В.О. Тадеєв

# ГЕОМЕТРІЯ

## Вимірювання многокутників

## 8 КЛАС

**Дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів**

**Підручник для учнів, які прагнуть знати більше, та вчителів, які хочуть вчити краще**

*За редакцією проф. В.І. Михайловського*

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

**ББК 22.1я72**
**74.262.21**
**Т53**

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
*О.Г. Кукуш*

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка
*В.Р. Кравчук*

**Тадеєв В.О.**
Т53 Геометрія. Вимірювання многокутників: Дворівневий підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайловського. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. — 368 с.

**ISBN 978-966-408-357-4**

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

**ББК 22.1я72**

*Охороняється законом про авторське право.*
*Жодна частина даного видання не може бути використана чи відтворена в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

© Тадеєв В.О., 2008
© Навчальна книга – Богдан, макет, художнє оформлення, 2008

**ISBN 978-966-408-357-4**

# Розділ II | Подібність трикутників

## §9 Подібні трикутники

*— От я й кажу, — сказав Шалам-Балам, — усі на один взір: двоє очей... посередині ніс, а під ним — рот. У всіх — одне й те саме.*

*Льюїс Керролл, «Аліса в Задзеркаллі»*

Окрім рівності, геометричні форми часто характеризують поняттям подібності. Основним мотивом для цього є те, що подібні форми дуже поширені в природі. Майже всі живі істоти, рослини, мінерали у різні періоди свого існування (росту, розквіту, старіння) зберігають основні риси своєї форми, які й забезпечують можливість вирізняти їх серед інших видів і між собою. Помітивши це, людина й сама здавна створює подібні форми. Їх ми бачимо серед посуду, знарядь праці, одягу, житлових споруд, храмів, машин тощо. На підставі цього, зокрема, ведуть мову про різні стилі в одязі, в архітектурі, образотворчому та ужитковому мистецтві, дизайні. Інколи вдаються навіть до символічного втілення грандіозних подібних форм. Яскравими прикладами можуть бути Капітолії у Вашингтоні й Гавані, споруди головного корпусу Московського університету і культурно-мистецького центру у Варшаві, Сенатська площа в Санкт-Петербурзі й центральна площа у Полтаві. Абсолютно подібними за формою є іграшкові моделі технічних засобів (автомобілів, літаків, кораблів, локомотивів тощо) та їхні реальні прообрази. Такі ж самі моделі

*— Гарно, — погодився удав, — проте незрозуміло. А при чому тут математика?*

*Григорій Остер, «38 папуг»*

створюються для архітектурних споруд і навіть для цілих житлових масивів

Як же формалізувати інтуїтивні уявлення про подібні форми у точному геометричному означенні? Перше, що спадає на думку, це — покласти в основу означення пропорційність розмірів подібних фігур. Проте вже перший прискіпливіший аналіз показує, що цього недостатньо. Наприклад, сторони одного паралелограма можуть бути рівно удвічі меншими від сторін іншого, а самі ці фігури — дуже далекими від того, аби їх можна було назвати подібними (рис. 9.1). Отже, потрібна ще принаймні рівність відповідних кутових розмірів (рис. 9.2).

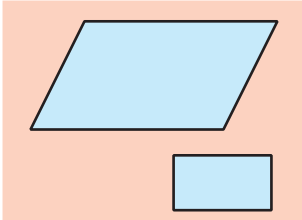

**Рис. 9.1**

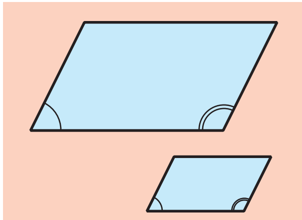

**Рис. 9.2**

З іншого боку, однієї лише рівності відповідних кутів (без пропорційності сторін) теж недостатньо. Наприклад, пересуваючи паралельно самій собі сторону $BC$ паралелограма $ABCD$ (рис. 9.3), ми одержуватимемо фігури з відповідно рівними кутами, але вони зовсім не створюють враження про подібні фігури. Ще наочніше це можна спостерігати на прикладі трапецій (рис. 9.4).

Отже, інтуїція підказує, що для подібних фігур повинні одночасно виконуватися обидві зазначені умови, тобто і пропорційність відповідних лінійних розмірів, і рівність відповідних кутів.

