Натисніть тут, щоб

купити книгу на сайті

або

замовляйте по телефону:

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

Основи стереометрії

10 клас

Дворівневий підручник для профільного навчання математики у загальноосвітніх навчальних закладах

Видання 4-е

Підручник для учнів, які прагнуть знати більше,
та вчителів, які хочуть вчити краще

За редакцією проф. В.І. Михайловського

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
Т13

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка
В.Р. Кравчук

Підручник зайняв 2-е місце на Всеукраїнському конкурсі підручників
з геометрії для профільного навчання,
проведеному Міністерством освіти і науки України у 2010 р.

Тадеєв В.О.

Т13 Геометрія. Основи стереометрії: Дворівневий підручник для профільного навчання математики у 10-му класі загальноосвітніх навчальних закладів. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 400 с.: іл.

ISBN 978-966-10-1525-7

Даний підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для навчання на профільному рівні у 10-х класах загальноосвітніх навчальних закладів, у тому числі у спеціалізованих фізико-математичних школах, ліцеях та гімназіях. Може використовуватися учнями, що навчаються на академічному рівні, але бажають опановувати математику поглиблено.

У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

ISBN 978-966-10-1525-7

Розділ I Аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них

Я гадаю, що ніколи досі ми не жили в такий геометричний період. Варто лише поміркувати над минулим, згадати те, що було раніше, і ми будемо спантеличені, побачивши, що світ, який нас оточує, — це світ геометрії, чистої, справжньої, бездоганної в наших очах. Усе довкола — геометрія. Ніколи ми не бачили настільки прозірно таких форм, як круг, прямокутник, кут, циліндр, куля, виконаних так чітко, з такою ретельністю й так упевнено.

Ле Корбузьє

Усі доказові науки послуговуються аксіомами. Аксіоми мають найвищий ступінь загальності і є началом усього.

Аристотель

Нерозважно вчинили б математики, якби вони, відкинувши найпростіші поняття, почали досліджувати складні.

Михайло Ломоносов

Предметом вивчення у геометрії є просторові форми. Інакше ці форми називаються геометричними фігурами. Саме ж вивчення геометричних фігур відбувається шляхом зведення складніших з них до простіших. Найпростішими геометричними фігурами вважаються точки, прямі і площини, основні властивості яких описуються аксіомами. Інші властивості цих найпростіших фігур доводяться на основі аксіом логічним шляхом. Цьому, в основному, і присвячується перший розділ підручника. Складнішими просторовими фігурами є многогранники. У кінці першого розділу встановлені властивості найпростіших фігур застосовуються для строгого означення та виведення найзагальніших властивостей двох найважливіших класів многогранників — призм і пірамід.

§1. Аксіоми стереометрії

У шкільній геометрії вивчаються ідеалізовані просторові форми навколишнього світу, який сприймається людиною за допомогою її органів чуттів. Інакше ці форми називаються *геометричними фігурами*. Отже, геометричні фігури — це мисленнєві образи, які утворюються в нашій свідомості внаслідок абстрагування, тобто нехтування усіма властивостями предметів, окрім їхньої протяжності в просторі, взаємного розміщення та розмірів.

Окремі геометричні фігури є плоскими і їх можна вважати розміщеними в одній площині. Властивості таких фігур вивчає планіметрія.

Інші фігури не є плоскими, або їх уже не можна вважати розміщеними в одній площині. Такими є, наприклад, куб, куля, циліндр, конус, їхні комбінації. Властивості таких фігур вивчаються у стереометрії. Стереометрія значною мірою базується на планіметрії.

Найпростішими геометричними фігурами, які вивчаються у планіметрії, вважаються *точки* і *прямі*. У стереометрії до них долучаються *площини*.

