

**Я.С. Бродський**

СТАТИСТИКА.  
ЙМОВІРНІСТЬ.  
КОМБІНАТОРИКА  
5-6 класи

*Навчальний посібник*



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.1я72  
Б88

**Бродський Я.С.**  
Б88 Статистика. Ймовірність. Комбінаторика. Навчальний посібник.  
5–6 кл. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 256 с.

ISBN 978-966-10-2904-9

Призначенням посібника є перше знайомство учнів зі статистикою, ймовірністю, комбінаторикою.

У розділах, присвячених статистиці, йдеться про збір даних, їхнє зображення з допомогою таблиць, графіків, діаграм, про усвідомлення та інтерпретацію даних, про їхнє застосування для оцінки значень величин, перевірки гіпотез. Певна увага приділяється відсотковим розрахункам та їхньому використанню в статистиці.

В ймовірній частині посібника розпочинається формування поняття випадкової події та її ймовірності. Тут розглядаються різні підходи до поняття ймовірності: класичний, заснований на підрахунку кількості рівноможливих наслідків досліду; статистичний, який дозволяє робити висновки на підставі результатів великої кількості експериментів, проведених приблизно в однакових умовах; геометричний, що передбачає використання властивостей геометричних фігур, результати вимірювання геометричних величин.

Метою навчання комбінаторики є отримання засобів для обчислення ймовірностей подій у класичній моделі, тобто подій, пов'язаних із дослідом з рівноможливими наслідками.

Посібник містить необхідний теоретичний матеріал, численні зразки розв'язання задач. У кожному параграфі наведено тест для самоконтролю з вказівками до розв'язання і відповідями, задачі для самостійного розв'язання з відповідями та вказівками до них наприкінці посібника, контрольне завдання, яке складається з контрольного тесту, основних і додаткових завдань з відповідями та вказівками до них.

Посібник можна використати для організації самостійної роботи учнів 5–6 класів загальноосвітньої школи, проведення факультативних занять.

ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина цього видання не може бути відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-2904-9

© Навчальна книга – Богдан, 2013

## Передмова для вчителів

Програмою з математики для одинадцятирічної школи до шкільного курсу математики, починаючи з п'ятого класу, введено ймовірнісно-статистичну (стохастичну) змістову лінію. Уведення цієї лінії передбачає формування таких прийомів діяльності, як: побудова найпростіших ймовірнісних моделей реальних процесів і явищ; аналіз емпіричних даних, який включає самостійний збір даних, проведення експериментів, первісну обробку статистичного матеріалу, статистичні висновки; перебір або підрахування кількості конфігурацій елементів, які задовольняють заздалегідь задані властивості.


Ці прийоми діяльності, власне кажучи, стосуються ймовірності, статистики, комбінаторики.

Часу, який виділяється в основній школі на вивчення відповідного матеріалу в інваріантній частині курсу математики, недостатньо для повноцінного формування зазначених прийомів діяльності. А загальнокультурна, загальноосвітня і прикладна значущість стохастичної змістової лінії потребують не обмежуватися загальним курсом математики, а використати і можливості варіативної частини навчального плану.

Даний посібник призначений для забезпечення проведення факультативних занять, курсів за вибором, спрямованих на навчання учнів аналізу даних (так за кордоном зазвичай називають стохастичну змістову лінію). Його можна використати для організації самостійної роботи учнів, орієнтованої на засвоєння елементів статистики, ймовірності, комбінаторики.

Посібник адресовано учням 5–6 класів. Згідно з цим призначенням він поділяється на дві частини, окремо для 5-го і для 6-го класів. Кожна частина містить три параграфи, присвячені, відповідно, статистиці, ймовірності, комбінаториці. Пояснимо запропонований порядок навчання стохастички. Пропонується навчання розпочати з описової статистики, зі сприйняття та інтерпретації інформації. У ході

ігор, спостережень, проведення опитувань, експериментів учень приходить до висновку про випадковий характер багатьох явищ і процесів, про необхідність вимірювати цю випадковість. Це стає мотивом до вивчення ймовірності. Тут формуються уявлення про випадкові події, розглядається якісне оцінювання шансів настання випадкових подій на різних засадах: класичній, статистичній, геометричній. Для того, щоб навчитись оцінювати шанси настання випадкової події на класичній основі, виникає потреба у переборі варіантів здійснення тієї чи іншої дії. Ми природно приходимо до необхідності вивчати елементи комбінаторики.

Посібник має модульну структуру. Матеріал кожного класу складається, як було відмічено вище, з трьох модулів-параграфів. Структура кожного параграфа однакова. Параграф поділяється на пункти. У кожному пункті спочатку йде викладення теоретичного матеріалу. Воно починається у кожному параграфі та у кожному пункті з невеличкого вступу, де обґрунтовується доцільність вивчення відповідного матеріалу, дається стислий його зміст. Цей вступ виділено спеціальним шрифтом. У кожному пункті наводяться і розв'язуються численні приклади, на яких пояснюється теоретичний матеріал. Початок і кінець розв'язання прикладу відмічено, відповідно, знаками □ і ■. Виклад супроводжується запитаннями, метою яких є перевірка того, чи зрозумів учень попередній матеріал. Ці запитання виділені **спеціальним шрифтом**. Кожен пункт завершується стислим підведенням підсумків. Вони виділені **спеціальним шрифтом**. У деяких параграфіях наводяться історичні довідки та деякий додатковий матеріал, які відмічаються знаком  і виділяються *спеціальним шрифтом*.