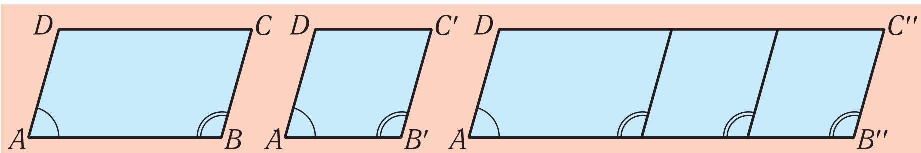


**Рис. 9.3**

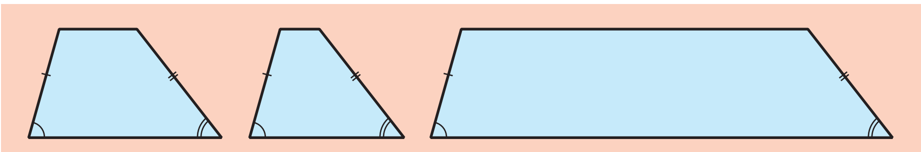

**Рис. 9.4**

Але чи можливо насправді без логічного протиріччя поєднати ці вимоги? — Звісно, спочатку цю ідею слід випробувати на найпростіших фігурах, які мають і лінійні, і кутові розміри, тобто на трикутниках.

На початку цього розділу уводиться поняття подібності трикутників та з'ясовується його математична коректність. Потім вивчаються відповідні ознаки подібності, а насамкінець розглядаються конкретні приклади застосувань подібних трикутників, зокрема, виводяться дуже важливі для подальшого співвідношення у прямокутному трикутнику.

## 9.1. Означення подібних трикутників

Коротко означення подібних трикутників формулюють так.

**Означення**
*(подібних трикутників).*

**Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні, а сторони, які лежать проти рівних кутів (такі сторони називають відповідними), пропорційні.**

Для результативного використання цього означення потрібно уточнити поняття пропорційності. У попередніх класах це поняття застосовувалося для чисел. Нагадаємо, що дві пари чисел $a$, $b$ і $c$, $d$ називаються *пропорційними*, якщо вони утворюють пропорцію:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

тобто, якщо їхні відношення $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$ рівні між собою.

Тепер це означення поширимо на відрізки. А саме, *дві пари відрізків називатимемо пропорційними, якщо пропорційними є числа, якими виражаються довжини цих відрізків*.

*Подібність двох істот одного виду, але різних розмірів, має ту ж саму природу, що й подібність двох геометричних фігур. В одному й іншому випадку будь-які дві частини одного перебувають у тому ж відношенні одна до одної, що й відповідні частини іншого. Якщо у кожному даному виді знайдені пропорції, які існують між кістками, то ми можемо передбачити, як і передбачають зоологи, за якою-небудь однією кісткою розміри решти, точнісінько так само, як, знаючи пропорції, які існують між частинами якої-небудь фігури, ми можемо за довжиною однієї частини обчислити довжини інших.*

*Герберт Спенсер*

Враховуючи це, означення подібності трикутників можна перефразувати так. Трикутники $ABC$ і $A_1B_1C_1$ називаються *подібними*, якщо у них

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,$$

а також

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

На рис. 9.5 зображено приклад двох подібних трикутників $ABC$ та $A_1B_1C_1$.

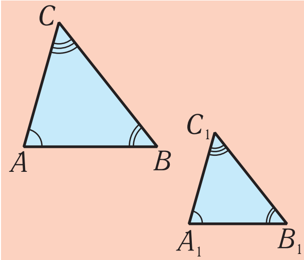

Рис. 9.5

Подібність трикутників позначають за допомогою спеціального значка $\backsim$, записуючи, наприклад, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Існує також домовленість про те, що при такому записі кут $A$ дорівнює куту $A_1$, кут $B$ — куту $B_1$, а кут $C$ — куту $C_1$. Отже, якщо буде записано, що $\Delta ABC \backsim \Delta B_1C_1A_1$, то це свідчитиме вже зовсім про інші рівності кутів (а також і про пропорційність інших сторін), а саме, що $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle C_1$, $\angle C = \angle A_1$, і при цьому $\dfrac{AB}{B_1C_1} = \dfrac{BC}{C_1A_1} = \dfrac{AC}{B_1A_1}$.

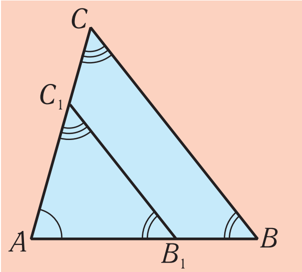

Рис. 9.6

Як завжди у геометрії, означивши нове відношення між фігурами, потрібно пересвідчитися у тому, що фігури у цьому відношенні можуть перебувати. Це називається перевіркою означення на математичну коректність.