Точки є ідеалізованими мисленнєвими образами дуже дрібних предметів, розмірами яких за даних умов можна узагалі знехтувати (наприклад, пилинок, слідів тонко загостреного олівця на папері чи палиці на піску). Прямі — це мисленнєві образи довгих напнутих ниток чи мотузок, світлових променів тощо. Площини — мисленнєві образи великих рівних поверхонь, наприклад, стола, стіни, водного плеса, рівного поля тощо. Площини, як і прямі, ми уявляємо нескінченними і без будь-якої товщини. Кожна площина нескінченна в усіх напрямах.

Точки і прямі позначаються й зображаються у стереометрії так само, як і в планіметрії. Площини

Найпершою запорукою непогрішності математичного мислення вважається те, що вихідним пунктом міркувань і дій у цій науці слугують аксіоми.

Іван Сєченов

Геометрія — це застосування строгої логіки до самоочевидних і, отже, безсумнівних особливостей простору. Але точність цієї науки іде ще далі, оскільки будь-яка особливість, якою б вона не була очевидною, обов'язково підлягає доведенню, якщо тільки воно можливе. Завдання полягає в тому, щоб усі геометричні істини довести на основі якомога меншої кількості припущень.

Авґустус де Морґан

Аксіоми та доведення науки проникають у розум, захоплюють його і тримають так міцно, що він не може вирватися.

Френсіс Бекон

Аксіома — це твердження, на яке не вистачило доведення.

З учнівського гумору

ж позначаються малими грецькими літерами α, β, γ тощо. А оскільки уявлення про площину пов'язано з названими вище поширеними прямокутними формами, які при зоровому сприйнятті найчастіше здаються паралелограмами, то на рисунках площини, як правило, зображають у вигляді цих паралелограмів. Інколи для надання рисункові більшої колоритності від цих паралелограмів «відламують» певні частини (на рис. 1.1 наведено декілька можливих зображень площини). Крім того, ті фігури або їхні частини, які «закриваються» іншими фігурами, у стереометрії зображаються пунктирними лініями. З урахуванням цього на рис. 1.2 зображено дві площини α і β, які мають спільну пряму a, а також пряму b, що належить площині β.

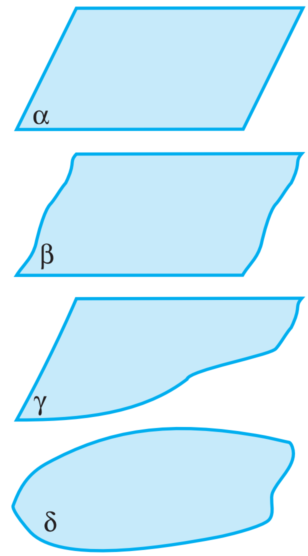


Рис. 1.1

Фундамент стереометрії складають декілька найзагальніших властивостей точок, прямих і площин, сформульованих на основі віковічного життєвого досвіду людей, а також на основі ретельного логічного аналізу учених. Як і в планіметрії, ці властивості називаються *аксіомами* (в перекладі з грецької мови, як уже вказувалося у вступі, слово «аксіома» означає «повага», «авторитет», «незаперечна істина»).

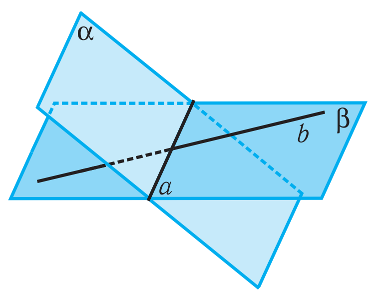


Рис. 1.2

Сукупність усіх аксіом окремої наукової теорії називається її *аксіоматикою*. Можливі різні аксіоматики стереометрії. У нашому підручнику викладається та з них, яка найбільшою мірою узгоджується з історичною традицією у побудові навчальних курсів геометрії. За цією традицією, зокрема, стереометрія вивчається після планіметрії і, отже, ґрунтується на ній. Це й відображає перша аксіома.

Аксіома 1.

У просторі існують площини. У кожній площині здійснюється планіметрія.

