех, которые реализовываются в этом учебнике. Кроме указанного объединения академического и профильного уровней, для реализации этого принципа в учебнике введена рубрика «Для тех, кто хочет знать больше». Учебный материал этой рубрики выходит даже за рамки программы профильного уровня, однако все еще тесно связан с ним и поэтому часто изучается в специализированных физико-математических школах (лицеях, гимназиях). Он печатается на светло-сером фоне и адресуется в первую очередь тем ученикам, которые проявляют повышенный интерес к теоретическим вопросам математики и ее применений, а в будущем планируют связать с этими направлениями свою профессиональную деятельность.

Таким образом, каждый ученик, вне зависимости от того, в какой школе или классе он учится, имеет возможность выбирать и овладевать программой того уровня обучения, которая отвечает его интересам и возможностям. Так же и учитель получает дополнительные средства для реализации дифференцированного обучения.

Кроме указанных полиграфических средств (шрифтов и цветов), учебный материал для профильного уровня и дополнительного ознакомления сопровождается портретами гениальных математиков Михаила Остроградского  и Софьи Ковалевской . Это имеет символическое значение, ведь жизнь этих выдающихся ученых свидетельствует, в частности, и о том, что математика одинаково доступна как для мужчин, так и для женщин и что успехи в науке не зависят от места рождения ученого (Остроградский родился на полтавском хуторе, а Ковалевская — в Москве). Биографии Остроградского и Ковалевской являются также ярчайшими примерами настойчивости и целеустремленности: по различным причинам ни Остроградский, ни Ковалевская вначале не получили признания на родине, но благодаря таланту и упорной работе со временем «покорили» всю Европу.

Вторым важным принципом (после принципа уровневой дифференциации обучения), воплощенным в учебнике, является *принцип исторической перспективы*, или *исторического подхода*. Кроме огромного значения для гуманитаризации обучения, для повышения интереса к изучению наук, для воспитания нравственности и уважения к другим народам и культурам, этот принцип имеет еще и важную дидактическую функцию. При его реализации учащиеся в своем развитии словно проходят важные этапы, которые прошла сама наука, не проскакивая их и не оказываясь время от времени неожиданно на тех уровнях, которые им еще недоступны.

Реализация исторического подхода осуществляется двумя путями. Во-первых, изложением исторических сведений в процессе развертывания основного содержания, а во-вторых, — введением специальной рубрики «Страницы истории», в которой излагаются дополнительные сведения о научных исследованиях в различные эпохи, непосредственно связанные с изучаемой темой. Хотя материал этой рубрики не является обязательным для изучения, однако он существенно расширяет кругозор учащихся и помогает им постичь некоторые внутренние и внешние мотивы развития математики, а следовательно, содействует более глубокому пониманию оснований этой науки. «Страницы истории» печатаются на светло-красном фоне с изображением музы истории Клио, заимствованным из знаменитой картины Генриха Семирадского «Парнас» : правой рукой муза держит книгу и перо, а красноречивым жестом левой руки побуждает оглянуться назад.

Третьим является *принцип межпредметных связей и прикладной направленности обучения*. Он дает возможность существенно повысить мотивацию к обучению, а также постоянно поддерживать познавательный интерес учащихся. В частности, большое значение в учебнике придается связям геометрии с классическим искусством. С этой целью воспроизводятся репродукции многих живописных и графических произведений, а также изображения архитектурных сооружений, имеющих ярко выраженный «геометрический» подтекст.

И, наконец, четвертый важный принцип — это *принцип соответствия логики развертывания содержания обучения логике основных методов исследований в математике*. Геометрия в учебнике представляется не догматически, не подобно откровению,



Понятие, аналогичное биссектрисе обычного угла, для двугранных углов вводится следующим образом. Пусть имеем двугранный угол с гранями  $\alpha$ ,  $\beta$  и ребром  $l$  (рис. 6.6). Построим линейный угол  $\angle ab$  этого двугрannого угла и проведем его биссектрису  $c$ . Затем через биссектрису  $c$  проведем полуплоскость  $\gamma$  с предельной прямой  $l$ . Полуплоскость  $\gamma$  называется *биссекторной полуплоскостью*, или *биссектором* данного двугрannого угла, поскольку она делит этот угол на две равные части.

Пространственный аналог известного свойства биссектрисы обычного плоского угла выражается следующей теоремой.