У кожному пункті наведені задачі для самостійного розв'язання. Їх можна використати для роботи як у класі, так і вдома. Задачі мають три рівні складності: базовий (відмічено знаком °), основний (не відмічено жодним знаком) і підвищений (відмічено зірочкою \*). Кожен параграф завершується тестом для самоконтролю з метою з'ясування того, наскільки засвоєно матеріал відповідного модуля. До тестів для самоконтролю наведені вказівки, відповіді.

До кожного модуля наведено контрольне завдання. Передбачається, що учень виконуватиме його вдома, але можливі й інші варіанти. Контрольне завдання складається з контрольного тесту, основного і додаткового завдання. Учень, залежно від своїх можливостей, виконує контрольний тест або контрольний тест і основне завдання,

або контрольний тест, основне і додаткове завдання. Для основного і додаткового завдань наводяться вказівки або відповіді.

Саме така структура посібника робить можливим застосування його для ефективної організації самостійної роботи учнів.

Звернемо увагу на деякі методичні особливості вивчення елементів статистики, ймовірності, комбінаторики, адже специфічний зміст потребує і специфічних форм навчання.

Засобами навчання описової статистики можуть слугувати стохастичні ігри, статистичні експерименти (експерименти з випадковими наслідками), статистичні спостереження, імітаційні експерименти. У ході випадкових ігор, статистичних експериментів, опитувань, спостережень доцільно вчити дітей подавати статистичну інформацію у вигляді таблиць, підводити учнів до висновку про випадковий характер багатьох явищ.

Існують деякі перепони на шляху навчання ймовірності і статистики дітей молодшого віку. По-перше, вони ще не володіють вільно дробами, процентами. По-друге, вони ще не здатні зосередитись на довгий час на проведенні великої кількості тих самих дослідів.

У посібнику вказані деякі шляхи для подолання цих перепон. Найсамперед, це можна робити за рахунок змісту навчання. У молодших класах доцільно розглядати задачі не на обчислення ймовірностей випадкових подій, а на їхнє якісне оцінювання, на порівняння шансів настання тих чи інших подій. Бажано поступово підводити учнів до думки про те, що шанси настання подій можна вимірювати так само, як довжину, площу, масу, час.

При вивченні комбінаторики спочатку діти мають навчитися будувати комбінації предметів, які задовольняють певні умови, знаходити серед цих комбінацій однакові і різні. Потім вони набувають складніших умінь: упорядковувати набори, складати таблиці, застосовувати дерево варіантів. Лише після цього з'являються методи підрахування кількості можливостей.

**Бажаємо вам успіхів у навчанні дітей ймовірності і статистики!**

## Передмова для учнів

### Дорогий друже!


Запропонований вам посібник дозволить познайомитися з основними поняттями, пов'язаними зі збором, усвідомленням, зображенням, застосуванням інформації, з випадковими подіями та їхніми ймовірностями, з перебором варіантів досліду, із закономірностями, які властиві випадковим явищам, з аналізом знайомих ігор. Посібник містить два розділи, призначені, окремо, для учнів 5-го і 6-го класів. Кожен розділ складається з трьох параграфів, присвячених описовій статистиці, ймовірності, комбінаториці.

Головне призначення *описової статистики* полягає в тому, щоб допомогти людям краще зрозуміти проблеми, з якими вони стикаються.

На кожному кроці ви зустрічаєтесь з явищами, діями, результат яких залежить від випадку і його не можна однозначно передбачити. Це і підкидання монети перед початком футбольного матчу, і купівля лотерейного квитка, і телевізійна гра «Поле чудес», і гра на гральних автоматах і багато іншого. Може здатися, що аналіз цих прикладів не гідний справжньої науки. Однак їхня простота тільки удавана. При глибшому їхньому вивченні тут можна знайти серйозні закономірності. Розв'язання подібних задач у значній мірі стимулювало виникнення такої науки, як *теорія ймовірностей*.

*Комбінаторика* — важливий розділ математики, знання якого є необхідним для представників найрізноманітніших спеціальностей. Комбінаторні методи лежать в основі розв'язання багатьох задач теорії ймовірностей, математичної статистики та їхніх застосувань.

Кожен пункт посібника починається з викладення теоретичного матеріалу, яке супроводжується розв'язанням великої кількості різноманітних задач. Це введе Вас у новий, незвичайний і привабливий світ — світ випадкового. Виклад починається у кожному параграфі, у кожному пункті з невеличкого вступу, який виділено спеціальним

шрифтом. У кожному пункті наводяться і розв'язуються численні приклади, на яких пояснюється теоретичний матеріал. Початок і кінець розв'язання прикладу відмічено, відповідно, знаками □ і ■. Виклад супроводжується запитаннями, метою яких є перевірка того, чи зрозуміли ви попередній матеріал. Ці запитання виділені **спеціальним шрифтом**. Не пропускайте їх, спробуйте дати відповіді на них. Кожен пункт завершується стислим підведенням підсумків. Ці підсумки виділені **спеціальним шрифтом**. У деяких параграфах наводяться історичні довідки і додатковий матеріал, які відмічаються знаком  і виділяються *спеціальним шрифтом*. До кожного пункту наведені завдання для самостійної роботи, які подібні розглянутим раніше. Вони допоможуть вам засвоїти основні поняття й ідеї науки про випадковість. Рекомендуємо розв'язати хоча б частину з них. Кружечками ° позначені найпростіші завдання, зірочками \* — найскладніші. У кожному параграфі наведено тест для самоконтролю. Виконавши його, ви зможете оцінити, наскільки засвоєно матеріал параграфа. Кожен параграф містить контрольне завдання, яке складається з контрольного тесту, основних і додаткових завдань. Ви можете виконати контрольне завдання у будь-якій комбінації його складових. Сподіваємося, що запропоновані задачі будуть вам і корисними, і цікавими.

