

Натисніть тут, щоб
купити книгу на сайті
або
замовляйте по телефону:
(0352) 28-74-89, 51-11-41
(067) 350-18-70
(066) 727-17-62

В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

Основні фігури

7 КЛАС

Дворівневий підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

Підручник для учнів,
які прагнуть знати більше,
та вчителів, які хотуть вчити краще

За редакцією проф. В.І. Михайловського



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

**ББК 22.1я72
74.262.21
Т53**

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук,

професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка

O.Г. Кукуш

кандидат фізико-математичних наук,

доцент Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка

B.P. Кравчук

Тадеєв В.О.

Т53 Геометрія. Основні фігури: Дворівневий підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайлівського. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. — 352 с.

ISBN 978-966-408-284-3

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

ББК 22.1я72

Охороняється законом про авторське право.

*Жодна частина даного видання не може бути використана чи відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

© Тадеєв В.О., 2007

© Навчальна книга – Богдан,
макет, художнє оформлення, 2007

ISBN 978-966-408-284-3

Розділ I

Вимірювання многокутників (З чого починалася геометрія)

§1 Прямоугольник — одне з первісних джерел геометрії

1.1. Як геометрія зароджувалася

«Батько історії» Геродот, який жив ще у V ст. до н. е., походження геометрії пов'язував з Давнім Єгиптом. У своїй «Історії» він неодноразово згадує ім'я легендарного єгипетського фараона Сесостріса (чи Сезоостріса), повідомляючи, зокрема, про нього таке:

«Кажуть, що цей цар розподілив країну між усіма без винятку єгиптянами. Кожному він дав однакову з іншими прямоугольну ділянку і призначив сплачувати щорічний податок; в такий спосіб він забезпечив собі прибутки. Якщо ріка змиває якусь частину ділянки котрогось господаря, то він може прийти до самого царя і сказати йому, що трапилося. Тоді цар посилає людей, щоб вони довідалися і вирішили, наскільки зменшилася оброблювана ділянка. Відповідно до цього в майбутньому має зменшитися і сплачуваний її господарем податок. А я маю думку, що так було винайдено геометрію і звідти вона прийшла в Елладу».

Звичайно, в цьому повідомленні, як і взагалі у свідченнях давніх літописців, багато символічного. Але сутність явища передана доволі точно. Усе життя дав-

Щоби побудувати цю найвеличнішу будову людського духу, якою є математика, треба було праці не поколінь, а цілих тисячоліть.

Володимир Левицький

ніх єгиптян, які створили одну з найперших і найдивовижніших цивілізацій, було тісно пов'язане з «рікою життя» Нілом. Єгиптяни селилися у порівняно вузькій смузі вздовж цієї величної ріки. Ніл з астрономічною точністю щороку розливався, приносячи на поля шар родючого мулу. Згодом велика вода спадала, і за справу бралися землеміри, щоб відновити усі зміті межі. І робити це потрібно було повсюдно та щороку. Від точності роботи землемірів залежали добробут і суспільна справедливість.

У наведеному свідченні Геродота стверджується, що давні єгиптяни ділили свої угіддя на прямокутні ділянки. Звичайно, на рівнинній території, яку щороку потрібно було перерозподіляти заново, — це найраціональніший спосіб поділу. У тих краях він зберігся й понині. У центрі вміщеної перед початком розділу композиції відтворено типовий єгипетський ландшафт із сільськогосподарськими угіддями, поділеними системою іригаційних каналів на прямокутні ділянки.