### Теорема 6.1 (о свойстве биссектора двугрannого угла).

*Каждая точка биссектора двугрannого угла равноудалена от граней этого угла. Обратнo, если точка лежит внутри двугрannого угла и равноудалена от его граней, то она принадлежит биссектору этого угла.*

Иначе эту теорему можно сформулировать следующим образом: *геометрическим местом точек, расположенных внутри двугрannого угла и равноудаленных от его граней, является биссектор этого угла.*

Доказательство. Пусть  $M$  — произвольная точка биссектора  $\gamma$  двугрannого угла с гранями  $\alpha$ ,  $\beta$  и ребром  $l$  (см. рис. 6.6). Проведем через эту точку плоскость  $\delta$ , перпендикулярную к прямой  $l$ . В пересечении плоскости  $\delta$  с полуплоскостями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  получим лучи  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , причем луч  $c$  будет биссектрисой  $\angle ab$ . Проведем, далее, из точки  $M$  перпендикуляры  $MM_1$  к  $a$  и  $MM_2$  к  $b$ . По свойству биссектрисы обычного угла,  $MM_1 = MM_2$ . Так как проведенные отрезки  $MM_1$ ,  $MM_2$  перпендикулярны также и к прямой  $l$  (поскольку  $l \perp \delta$ ), то  $MM_1 \perp \alpha$ ,  $MM_2 \perp \beta$ , причем точка  $M_1$  принадлежит грани  $\alpha$ , а точка  $M_2$  — грани  $\beta$ . Учитывая равенство  $MM_1 = MM_2$ , из этого как раз и следует, что точка  $M$  равноудалена от граней  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пусть теперь, наоборот, точка  $M$  расположена внутри двугрannого угла и равноудалена от его граней, т. е.  $MM_1 = MM_2$  при условии, что  $MM_1 \perp \alpha$ ,  $MM_2 \perp \beta$ . Проведем через эту точку плоскость  $\delta$ , перпендикулярную к  $l$  (пусть  $\delta \cap \alpha = a$ ,  $\delta \cap \beta = b$ ), а в плоскости  $\delta$  проведем  $MN_1 \perp a$  и  $MN_2 \perp b$ . По доказанному выше,  $MN_1 \perp \alpha$ ,  $MN_2 \perp \beta$ . Но из точки  $M$  к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  можно провести только по одному перпендикуляру. Поэтому точка  $N_1$  совпадает с точкой  $M_1$ , а точка  $N_2$  — с точкой  $M_2$ . Таким образом, точка  $M$  лежит внутри  $\angle ab$  и равноудалена от его сторон, т. е. принадлежит биссектрисе  $c$  этого угла. Но биссектриса  $c$  принадлежит биссектору  $\gamma$  данного двугрannого угла. Следовательно,  $M \in \gamma$ . Теорема доказана полностью.

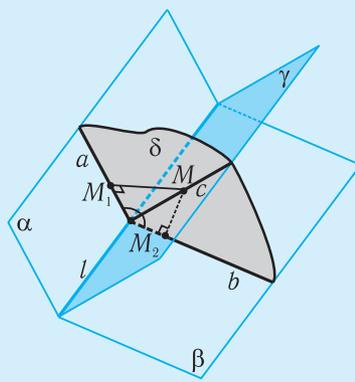


Рис. 6.6

**Задача.** На одной из граней острого двугрannого угла взяты две точки, удаленные от ребра угла на 54 см и 36 см. Первая из точек удалена от второй грани на 24 см. Найти расстояние от второй точки до той же грани.

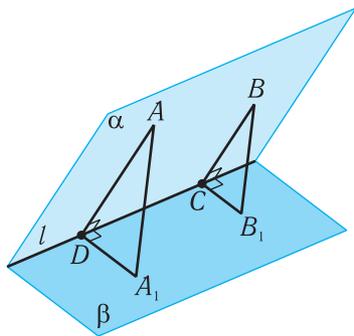


Рис. 6.7

Решение. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — грани данного двугранного угла,  $l$  — его ребро,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$  — данные точки (рис. 6.7). Проведем:  $AD \perp l$ ,  $BC \perp l$ ,  $AA_1 \perp \beta$ ,  $BB_1 \perp \beta$  ( $D \in l$ ,  $C \in l$ ,  $A_1 \in \beta$ ,  $B_1 \in \beta$ ). Пусть  $AD = 54$  см,  $BC = 36$  см, тогда  $AA_1 = 24$  см. Нужно найти  $BB_1$ .