Перше твердження цієї аксіоми приймається для запобігання логічно можливому зведенню стереометрії до планіметрії, тобто до ситуації, коли у просторі існує одна-єдина площина. Друге ж твердження означає, що в кожній площині існують усі фігури

Геометрія є мистецтвом правильно міркувати на неправильних рисунках.

Нільс Хенрік Абель

і здійснюються всі факти, відомі з планіметрії, наприклад: аксіома паралельних прямих, ознаки рівності та подібності трикутників, теорема Піфагора, формула для обчислення довжини кола тощо.

Наступною аксіомою встановлюється єдиний масштаб вимірювання відрізків у всьому просторі, який, взагалі кажучи, можна було б уявляти і різним для різних площин.

Давно помічено, що геометрія — це чудова логіка. І справді, коли означення чіткі, коли постулати незаперечні, а аксіоми безсумнівні, коли властивості фігур випливають зі строгого спостереження та порівняння за допомогою неперервної і добре узгодженої послідовності, а предмети постійно перебувають у полі зору, тоді звикають міркувати точно, послідовно і методично; ця звичка підсилює та шліфує розум і приносить користь при пошуку істини в інших галузях.

Джордж Берклі

Аксіома 2.

Якщо дві точки належать одночасно кожній із двох площин, то відстані між цими точками у кожній з площин рівні між собою.

Отже, введення цієї аксіоми дає змогу вести мову про відстані між точками у просторі, не конкретизуючи, в якій саме площині ці відстані вимірюються. А це, у свою чергу, є передумовою для поширення на стереометрію фундаментальних понять рівності та подібності фігур, а також означень переміщення та перетворення подібності.

Означення
(*рівності та переміщення фігур*).

Дві просторові фігури F і F' називаються *рівними* (записують: $F = F'$), якщо між точками цих фігур можна встановити взаємно однозначну відповідність (тобто відповідність, при якій кожній точці однієї фігури відповідає одна і лише одна точка іншої), причому для довільних двох точок X, Y фігури F і відповідних їм точок X', Y' фігури F' відрізки XY та $X'Y'$ рівні між собою (рис. 1.3)**.**

Відповідність між фігурами F і F', яка має зазначену властивість, називається *переміщенням*, або *рухом* фігури F у фігуру F'.

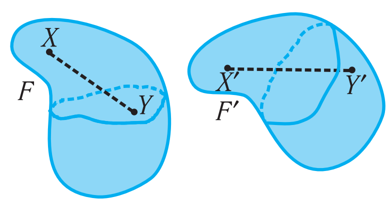


Рис. 1.3

Означення
(*подібності та перетворення подібності фігур*).

Дві просторові фігури F і F' називаються *подібними* (записують: $F \sim F'$), якщо між точками цих фігур можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій для будь-яких двох точок X, Y фігури F і відповідних їм точок X', Y' фігури F' відношення довжин відрізків $X'Y'$ та XY дорівнює одному і тому ж числу k ($k > 0$) (рис. 1.4)**. Число k називається *коефіцієнтом подібності* фігур F і F'.**

Відповідність між фігурами F і F', яка має зазначену властивість, називається *перетворенням подібності* фігури F у фігуру F'.

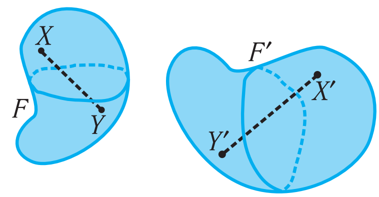


Рис. 1.4

(Нагадаємо, що в геометрії будь-яку взаємно однозначну відповідність між точками двох фігур називають *перетворенням* однієї фігури в іншу).

Без будь-яких змін переноситься із планіметрії у стереометрію й чимало інших понять та відношень, пов'язаних з поняттям відстані, наприклад: центральної симетрії і центрально симетричних фігур, гомотетії і гомотетичних фігур тощо.

— Коли я вживаю якесь слово, — проказав Шалам-Балам майже глузливо, — то воно означає лише те, що я хочу, щоб воно означало, — не більше й не менше...