1.2. Побудова й ознаки прямокутника

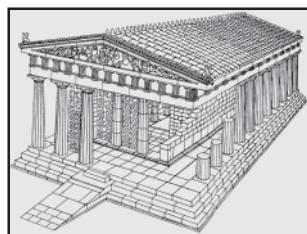
Зі свідчення Геродота, нехай і міфологізованого, можна зробити цілком вірогідний висновок про те, що прямокутник був першою геометричною фігурою, яка привернула до себе увагу дослідників. Є також всі підстави вважати, що геометрія, яка, за словами Геродота, із Єгипту перейшла в Елладу, розпочалася на нових теренах саме з дослідження прямокутника. Доволі переконливим свідченням цього може бути класична грецька архітектура, в якій, як і в давньоєгипетській, домінували прямокутні форми. Зокрема, найважливіші культові споруди складалися із прямокутних елементів.

Незважаючи на, здавалося б, виняткову простоту прямокутника, у цій фігурі втілені фундаментальні геометричні властивості нашого світу. Відкриття цих



Давньоєгипетський архітектор.

В руках у нього засоби та еталони для вимірювання



План Парфенону.

Прямокутні форми були основою античної архітектури

властивостей є ключем до вивчення інших геометричних фігур та їхнього вимірювання.

Нагадаємо, що *прямоокутником* називається чотирикутник, у якому всі чотири кути прямі (звідси і назва — *прямоокутник*), а протилежні сторони попарно рівні.

На рис. 1.1 зображено прямоокутник $ABCD$. У ньому кути A, B, C, D — прямі, сторона AB рівна протилежній стороні DC , а сторона AD — протилежній стороні BC . Довжина однієї зі сторін прямоокутника, зазвичай більшої, називається *довжиною* або *основою* прямоокутника, а довжина суміжної з нею сторони, зазвичай меншої, — *шириною* або *висотою* прямоокутника. На рис. 1.1 AB — довжина прямоокутника $ABCD$, AD — його ширина. Довжина та ширина (основа й висота) прямоокутника називаються його *вимірами*.

Якщо виміри прямоокутника однакові, то він називається *квадратом*. На рис. 1.2 зображено квадрат $ABCD$. Назву «квадрат» утворено від латинського числівника *quadro* — «четири». Цим акцентується увага на тому, що у квадраті рівними є всі чотири кути (вони прямі) і всі чотири сторони.

До важливих властивостей прямоокутника належать його ознаки. Слово «ознака» в геометрії вживається часто. Тому наведемо невеличкий коментар до нього.

У повсякденній мові ознаками називають певні риси, прояви яких дають змогу зі значною вірогідністю судити про приналежність їх певному предмету або притаманність певному явищу (згадайте назву відомого кінофільму Ю. Іллєнка «Білий птах з чорною ознакою»). Близьким за значенням до цього слова є слово «прикмета», яке особливо часто вживається у прогнозах погоди та інших сезонних явищ, а також більш спеціальне слово «симптом» (у медицині). На відміну від цього, *ознаками* в геометрії називають певні достатні умови, виконання яких забезпечує не вірогідне, а аб-



Рис. 1.1

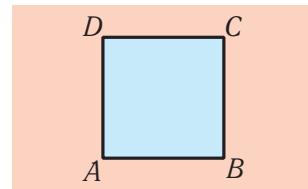


Рис. 1.2

сolutно безсумнівне виконання відповідних властивостей фігур. Тому інколи їх називають ще «критеріями» — від грецького «крітеріон» тобто «засіб для визначення».

За ознаками прямокутника цю фігуру зазвичай будують практики. При цьому як правило застосовуються два способи.

Способ 1. Спочатку будують сторону AB , рівну довжині прямокутника (рис. 1.3). Потім — два прямі кути MAB і NBA з вершинами A і B по один бік від сторони AB . Нарешті, на сторонах AM і BN побудованих кутів відкладають рівні відрізки AD і BC , довжини яких дорівнюють ширині прямокутника, і з'єднують відрізком точки D і C . Тоді чотирикутник $ABCD$ буде прямокутником з потрібними вимірами, тобто у ньому кути D і C теж будуть прямими, а сторона DC — рівною стороні AB .

