Натисніть тут, щоб

купити книгу на сайті

або замовляйте за телефоном:

(0352) 51-97-97, (067) 350-18-70,
(066) 727-17-62

МАТЕМАТИКА

Довідник
для учнів 9–11 класів
та абітурієнтів

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

І. ЧИСЛА

§1. ДІЙСНІ ЧИСЛА ($\mathbb{N}$)

Числа 1, 2, 3, 4 ..., які використовуються для лічби предметів або для того, щоб вказати порядковий номер того чи іншого предмета серед однорідних предметів, називаються **натуральними**.

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

Закони арифметичних дій

1. $a + b = b + a$ (переставна властивість додавання).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сполучна властивість додавання).
3. $ab = ba$ (переставна властивість множення).
4. $(ab)c = a(bc)$ (сполучна властивість множення).
5. $a(b + c) = ab + ac$ (розподільна властивість множення відносно додавання).

Ознаки подільності натуральних чисел

1. Якщо кожний доданок ділиться на деяке число, то і сума ділиться на це число.
2. Якщо хоч один із множників ділиться на деяке число, то і добуток ділиться на це число.
3. Натуральне число ділиться на 2 тоді і лише тоді, коли його остання цифра ділиться на 2;

натуральне число ділиться на 3 тоді і лише тоді, коли сума його цифр ділиться на 3;

натуральне число ділиться на 4, якщо дві його останні цифри — нулі або утворюють число, яке ділиться на 4;

натуральне число ділиться на 5, якщо воно закінчується на 0 або на 5;

натуральне число ділиться на 8, якщо його три останні цифри — нулі або утворюють число, яке ділиться на 8;

натуральне число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9;

натуральне число ділиться на 10, якщо воно закінчується на 0;

натуральне число ділиться на 11, якщо сума його цифр, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі цифр, що стоять на непарних місцях, або відрізняється від неї на число, яке ділиться на 11;

натуральне число ділиться на 25, якщо дві його останні цифри — нулі, або утворюють число, яке ділиться на 25.

НСК та НСД кількох натуральних чисел

Просте число має лише два дільники — одиницю і саме число.

Якщо число має більше, ніж два дільники, то воно називається *складеним*.

Найбільший спільний дільник (НСД) — найбільше з чисел, на які діляться всі задані числа.

Коли НСД(a, b) = 1, то числа a і b — взаємно прості.

Похідна складеної функції

$$\left(u\left(v\left(x\right)\right)\right)' = u'\left(v\left(x\right)\right)\cdot v'\left(x\right);$$

$$\left(u^n\right)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u';$$

$$\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'; \quad \left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u';$$

$$\left(\mathrm{tg}u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'; \quad \left(\mathrm{ctg}u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u';$$

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u'; \quad \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}\cdot u';$$

$$\left(a^u\right)' = a^u\ln a\cdot u'; \quad \left(e^u\right)' = e^u\cdot u'.$$

Похідна оберненої функції

f(x) і g(x) — взаємнообернені функції.

Якщо існує $f'\left(x_0\right)$ і $g'\left(x_0\right)$, то $g'\left(x_0\right) = \dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}$.

Похідні вищих порядків

$$\left(u+v\right)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)};$$

$$\left(uv\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

XI. ІНТЕГРАЛ

Невизначений інтеграл

Функція F(x) — первісна функції f(x) на проміжку X, якщо для всіх x з цього проміжку:

$$F'(x) = f(x);$$

$$F(x) + c = \int f(x)dx$$, де c = const.

Інтеграли деяких функцій

$$\int k dx = kx + c; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad \int e^x dx = e^x + c;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c; \quad \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c; \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + c; \quad \int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c.$$

Основні правила інтегрування

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;

$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

$\int df(x) = f(x) + c$;

$\int udv = uv - \int vdu$ — інтегрування частинами.

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(z)dz$ — заміна змінної, $z = g(x)$.

Визначений інтеграл

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(b_i)\Delta x_i ,$$

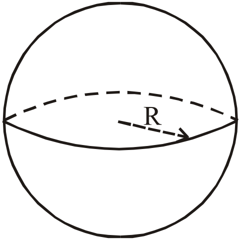
де $b_i \in [x_i; x_{i+1}]$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Властивості:

$\int_a^b dx = b - a$; $\int_a^a f(x)dx = 0$;

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

VII. КУЛЯ, СФЕРА



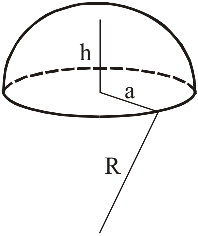
Позначення:

R — радіус кулі;
d — діаметр кулі;
V — об'єм кулі;
S — площа сфери.

$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2;$$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}$; $r = \frac{3V}{S}$, де r — радіус кулі, вписаної в многогранник, об'єм якого V, а площа повної поверхні S.

Частини кулі



Позначення:

R — радіус кулі;
h — висота сегмента;
S — площа сферичної поверхні сегмента;
a — радіус основи сегмента;
V — об'єм сегмента.

а) кульовий сегмент

$$a^2 = h(2R - h);$$

$$S = 2\pi Rh = \pi\left(a^2 + h^2\right);$$

$$S_{\text{повн.}} = \pi\left(2Rh + a^2\right) = \pi\left(2a^2 + h^2\right);$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

б) кульовий сектор

$$S_{\text{повн.}} = \pi R\left(2h + \sqrt{2Rh - h^2}\right);\ \ V = \frac{2}{3}\pi hR^2.$$

в) кульовий шар

$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)h$, де r_1 і r_2 — радіуси кульового шару, h — його висота.

г) кульовий пояс

$S = 2\pi RH$, де H — висота кульового поясу, R — радіус дуги, від обертання якої утворено кульовий пояс.