В.А. Тадеев

ГЕОМЕТРИЯ

Геометрические тела. Векторно-координатный метод в стереометрии

11 класс

Учебник для обучения математике на академическом и профильном уровнях в общеобразовательных учебных заведениях

Учебник для учащихся, которые стремятся знать больше, и учителей, желающих учить лучше

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины

ТЕРНОПОЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
Т13

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
А.Г. Кукуш

кандидат физико-математических наук,
доцент Тернопольского национального педагогического университета им. Владимира Гнатюка
В.Р. Кравчук

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ МОН Украины №235 от 16.03.2011 г.)

Тадеев В.А.

Т13 **Геометрия. Геометрические тела. Векторно-координатный метод в стереометрии:** Учебник для обучения математике на академическом и профильном уровнях в 11-х классах общеобразовательных учебных заведений. / Доп. пер. авт. с укр. — Тернополь: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 432 с.: ил.

ISBN 978-966-10-2414-3

Данный учебник соответствует государственному стандарту и действующей программе по математике для обучения на академическом и профильном уровнях в 11-х классах общеобразовательных учебных заведений. Кроме программного материала содержит также дополнительный, отвечающий практике обучения в специализированных физико-математических школах, лицеях и гимназиях. Учебный материал всех уровней четко разграничен, но излагается параллельно. Вследствие этого каждый ученик при пользовании учебником может выбирать для себя тот уровень усвоения каждой темы, который соответствует его стремлениям и возможностям.

В учебнике значительное внимание уделяется вопросом исторического, мировоззренческого и методологического характера.

По сравнению с украинским изданием учебник несколько дополнен и расширен.

ББК 22.1я72
74.262.21

ISBN 978-966-10-2414-3

Предисловие для учеников и учителей

Мы не допускаем, чтобы талантливые, одаренные дети работали ниже своих способностей. Если ученик, который должен быть исследователем природы, юным натуралистом, будущим ученым, скатывается до уровня посредственного зубрилы, то не в полную меру раскрываются способности и тех, у кого нет ярко выраженных задатков талантливости, одаренности. Предотвращение неуспеваемости слабых учеников мы видим в том, чтобы талантливые, одаренные выходили за пределы программы по тем предметам, тем сферам творческой деятельности, к которым у них есть большие способности, задатки...

Преподаватели математики дают ученикам задания нескольких вариантов сложности. Каждому предоставляется возможность выбрать то, что ему по силам. Но поскольку умственный труд происходит в коллективе, он приобретает характер соревнования творческих способностей: никому не хочется выглядеть слабым, каждый стремится испытать свои силы на трудном задании. В атмосфере соревнования раскрываются таланты.

Василий Сухомлинский.
«Павлышская средняя школа»

Уважаемые друзья! Учебник, который вы раскрыли, является продолжением учебника «Геометрия–10». В нем завершается изложение программного материала по геометрии в пространстве (стереометрии), предусмотренного для изучения на академическом и профильном уровнях в общеобразовательных учебных заведениях. Учебный материал структурирован таким образом, что те вопросы для изучения на профильном уровне, которые выходят за пределы академического уровня, излагаются в качестве дополнения, расширения или углубления последнего — непосредственно после материала академического уровня или параллельно с ним. Вместе с тем, оба эти уровня четко разграничены с помощью соответствующих полиграфических средств: материал для профильного уровня печатается немножко меньшим шрифтом и на малиновом фоне.

Принцип уровневой дифференциации обучения — важнейший из тех, которые реализовываются в этом учебнике. Кроме указанного объединения академического и профильного уровней, для реализации этого принципа в учебнике введена рубрика «Для тех, кто хочет знать больше». Учебный материал этой рубрики выходит даже за рамки программы профильного уровня, однако все еще тесно связан с ним и поэтому часто изучается в специализированных физико-математических школах (лицеях, гимназиях). Он печатается на светло-сером фоне и адресуется в первую очередь тем ученикам, которые проявляют повышенный интерес к теоретическим вопросам математики и ее применений, а в будущем планируют связать с этими направлениями свою профессиональную деятельность.