***Бажаємо вам успіхів!***

## Розділ 1

# Статистика, ймовірність, комбінаторика у 5 класі

## Вступ

Чого можна навчитись за цим посібником?

По-перше — здобувати, аналізувати й обробляти інформацію, приймати обґрунтовані рішення на її основі. Саме цього вчить описова статистика, з викладення якої і починається посібник. Цей посібник допоможе вам навчитись сприймати інформацію, представлену в табличній формі, робити певні висновки з цієї інформації. Ми почнемо зображати інформацію графічно, за допомогою координатного променя. Будемо вчитись отримувати інформацію, проводячи опитування, спостереження, статистичні експерименти. Отриману інформацію варто навчитись подавати у зручній формі (у вигляді таблиць); користуючись зібраною інформацією, будемо вчитись робити з неї корисні висновки. У ході опитувань, спостережень, експериментів, випадкових ігор зможемо дійти висновку про випадковий характер багатьох явищ. Більш докладно випадкові явища будуть вивчатися у другому параграфі.

Досі при вивченні математики, у побуті на всі запитання ви надавали одну з двох відповідей: «так» або «ні», про будь-який намір говорили, чи «здійсниться він», чи «не здійсниться», кожен певну подію характеризували словами «настає» чи «не настає». Цей набір відповідей не може відобразити різноманіття навколишнього світу. Адже нас цікавить уся розмаїтість світу, усе, що знаходиться між двома відзначеними крайностями: крім наведених відповідей, існує і така: «можливо», намір може здійснитися частково або не здійснитися частково, подія може іноді настати, а може іноді і не настати.

Отже, варто розширити жорсткі межі наших висловлювань до більш гнучкої системи, яка значно збільшує можливості застосування математичних методів. Можливість будувати і застосовувати такі гнучкі математичні методи надає вивчення елементів ймовірності.

Отже, по-друге, зробимо перші кроки на шляху ознайомлення з цим розділом математики, який вивчає ймовірність. Будемо вчитись порівнювати шанси настання різних випадкових подій. З такими явищами зустрічаємось на кожному кроці: виграє лотерейний білет чи ні; влучить дортс у певне коло чи ні; очікує нас удача при грі на гральному автоматі чи ні. Перелік таких прикладів можна продовжити.

Порівнювати шанси можна різними способами. Одним із таких способів є перебір можливих наслідків досліду. Отже, по-третє, почнемо вчитись знаходити кількість варіантів здійснення тієї чи іншої дії. Головним методом розв'язання цієї задачі буде перебір варіантів. У третьому параграфі розглянемо різні способи перебору. Будемо вчитись звертати увагу на те, чи повертається елемент у дану сукупність перед виїманням наступного чи ні, чи впливає на результати випробування порядок виїмання елементів чи ні, із сукупності однакових чи різних елементів здійснюється вибір елементів тощо.

Отже, як ви могли побачити з цього невеликого вступу, всі підрозділи даного параграфа пов'язані між собою. Оволодіння кожним із них сприяє засвоєнню інших.


## §1. Збираємо, зображаємо, сприймаємо, застосовуємо інформацію

У назві даного параграфу перелічено, в головному, чим займається статистика. А саме, вона навчає збирати, зображати, сприймати, застосовувати інформацію.

А інформація постійно потрібна кожній людині. Домогосподарка, йдучи на ринок, бажає знати ціни на товари, які вона збирається придбати. При підготовці до відпустки кожній особі необхідна інформація про розклад руху транспорту, яким вона планує дістатися до місця проведення відпустки. Спортсмен, готуючись до змагань, має володіти даними про досягнення його суперників. Керівництво будинку культури перед придбанням форми для учасників хору повинно мати інформацію про розмі-

ри їхнього одягу. Підводячи підсумки про результати командних змагань з якогось виду спорту, організаторам змагань потрібні результати кожної гри. Учень, виконуючи доручення батьків стосовно купівлі деяких продуктів, повинен знати, де можна придбати якісні продукти за прийнятними цінами. Перелік таких прикладів можна продовжити.

Головне призначення статистики полягає в тому, щоб допомогти людям краще зрозуміти проблеми, з якими вони стикаються. У цьому параграфі будемо вчитися сприймати, усвідомлювати інформацію, яка вже є, збирати необхідну інформацію, подавати інформацію у різних формах, бажано в наочних, робити корисні висновки із наявної чи зібраної інформації.

 Слово «статистика» має спільний корінь з англійським словом «state» (держава) і спочатку воно означало мистецтво і науку управління. Оскільки рішення уряду ґрунтуються у певній мірі на інформації про населення, промисловість, сільське господарство тощо, статистику, природно, погоди цікавлять відповідними даними, і поступово слово «статистика» погоди означати збір інформації про державу, а потім взагалі збір і обробку даних.