Способ 2. Спочатку так само, як і в способі 1, будують сторону AB , якою визначається довжина прямокутника, і прямі кути MAB та NBA , що «прилягають» до неї (рис. 1.4). Але потім тільки на стороні MA (чи NB) одного з побудованих кутів відкладають відрізок AD , що дорівнює ширині прямокутника, та будують третій прямий кут ADL з того боку від сторони AD , з якого лежить промінь BN . Тоді промені BN і DL , перетнувшись, визначать четверту вершину C прямокутника $ABCD$, тобто утворений при цьому кут C теж буде прямим, а сторони DC і BC — рівними відповідно сторонам AB і AD .

Якщо в кожному із цих способів сторони AB і AD прямокутника будуть рівними, то побудований прямокутник буде квадратом.

Із зазначених практичних способів для побудови прямокутника маємо такі дві *ознаки* цієї фігури, які й гарантують, що даний або побудований чотирикутник є прямокутником.

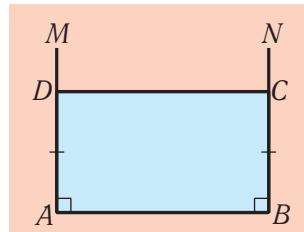


Рис. 1.3

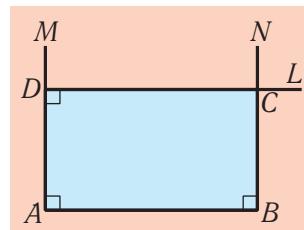


Рис. 1.4



Ознака 1.

Якщо в чотирикутнику $ABCD$ кути A і B — прямі, а протилежні сторони AD і BC рівні між собою і лежать з одного боку від прямої AB (рис. 1.5), то цей чотирикутник — прямоокутник, тобто у ньому кути C і D теж прямі, і рівні також протилежні сторони DC та AB .



Рис. 1.5

Ознака 2.

Якщо в чотирикутнику $ABCD$ три кути A , B і D — прямі (рис. 1.6), то цей чотирикутник — прямоокутник, тобто у ньому четвертий кут C теж прямий, і рівними є протилежні сторони AB і DC та AD і BC .

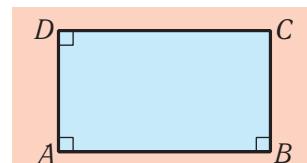


Рис. 1.6

Як бачимо, побудова прямоокутника тим чи іншим способом зводиться до побудови прямих кутів та до відкладання на їхніх сторонах відрізків потрібної довжини.

Відкладання відрізків здійснюється дуже просто — за допомогою вимірної лінійки, циркуля або якої-небудь стрічки, чи навіть мотузки.

Побудову прямих кутів на рисунку найпростіше здійснити за допомогою косинця (рис. 1.7) або кутника (рис. 1.8). Інколи, особливо в креслярській та в столярній справі, використовується ще й лінійка. Тоді до заданого відрізка AB прикладається край лінійки, а вже до лінійки — одна зі сторін прямого кута косинця чи кутника (рис. 1.9).

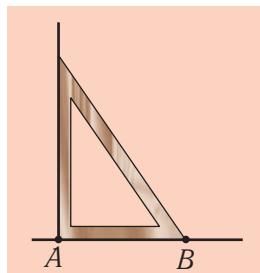


Рис. 1.7

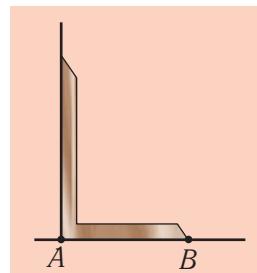


Рис. 1.8

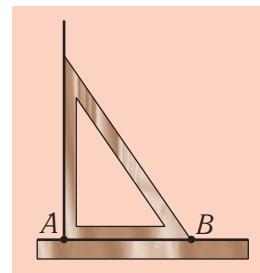


Рис. 1.9

На рівній місцевості прямі кути можна розбити за допомогою дуже простого приладу, який називається *екером* (від французького *equerre* («кутомір»), яке, в свою чергу, походить від латинського *quadrare*, що означає «зробити квадратним»). Основною «робочою частиною» екера є хрестовина або квадратна дощечка, що кріпиться на ніжці чи на тринозі (рис. 1.10). Тут позначені два відрізки, що перетинаються під прямим кутом. На кінцях цих відрізків вбиті штирки або гвіздки.

