

ПЕРЕДМОВА

Книга призначена для самостійного повторення шкільного курсу алгебри і початків аналізу. Вона допоможе систематизувати наявні знання й ліквідувати прогалини в них, якщо такі виявляться. Особливо вона може бути корисною при підготовці до випускних іспитів у середній школі та при підготовці до вступних іспитів у вищі навчальні заклади.

Призначення даної книги визначило і її структуру. Навчальний матеріал у книзі розбито на теми. Кожна тема складається з декількох параграфів, якими визначається її теоретична частина. Всі параграфи теми (за деяким виключенням) побудовані за однією і тією ж схемою. Вони містять:

- довідковий матеріал;
- вправи з розв'язками;
- дидактичний матеріал.

Дамо коротку характеристику кожного розділу параграфа.

Розділ «Довідковий матеріал» містить формулювання правил, визначень, теорем тощо. Виклад теоретичних питань у книзі відповідає викладу цих питань у діючих шкільних посібниках. Послідовність розгляду матеріалу майже та сама, що й при вивченні шкільного курсу. У випадку труднощів наведені теоретичні відомості допоможуть при виконанні вправ або отриманні відповідей на контрольні питання. Цей розділ є мов би консультантом з питань теорії.

Розділ «Вправи з розв'язками» містить численні приклади розв'язування вправ, які допомагають засвоїти теорію та здобути необхідних навичок. Розв'язування кожної вправи супроводжується детальним поясненням з посиланням на теоретичний матеріал, що використовується. Усі етапи розв'язання включають потрібну інформацію про правильність того чи іншого кроку. Цей розділ допоможе усунути багато труднощів, що виникають при самостійному розв'язуванні вправ.

Розділ «Дидактичний матеріал» містить набір вправ трьох рівнів складності. Літерою **А** відзначено найлегші вправи, літерою **Б** — вправи, складніші порівняно з попередніми, літерою **В** — вправи найвищої складності. Таким чином, спочатку можна вибрати вправи, що відповідають рівню вашої математичної підготовки, а потім у міру набуття навичок і вмінь переходити до все важчих вправ. Вправи, не відзначені жодною літерою, — обов'язковий мінімум, який повинні вміти розв'язувати всі учні.

Кожен розділ закінчується контрольними запитаннями. Вони допоможуть забезпечити певний контроль над засвоєнням теоретичного й практичного матеріалу.

В кінці книги поданий додаток, в якому розглянуто прийоми розв'язування різних типів задач на складання рівнянь, систем рівнянь і нерівностей.

Даний навчальний посібник є перевиданням книг В.С. Крамора «Учебное пособие для подготовительных отделений вузов» (М.: Высшая школа, 1981) і «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа» (М.: Просвещение, 1990).

Автор сподівається, що дана книга стане добрим помічником усім, хто буде нею користуватися в процесі навчання і при підготовці до іспитів.

В.С. Крамор

Тема I

- §1. Натуральні числа і дії над ними
- §2. Додавання та закони додавання
- §3. Віднімання
- §4. Множення та закони множення
- §5. Ділення
- §6. Ознаки подільності чисел
- §7. Поняття множини
- §8. Операції над множинами
- §9. Взаємно однозначна відповідність
- §10. Прості й складені числа
- §11. Найбільший спільний дільник
- §12. Найменше спільне кратне

§1. НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

Довідковий матеріал

1. Поняття натурального числа відноситься до найпростіших, початкових понять математики й не визначається через інші, простіші поняття.

2. Натуральні числа виникли в результаті лічби предметів. У порядку зростання їх можна записати як ряд чисел 1, 2, 3, 4,

3. Для натуральних чисел визначено такі дії: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до ступеня і добування кореня.

Відзначимо, що дії додавання і множення виконувані завжди, тобто в результаті цих дій виходять також натуральні числа.

§2. ДОДАВАННЯ ТА ЗАКОНИ ДОДАВАННЯ

Довідковий матеріал

1. Результат додавання двох чи декількох чисел називається їхньою *сумою*, а самі числа — *доданками*.

Наприклад, $a + b + c + \dots + k = p$. Тут p — сума; a, b, c, \dots, k — доданки.

Обидва радикала беремо зі знаком «плюс», оскільки $\cos \alpha > 0$ і $\sin \beta > 0$.

Тому вираз (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 2\beta) &= \sqrt{1-x^2}(y^2-1+y^2) - 2xy\sqrt{1-y^2} = \\ &= (2y^2-1)\sqrt{1-x^2} - 2xy\sqrt{1-y^2}.\end{aligned}$$

4) Позначаючи $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha$, $\arcsin \frac{12}{13} = \beta$, маємо $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, а $\sin \beta = \frac{12}{13}$, де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Таким чином, наша задача зводиться до відшукування $\sin(\alpha + \beta)$ за відомими значеннями $\sin \alpha$ і $\sin \beta$.