По теореме о трех перпендикулярах,  $A_1D \perp l$ ,  $B_1C \perp l$ . Поэтому  $\angle ADA_1 = \angle BCB_1$  как линейные углы данного двугранного угла.

Поскольку  $AA_1 \perp \beta$  и  $BB_1 \perp \beta$ , то  $\angle AA_1D = \angle BB_1C = 90^\circ$ . Поэтому из  $\triangle AA_1D$ :  $\sin \angle ADA_1 = \frac{AA_1}{AD} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$ ,

а из  $\triangle BB_1C$ :  $\sin \angle BCB_1 = \frac{BB_1}{BC} = \frac{BB_1}{36}$ . Таким образом,

$$\frac{BB_1}{36} = \frac{4}{9}. \text{ Отсюда } BB_1 = 16 \text{ (см).}$$

Ответ. 16 см. ■



Интересно поразмышлять о мотивах именно такого способа измерения двугранных углов, который устанавливается принятым определением.

Поскольку, как было указано, измерение двугранных углов нужно свести к измерению обычных углов, то понятно, что стороны  $a$ ,  $b$  этих обычных углов нужно связать с гранями  $\alpha$ ,  $\beta$  данного двугранного угла. Проще всего, конечно, проводить стороны в этих гранях.

Понятно и то, что поскольку грани  $\alpha$  и  $\beta$  «равноправны», то лучи  $a$ ,  $b$  в них должны проводиться под одним и тем же углом (обозначим его через  $\omega$ ) к ребру  $l$  двугранного угла (рис. 6.8). Но при фиксированном положении луча  $a$  в грани  $\alpha$  в случае  $\omega \neq 90^\circ$  существуют два отличных друг от друга расположения  $b$  и  $b'$  луча  $b$  в грани  $\beta$ , при которых  $\angle bl = \omega$  и  $\angle b'l = \omega$ . При этом угол  $\varphi = \angle ab$  не равен углу  $\varphi' = \angle ab'$ . Луч  $b$  характеризуется тем, что лежит с лучом  $a$  с одной стороны от плоскости  $\delta$ , проведенной через начало  $Q$  луча  $a$  перпендикулярно к прямой  $l$ , а луч  $b'$  — с другой стороны от плоскости  $\delta$  (рис. 6.9). Оказывается, что угол  $\varphi$  всегда меньше принятой меры двугранного угла, а угол  $\varphi'$  — всегда больше ее. Таким образом, введенная мера для величины