### 1.1. Читання та інтерпретація таблиць

Зручним способом подання інформації є таблиці. З таблицями зустрічаємось у шкільних підручниках із різних предметів. Наприклад, у підручнику з історії стародавнього світу для 6-го класу<sup>1)</sup> у вигляді таблиць подано: обов'язки у родовому суспільстві, чисельність населення Спарти у V ст. до н. е., ціни у Римській імперії тощо. У підручнику з географії<sup>2)</sup> у вигляді таблиць подані співвідношення швидкості і сили вітру, шкала сили землетрусів та інша інформація.

Прикладами табличного задання інформації є розклад уроків, класний журнал, таблиць успішності навчання у певному класі, таблиця першості з хокею, сторінка шкільного щоденника, розклад руху поїздів, календар на певний рік і т. ін.

Яку інформацію можна діставати з таблиць? Як користуватися таблицями для отримання узагальненої інформації? Як можна здобути щонайбільше інформації з різних таблиць? Усі ці питання розглядатимуться у даному пункті.

<sup>1)</sup> Шалагінова О. І, Шалагінов Б. Б. Історія стародавнього світу. Підручник для 6-го класу. – К.: Педагогічна преса, 2006.

<sup>2)</sup> Скуратович О. Я., Коваленко Р. Р., Кругляк Л. І. Географія. Загальна географія для 6-го класу. – К.: Зодіак-Еко, 1995.

**Приклад 1.** Розглянемо сторінку класного журналу, яка має назву «Математика».

Таблиця 1

№ п/п	Список учнів	Вересень										
		1	4	5	7	8	11	12	14	15	18	19
1.	Антонова Поліна		10					11	10			
2.	Білова Анастасія			7				6	7			6
3.	Вершиніна Ольга		5				8		3	4		5
4.	Вишневська Наталка				6			7	8	5		6
5.	Галаган Марина			4		4			5	6		5
6.	Горбенко Антон						9		8		8	
7.	Данченко Роман		8					8	9			9
8.	Діденко Євгенія				8		7		7		7	
9.	Єгорова Любова					7	6		4	7		7
10.	Костенко Данило					9			8	8	9	

Мабуть, ви вмієте користуватися цією таблицею, отримувати інформацію з неї, аналізувати її. За даними цієї таблиці можна дізнатися про оцінки кожного учня, порівняти їх з оцінками однокласників, порівняти поточні оцінки з оцінкою за контрольну роботу. За цією таблицею можна визначити, скільки приблизно учнів отримують поточні оцінки за урок, чи притримується вчитель певної системи при поточному оцінюванні учнів, чи є серед поточних оцінок найнижчі оцінки 1, 2, 3 тощо.

- ✓ **Хто з учнів, на Вашу думку, досяг у перші три тижні вересня найкращих результатів? Найгірших?**
- ✓ **Як ви гадаєте, чи є у вчителя певна система опитування учнів на уроці?**

Стовпці наведеної таблиці дають інформацію про прізвища, імена учнів, про успішність учнів на кожному уроці. Ми дізнаємось з цієї таблиці, що 14-го вересня було проведено якийсь контролюючий захід, і всі учні отримали оцінки.

Деколи нас цікавить інформація, представлена у деякому рядку чи у деякому стовпчику. Наприклад, Любу Єгорову цікавить дев'ятий рядок таблиці, з якого вона може дізнатися про свої оцінки. Вона може помітити, що її оцінка за контрольну роботу суттєво



нижча від поточних оцінок. А ось Поліна Антонова постійно отримує високі оцінки.

Але, безумовно, складнішим завданням є отримання узагальненої інформації, яка міститься в таблиці.

Іноді нас цікавить уся таблиця. За інформацією, яка міститься у таблиці, можна зробити певний прогноз (припущення) на майбутнє: наприклад, за результатами тематичних атестацій можна прогнозувати, якою буде підсумкова оцінка з предмета.

Часто для аналізу інформації, поданої у таблиці, потрібно підсумувати дані, які містяться у рядку чи у стовпчику.

**Приклад 2.** У таблиці 2 представлені дані про витрати сім'ї (у грн.) на різні комунальні послуги у 2006 р.

Таблиця 2

Комунальні послуги	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	За півроку
Платня за житло	34	34	34	34	34	34	204
Опалення	75	75	75	75	75	75	450
Газ	14	14	14	14	18	18	92
Електроенергія	29	28	27	26	33	32	175
Вода	16	15	14	15	17	17	94
Телефон	40	35	38	30	36	41	220
Телевізійна антена	20	20	20	20	20	20	120
Вивіз сміття	4	4	4	4	4	4	24
Усього	232	225	226	218	237	241	1379

Якщо підсумувати ці дані у кожному стовпці, то ми дізнаємось, скільки грошей витратила сім'я за кожен з перших шести місяців 2006 року. Якщо підсумувати наведені дані в рядках, то отримаємо дані про сумарні витрати за кожен вид комунальних послуг за перші шість місяців 2006 року. Підсумувавши останній рядок таблиці чи останній стовпець таблиці, ми дізнаємось, скільки грошей витратила сім'я за перше півріччя 2006 р. на комунальні послуги.

