

Натисніть тут, щоб
купити книгу на сайті
або

замовляйте по телефону:

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

О.С. Істер

МАТЕМАТИЧНІ ПЕРЛИНИ



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
189

Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року

Істер О.С.
І89 Математичні перлини. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 88 с.
ISBN 978-966-10-2986-5

У пропонованому посібнику представлено статті, що були в різні роки надруковані автором в періодичних спеціалізованих виданнях з математики.

Посібник містить оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їхнього розв'язання

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ББК 22.1я72

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2986-5

© Навчальна книга – Богдан, 2012

Від автора

У пропонованому посібнику представлено 10 статей, що були в різні роки надруковані автором в газеті «Математика» та журналі «Математика в школі».

Учні середньої та старшої школи знайдуть у книзі оригінальні задачі, серед яких багато авторських, та нові методи їхнього розв'язання. Колегам-вчителям, сподіваюсь, книга буде корисною для підготовки до уроків та для позакласної роботи.

Зауваження та пропозиції надсилайте на адресу: ister@i.com.ua.

Відвідайте наші сторінки в Інтернеті: www.bohdan-books.com та ister.in.ua.

Статті, що ввійшли у книгу

№	Назва статті	Де надрукована
1	Тригонометричні підстановки	«Математика» №8 за 1998 р. (початок) та «Математика» №9 за 1998 р. (закінчення)
2	Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення	«Математика» №11 за 1999 р.
3	Багатозначні геометричні задачі	«Математика» №17 за 1999 р.
4	Обернені тригонометричні функції: самостійне плавання на вступному іспиті	«Математика в школі» №2 за 1998 р.
5	Задачі-близнюки	«Математика» №37 за 1999 р.
6	Формули переходу між кутами правильної піраміди	«Математика» №14 за 2000 р. (початок) та «Математика» №15 за 2000 р. (закінчення)
7	Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь	«Математика» №21–22 за 2000 р.
8	Математичний футбол	«Математика» №42 за 2000 р.
9	Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази	«Математика» №7 за 2001 р.
10	Розв'язування комбінаторних задач за допомогою рівнянь	«Математика» №10 за 2001 р.

Тригонометричні підстановки

У класичному математичному аналізі тригонометричні підстановки використовуються для підінтегральних виразів, що містять радикали $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$, а також квадрати цих радикалів $a^2 - x^2$, $x^2 \pm a^2$.

Зручними є:

для випадку $\sqrt{a^2 - x^2}$ підстановка $x = asint$ (або $x = acost$),

для випадку $\sqrt{x^2 + a^2}$ підстановка $x = atgt$ (або $x = actgt$),

для випадку $\sqrt{x^2 - a^2}$ підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ (або $x = \frac{a}{\cos t}$).

Ідея тригонометричної підстановки в шкільному курсі математики допомагає звести алгебраїчні вирази, рівняння, нерівності тощо до тригонометричних. Зауважимо, що зручно накладати обмеження на t так, щоб x набував усіх можливих значень з області визначення лише один раз (тобто розглядати один інтервал монотонності відповідної тригонометричної функції).

Пропонуємо дев'ять авторських задач, найзручнішим способом розв'язання яких вважаємо метод тригонометричної підстановки.

Спочатку розглянемо задачі з однією змінною.

1. Підстановка $x = asint$ (або $x = acost$)

Задача 1. Розв'язати рівняння $x^3 + (\sqrt{1 - x^2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Областю допустимих значень є $[-1; 1]$, тому можлива заміна змінної $x = \sin t$, де $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тоді маємо: $\sin^3 t + |\cos t|^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos t \geq 0$ і $|\cos t| = \cos t$.

$$\text{Отже, } (\sin t + \cos t)(\sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Замінімо } \sin t + \cos t = z, \text{ тоді } z^2 = 1 + 2 \sin t \cos t, \sin t \cos t = \frac{z^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Маємо: } z \left(1 - \frac{z^2 - 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z^3 - 3z + \sqrt{2} = 0.$$

$$\text{Домножимо обидві частини рівняння на } (\sqrt{2})^3.$$

$$\text{Маємо: } (\sqrt{2}z)^3 - 6(\sqrt{2}z) + 4 = 0.$$

$$\text{Виконаємо ще одну заміну: } \sqrt{2}z = u.$$

$$u^3 - 6u + 4 = 0; \quad (u^3 - 8) - (6u - 12) = 0;$$

$$(u - 2)(u^2 + 2u + 4) - 6(u - 2) = 0; \quad (u - 2)(u^2 + 2u - 2) = 0;$$

$$u_1 = 2; \quad u_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Тоді } z_1 = \sqrt{2}; \quad z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Оскільки } \sin t + \cos t = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right), \text{ то ма-}$$