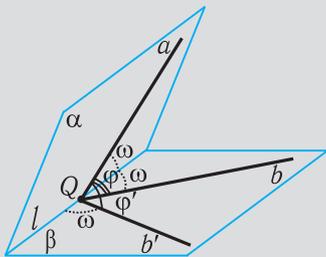


Рис. 6.8

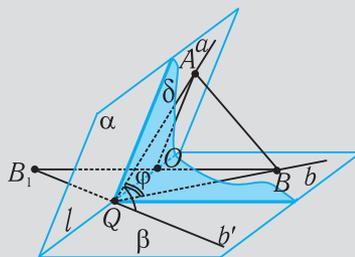


Рис. 6.9

- Многогранник 128  
   – вписанный в сферу 362  
   – выпуклый 128  
   – невыпуклый 128  
   – описанный вокруг сферы 369  
   – правильный 191  
   – звездчатый 198  
 Многогранники подобные 129  
   – полуправильные (тела Архимеда) 202  
   – – звездчатые (тела Кеплера–Пуансо) 198  
   – правильные (Платоновы тела) 191  
 Модуль вектора 39
- Н**
- Направляющая конической поверхности 110  
 Направляющая цилиндрической поверхности 24, 106  
 Направляющий вектор прямой 103  
 Начало координат 10  
 Неравенство Коши–Буняковского 77  
 Нуль-вектор 38
- О**
- Образующая конической поверхности 110, 285  
   – конуса 285  
   – усеченного конуса 286  
   – цилиндра 251  
   – цилиндрической поверхности 24, 106  
 Объем геометрического тела 218  
   – конуса 311  
   – пирамиды 230  
   – призмы 224  
   – прямоугольного параллелепипеда 220  
   – тора 263  
   – усеченного конуса 311  
   – усеченной пирамиды 232  
   – цилиндра 262  
   – шара 386  
   – шарового сегмента 386  
   – сектора 389  
 Октант 182  
 Октаэдр правильный 192  
 Ордината 10  
 Осевая симметрия 210  
 Осевое сечение конуса 285  
   – – усеченного конуса 286  
   – – цилиндра 251  
 Оси координат 10  
 Основание конуса 281  
   – пирамиды 132  
   – тетраэдра 130  
   – фигуры 148  
 Основания многогранника 129  
   – параллелепипеда 138  
   – призмы 140  
   – усеченного конуса 285  
   – усеченной пирамиды 136  
   – цилиндра 251  
 Ось абсцисс, ординат, аппликат 9  
   – вращения 245  
   – конической поверхности 295  
   – конуса 284  
   – поворотной симметрии 215  
   – симметрии 210  
   – усеченного конуса 285  
   – фигуры 213  
   – – вращения 245  
   – цилиндра 251
- П**
- Парабола 298, 356, 360  
 Параболоид 30, 245  
   – гиперболический 32  
   – круговой 31  
   – эллиптический 31  
 Параллелепипед 137  
   – наклонный 139  
   – прямой 139  
   – прямоугольный 139  
 Параллельный перенос 49  
   – – вектора 43  
 Перемещение 48  
 Перпендикулярное сечение призмы 158  
 Перспектива 115  
 Пирамида 132  
   – вписанная в конус 309  
   – – сферу 362  
   – многоугольная 133  
   – описанная вокруг конуса 309  
   – – сферы 370  
   – правильная 133, 153  
   – усеченная 136  
   –  $n$ -угольная 132  
   –  $n$ -угольная усеченная 136  
 Плоский угол многогранного угла 180  
 Плоское сечение многогранника 143  
 Плоскости координат 10  
 Плоскость симметрии 209  
   – – фигуры 213  
 Площадь боковой поверхности конуса 310  
   – – – пирамиды 161, 176  
   – – – правильной пирамиды 161  
   – – – призмы 159  
   – – прямой 159  
   – – усеченного конуса 310  
   – – усеченной пирамиды 160, 161  
   – – цилиндра 262  
   – поверхности тора 263  
   – полной поверхности конуса 310  
   – – – пирамиды 160  
   – – призмы 158  
   – – усеченной пирамиды 160  
   – – цилиндра 262  
   – сферического пояса 392  
   – сферического сегмента 392  
   – треугольника 402  
   – сферы 390, 391  
 Поверхность вращения 245  
   – геометрического тела 127  
   – коническая 109  
   – цилиндрическая 24, 106  
 Поворот вокруг прямой 212  
 Полная поверхность конуса 285  
   – многогранника 129  
   – параллелепипеда 138  
   – пирамиды 132, 160  
   – призмы 141, 158  
   – усеченного конуса 286  
   – – усеченной пирамиды 136  
   – – цилиндра 251  
 Полуправильные многогранники (тела Архимеда) 202  
 Полушар 383  
 Построение изображения конуса 304 – 306  
   – сферы (шара) 351 – 354  
   – цилиндра 274 – 276  
   – куба 150  
   – многогранного угла 180, 181  
   – параллелепипеда 137  
   – пересечения прямой и плоскости 146  
   – пирамиды 132  
   – плоских сечений конуса 306  
   – – многогранника 143  
   – – цилиндра 276  
   – правильного додекаэдра 194  
   – икосаэдра 193  
   – октаэдра 192  
   – тетраэдра 154, 191  
   – правильной пирамиды 153  
   – призмы 150  
   – призмы 141, 142  
   – прямой призмы 149  
   – прямоугольного параллелепипеда 150  
   – тетраэдра 130  
 Правило многоугольника 45  
   – параллелепипеда 46  
   – параллелограмма 46  
   – треугольника 44  
 Правильная пирамида 133, 153  
   – – усеченная 136  
   – призма 142, 150  
 Правильные многогранники (Платоновы тела) 191  
   – звездчатые многогранники (тела Кеплера–Пуансо) 198  
   – тетраэдр 130  
 Призма 140  
   – вписанная в сферу 365  
   – – цилиндр 261  
   – многоугольная 141  
   – наклонная 142  
   – описанная вокруг сферы 372  
   – цилиндра 261  
   – правильная 142, 150  
   – прямая 142  
   –  $n$ -угольная 141  
 Признак коллинеарности векторов 39, 57, 70