✓ **Як ви можете пояснити, що витрати на деякі види послуг були сталими, а за інші – змінювались?**

Після заповнення останнього рядка і останнього стовпчика таблиці можна дістати відповіді на такі запитання:

а) Який вид послуг є найдорожчим? *Опалення.*

б) Який вид послуг є найдешевшим? *Вивіз сміття.*

в) У якому місяці витрати на комунальні послуги були найбільшими? *У червні.*

г) У якому місяці витрати на комунальні послуги були найменшими? *У квітні.*

г) Чому дорівнюють витрати на опалення за 6 місяців? *450 грн.*

д) На які послуги витрати були сталими? *На житло, опалення, телевізійну антену, вивіз сміття.*

е) На які послуги витрати змінювались практично щомісячно? *За електроенергію, телефон, воду.*

е) Чи можна за даними таблиці зробити висновок про зростання цін на деякі послуги? *Можна зробити висновок про зростання цін на газ і електроенергію.*

ж) Як ви можете пояснити, що на одні види послуг витрати були сталими упродовж 6 місяців, а на інші – змінювались? *Наявність електричних лічильників дає змогу враховувати реальне споживання електроенергії, сплата за телефон передбачає врахування тривалості розмов як міських, так і міжміських чи міжнародних.*

з\*) Які види послуг оцінюються за показниками лічильника? *За електроенергію, воду, телефон (лічильники за телефон встановлені на телефонних станціях).*

и) На які послуги збільшились розцінки? *На газ і електроенергію.*

і) Як ви можете пояснити, що витрати на електроенергію спочатку зменшувались, а потім почали збільшуватись? *Це може пояснюватись збільшенням або скороченням світлового часу.*

ї\*) Дослідіть залежність витрат на комунальні послуги від місяця їхньої сплати. *У перші місяці року витрати на комунальні послуги децю зменшувались або залишались приблизно незмінними у зв'язку з коливанням витрат на деякі види послуг. У травні і червні витрати зросли, бо зросли розцінки на деякі види послуг.*

Призначення таблиць може бути різноманітним. Іноді це зручний спосіб подання інформації (наприклад, бухгалтерські відомості), таблиці зручні для збору інформації (наприклад, про зібрану макулатуру, про погоду, про результати спортивних змагань тощо), для аналізу інформації (наприклад, при розв'язуванні логічних задач), для подання результатів соціологічних опитувань.

аб  
ав бв  
аг бг вг  
ад бд вд гд,

а з п'яти однакових а, а, а, а, а — фактично тільки одним способом (обрані два елементи аа нічим не будуть відрізнятися від іншої пари аа).

У даному пункті будемо вчитися при переборі варіантів звертати увагу на те, чи йдеться у задачі про сукупність різних або однакових елементів.

Для порівняння цих ситуацій розглянемо наступну задачу.

**Приклад 1.** Скількома способами три олівці можна розподілити поміж двома дітьми, якщо олівці: а) різні; б) однакові?

□ а) Позначимо олівці числами 1, 2, 3. Усі способи їхнього розподілу поміж трьома дітьми представимо в таблиці 42.

Таблиця 42

№ способу \ № дитини	1	2	3	4	5	6	7	8
Перша	123	—	12	13	23	1	2	3
Друга	—	123	3	2	1	23	13	12

Отже, вісьмома способами можна розподілити три різні олівці поміж двома дітьми. Наприклад, 4-й і 5-й способи різні, хоча перша дитина одержала при обох цих способах по два олівці, а другій дитині дістався один олівець, але перша дитина одержала при цьому різні олівці.

✓ **Скільки існує способів розподілу, при яких кожна дитина отримає принаймні один олівець?**

б) Якщо олівці однакові, то різні способи розподілу олівців поміж двома дітьми будуть відрізнятися тільки кількістю олівців, що дістаються дітям. Представимо ці способи в таблиці 43.

Таблиця 43

№ способу \ № дитини	1	2	3	4
Перша	3	—	2	1
Друга	—	3	1	2

Таким чином, є чотири способи розподілу трьох однакових олівців поміж двома дітьми. Замінили в умові різні предмети на одна-

кові — одержали іншу задачу. Тому при розв'язанні подібних задач слід звертати увагу на те, про які предмети — однакові чи різні — йдеться. ■

✓ **Скільки існує способів розподілу, при яких кожна дитина отримає принаймні один олівець?**

**Приклад 2.** Скількома способами три олівці можна розподілити на дві групи, якщо олівці: а) різні; б) однакові?

□ У попередній задачі ми теж розподіляли три олівці на дві групи, але при цьому групи були різними: олівці розподілялися поміж дітьми. Тому розподіл, при якому першій дитині дісталися олівці 12, а другій — олівець 3, відрізнявся від розподілу, при якому першій дитині дістався олівець 3, а другій — олівці 12. А ось якщо ми розкладаємо олівці на дві «купки», то розподіли 12 + 3 і 3 + 12 нічим не відрізнятимуться один від одного.

Тому зрозумілим буде представлено в таблицях 44 і 45 розв'язання завдань а) і б) відповідно.