Таким образом, каждый ученик, вне зависимости от того, в какой школе или классе он учится, имеет возможность выбирать и овладевать программой того уровня обучения, которая отвечает его интересам и возможностям. Так же и учитель получает дополнительные средства для реализации дифференцированного обучения.

Кроме указанных полиграфических средств (шрифтов и цветов), учебный материал для профильного уровня и дополнительного ознакомления сопровождается портретами гениальных математиков Михаила Остроградского  и Софьи Ковалевской . Это имеет символическое значение, ведь жизнь этих выдающихся ученых свидетельствует, в частности, и о том, что математика одинаково доступна как для мужчин, так и для женщин и что успехи в науке не зависят от места рождения ученого (Остроградский родился на полтавском хуторе, а Ковалевская — в Москве). Биографии Остроградского и Ковалевской являются также ярчайшими примерами настойчивости и целеустремленности: по различным причинам ни Остроградский, ни Ковалевская вначале не получили признания на родине, но благодаря таланту и упорной работе со временем «покорили» всю Европу.

Вторым важным принципом (после принципа уровневой дифференциации обучения), воплощенным в учебнике, является *принцип исторической перспективы*, или *исторического подхода*. Кроме огромного значения для гуманитаризации обучения, для повышения интереса к изучению наук, для воспитания нравственности и уважения к другим народам и культурам, этот принцип имеет еще и важную дидактическую функцию. При его реализации учащиеся в своем развитии словно проходят важные этапы, которые прошла сама наука, не проскакивая их и не оказываясь время от времени неожиданно на тех уровнях, которые им еще недоступны.

Реализация исторического подхода осуществляется двумя путями. Во-первых, изложением исторических сведений в процессе развертывания основного содержания, а во-вторых, — введением специальной рубрики «Страницы истории», в которой излагаются дополнительные сведения о научных исследованиях в различные эпохи, непосредственно связанные с изучаемой темой. Хотя материал этой рубрики не является обязательным для изучения, однако он существенно расширяет кругозор учащихся и помогает им постичь некоторые внутренние и внешние мотивы развития математики, а следовательно, содействует более глубокому пониманию оснований этой науки. «Страницы истории» печатаются на светло-красном фоне с изображением музы истории Клио, заимствованным из знаменитой картины Генриха Семирадского «Парнас» : правой рукой муза держит книгу и перо, а красноречивым жестом левой руки побуждает оглянуться назад.

Третьим является *принцип межпредметных связей и прикладной направленности обучения*. Он дает возможность существенно повысить мотивацию к обучению, а также постоянно поддерживать познавательный интерес учащихся. В частности, большое значение в учебнике придается связям геометрии с классическим искусством. С этой целью воспроизводятся репродукции многих живописных и графических произведений, а также изображения архитектурных сооружений, имеющих ярко выраженный «геометрический» подтекст.

И, наконец, четвертый важный принцип — это *принцип соответствия логики развертывания содержания обучения логике основных методов исследований в математике*. Геометрия в учебнике представляется не догматически, не подобно откровению,

Понятие, аналогичное биссектрисе обычного угла, для двугранных углов вводится следующим образом. Пусть имеем двугранный угол с гранями α, β и ребром l (рис. 6.6). Построим линейный угол $\angle ab$ этого двугранного угла и проведем его биссектрису c. Затем через биссектрису c проведем полуплоскость γ с предельной прямой l. Полуплоскость γ называется *биссекторной полуплоскостью*, или *биссектором* данного двугранного угла, поскольку она делит этот угол на две равные части.

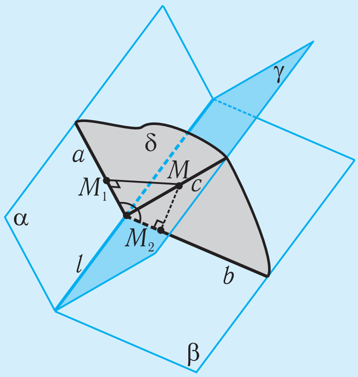

Рис. 6.6

Пространственный аналог известного свойства биссектрисы обычного плоского угла выражается следующей теоремой.