- компланарности векторов 58
- перпендикулярности векторов 79
- равенства векторов 41
- сонаправленности векторов 40
- Произведение вектора на число 54
  - векторов скалярное 78
- Прямоугольная система координат в пространстве 9
- Прямоугольный параллелепипед 139
- Р**
- Равновеликие тела 219
- Радиус конуса 284
  - сферы 327
  - цилиндра 251
  - шара 327
  - шарового сегмента 383
- Развертка поверхности конуса 312
  - усеченного конуса 313
  - цилиндра 270
- Ребра многогранника 128
  - многогранного угла 180
  - параллелепипеда 137
  - тетраэдра 130
  - противоположные 130
- Ребро двугранного угла 167
- С**
- Сечение многогранника плоскостью 143
  - перпендикулярное призмы 150
- Симметрия относительно плоскости 210
  - прямой 210
- Система координат прямоугольная (декартова) 9
- Скалярное произведение векторов 78
- Скалярный квадрат вектора 78
- Сложение векторов 44
- Спираль 271
- Средняя линия тетраэдра 63
- Сумма двух векторов 44
- Сфера 19, 326, 327
- вписанная в коническую поверхность 356
  - конус 376
  - многогранник 369
  - цилиндр 376
  - описанная вокруг многогранника 362
- конуса 367
- цилиндра 367
- Сферическая геометрия 397
- Сферический пояс 392
  - сегмент 392
- Сферы концентрические 335
- Т**
- Теорема косинусов для трехгранных углов 186
  - о трех косинусах 198
  - Пифагора пространственная 151
  - Польке 118
  - синусов для трехгранных углов 188
  - Эйлера о многогранниках 199
- Тетраэдр 130
  - правильный 130
- Тор 246
- Трехгранный угол прямой (октант) 182
- У**
- Углы двугранные вертикальные 168
  - смежные 168
- Угол двугранный 167
  - многогранного угла 181
  - острый 168
  - – прямой (квадрант) 168
  - – тупой 168
  - линейный двугранного угла 167
  - между векторами 75
  - многогранный 180
  - плоский многогранного угла 180
  - трехгранный прямой (октант) 182
- Умножение вектора на число 55
- Уравнение плоскости «в отрезках на осях» 91
  - общее 88
  - по точке и вектору нормали 89
  - поверхности вращения 29
  - прямой цилиндрической поверхности 25
  - сферы 19, 21
  - фигуры 18
- Уравнения плоскости параметрические 93
  - прямой канонические 103
  - общие 103
  - параметрические 104
- Усеченная пирамида 136
- Усеченный конус 285
- Х**
- Хорда шара (сферы) 345
- Ф**
- Фигура вращения 245
  - симметричная относительно плоскости 213
  - – прямой 213
- Фокус параболы 361
- Фокусы гиперболы 359
  - эллипса 358
- Формула расстояния между двумя точками 13
  - от точки до плоскости 92
  - угла между векторами 76
- Формулы движений пространства 120–122
  - деления отрезка в заданном отношении 72
  - середины отрезка 17
- Ц**
- Центр сферы (шара) 327
  - симметрии фигуры 213
- Цилиндр 251
- вписанный в призму 261
  - сферу 367
  - описанный вокруг призмы 261
  - сферы 376
  - равносторонний, равнобедренный 252
- Цилиндрическая поверхность 24, 106
  - – прямая круговая 24
- Ш**
- Шар 326, 327
- Шаровой сегмент 383
  - сектор 388
- Э**
- Элементы симметрии фигуры 213
- Эллипс 27, 107, 252, 255, 297, 356, 357
- Эллипсоид 28