ємо:

$$1) \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}; \quad \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = 1; \quad t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Враховуючи, що } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ маємо } t = \frac{\pi}{4} \text{ і тоді } x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2) \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \quad \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}. \text{ Немає розв'язку.}$$

$$3) \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \quad \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Враховуючи, що } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ маємо } t = \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\pi}{4}. \text{ Тоді}$$

$$x = \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{4} -$$

$$- \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Відповідь. } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння $8\sqrt{1-x^2}(2x^3-x)=1$.

Розв'язання. Оскільки областю допустимих значень рівняння є $[-1; 1]$, то можлива заміна $x = \cos t$, де $t \in [0; \pi]$.

$$\text{Тоді } 8|\sin t| \cos t (2 \cos^2 t - 1) = 1.$$

$$\text{Оскільки } t \in [0; \pi], \text{ то } \sin t \geq 0 \text{ і } |\sin t| = \sin t. \text{ Тоді}$$

$$4(2 \sin t \cos t) \cos 2t = 1; \quad 2(2 \sin 2t \cos 2t) = 1; \quad \sin 4t = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\begin{cases} 4t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, & \begin{cases} t = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 4t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ t = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Враховуючи обмеження для t , маємо:

$$t_1 = \frac{\pi}{24}; \quad t_2 = \frac{13\pi}{24}; \quad t_3 = \frac{5\pi}{24}; \quad t_4 = \frac{17\pi}{24}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_1 = \cos \frac{\pi}{24} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}}{4}. \end{aligned}$$

Дивовижний факт про те, що x^4 (де x — ціле число) при діленні на 16 дає лише остачі 0 і 1, можна використати так.

Задача 5. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{13}^4 + x_{14}^4 = 1999^{1999}.$$

Розв'язання.

Лема. При діленні на 16 число x^4 (де x — ціле число) дає лише остачу 0 або 1.

Доведення. Якщо $n = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$) — парне, то $n^4 = (2m)^4 = 16m^4$ ділиться на 16 (остача 0). Якщо $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) — непарне, то $n^4 - 1 = (2m + 1)^4 - 1 = ((2m + 1)^2 - 1)((2m + 1)^2 + 1) = (4m^2 + 4m)(4m^2 + 4m + 2) = 8(m^2 + m)(2m^2 + 2m + 1) = 8m(m + 1)(2m^2 + 2m + 1)$.

Оскільки m і $m + 1$ — два послідовних цілих числа, то одне з них ділиться на 2, а отже, $n^4 - 1$ ділиться на 16, тому $n^4 = 16m + 1$ і n^4 при діленні на 16 дає остачу 1.

Лему доведено.

Отже, сума $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{13}^4 + x_{14}^4$ при діленні на 16 може давати остачі 0, 1, 2, 3, ..., 14 і не може давати остачу 15. Розглянемо, яку остачу при діленні на 16 дає число 1999^{1999} . Міркуючи аналогічно, як у попередній задачі, маємо: $1999^{1999} = (2000 - 1)^{1999} = (16 \cdot 125 - 1)^{1999} = 16p - 1 = 16p - 16 + 15 = 16(p - 1) + 15$, де p — ціле число.

А отже, 1999^{1999} при діленні на 16 дає остачу 15. Тому рівняння розв'язків не має.

Автор сподівається, що наведена таблиця, а також задачі (з яких чотири — авторські) допоможуть читачеві скласти багато нових цікавих задач, а школярам та студентам досягти перемог на олімпіадах.

Багатозначні геометричні задачі

Розв'язування геометричної задачі, як правило, починається з рисунка. Більшість задач шкільного підручника має однозначне геометричне тлумачення, а тому однозначною є і побудова рисунка.

Але на олімпіадах, вступних іспитах тощо зустрічаються задачі, умова яких задовольняє різні геометричні ситуації. Будемо такі задачі називати *багатозначними*. Розглядаючи різні варіанти, як правило, дістають різні відповіді.