Для побудови прямого кута за допомогою екера його ніжку або триногу ставлять так, щоб хрестовина зайніла горизонтальне положення, а її центр розмістився прямо над вершиною кута. Потім один із взаємно перпендикулярних напрямів виставляють вздовж заданої сторони кута. Тоді інший напрям визначить іншу його сторону (рис. 1.11). Обидва прямі фіксують за допомогою віх — довгих палиць із загостреним кінцем. Віхи теж ставлять вертикально вздовж намічених сторін кута. Для цього відповідні вертикальні штирки на екері і вstromлені в землю віхи для сторони кута повинні зливатися, якщо дивитися на них вздовж сторони кута.

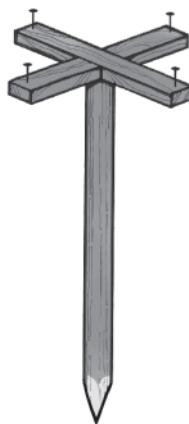


Рис. 1.10

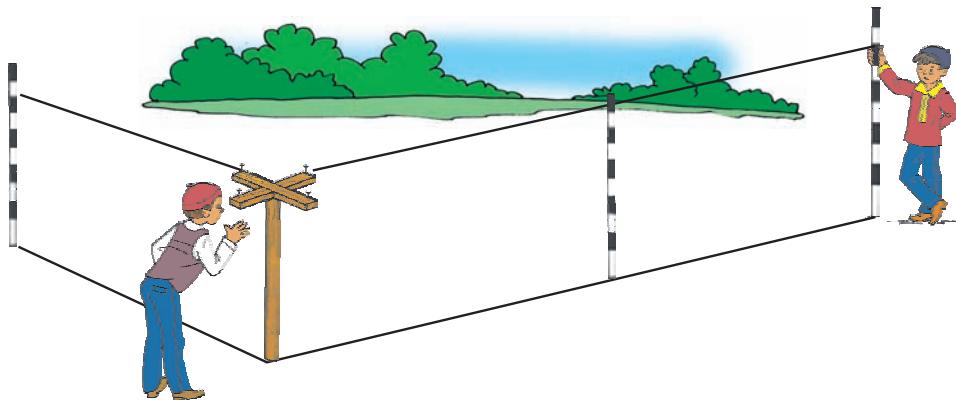


Рис. 1.11

1.3. Розбиття прямоокутника на менші прямоокутники

У практиці землевпорядкування часто виникає потреба у розбитті великих прямоокутних ділянок на менші прямоокутники. Зокрема, саме так розбивають великі посівні площини, оскільки поля прямоокутної форми найкращі для механізованого обробітку та обліку. Та й на присадибному городі грядки під різні культури влаштовують прямоокутними. Врешті-решт, і самі міжряддя є дуже вузькими і видовженими прямоокутниками. Тож, звичайно, задачу про розбиття прямоокутника на менші вирішували ще прадавні землероби і землевпорядники. Зокрема, про це й вказує Геродот, повідомляючи про зародження геометрії у Давньому Єгипті.

Окрім землевпорядкування ця сама задача виникає «на кожному кроці» в найрізноманітніших інших сферах, навіть у побуті. Наприклад, при наклеюванні шпалер, оббивці стін дошкою-вагонкою, викладанні керамічної плитки чи паркету, покрівлі даху листовим залізом або черепицею і т. ін.

Зрозуміло, що існує безліч різних способів для розбиття прямоокутника на менші прямоокутники. Але всі вони базуються на розбиттях, що здійснюються за допомогою відрізків з кінцями на протилежних сторонах заданого прямоокутника, проведеними перпендикулярно до цих сторін. Саме такі розбиття здійснюють при виведенні формул для знаходження площині прямоокутника. Тому на них ми зараз і зосередимо свою увагу.