Теорема 6.1 (*о свойстве биссектора двугранного угла*).

Каждая точка биссектора двугранного угла равноудалена от граней этого угла. Обратно, если точка лежит внутри двугранного угла и равноудалена от его граней, то она принадлежит биссектору этого угла.

Иначе эту теорему можно сформулировать следующим образом: ***геометрическим местом точек, расположенных внутри двугранного угла и равноудаленных от его граней, является биссектор этого угла.***

Доказательство. Пусть M — произвольная точка биссектора γ двугранного угла с гранями α, β и ребром l (см. рис. 6.6). Проведем через эту точку плоскость δ, перпендикулярную к прямой l. В пересечении плоскости δ с полуплоскостями α, β, γ получим лучи a, b, c, причем луч c будет биссектрисой $\angle ab$. Проведем, далее, из точки M перпендикуляры MM_1 к a и MM_2 к b. По свойству биссектрисы обычного угла, $MM_1 = MM_2$. Так как проведенные отрезки MM_1, MM_2 перпендикулярны также и к прямой l (поскольку $l \perp \delta$), то $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$, причем точка M_1 принадлежит грани α, а точка M_2 — грани β. Учитывая равенство $MM_1 = MM_2$, из этого как раз и следует, что точка M равноудалена от граней α и β.

Пусть теперь, наоборот, точка M расположена внутри двугранного угла и равноудалена от его граней, т. е. $MM_1 = MM_2$ при условии, что $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$. Проведем через эту точку плоскость δ, перпендикулярную к l (пусть $\delta \cap \alpha = a$, $\delta \cap \beta = b$), а в плоскости δ проведем $MN_1 \perp a$ и $MN_2 \perp b$. По доказанному выше, $MN_1 \perp \alpha$, $MN_2 \perp \beta$. Но из точки M к плоскостям α и β можно провести только по одному перпендикуляру. Поэтому точка N_1 совпадает с точкой M_1, а точка N_2 — с точкой M_2. Таким образом, точка M лежит внутри $\angle ab$ и равноудалена от его сторон, т. е. принадлежит биссектрисе c этого угла. Но биссектриса c принадлежит биссектору γ данного двугранного угла. Следовательно, $M \in \gamma$. Теорема доказана полностью.

Задача. На одной из граней острого двугранного угла взяты две точки, удаленные от ребра угла на 54 см и 36 см. Первая из точек удалена от второй грани на 24 см. Найти расстояние от второй точки до той же грани.

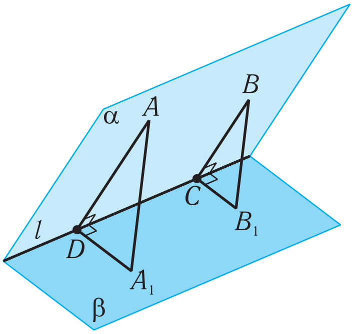

Рис. 6.7

Решение. Пусть α и β — грани данного двугранного угла, l — его ребро, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ — данные точки (рис. 6.7). Проведем: $AD \perp l$, $BC \perp l$, $AA_1 \perp \beta$, $BB_1 \perp \beta$ ($D \in l$, $C \in l$, $A_1 \in \beta$, $B_1 \in \beta$). Пусть $AD = 54$ см, $BC = 36$ см, тогда $AA_1 = 24$ см. Нужно найти BB_1.

По теореме о трех перпендикулярах, $A_1D \perp l$, $B_1C \perp l$. Поэтому $\angle ADA_1 = \angle BCB_1$ как линейные углы данного двугранного угла.

Поскольку $AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \beta$, то $\angle AA_1D = \angle BB_1C = 90°$. Поэтому из ΔAA_1D: $\sin\angle ADA_1 = \dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{24}{54} = \dfrac{4}{9}$, а из ΔBB_1C: $\sin\angle BCB_1 = \dfrac{BB_1}{BC} = \dfrac{BB_1}{36}$. Таким образом, $\dfrac{BB_1}{36} = \dfrac{4}{9}$. Отсюда $BB_1 = 16$ (см).