Отже, доведемо, що подібні (але не рівні) трикутники справді існують.

Візьмемо для цього будь-який трикутник $ABC$, і через довільну точку $C_1$ його сторони $AC$ проведемо пряму $C_1B_1$, паралельну стороні $CB$ (рис. 9.6). Одержаний у такий спосіб новий трикутник $A_1B_1C_1$ буде подібний трикутнику $ABC$.

Справді, кут $A$ у цих трикутників спільний, а внаслідок паралельності прямих $B_1C_1$ і $BC$ $\angle B_1 = \angle B$ (як відповідні кути при січній $AB$) і $\angle C_1 = \angle C$ (як відповідні кути при січній $AC$). Отже, дані трикутники мають відповідно рівні кути.

Далі, за узагальненою теоремою Фалеса, $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$. Отже, для завершення доведення коректності означення потрібно показати, що яке-небудь із відношень $\dfrac{AB}{AB_1}$ чи $\dfrac{AC}{AC_1}$ дорівнює відношенню $\dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Проведемо $C_1D \parallel AB$ (рис. 9.7). Тоді за тією самою узагальненою теоремою Фалеса, але тепер уже застосованою до кута $C$, $\dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{BC}{BD}$. Залишається зауважити, що чотирикутник $B_1BDC_1$ — паралелограм, і тому $BD = B_1C_1$. Отже, $\dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, що й треба було довести.

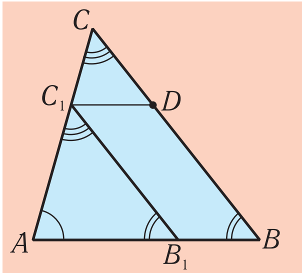

**Рис. 9.7**

У процесі проведеного обґрунтування фактично доведено дуже важливе для подальшого твердження. Зважаючи на це його значення, ми виділимо його окремо і назвемо *базовою* теоремою про подібні трикутники.

*Найважче для людини пізнати найбільш загальне, оскільки воно найдалі від чуттєвого сприйняття.*
*Аристотель, «Метафізика»*

**Теорема**
*(базова про подібні трикутники).*

***Якщо трикутник перетнути прямою, паралельною якій-небудь його стороні, то новий трикутник, який відріже ця пряма від даного трикутника, буде подібним даному трикутнику.***

На рис. 9.6 пряма $B_1C_1$ паралельна стороні $BC$ трикутника $ABC$. Згідно з доведеним, вона відтинає від цього трикутника новий трикутник $AB_1C_1$, подібний даному трикутнику $ABC$.

Спільну величину $k$ відношень $\dfrac{A_1B_1}{AB}$, $\dfrac{B_1C_1}{BC}$, $\dfrac{A_1C_1}{AC}$ відповідних сторін подібних трикутників $ABC$ і $A_1B_1C_1$ називають *коефіцієнтом подібності* цих трикутників.

Очевидно, що коли трикутник $ABC$ подібний до трикутника $A_1B_1C_1$ і коефіцієнтом подібності є число $k$, то й трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника $ABC$, а коефіцієнтом подібності є число $\frac{1}{k}$.

Окремим випадком подібності трикутників є їхня рівність. Коефіцієнтом подібності у цьому випадку є число $k = 1$.

## 9.2. Застосування для влаштування поперечного масштабу

На основі базової теореми про подібні трикутники дуже просто розв'язується така важлива для практики задача: задано відрізок $AB$; побудувати відрізки, які дорівнюють $\frac{n}{10}AB$ для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$.

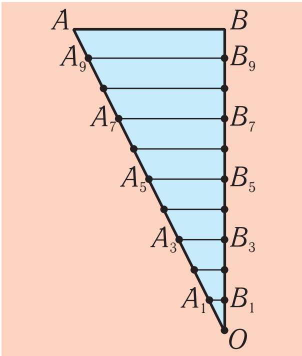

Рис. 9.8

Найпростіше задачу розв'язати так. Проведемо з точки $B$ довільний промінь і відкладемо на ньому послідовно десять рівних відрізків $BB_9$, $B_9B_8$, $B_8B_7$, ..., $B_3B_2$, $B_2B_1$, $B_1O$ якої-небудь довжини (рис. 9.8). Потім з'єднаємо прямою точку $O$ з точкою $A$, а через кінці $B_9$, $B_8$, ..., $B_1$ відкладених відрізків проведемо відрізки, $B_9A_9$, $B_8A_8$, ..., $B_1A_1$, паралельні відрізку $AB$, — до перетину з прямою $AO$. Ці відрізки і будуть шуканими. А саме, відрізок $A_1B_1$ матиме довжину $\frac{1}{10}AB$, відрізок $A_2B_2$ — довжину $\frac{2}{10}AB$, і т. д., а відрізок $A_9B_9$ — довжину $\frac{9}{10}AB$.