Нагадаємо, що відрізки називаються перпендикулярними (або взаємно перпендикулярними), якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Візьмемо на стороні AB прямоокутника $ABCD$ які-небудь точки F_1, F_2, F_3, \dots , а на протилежній стороні DC — відповідні їм точки G_1, G_2, G_3, \dots (рис. 1.12), розміщені так, що $DG_1 = AF_1$, $DG_2 = AF_2$, $DG_3 = AF_3$, і т. д. Після цього проведемо відрізки F_1G_1 , F_2G_2 ,

Хто знає ціле, може пізнати і його частину, але хто знає частину, ще не знає цілого.

Лукіан,
«Про вибір філософії»

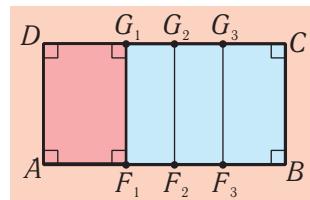


Рис. 1.12

F_3G_3, \dots . У результаті прямокутник $ABCD$ розіб'ється на чотирикутники AF_1G_1D , $F_1F_2G_2G_1$, $F_2F_3G_3G_2$, ..., які будуть прямокутниками.

Справді, в чотирикутнику AF_1G_1D маємо два прямих кути A і D (це кути прямокутника $ABCD$) і рівні сторони AF_1 і DG_1 . Тому за першою ознакою — це прямокутник. Оскільки, таким чином, кути AF_1G_1 і DG_1F_1 — прямі, то прямими є і суміжні з ними кути $G_1F_1F_2$, $G_2G_1F_1$, які доповнюють їх до розгорнутих кутів. Крім цього, рівними є відрізки F_1F_2 та G_1G_2 (бо вони дорівнюють різницям $AF_2 - AF_1$ та $DG_2 - DG_1$ відповідно рівних відрізків). Отже, за тією самою першою ознакою, чотирикутник $F_1F_2G_2G_1$, — теж прямокутник. І тому прямими є кути $F_1F_2G_2$ та $G_1G_2F_2$.

Продовживши ці міркування далі, доведемо, що справді всі одержані чотирикутники будуть прямокутниками.

Зрозуміло, що подібне розбиття прямокутника $ABCD$ відрізками з кінцями на двох інших протилежних сторонах AD і BC (рис. 1.13) теж буде розбиттям на прямокутники.

Як у першому, так і в другому випадку один з вимірів одержаних прямокутників дорівнюватиме одному з вимірів заданого прямокутника.

А тепер уявімо, що проведено певну кількість відрізків першого виду і певну кількість відрізків другого виду (рис. 1.14). У результаті теж одержимо розбиття прямокутника $ABCD$ на менші прямокутники, але тепер уже обидва виміри будуть меншими від відповідних вимірів прямокутника $ABCD$.

Справді, покажемо для прикладу, що прямокутником є виділений чотирикутник $XYZT$.

У чотирикутнику 1, відповідно до попереднього, маємо прямі кути при трьох вершинах A , F_1 , E_1 . Тоді, за другою ознакою прямокутника, — це прямокутник. Звідси випливає, що всі чотири кути при вершині K — прямі. Отже, за тією ж другою ознакою,

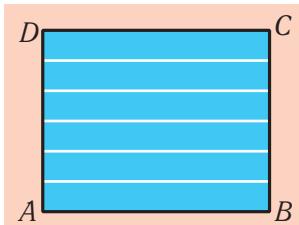


Рис. 1.13

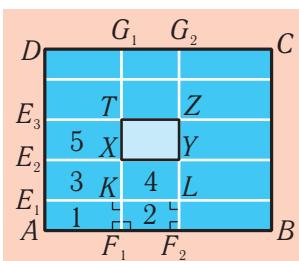


Рис. 1.14