Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатись перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп’ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку він проводився для учнів Донецької області, згодом вийшов за її межі, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України, і врешті «Золотий ключик» офіційно набув статусу Всеукраїнського у відповідності з наказом міністра освіти та науки України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може безкоштовно взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

На очний тур запрошують усіх учнів, які виявили в заочному турі кмітливість, винахідливість, працьовитість і, звичайно, знання математики. Призерів очного туру нагороджують дипломами і подарунками в день проведення конкурсу, а також їм надають пільги у навчанні в ВМК. В останні роки, поряд з основним очним туром, проходять регіональні очні тури на базі шкіл, учні яких брали активну участь у конкурсі.

Завдання як заочного, так і очного турів складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки. А щодо нагород, дипломів, заохочень, то в цьому конкурсі вони теж є.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. Значна частина завдань пов'язана з практичними ситуаціями.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість задач не є оригінальними, основні ідеї, покладені в їх основу, запозичені з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптовані для конкурсу.

Для багатьох учнів з участі в конкурсі розпочинається навчання математики в Східноукраїнській заочній математичній школі (СУЗМШ) — заочному відділенні ВМК. Програма навчання у СУЗМШ і ВМК для 6–9 класів містить теми, спрямовані не лише на підвищення математичної підготовки учнів, але і на їхній розвиток.

Велику допомогу в проведенні конкурсу надають вчителі шкіл. Завдяки їм учні отримують інформацію про конкурс, завдання заочного туру, і навіть доставку робіт часто забезпечують саме вчителі. Деякі вчителі на базі матеріалів конкурсу організовують позакласну роботу, яка сприяє підготовці до конкурсу. Звичайно, головний тягар в організації конкурсу лягає на плечі викладачів, співробітників математичного факультету Донецького національного університету, Центру математичної і комп'ютерної освіти МІОТ, студентів математичного факультету. Завдяки їм конкурс процвітає і виконує неабияку роль у формуванні в учнів цікавості до математики.

Матеріали конкурсу регулярно публікуються. У 2005 році оргкомітет Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру» видав посібник з матеріалами «Золотого ключика» за попередні роки як приз для переможців конкурсу «Кенгуру».

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2007 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки вміщено в посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005 і 2006 роки надруковано у першому і другому випусках серії «Готуємось до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для учителів.

порівнюємо вагу пар (1; 5) і (2; 6), потім (1; 6) і (2; 5). Трьох зважувань не вистачить. ■

Відповідь: Б. 4.

4. Якщо співвідношення $a^4 = b^4 + c^4$ справджується, то a — найбільша із сторін трикутника і протилежний до неї кут α є найбільшим у трикутнику. З теореми косинусів у випадку $\alpha \geq 90°$ маємо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \geq b^2 + c^2$, $a^4 \geq b^4 + c^4 + 2b^2c^2 > b^4 + c^4$, з чого виходить, що даний трикутник не може бути ані тупокутним, ані прямокутним. Неважко переконатись, що трикутник, який задовольняє умову задачі, існує. Наприклад, при $a = 1$, $b = c = \sqrt[4]{0,5}$. ■

Відповідь: А. Гострокутний.

5. Припустимо, що трикутник з такими кутами існує. Згідно з теоремою синусів, $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, $\sin\delta = \frac{c}{2R}$, де R — радіус описаного кола, a, b, c — сторони трикутника. Тоді $a + b = c$, що суперечить нерівності трикутника. ■

Відповідь: Г. Не існує.

6. Щоб програти вибори, потрібно перемогти менш ніж в половині округів, а щоб програти в окрузі, треба набрати менш ніж 50 % голосів. Тому максимальна кількість голосів, яку може набрати кандидат, що програв, дорівнює 500 × 10001 + 501 × 5000 = 7505500, тобто близько 75 %. ■

Відповідь: Г. Більше від 70 %.

7. Оскільки $f(0) > g(0)$, то $c_1 > c_2$. Оскільки вітки парабол спрямовані вгору, то $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. А оскільки $f(x)$ зростає при великих значеннях x швидше від $g(x)$, то $a_1 > a_2 > 0$. З рисунка також видно, що функція $h(x) = f(x) - g(x) = (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)$ має два додатні корені x_1 і x_2. За формулою Вієта, $-(x_1 + x_2) = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$, звідки випливає, що $b_1 < b_2$. А оскільки абсциси вершин парабол додатні, то $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, тобто всі співвідношення, наведені у відповіді В, справджуються. Відповіді А, Б і Г неправильні, бо суперечать В. ■

Відповідь: В. $c_1 > c_2$, $b_1 < b_2$, $|b_1| > |b_2|$, $a_1 > a_2$.