## Содержание

Предисловие для учеников и учителей .....	3
---	---

### Раздел I. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Основы метода координат в пространстве .....	9
1.1. Прямоугольная декартова система координат в пространстве .....	9
1.2. Формула расстояния между двумя точками .....	13
1.3. Координаты середины отрезка .....	16
1.4. О задании фигур уравнениями .....	18
1. Сфера .....	18
2. Плоскости, перпендикулярные к координатным плоскостям .....	22
3. Прямые цилиндрические поверхности .....	24
4. Задание пересечения фигур .....	25
5. Поверхности вращения .....	29
6. Эллиптический и гиперболический параболоиды .....	31
<i>Страницы истории. Об идее метода координат у Декарта .....</i>	<i>34</i>
<i>Проверь себя .....</i>	<i>36</i>
<i>Задания для контрольной работы № 1 .....</i>	<i>36</i>
§ 2. Векторы и координаты .....	38
2.1. Первейшие понятия, связанные с векторами .....	38
2.2. Сложение и вычитание векторов .....	44
1. Определение и свойства операций .....	44
2. Векторы и параллельные переносы .....	48
3. Разложение вектора на составляющие .....	50
2.3. Умножение вектора на число .....	55
2.4. Признаки коллинеарности и компланарности векторов .....	57
2.5. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам .....	59
2.6. Векторный метод решения геометрических задач .....	63
2.7. Координаты вектора. Действия с векторами в координатах .....	68
2.8. Деление отрезка в заданном отношении .....	71
2.9. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов .....	75
1. Угол между векторами в пространстве .....	75
2. Формула угла между векторами и неравенство Коши–Буняковского .....	77
3. Скалярное произведение векторов .....	78
<i>Страницы истории. Как в математике появились векторы .....</i>	<i>82</i>
<i>Проверь себя .....</i>	<i>87</i>
§ 3. Уравнения плоскости и прямой в пространстве .....	88
3.1. Уравнение плоскости .....	88
1. Общее уравнение плоскости .....	88
2. Определение угла между двумя плоскостями .....	90
3. Уравнение плоскости «в отрезках на осях» .....	91
4. Расстояние от точки до плоскости .....	91
5. Параметрические уравнения плоскости .....	93
6. Геометрические образы систем линейных неравенств и прикладные задачи оптимизации .....	95
<i>Страницы истории. Как возникло линейное программирование .....</i>	<i>99</i>
3.2. Уравнения прямой .....	103
3.3. Уравнения цилиндрических и конических поверхностей .....	106
1. Цилиндрические поверхности .....	106
2. Конические поверхности .....	110
<i>Проверь себя .....</i>	<i>113</i>

§ 4. О некоторых принципах применения векторно-координатного метода к моделированию пространства на плоскости средствами компьютерной графики .....	114
4.1. Построение проекционных изображений .....	114
4.2. Формулы движений пространства .....	119
Проверь себя .....	121
Задания для контрольной работы № 2 .....	122
<b>Раздел II. МНОГОГРАННИКИ</b>	
§ 5. Простейшие многогранники .....	125
5.1. Общие понятия о геометрических телах и многогранниках .....	125
5.2. Тетраэдры .....	130
5.3. Пирамиды .....	132
5.4. Параллелепипеды .....	137
5.5. Призмы .....	140
5.6. Построение плоских сечений многогранников .....	143
5.7. Высота пирамиды и высота призмы .....	148
5.8. Прямые и правильные призмы .....	149
5.9. Правильные пирамиды и пирамиды с равными боковыми ребрами .....	153
5.10. Площади поверхностей призм и пирамид .....	158
1. Площадь поверхности призмы .....	158
2. Площадь поверхности пирамиды .....	160
Проверь себя .....	163
Задания для контрольной работы № 3 .....	165
§ 6. Двугранные углы .....	167
6.1. Определение и измерение двугранных углов .....	167
6.2. Двугранные углы в многогранниках .....	172
Проверь себя .....	178
§ 7. Трехгранные и многогранные углы .....	180
7.1. Определение и построение многогранных углов .....	180
7.2. Неравенства для плоских углов трехгранного и многогранного углов .....	183
7.3. Теорема косинусов для трехгранных углов .....	186
Проверь себя .....	189
§ 8. Правильные и полуправильные многогранники .....	191
8.1. Правильные многогранники .....	191
<i>Страницы истории. «Кубок Кеплера»</i> .....	196
8.2. Правильные звездчатые многогранники .....	198
8.3. Теорема Эйлера и правильные многогранники .....	199
<i>Страницы истории. Леонард Эйлер</i> .....	201
8.4. Полуправильные многогранники .....	202
<i>Страницы истории. Архимед</i> .....	206
Проверь себя .....	207
§ 9. Симметрия многогранников .....	209
9.1. Основные виды симметрии в пространстве .....	209
9.2. Симметрии простейших многогранников .....	213
Проверь себя .....	216
§ 10. Объемы многогранников .....	218
10.1. Определение объема .....	218
10.2. Объем прямоугольного параллелепипеда .....	220
10.3. Объем призмы .....	224
10.4. Объем пирамиды .....	230
<i>Страницы истории. Вычисление объема пирамиды: от древних египтян — до 3-ей проблемы Гильберта</i> .....	233
Проверь себя .....	239
Задания для контрольной работы № 4 .....	240