Справді, оскільки, усі трикутники $OA_nB_n$ подібні до трикутника $OAB$, то $\frac{AB}{OB} = \frac{A_nB_n}{OB_n}$. Звідси $A_nB_n =$

$$= \frac{OB_n}{OB} \cdot AB = \frac{n}{10} \cdot AB.$$

Описані побудови є ключовими при влаштуванні так званих поперечних масштабів, що застосовуються при складанні планів і карт місцевості та при користуванні ними.

Узагалі, масштабом називають відношення відстаней між будь-якими двома точками на плані чи карті до відстані між відповідними їм точками на місцевості. Якщо, наприклад, відстань між точками $A$, $B$ на карті дорівнює 1 см, а на місцевості їм відповідають пункти $A'$ і $B'$, віддалені один від одного на відстань 10 км, то масштаб цієї карти дорівнює відношенню $AB : A'B'$, тобто $1 : 100\,000$ (нагадаємо, що $1\text{ км} = 1\,000\text{ м} = 100\,000\text{ см}$).

Інколи масштаб в означеному сенсі називають *числовим* масштабом.

Окрім числового масштабу, на картах і планах часто наносять і так званий *лінійний* масштаб.

*Лінійний масштаб* — це відрізок з нанесеними на ньому поділками і вказівками «ціни» кожної такої поділки. Фактично це своєрідна вимірна лінійна (звідси і назва «лінійний масштаб»), тільки нанесені на ній поділки вказують не фактичну відстань між поділками, наприклад, у сантиметрах, а ті відстані, які цим поділкам відповідають у реальності. Крім цього, у лінійному масштабі проміжки між сусідніми поділками зазвичай не ділять на дрібніші частини, а замість цього зліва від початку відліку розміщують один додатковий одиничний відрізок, поділений на такі частини (рис. 9.9).

Користуються лінійним масштабом так. Якщо потрібно визначити реальну відстань між двома пунктами, позначеними на карті як $A$ і $B$, то спочатку одну ніжку вимірювального циркуля ставлять у точку $A$, а іншу — у точку $B$. Потім фіксують цей розхил циркуля і став-

*Математика — є кращий і навіть єдино можливий вступ до вивчення природи. Без геометрії й алгебри неможливе вивчення механіки; без геометрії, алгебри й механіки неможливе вивчення астрономії; без геометрії, алгебри, механіки й астрономії неможливе вивчення фізики й фізичної географії; без фізики не можна взятися за хімію; без фізики й хімії нема змоги приступити до фізіології тварин і рослин.*

*Дмитро Писарєв*

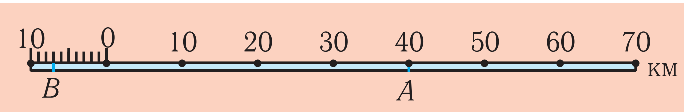


**Рис. 9.9**

лять його ніжки на лінійний масштаб так, аби одна з них розмістилася справа від 0 на якій-небудь великій поділці, а інша — зліва від 0 на дрібній поділці, або в самій точці 0. Тоді велика поділка вкаже кругле число кілометрів, а мала — відповідну частину одного такого круглого числа.

Наприклад, якщо ніжки циркуля відзначать на лінійному масштабі точки $A$ і $B$, як показано на рис. 9.9, то шукана відстань $AB$ дорівнюватиме $40 + 7 = = 47$(км).

Недоліком лінійного масштабу є порівняно невисока точність проведення вимірювань, оскільки він дає змогу визначати лише цілу кількість нанесених на малій шкалі дрібних одиниць вимірювання. Наприклад, масштаб, зображений на рис. 9.10, дає змогу визначити відстань лише з точністю до 1 км. Якщо ж потрібні точніші вимірювання, то застосовують *поперечний* масштаб.

Сама назва цього масштабу доволі умовна. Вона вказує на те, що цей масштаб розміщується не вздовж однієї лінії, як лінійний масштаб, а ще й «упоперек» неї. Практично це є декілька лінійних масштабів, скомпонованих спеціальним чином.