Льюїс Керролл. «Аліса в Задзеркаллі»

Означення
(*центральної симетрії і центрально-симетричних фігур*).

Точки X та X' в просторі називаються *симетричними відносно точки O* (*центра симетрії*), якщо точка O є серединою відрізка XX' (рис. 1.5)**. Точка O вважається симетричною самій собі.**

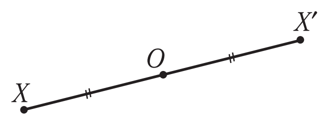


Рис. 1.5

***Центральною симетрією*, або *симетрією відносно точки O*, називається таке перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна точка X фігури F переходить у таку точку X' фігури F', яка є симетричною точці X відносно даної точки O** (рис. 1.6)**. При**

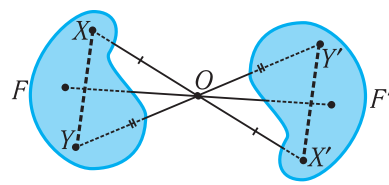


Рис. 1.6

цьому фігури F і F' називаються ***центрально-симетричними*** **відносно точки O.**

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається ***центрально-симетричною*****, а точка O —** ***центром її симетрії*****.**

Центрально-симетричними фігурами на площині є, наприклад, коло і прямокутник, а в просторі — сфера і прямокутний паралелепіпед.

— Перестань зараз же! — закричав Знайко. — Від твоєї музики вуха болять!

— Це тому, що ти до моєї музики ще не звик. Ось звикнеш — і вуха перестануть боліти.

Микола Носов.
«Пригоди Незнайка та його друзів»

Означення
(*гомотетії і гомотетичних фігур*).

Гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k > 0$ **називається таке перетворення фігури F у фігуру F', при якому довільна точка X фігури F переходить у таку точку X' фігури F', яка належить променю OX і при цьому справджується рівність: $OX' = k \cdot OX$** (рис. 1.7)**. При цьому фігури F і F' називаються** ***гомотетичними з центром гомотетії O і коефіцієнтом гомотетії k*****.**

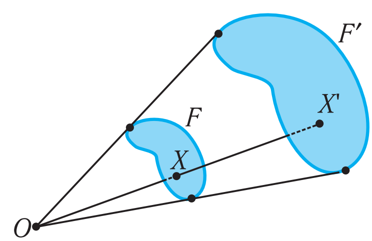


Рис. 1.7

У решті аксіом стереометрії фіксуються основні властивості відношення *належності* для найпростіших стереометричних фігур — точок, прямих і площин.

Окрема точка може належати прямій або площині, а пряма — площині. Кажуть також, що тоді пряма або площина проходить через (або містить) точку, а площина проходить через (або містить) пряму.

Кожну пряму і площину, як і взагалі будь-яку фігуру, ми уявляємо складеною з точок. Тому вислів «пряма належить площині» означає, що кожна точка цієї прямої належить даній площині.

Аксіоми належності формулюються наступним чином.

Навчатися можна тільки весело... Аби перетравити знання, потрібно поглинати їх з апетитом.

Анатоль Франс

Аксіома 3.

Які б не були дві різні точки, у просторі існує пряма, і до того ж — тільки одна, яка проходить через ці точки.

Аксіома 4.

Які б не були три різні точки простору, що не лежать на одній прямій, існує площина, і до того ж — тільки одна, яка проходить через ці точки.

Аксіома 5.

Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають і спільну пряму, яка проходить через цю точку.

На одностайну думку усіх, хто стосовно своїх знань хоче стояти вище від натовпу, математичний метод, за допомогою якого з означень, постулатів та аксіом виводяться наслідки, при дослідженні та передачі знань є найкращим і найнадійнішим шляхом для знаходження та повідомлення істини.

Бенедикт Спіноза

Зауважимо, що коли йдеться про дві точки, дві прямі чи про дві площини, то, як правило, мають на увазі, що їх справді дві, тобто що вони різні, а не збігаються. Цього правила надалі будемо дотримуватися і ми. Але в окремих випадках, як, приміром, у щойно поданих аксіомах, доречно підсилити це за допомогою уточнення — «різні».