### Раздел III. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

§ 11. Определение и некоторые примеры фигур вращения .....	243
Проверь себя .....	249
§ 12. Цилиндры .....	250
12.1. Основные определения. Сечения цилиндров .....	250
12.2. Измерение цилиндров .....	261
12.3. Развертка поверхности цилиндра .....	270
12.4. О построении изображения цилиндра и его сечений .....	274
Проверь себя .....	279
Задания для контрольной работы № 5 .....	279
§ 13. Конусы .....	281
13.1. Основные определения. Секущие и касательные плоскости к конусам .....	284
13.2. Конические сечения .....	295
1. Эллипс .....	297
2. Парабола .....	298
3. Гипербола .....	299
<i>Страницы истории. Знаменитые задачи древности и конические сечения</i> .....	301
13.3. Изображение конусов и их плоских сечений .....	304
13.4. Измерение конусов .....	309
Проверь себя .....	321
Задания для контрольной работы № 6 .....	322
§ 14. Шар и сфера .....	324
14.1. Основные определения. Сечения шара и касательные плоскости .....	326
14.2. Пересечение и касание двух сфер .....	335
14.3. Пересечение и касание сферы и прямой .....	344
14.4. Изображение сферы и шара .....	351
14.5. Фокальные и «оптические» свойства конических сечений .....	356
1. Эллипс .....	357
2. Гипербола .....	358
3. Парабола .....	360
14.6. Фигуры, вписанные в сферу и описанные вокруг сферы .....	362
1. Вписанные пирамиды .....	362
2. Вписанные призмы .....	365
3. Вписанные цилиндры и конусы .....	367
4. Описанные многогранники .....	369
5. Описанные цилиндры и конусы .....	376
14.7. Измерение шара и его частей .....	383
1. Объем шарового сегмента и шара .....	383
2. Объем шарового сектора .....	388
3. Площадь поверхности шара (площадь сферы) .....	389
4. Площадь сферического сегмента и сферического пояса .....	392
14.8. Что такое сферическая геометрия .....	397
<i>Страницы истории. Моделирование сферической поверхности в картографии</i> .....	405
Проверь себя .....	416
Задания для контрольных работ № 7–8 .....	416
Ответы к задачам и упражнениям .....	419
Предметный указатель .....	426



*Учебное издание*

ТАДЕЕВ Василий Александрович

# ГЕОМЕТРИЯ

## Геометрические тела.

### Векторно-координатный метод в стереометрии

Учебник для обучения математике на академическом и профильном уровнях  
в 11-х классах общеобразовательных учебных заведений

Главный редактор *Богдан Будный*  
Редактор *Владимир Дячун*  
Художник обложки *Ростислав Крамар*  
Дизайн и компьютерная верстка *Андрея Кравчука*

Подписано к печати 1.09.2011. Формат 70×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Antiqua.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,63. Усл. кр.-отп. 29,55. Уч.-изд. л. 59,10.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців  
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

«Навчальна книга – Богдан», а/с 529, м. Тернопіль 46008  
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66  
*publishing@budny.te.ua*  
[www.bohdan-books.com](http://www.bohdan-books.com)

---

На обложке книги на фоне куполов Софийского собора и Успенской церкви Киево-Печерской лавры изображен 22-метровый радиотелескоп Крымской астрофизической обсерватории.

На изгибе обложки — репродукция картины Рафаэля «Обручение Марии».

На 1-ом форзаце — так называемые «Ворота Европы» (Puerta de Europa) в Мадриде, возведенные в 1996 г. Это — две величественные офисные башни-близнецы, имеющие форму наклонных параллелепипедов с высотой 114 м (25 этажей) и углом наклона к вертикали 15°.

На 2-ом форзаце — одна из самых больших мусульманских мечетей Шах Фейсал Маджиб в Исламабаде (Пакистан). Построена в 1986 г. при финансовой поддержке правительства Саудовской Аравии и лично короля Фейсала ибн-Абделя аль-Азиза ас-Сауда. Каркас архитектурной композиции мечети составляет невыпуклый многогранник, построенный на основании правильной четырехугольной пирамиды, над боковыми гранями которой надстроены еще четыре треугольные пирамиды.

ISBN 978-966-10-2414-3



9 789661 024143