8. Будь-яке число, що задовольняє умови завдання 1) і 2), кратне 3 і 5, отже, кратне і 15. Тому всі шукані числа містяться серед чисел 15, 30, 45, 60, 75, 90. Щоб правильних тверджень було не більше трьох, двоцифрове число не повинно ділитися ані на 9, ані на 25, ані на 45. Залишаються три числа: 15, 30, 60. ■

Відповідь: Г. 3.

9. Нехай в короля потрапили x яєць, y качанів і 64 кішки. Тоді герцогові дісталися $4x$ яєць, $6y$ качанів. За умовою, в кожного з них потрапила однакова кількість предметів, тому $x + y + 64 = 4x + 6y$ або $3x + 5y = 64$. З умови завдання виходить, що загальна кількість яєць ділиться на 3, а загальна кількість качанів кратна 2. Тому $5x$ кратне 3 і $7y$ кратне 2, тобто x кратне 3 і y кратне 2. Тоді $x = 3k$ і $y = 2n$, де k і n — натуральні числа. Повертаючись до рівняння, отримаємо $9k + 10n = 64$. Перебором знаходимо єдиний розв'язок: $k = 6$, $n = 1$. Відтак, глядачі принесли 90 яєць, 14 качанів капусти і 64 кішки. Тому кількість глядачів дорівнює $64 + (90 : 3) + (14 : 2) = 101$. ■

Відповідь: Г. 101.

10. $a^2 + b^2 = (k+l)^2 + (1-kl)^2 = k^2 + l^2 + 1 + k^2l^2 = (k^2+1)(l^2+1)$, де k і l — корені рівняння. ■

Відповідь: Г. Складене.

11. Перший ставить $a = 1$ і в кінці ставить коефіцієнт, якого не вистачає так, щоб сума коефіцієнтів дорівнювала нулю. ■

12. Дана нерівність є очевидним наслідком нерівності $x(a - x) \le a^2/4$ при $0 \le x \le a$. ■

13. Нехай сума всіх 2006-ти векторів дорівнює вектору $\vec{a}$. Введемо на площині декартову систему координат так, щоб вісь абсцис була співнапрямлена (направлена однаково) з вектором $\vec{a}$ (якщо $\vec{a} = 0$, то вісь абсцис вибираємо довільно). Той, хто починає гру, кожним своїм ходом може вибирати з векторів, що залишилися на даний момент, той вектор, який має найбільшу абсцису. Тоді наприкінці гри в нього сума векторів матиме не меншу абсцису, ніж у другого гравця, причому і за модулем у нього абсциса буде не меншою, а ордината — така сама, як у другого гравця (оскільки сума всіх абсцис невід'ємна, а сума всіх ординат дорівнює 0). Отже, той, хто починає гру, при такій стратегії напевно не програє. ■

14. Припустимо, що це можливо. Нехай n і a — такі натуральні числа, що $П = n(n + 1)(n + 2) \ldots (n + 2006) = a^{2007}$. Відзначимо, що $n^{2007} < П < (n + 2006)^{2007}$. Це означає, що число a таке, що $n < a < n + 2006$. Отже, a є одним з чисел $(n + 1)$, $(n + 2)$, ..., $(n + 2005)$. Відтак $П = n(n + 1)(n + 2) \ldots (n + 2006)$ ділиться на $(a + 1)$. Але оскільки a і $(a + 1)$ — взаємно прості числа, число a^{2007} не може ділитися на $(a + 1)$.

Отримуємо суперечність, яка показує, що число $П$ не є 2007-м степенем натурального числа. ■

15. Якби така точка існувала, то з неї було б видно кожну сторону під кутом не меншим від 90°, що неможливо, оскільки сума 2007-ми таких кутів має дорівнювати 360°. ■

16. Нехай довжини сторін трикутника дорівнюють a, b, c. Периметр трикутника $P = a + b + c$, площа дорівнює S. Тоді, за формулою Герона, маємо: $16S^2 = P\cdot(P - 2a)\cdot(P - 2b)\cdot(P - 2c)$. Припустимо, що S — ціле число. Тоді P має бути парним числом. Отже, або всі числа a, b, c — парні, або серед них одне число парне і два непарних. У першому випадку, наприклад, $a = b = c = 2$ і $S = \sqrt{3}$ — не є цілим. У другому випадку вважатимемо, що $a = 2$, а b і c — прості непарні числа. Якщо b не дорівнює c, то $|b - c| \geq a$, і нерівність трикутника не справджується. Отже, $b = c$, але тоді $S^2 = b^2 - 1$, що неможливо для натуральних b і S. ■

Зміст