Багатозначні задачі є традиційно важкими для розв'язування, а тому, на думку автора, з такими задачами потрібно знайомити учнів, починаючи з перших уроків геометрії у 7-му класі. Наведемо невелику добірку таких задач (у дужках подано відповіді).

1. Основні властивості геометричних фігур

1. Точки A , B і C лежать на одній прямій. $AB = 3$ см, $BC = 5$ см. Чому дорівнює довжина відрізка AC ? (2 см або 8 см).
2. Точки A , B і C лежать на одній прямій. Довжина відрізка AC у 2 рази більша, ніж довжина відрізка BC , $AB = 15$ см. Знайти довжини відрізків AC і BC .
($AC = 10$ см, $BC = 5$ см або $AC = 30$ см, $BC = 15$ см).
3. $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle BOC = 40^\circ$. Знайти $\angle AOC$. (10° або 70°).
4. $\angle AOB = 100^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$. Знайти $\angle AOC$. (20° або 140°).
5. $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 4$, $\angle AOC = 35^\circ$. Знайти $\angle AOB$ і $\angle BOC$.
($\angle AOB = 15^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$ або $\angle AOB = 105^\circ$, $\angle BOC = 140^\circ$).

2. Суміжні та вертикальні кути

6. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні, $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOD = 30^\circ$. Знайти $\angle DOC$. (150° або 90°).
7. $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle AOC = 40^\circ$. Чи можна стверджувати, що промінь OC — бісектриса $\angle AOB$? (Ні).

Задача 4. З групи атлетів треба вибрати трьох штангістів для участі в міжнародних змаганнях. Скільки в групі атлетів, якщо відомо, що це можна зробити 84 способами?

Розв'язання. Нехай в групі n атлетів. За умовою, $C_n^3 = 84$, або $\frac{n!}{3!(n-3)!} = 84$, $n(n-1)(n-2) = 504 = 9 \cdot 8 \cdot 7$. Використавши вже знайомий прийом (див. статтю «Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази», приклад 20), дістанемо, що $n = 9$ — єдиний корінь цього рівняння. Отже, в групі 9 атлетів.

Задача 5. В районній фірмі «Свято» Дідів Морозів на 4 більше, ніж Снігуроньок. Для поздоровлення мешканців району з представників фірми вибирають 4 пари. Скільки працює Дідів Морозів і Снігуроньок, якщо відомо, що це можна зробити $\frac{10!}{48}$ способами?

Розв'язання. Занумеруємо пари, що мають бути обрані. Нехай є x Снігуроньок і $x + 4$ Дідів Морозів. З урахуванням нумерації, Дідів Морозів можемо розставити по парах A_{x+4}^4 способами, а Снігуроньок — A_x^4 способами. Зауважимо, що порядок пар не враховується. Для кожної четвірки пар є P_4 перестановок їх між собою. Отже, маємо $\frac{A_{x+4}^4 \cdot A_x^4}{P_4} = \frac{10!}{48}$, або $\frac{(x+4)!}{x!} \cdot \frac{x!}{(x-4)!} = \frac{10! \cdot 24}{48}$, тобто $(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{10!}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$. І знову, із розгляду строго зростаючої при $x \geq 4$ функції $f(x) = (x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)$, дістанемо, що єдиним коренем цього рівняння буде $x = 6$. Отже, у фірмі працюють 6 Снігуроньок і 10 Дідів Морозів.

Задача 6. У класі вчаться 18 учнів. Відомо, що скласти групу чергових з двох хлопчиків і двох дівчат можна 1260 способами. Скільки у класі хлопців і скільки дівчат?

Розв'язання. Нехай у класі x хлопців (зрозуміло, що $2 \leq x \leq 16$, $x \in \mathbb{N}$), тоді дівчат $18 - x$. Складемо, за умовою задачі, рівняння $C_x^2 \cdot C_{18-x}^2 = 1260$, $\frac{x!}{2!(x-2)!} \cdot \frac{(18-x)!}{2!(16-x)!} = 1260$, $x(x-1)(18-x)(17-x) =$

$= 5040$. Позначимо $x = t + 9$ (зрозуміло, що $-7 \leq t \leq 7$, $t \in \mathbb{Z}$). Маємо $(t+9)(t+8)(9-t)(8-t) = 5040$. Тоді $(81-t^2)(64-t^2) = 5040$, $t^4 - 145t^2 + 144 = 0$. Розв'язуючи останнє рівняння як біквадратне, отримаємо, що $t \in \{-12, -1, 1, 12\}$. Враховуючи обмеження на t , дістанемо, що $t = 1$, тоді $x = 10$, або $t = -1$, тоді $x = 8$. Отже, в класі 10 хлопчиків і 8 дівчат або 8 хлопчиків і 10 дівчат.