Таблиця 44

№ способу \ № групи	1	2	3	4
Перша	123	12	13	23
Друга	—	3	2	1

Таблиця 45

№ способу \ № групи	1	2
Перша	3	2
Друга	—	1

Отже, маємо відповідно чотири (два) способи розподілу на дві групи трьох різних (однакових) олівців. Зверніть увагу на те, що у порівнянні з прикладом 1 (де групи відрізнялись одна від одної) кількість способів зменшилася вдвічі, тобто в кількість способів, з допомогою яких можна переставити два елементи (кількість груп). ■

✓ **У таблиці 44 другий спосіб розподілу записаний як: 12 і 3. Чому серед способів розподілу немає 3 і 12?**



69. 1) 6; 2) 27. 70. 1) 6; 2) 27. 71. Більше шансів у випадку, коли принаймні одна дитина залишиться без подарунка. 72. Більше шансів у випадку, коли принаймні одна дитина залишиться без подарунка. 73. Більше шансів того, що це буде число з різними цифрами. 74. Більше шансів того, що дістануться автомобілі різних кольорів. 75. 1) 4; 2) 24. 76. 1) 6; 2) 12. 77. 1) 3; 2) 6. 78. 1) 6; 2) 4. 79. У порядку зростання йдуть шанси того, що будуть вийняті два прості олівці, два однокольорові олівці, один простий і один червоний олівець. 80. 1) 6; 2) 6; 3) 12. 81. 1) 60; 2) 10. 82. Однакові. 83. 1) 8; 2) 6. 84. 1) 6; 2) 3. 85. 1) 10; 2) 20. 86. 1) 16; 2) 5. 87. 1) 8; 2) 3. 88. 1) 14; 2) 3. 89. Більше шансів є в тому випадку, коли розподіл проведено з метою поповнення двох шкільних команд зі стрільби. 90. Більше шансів є в тому випадку, коли яблука різні. 91. Більше шансів є в тому випадку, коли яблука різні.

### 6-й клас

92. 1) У четвер; 2) 50; 3) у середу; 4) у п'ятницю; 5) 5; 6)  $\approx 140$ . 93. 1) У травні; 2) у жовтні; 3) 4; 4) у березні, серпні і вересні; 5) у жодному; 6) 34; 7) ні; 8) наприклад, можна порівняти народжуваність за кварталами, за півріччями. 94. 1) Хліб; 2) крупи, масло; 3) крупи, масло, м'ясо; 4) 90 г, 100 г; 5) крупи і масло, картопля і молоко. 95. 1) 12 років; 2) кінь; 3) кіт; 4) немає; 5) осел. 96. 1) 156 см; 2) 140 см; 3) 152 см; 4) 140 см; 5) 146 см; 6) 140 см; 7) 152 см; 8) 140 і 156 см; 9) 4; 10) 2; 11) дівчина; 12) 24; 13) 25; 14) 7; 15) 16; 16) 5; 17) 1; 18) дівчата. 97. 1) 7; 2) 14; 3) 7; 4) 16; 5) ні; 6) від 6 до 10 хвилин; 7) наприклад, скільки учнів витрачають на шлях до школи найбільше часу. 98. 1) О 9.07; 2) о 9.00; 3) 60 км/год; 4) через 3 хв.; 5) о 9.12; 6) 4 хв.; 7) 36 км/год; 8) о 9.01,  $\approx 9.07$ , 9.11; 9) можна, визначивши на кожній ділянці рух швидкість і час. 99. 1) 4; 2) на обід; 3) 0,15; 4) наприклад, яку частину добової норми харчування доцільно з'їдати до обіду. 100. 1) Футболом; 2) 5; 3) 100; 4) ні; 5) ні; 6) наприклад, що учні школи займаються щонайбільше 11-ма видами спорту. 101. Протягом одного місяця, з четвертого до п'ятого місяця. 107. Б. 108. 1) 7–9 класи; 2) 10–11 класи; 3) 35%; 4) 8%. 111. 1) На математичному — 60%, на історичному і філологічному — по 20%; 3) 500. 112. 1) Відповідно, 16, 16, 19, 18, 18, хв; 2) приблизно 17 хв. 115. 91%. 116. 1)  $\approx 86$  кВт·год; 2) можливо, це пов'язане із збільшенням (скороченням) світлового дня; 3) можливо, сім'я або її частина виїжджала у відпустку; 4) ні. 117. Другий. 118. 1) Червень був, переважно, похмурим; 2) вересень був досить дощовим; 3) якість парашутів є поганою; 4) рентген виявляє це захворювання у більшості випадків. 121. 1)  $r = 0,24$ ; 2)  $n = 170$ ; 3)  $m = 270$ . 122. 57. 123. [0,075; 0,575]. 124. 1) На 1 грн.; 2) на 0,7 грн.; 3) 3,5 грн.; 4) 4,2 грн.; 5) на 68%. 125. Див. таблицю.

Початкова ціна	Перше зниження ціни	Ціна після першого зниження	Друге зниження ціни	Ціна, за якою книгу продано
30 грн.	6 грн.	24 грн.	6 грн.	18 грн.
50 грн.	10 грн.	40 грн.	10 грн.	30 грн.
100 грн.	20 грн.	80 грн.	20 грн.	60 грн.