Будують поперечний масштаб так. На лінійному масштабі $KL$, як на основі, будується який-небудь прямокутник $KLMN$ (рис. 9.10). Бічні сторони $KN$ і $LM$ цього прямокутника діляться на десять рівних частин і через точки поділу проводяться відрізки, паралельні основі $KL$. Потім будується лінійний масштаб на стороні $NM$, ідентичний з тим, що є на стороні $KL$,

*Більшість так званих культурних людей, не пов'язаних з математикою своїми заняттями, вважає цілком припустимим не мати про цю науку жодного уявлення. Математика для них — щось у вищій мірі нудне, сухе й абстрактне... У найбільш обтяжливих випадках вважається, що це майже те саме, що заняття бухгалтерією. І вже звичайно навряд чи хто-небудь із нематематиків здатен ужитися з думкою, що цифри... можуть мати яке-небудь відношення до таких понять, як краса, сила, натхнення.*

*Норберт Вінер*

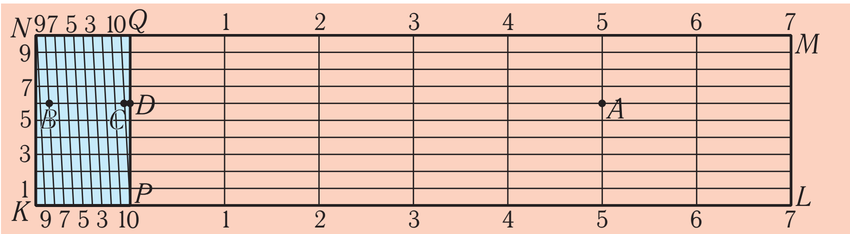


Рис. 9.10

тільки позначки 0, 1, 2, ... , 9 для дрібніших одиниць вимірювання зсувають на одиницю вліво. Нарешті, точки відрізків $NM$ та $KL$ з однаковими числовими позначками сполучають відрізками. Поперечний масштаб готовий.

Застосування цього масштабу ґрунтується на тому, що відрізки паралельних прямих, розміщених між іншими паралельними, справа і зліва від прямої $PQ$, відповідно рівні між собою, а також на тому, що відрізки, розміщені всередині трикутника з вершиною $P$ та основою $Q0$ дорівнюють $\frac{n}{10}$ ($n = 1, 2, 3, ... 9$) від довжини основи $Q0$ (порівняйте з рис. 9.8).

Користуються поперечним масштабом так. Зафіксований розхил циркуля, що визначає відстань між пунктами $A$ і $B$ на карті, переносять на масштаб так, щоб обидві ніжки розмістилися на одній горизонталі, причому права ніжка на певній вертикалі праворуч від прямої $PQ$, а ліва — строго на косій лінії ліворуч від $PQ$. Тоді шукана довжина відрізка $AB$ визначиться сумою довжин відрізків $AD$, $BC$ і $CD$. У випадку, зображеному на рис. 9.10, це становить $5 + 0{,}8 + 0{,}06 = 5{,}86$ від прийнятої масштабної одиниці.

Для визначення реальної відстані між пунктами, позначеними на карті як $A$ і $B$, залишається цю величину помножити на «ціну» масштабної одиниці. Наприклад, якщо ця ціна становить 10 км, то шукана реальна відстань дорівнює $5{,}86 \cdot 10 = 58,6$ км.

Зрозуміло, що поперечний (а також і лінійний) масштаби дають змогу розв'язувати й обернену задачу, тобто за даними реальними відстанями між відповідними пунктами визначати відповідні їм відстані для позначення пунктів на карті. Щоправда, для цього необхідно залучити ще й кутові вимірювання.

Поперечний масштаб часто зображають на звичайних шкільних транспортирах (рис. 9.11), і ви, мабуть,

*Ґете вдало назвав шляхетний собор «закам'янілою музикою», проте, можливо, ще краще було б назвати такий собор «закам'янілою математикою»... Коли цей предмет вивчають належним чином і притому конкретно, то засвоєння математики супроводжується емоціями й насолоджуванням красою, а не відразою...*

*Джон Уеслі Юнг*

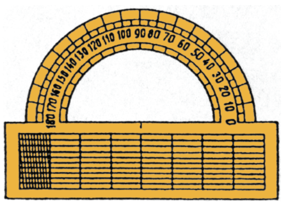


**Рис. 9.11**