Призначення аксіоми 3 у певному сенсі аналогічне призначенню аксіоми 2. Відповідною аксіомою у планіметрії стверджується існування та єдиність прямої, яка проходить через дві точки площини. Але у просторі логічно допустимою є ситуація, коли у різних площинах ці прямі є різними — подібно до того, як на глобусі через полюси N і S проходять різні меридіани (рис. 1.8). Із прийняттям аксіоми 3 таке унеможливлюється.

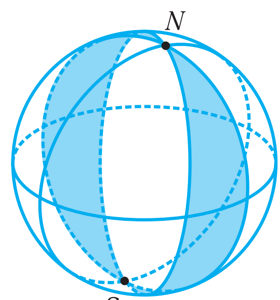


Рис. 1.8

З аксіоми 3 одразу випливає, що дві різні прямі у просторі не можуть мати більше однієї спільної точки. Справді, якби дві прямі мали хоча б дві спільних точки, то, за аксіомою 3, вони збігалися б.

Означення
(*пересічних прямих*).

Дві прямі, які мають тільки одну спільну точку, називаються *пересічними*. Про них кажуть також, що вони перетинаються у цій точці.

Властивість, яка зафіксована в аксіомі 3, застосовується навіть у простих житейських ситуаціях, наприклад, при плануванні грядок і газонів за допомогою шнура або при поділі сільськогосподарських угідь на ділянки за допомогою візування на певні орієнтири. Узагалі, будь-яке візування є умовним проведенням прямої (зорового променя) через точку, в якій перебуває спостерігач, і точку-об'єкт, за яким здійснюється спостереження. Аксіома 3 є також вихідним положенням класичної геометричної оптики, виступаючи у формі постулату про прямолінійне поширення світлових променів у однорідному середовищі.

Підтвердженням аксіоми 4 у повсякденній практиці слугує, наприклад, стійкість на площині підлоги будь-якої триноги (стола чи табурета на трьох ніжках, штатива тощо). Три точки A, B, C, які є кінцями ніжок триноги, завжди можна розмістити у площині підлоги α (рис. 1.9). А ось із чотирьох ніжок прямокутного стола кінець однієї може «висіти», піднімаючись над площиною, в якій лежать кінці трьох інших. Тоді стіл хитається: чотири точки в одній площині лежать не завжди.

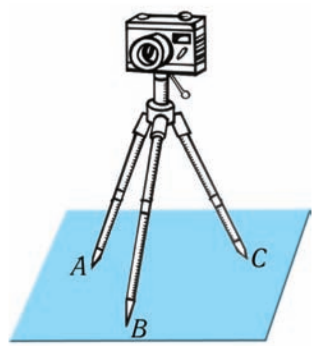


Рис. 1.9

Інший приклад. Рухома площина дверей, що проходить через дві фіксовані точки A і B, розташовані в місцях кріплення завісів до одвірка, фіксується (стає визначеною) третьою точкою якого-небудь обмежника: наприклад, кілочком C у підлозі для запобігання вдаряння об стіну, або замком D у протилежному одвірку (рис. 1.10).

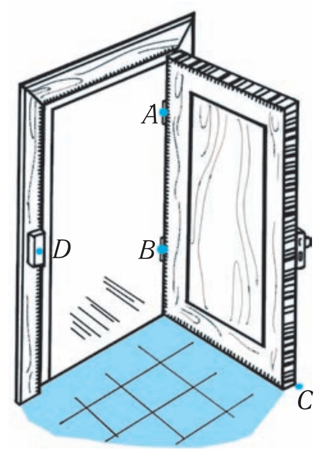


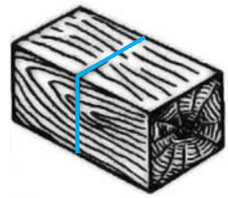
Рис. 1.10

Відповідно до аксіоми 4, поряд із позначенням площини грецькими літерами, застосовують і позначення за допомогою трьох великих латинських літер, які позначають точки, розташовані на цій площині. Наприклад, якщо площина α проходить через точки A, B, C, що не лежать на одній прямій, то її позначають через ABC. Те, що α і ABC — одна й та сама площина, записують так: $\alpha = ABC$.