126. У місті В. 127. На математику — 54 хв, на українську мову — 45 хв, на історію — 36 хв, на зарубіжну літературу — 27 хв, на безпеку життєдіяльності — 18 хв. 128. 250 г. 129. Інформація систематизована за різними ознаками. 130. 55%. 131. На 20%. 132. 30,24%. 133. 1) Білих; 2) 4 білі і 2 чорні. 135. 1) Чорні, червоні, білі; 2) 10:7:3; 3) ні. 136. 70%. 137. 15 247 500 грн. 138. **Вказівка:** додати в скриньку чорну кулю і провести велику кількість дослідів з вийманням куль (з поверненням). 139. Провести велику кількість дослідів з вийманням олівців (з поверненням). 141. Немає даних, які суперечили б цьому припущенню. 142. Немає даних, які суперечили б цьому припущенню. 143. Ні. 144. Перевірити певну частину випадково відібраних консервів. 145. Багато разів підкинути цю монету, зафіксувати результати підкидань. 146. Усі події мають однакові шанси. 147. 1) чб, бб, бч; 2) див. таблицю.

Результат першого виймання \ Результат другого виймання	Результат першого виймання		
	ч	б	б
ч	—	чб	чб
б	бч	—	бб
б	бч	бб	—

3) 6; 4) 0, 2, 2, 2; 5) поява двох чорних куль є неможливою подією, всі інші події мають однакові шанси; 6) різнокольорові. 148. Найбільші шанси отримати гривню має Одарка, Галина і Марина мають менші, але однакові шанси. Пропозиція Одарки не є справедливою. 149. Шанси однакові. 150. Події 1), 2), 3) розміщені у порядку спадання шансів їх настання. 151. Появи чисел із сумами 4, 5, 6 розміщені у порядку зростання їхніх шансів. 152. 1) 2, 3, ..., 8; 2) суми 2 і 8 мають найменші, але однакові шанси появи, наступні однакові шанси мають суми 3 і 7, далі — суми 4 і 6, найбільші шанси має сума 5. 153. 1) 3, 4, ..., 18; 2) суми 3 і 18 мають найменші, але однакові шанси появи, наступні однакові шанси мають суми 4 і 17, далі — суми 5 і 16, наступні однакові шанси мають суми 6 і 15, далі 7 і 14, за зростанням шансів далі йдуть суми 8 і 13, 9 і 12, найбільші однакові шанси мають суми 10 і 11. 154. Імовіріше, що дощ піде. 156. 1, 2, 3, 4, 5, 6. 157. Більші шанси має поява двох однакових сторін і такої третьої, що відрізняється від них. 161. 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6; 2) однакові шанси. 162. 1) 0, 1, 2; 2) появи 0, 1, 2 білих монет розміщені у порядку зростання їх шансів. 163. Найменші шанси має потрапляння в  $S_3$ , потрапляння в  $S_1, S_2, S_4$  мають більші, але однакові шанси. 164. Однакові. 165. На незатемнену. 166. Поза пірамідою. 167. У тій частині, що залишилася. 168. Темна і сіра частини мають менші, але однакові шанси, біла частина — найбільші. 170. Гра не є справедливою. 171. Гра є справедливою. 172. Підкинути монету двічі і домовитись, хто при якому результаті чергує. 173. Володькові. 174. 0, 1, 3. Появи 3, 0, 1 збігів розміщені у порядку зростання їхніх шансів. 175. Підкинути гральний кубик і домовитись, хто при якому

результаті чергує. Можуть, слід навмання виїняти дві кульки і підрахувати суму їхніх номерів. **176.** Шанси на перемогу обох гравців однакові. **177.** 1) 0, 1, 2, ..., 12; Див. відповідь до № 174. **178.** 9. **179.** 1) 12; 2) 6; 3) 4. **180.** 1) Однакові шанси; 2) більше шансів має можливість побачити знак, який не містить квадрата. **181.** 8. **182.** 16. **183.** Більше шансів має вибір набору, де на першому місці стоїть буква, що позначає приголосний звук. **184.** 1) 16; 2) 12. **185.** 4. **186.** 4. **187.** 16. **188.** Більше шансів має вибір числа, яке: 1) не ділиться на 3; 2) не ділиться на 5; 3) є складеним. **189.** Більше шансів має отримання поїзда з червоними вагонами. **191.** 6. **192.** 6. **193.** 6. **194.** 12. **195.** Більше шансів має вибір числа, яке ділиться на 3. **196.** Більше шансів має вибір числа з різними цифрами. **198.** 1) 27; 2) 6; 3) 21. **199.** 1) 27; 2) 18; 3) 9. **202.** 20. **203.** 11. **204.** З більшими шансами одиниця не випаде жодного разу. **205.** 15. **206.** Більше шансів має випадання герба принаймні два рази. **207.** 2. **208.** 6. **209.** 6. **210.** 24. **211.** 6. **212.** 24. **213.** 24. **214.** 18. **215.** Перестановка, яка не починається з букви, що позначає голосний звук, має більші шанси. **217.** 1) 64; 2) 3; 3) 24; 4) 12; 5) 6. **218.** 12. **219.** 1) 16; 2) 4; 3) 6; 4) 4; 5) 1; 6) 1. **220.** 3. **221.** 6. **222.** 6. **223.** 3. **224.** 4. **225.** З більшими шансами одержуватиме банани підряд протягом двох днів. **226.** 1) 15; 2) 14. **228.** 3. **229.** 6. **230.** 4. **231.** 1) 10; 2) 20; 3) 10. **232.** 15. **233.** З більшими шансами будуть витягнуті різнокольорові картки. **234.** З більшими шансами серед вибраних буде рівно двоє хлопців. **235.** 10. **237.** 10. **238.** 10. **239.** 10. **240.** 1) 6; 2) 10; 3) 15; 4) 21. **241.** 1) Більше шансів для того, щоб були еклери; 2) більше шансів для того, щоб були тістечка двох сортів. **243.** 4. **244.** 11. **245.** 3. **246.** 10. **247.** 3. **248.** Більше шансів для того, щоб купки склались з однакової кількості елементів. **250.** 8. **251.** 16. **252.** Більше шансів для того, щоб хлопці отримали принаймні по одному олівцю. **253.** 6. **254.** 14. **255.** 16. **256.** 1) 6; 2) 4. **257.** 1) 20; 2) 12. **258.** 2. **259.** 3. **260.** 1. **261.** 2. **262.** 4. **263.** 1) 3; 2) 7. **264.** Більше шансів є для того, що серед доданків буде принаймні один нуль. **266.** 4. **267.** 5. **268.** 2. **269.** 3. **270.** 15. **271.** 1) 10; 2) 21. **272.** 15. **273.** Більше шансів є для того, щоб тільки в одну кишеню не потрапили сірники. **275.** 20. **276.** 16. **277.** 1) 6; 2) 14. **278.** 13. **279.** 25. **280.** 5. **281.** 9. **282.** 10. **283.** 12.