Задача 7. Від шахового гуртка треба послати дві команди по 3 чоловіки на різні змагання. Відомо, що це можна зробити 560 способами. Скільки учнів займаються у цьому гуртку?

Розв'язання. Нехай у цьому гуртку займаються n учнів. Тоді першу команду можна сформувати C_n^3 способами, а другу — C_{n-3}^3 способами. Тоді з умови випливає, що $C_n^3 \cdot C_{n-3}^3 = 560$, звідки $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 6 \cdot 6 \cdot 560 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. За умовою, $n \geq 6$. Отже (розв'язання аналогічне до розв'язання попередніх задач), $n = 8$. Тому в гуртку займаються 8 учнів.

Задача 8. У вазі 12 білих і рожевих гвоздик, що пронумеровані. Відомо, що букет з двох білих і однієї рожевої гвоздики можна скласти 105 способами. Скільки у вазі гвоздик кожного кольору?

Розв'язання. Нехай у вазі n білих гвоздик, тоді рожевих — $12 - n$. Зрозуміло, що $2 \leq n \leq 11$ (*). Даний букет можна скласти $C_n^2 \cdot C_{12-n}^1$ способами. Тоді $C_n^2 \cdot C_{12-n}^1 = 105$, звідки маємо $\frac{n(n-1)}{2} \cdot (12-n) = 105$,

$n^3 - 13n^2 + 12n + 210 = 0$. Оскільки $n \in \mathbb{N}$, то корінь одержаного рівняння потрібно шукати серед тих дільників числа 210, які задовольняють умову (*), тобто серед чисел 2, 3, 5, 6, 7, 10. Єдиним із них, що задовольняє рівняння, буде 7. Отже, $n = 7$ — єдиний розв'язок задачі. Тому у вазі було 7 білих і 5 рожевих гвоздик.

Задача 9. В ящику лежать декілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульки разом можна 120 способами, а дві білі і дві чорні разом — 2970 способами. Скільки в ящику білих кульок і скільки чорних?

Зміст

Від автора	3
Статті, що увійшли у книгу	4
Тригонометричні підстановки.....	5
1. Підстановка $x = a \sin t$ (або $x = a \cos t$)	5
2. Підстановка $x = a \operatorname{tg} t$ (або $x = a \operatorname{ctg} t$).....	8
3. Підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ (або $x = \frac{a}{\cos t}$)	10
4. Задачі з кількома змінними	12
Олімпіадні «ігри» з остачею від ділення.....	16
Багатозначні геометричні задачі.....	23
1. Основні властивості геометричних фігур	23
2. Суміжні та вертикальні кути.....	23
3. Ознаки рівності трикутників	24
4. Сума кутів трикутника	24
5. Геометричні побудови.....	24
Обернені тригонометричні функції:	
самостійне плавання на вступному іспиті.....	30
1. Основні властивості обернених тригонометричних функцій.....	30
2. Обчислення значень виразів, що містять обернені тригонометричні функції.....	32
3. Рівняння	34
4. Нерівності	36
Вправи для самостійного виконання	38
Відповіді	39
Задачі-близнюки	40

Формули переходу між кутами правильної піраміди	43
Вправи	53
Відповіді	55
Текстові задачі на рух: кількість невідомих більша від кількості рівнянь.....	56
Вправи	65
Відповіді	66
Математичний футбол (сценарій гри)	67
Правила гри	67
Запитання для гри	68
1-й тайм	68
2-й тайм	70
Пенальті	72
Розв'язування рівнянь, що містять комбінаторні вирази.....	73
Вправи	80
Відповіді	80
Розв'язування комбінаторних задач з допомогою рівнянь.....	81
Вправи	85
Відповіді	85



Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИЧНІ ПЕРЛИНИ

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.08.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 5,12. Умовн. фарбо-відб. 5,12.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців

ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48

E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com

www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2986-5



9 789661 029865