Аксіому 5 можна проілюструвати за допомогою пилки і дерев'яного бруска (рис. 1.11). Пилка, яка спочатку торкається до поверхні бруска лише в одній точці його ребра, під час різання залишає на плоских поверхнях суміжних граней прямолінійні сліди.Перетин двох площин по прямій добре ілюструють і численні приклади з царини будівництва та архітектури, де моделями площин виступають стіни, стелі, підлоги, схили дахів тощо.

З аксіом 4 і 5 випливає, що коли дві різні площини мають спільні точки, то цих точок є безліч і всі вони лежать на одній прямій. Справді, якщо дані площини містять хоча б одну спільну точку, то, за аксіомою 5, вони містять цілу пряму спільних точок. Припущення ж про те, що існує ще хоча б одна спільна точка поза цією прямою, означало б, за аксіомою 4, що ці площини збігаються.

а)



б)

Рис. 1.11

Означення
(*пересічних площин*).

Дві площини, які мають спільну пряму, називаються *пересічними*. Кажуть також, що дані площини перетинаються по цій прямій.

Для скорочення записів, що характеризують відношення належності, часто вживають спеціальні математичні символи. Належність та неналежність точки прямій чи площині позначають за допомогою символів $\in$ та $\notin$. Наприклад, записи $A \in a$, $B \notin \alpha$ означають, що точка A належить прямій a, а точка B не належить площині α. Належність чи неналежність прямої площині позначають за допомогою символів $\subset$ та $\not\subset$. Наприклад, записи $a \subset \alpha$, $b \not\subset \gamma$ означають, відповідно, що пряма a належить площині α, а пряма b не належить площині γ. Те, що площини α і β перетинаються по прямій a, записують так: $a = \alpha \cap \beta$. А запис $A = a \cap b$ означає, що точка A є точкою перетину прямих a і b.

Наступні два наслідки з прийнятих аксіом сформулюємо у вигляді теорем. У деяких підручниках з геометрії твердження цих теорем приймають за аксіоми.

Поняття, які не мають жодної опори в природі, можна порівняти з північними лісами, в яких дерева не мають коріння. Досить пориву вітру, досить незначного факту, щоб перевернути весь цей світ дерев та ідей.

Дені Дідро

Геометричні істини в певному сенсі є асимптотами до фізичних істин, тобто перші нескінченно близько наближаються до других, ніколи, однак, повністю не досягаючи їх.

Жан Лерон Д'Аламбер

Теорема 1

(про існування точок поза площиною).

Яка б не була площина, існують точки простору, які їй не належать.

Доведення. Нехай α — задана площина. Відповідно до аксіоми 1, існує принаймні ще одна площина β. Якщо площини α і β мають спільну точку A (рис. 1.12, а), то, за аксіомою 5, вони мають і деяку спільну пряму a, якій належать усі спільні точки цих площин. Тоді кожна точка B площини β, яка не належить прямій a, не належить і площині α. Якщо ж площини α і β не перетинаються (у тому, що така ситуація справді можлива, ми переконаємося пізніше), то взагалі кожна точка B площини β не належить площині α (рис. 1.12, б). Теорему доведено.

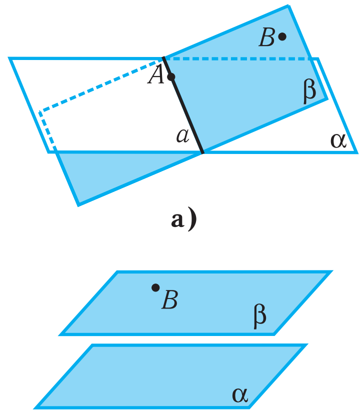


Рис. 1.12

Теорема 2

(ознака належності прямої площині).

Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Доведення. Нехай точки A і B прямої a належать площині α (рис. 1.13). Оскільки, за аксіомою 1, у кожній площині здійснюється планіметрія, то у площині α можна провести, і до того ж — тільки одну, пряму a', яка проходить через задані точки A і B. Але, за аксіомою 3, ця пряма — єдина в усьому просторі, тобто збігається з a. Пряма a' належить площині α, тому й пряма a належить цій площині. Теорему доведено.

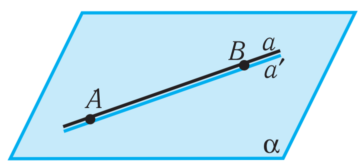


Рис. 1.13

Доведеною ознакою належності прямої площині часто користуються теслярі для перевірки того, чи є оброблена поверхня плоскою. Для цього до поверхні у різних напрямках прикладають ребро добре вивіреної лінійки і дивляться, чи немає між ним і поверхнею просвітів. Навпаки, за допомогою вивіреної плоскої поверхні (наприклад, поверхні станини верстата) описаним способом можна перевірити якість обробки прямолінійних деталей.

Математика є мовою особливого ґатунку, яка має ідеї, лише їй притаманні, і знаки для вираження цих ідей.

Михайло Остроградський

З ознаки належності прямої площині випливає, що площина і пряма, яка не належить цій площині, можуть мати щонайбільше одну спільну точку. Справді, якби таких точок було хоча б дві, то, за вказаною ознакою, дана пряма належала б площині.

Не дивись на доведення, як на процес, який примушує тебе, — дивись на нього, як на процес, який веде тебе.

Людвіґ Вітгенштайн

Означення
(пересічних прямої і площини).

Пряма і площина, які мають тільки одну спільну точку, називаються *пересічними*. Про них кажуть також, що вони перетинаються у цій точці.

Те, що пряма a і площина α перетинаються у точці A, символічно можна записати так: $A = a \cap \alpha$.

Гучні та урочисті диспути вчених часто перетворюються в суперечки стосовно слів і назв, а розважливіше було б (відповідно до звичаю та мудрості математиків) з них і розпочати — для того, щоб за допомогою означень упорядкувати їх.

Френсіс Бекон

Задача

Чи можна стверджувати, що якою б не була пряма у просторі, існують точки, які їй не належать?

Розв'язання. Нехай a — задана пряма, α — деяка площина (існування площини α гарантується аксіомою 1). Якщо пряма a має дві спільні точки з площиною α, тобто належить цій площині (рис. 1.14, а), то кожна точка B, яка не належить α, не належить і прямій a. (За аксіомою 1, точки, які не належать прямій a, є і в самій площині α).

Якщо пряма a має з площиною α лише одну спільну точку A (рис. 1.14, б), то кожна точка B площини α, відмінна від цієї спільної точки, не належить прямій a.

Якщо ж пряма a і площина α не мають спільних точок (рис. 1.14, в), то взагалі кожна точка B площини α не належить прямій a.

Отже, завжди можна стверджувати, що, якою б не була пряма, існують точки простору, які їй не належать.

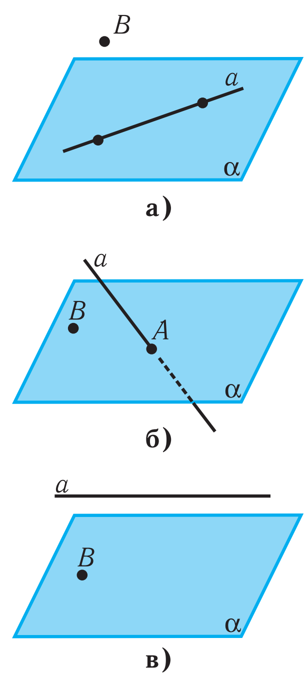


Рис. 1.14