## Література

1. Бродский Я.С. Комбинаторика без формул. — Донецк: ДонНУ, 2003.
2. Бродский Я.С. Знакомство с вероятностью и статистикой. Пособие для учащихся. — Донецк: ДонНУ, 2006.
3. Бродський Я.С. Комбінаторика без формул. Знайомство з імовірністю та статистикою. — Х.: Вид. група «Основа», 2004. — (Б-ка журналу «Математика в школах України»; Вип. 8(20)).
4. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Описова статистика. Посібник для учнів. — Донецьк: ДонНУ, 2006.
5. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. — М.: Дрофа, 2002.
6. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе средн. школы. Пособие для учителя /Пер. с франц. А.К. Звонкина. — М.: Просвещение, 1979.
7. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников. — Москва: Просвещение, 1996.

## Зміст

Передмова для вчителів .....	3
Передмова для учнів .....	6

### Розділ 1

#### Статистика, ймовірність, комбінаторика у 5 класі

Вступ .....	8
§1. Збираємо, зображаємо, сприймаємо, застосовуємо інформацію .....	9
1.1. Читання та інтерпретація таблиць .....	10
1.2. Графічне зображення інформації .....	20
1.3. Проведення опитувань, реєстрація та інтерпретація їхніх результатів .....	23
1.4. Проведення спостережень, реєстрація та інтерпретація їхніх результатів .....	29
1.5. Випадкові ігри .....	33
1.6. Проведення статистичних експериментів, реєстрація та інтерпретація їхніх результатів .....	36
§2. Познайомимось з імовірністю .....	53
2.1. Випадково чи не випадково .....	54
2.2. Так, ні, може бути .....	57
2.3. Порівнюємо шанси .....	63
§3. Перебираємо варіанти .....	78
3.1. Методи перебору .....	78
3.2. Повертати чи не повертати? .....	86
3.3. Впливає чи не впливає на результати випробування порядок виймання елементів? .....	89
3.4. Вибираємо із сукупності однакових елементів чи різних? .....	95

### Розділ 2

#### Статистика, ймовірність, комбінаторика у 6 класі

Вступ .....	108
§4. Продовжуємо вивчати описову статистику .....	110
4.1. Читання, інтерпретація схем, діаграм, графіків .....	110
4.2. Побудова діаграм, графіків .....	119
4.3. Середнє значення сукупності .....	126
4.4. Відносна частота події .....	130
4.5. Використання процентних розрахунків для інтерпретації статистичних даних .....	133
4.6. Оцінювання невідомих значень величин .....	139
4.7. Перевірка статистичних гіпотез .....	142
§5. Продовжимо знайомитись з імовірністю .....	160
5.1. Порівнювати шанси допомагає перебір варіантів .....	160
5.2. Порівнювати шанси допомагають експерименти, аналіз перебігу явищ у минулому .....	167
5.3. Порівнюємо шанси з допомогою геометричних понять і вимірювань .....	174
5.4. Імовірність навколо нас .....	178
§6. Продовжуємо розв'язувати комбінаторні задачі .....	195
6.1. Комбінаторні задачі на вибір елементів .....	195
6.2. Комбінаторні задачі на розбиття сукупності елементів .....	219
6.3. Комбінаторні задачі на об'єднання двох або декількох сукупностей .....	231
6.4. Трикутник Паскаля .....	236
Відповіді та вказівки до задач для самостійного розв'язання .....	248
5-й клас .....	248
6-й клас .....	250
Література .....	253



“КНИГА ПОШТОЮ” А/С 529  
м. Тернопіль, 46008  
т. (0352) 287489, 511141  
(067) 3501870, (066) 7271762  
mail@bohdan-books.com

*Навчальне видання*

БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович  
**СТАТИСТИКА. ЙМОВІРНІСТЬ. КОМБІНАТОРИКА**  
**5–6 класи**

*Навчальний посібник*

Головний редактор *Богдан Будний*  
Редактор *Володимир Дячун*  
Художник обкладинки *Андрій Кравчук*  
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.12.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.  
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.  
Умовн. друк. арк. 14,88. Умовн. фарбо-відб. 14,88.  
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців  
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008  
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48  
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com  
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2904-9



9 789661 029049