Ответ. 16 см. ■

Интересно поразмышлять о мотивах именно такого способа измерения двугранных углов, который устанавливается принятым определением.

Поскольку, как было указано, измерение двугранных углов нужно свести к измерению обычных углов, то понятно, что стороны a, b этих обычных углов нужно связать с гранями α, β данного двугранного угла. Проще всего, конечно, проводить стороны в этих гранях.

Понятно и то, что поскольку грани α и β «равноправны», то лучи a, b в них должны проводиться под одним и тем же углом (обозначим его через ω) к ребру l двугранного угла (рис. 6.8). Но при фиксированном положении луча a в грани α в случае $\omega \neq 90°$ существуют два отличных друг от друга расположения b и b' луча b в грани β, при которых $\angle bl = \omega$ и $\angle b'l = \omega$. При этом угол $\varphi = \angle ab$ не равен углу $\varphi' = \angle ab'$. Луч b характеризуется тем, что лежит с лучом a с одной стороны от плоскости δ, проведенной через начало Q луча a перпендикулярно к прямой l, а луч b' — с другой стороны от плоскости δ (рис. 6.9). Оказывается, что угол φ всегда меньше принятой меры двугранного угла, а угол φ' — всегда больше ее. Таким образом, введенная мера для величины

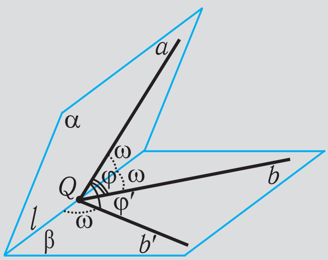

Рис. 6.8

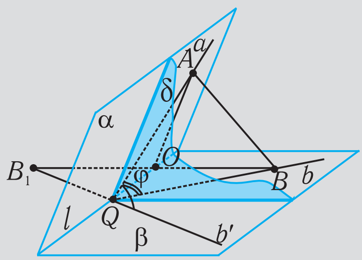

Рис. 6.9

Содержание

Раздел II. МНОГОГРАННИКИ

Раздел III. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Учебное издание
ТАДЕЕВ Василий Александрович

ГЕОМЕТРИЯ

Геометрические тела. Векторно-координатный метод в стереометрии

Учебник для обучения математике на академическом и профильном уровнях
в 11-х классах общеобразовательных учебных заведений

Главный редактор *Богдан Будный*
Редактор *Владимир Дячун*
Художник обложки *Ростислав Крамар*
Дизайн и компьютерная верстка *Андрея Кравчука*

Подписано к печати 1.09.2011. Формат 70×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Antiqua.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,63. Усл. кр.-отп. 29,55. Уч.-изд. л. 59,10.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

«Навчальна книга – Богдан», а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

На обложке книги на фоне куполов Софийского собора и Успенской церкви Киево-Печерской лавры изображен 22-метровый радиотелескоп Крымской астрофизической обсерватории.

На изгибе обложки — репродукция картины Рафаэля «Обручение Марии».

На 1-ом форзаце — так называемые «Ворота Европы» (Puerta de Europa) в Мадриде, возведенные в 1996 г. Это — две величественные офисные башни-близнецы, имеющие форму наклонных параллелепипедов с высотой 114 м (25 этажей) и углом наклона к вертикали 15°.

На 2-ом форзаце — одна из самых больших мусульманских мечетей Шах Фейсал Мастжиб в Исламабаде (Пакистан). Построена в 1986 г. при финансовой поддержке правительства Саудовской Аравии и лично короля Фейсала ибн-Абделя аль-Азиза ас-Сауда. Каркас архитектурной композиции мечети составляет невыпуклый многогранник, построенный на основании правильной четырехугольной пирамиды, над боковыми гранями которой надстроены еще четыре треугольные пирамиды.

ISBN 978-966-10-2414-3

9 789661 024143