Розкриваючи синус суми знаходимо:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha. \quad (1)$$

У виразі (1) невідомі $\cos \alpha$ і $\cos \beta$. Знайдемо значення цих функцій. Відомо, що α і β належать першій чверті, тому

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \\ \cos \beta &= \sqrt{1-\sin^2 \beta} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.\end{aligned}$$

Вираз (1) набуде вигляду:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1.$$

Дидактичний матеріал

1. Обчисліть:

- А.** 1) $\arcsin 0$; 2) $\arccos 0$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arccos 1$;
 5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arccos(-1)$; 7) $\arcsin \frac{1}{2}$; 8) $\arccos \frac{1}{2}$.
- Б.** 1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Доведіть рівність:

- В.** 1) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$;

3) $\sin(\arcsin x) = x$;

4) $\cos(\arccos x) = x$.

3. Знайдіть область визначення функції:

А. 1) $y = \arcsin x$; 2) $y = \arcsin(x - 1)$; 3) $y = \arccos(2x - 1)$.

Б. 1) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$; 2) $y = \arcsin \frac{2}{x-1}$;

3) $y = \arccos \frac{x}{x-1}$.

В. 1) $y = \arcsin(x^2 - 2x)$; 2) $y = \arccos(x - 1)$.

4. Обчисліть:

В. 1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{4}{5}\right)$;

3) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 4) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$;

5) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$.

Відповіді. 1. А. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 0; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) π . Б. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$.3. А. 1) $[-1; 1]$; 2) $[0; 2]$; 3) $[0; 1]$. Б. 1) $[-1; 3]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$; 3) $(-\infty; 0,5]$.В. 1) $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$; 2) $[0; 2]$. 4. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{63}{65}$; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{49}$; 4) $-\frac{\pi}{7}$;5) $\frac{4\pi}{5}$; 6) $\frac{7\pi}{18}$.

§2. АРКТАНГЕНС І АРККОТАНГЕНС

Довідковий матеріал

1. На інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція тангенс зростає і набуває всіх значень з \mathbb{R} .2. Для будь-якого числа a в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ існує єдиний корінь b рівняння $\operatorname{tg} x = a$.

Розв'язання. 1. Нехай 30-відсоткового розчину взято x грамів, а 10-відсоткового розчину взято y грамів.

2. Тоді з умови зрозуміло, що $x + y = 600$. Оскільки перший розчин 30-відсотковий, то в x грамах цього розчину міститься $0,3x$ грамів кислоти.

3. Аналогічно в y грамах 10-відсоткового розчину міститься $0,1y$ грамів кислоти.

4. В отриманій суміші, за умовою задачі, міститься

$$600 \times 0,15 = 90 \text{ г кислоти,}$$

звідки випливає

$$0,3x + 0,1y = 90.$$

Складемо систему та розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x + y = 600, & \begin{cases} x + y = 600, \\ 0,3x + 0,1y = 90; \end{cases} \\ 0,3x + 0,1y = 90; & \begin{cases} 3x + y = 900. \end{cases} \end{cases}$$

$$x = 150, y = 600 - 150 = 450.$$

Відповідь. 150 г, 450 г.

Розв'яжіть задачі.

- 1. Задача (№ 13.090).** Є кусок сплаву міді з оловом загальною масою 12 кг, що містить 45% міді. Скільки чистого олова треба додати до цього куска сплаву, щоб новий отриманий сплав містив 40% міді?
- 2. Задача (№ 13.234).** Було два сплави міді з різним відсотковим вмістом міді в кожному. Число, що виражає у відсотках вміст міді в першому сплаві, на 40 менше від числа, що виражає у відсотках вміст міді в другому сплаві. Потім обидва ці сплави сплавили разом, після чого вміст міді становив 36%. Визначити відсотковий вміст міді в першому й у другому сплавах, якщо відомо, що в першому сплаві міді було 6 кг, а в другому — 12 кг.
- 3. Задача (№ 13.045).** Кусок сплаву міді й цинку з масою 36 кг містить 45% міді. Яку масу міді потрібно додати до цього куска, щоб отриманий новий сплав містив 60% міді?
- 4. Задача (№ 13.310).** Є лом сталі двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%. Скільки потрібно взяти металу кожного сорту, щоб одержати 140 т сталі з 30-відсотковим вмістом нікелю?

Відповіді. 1. 1,5 кг. 2. 20% і 60%. 3. 13,5 кг. 4. 40 т і 100 т.

7. ЗАДАЧІ НА РОЗВЕДЕННЯ

Задача. З бака, наповненого спиртом, відлили частину спирту й долили до попереднього об'єму водою, потім з бака відлили стільки ж літрів суміші, скільки першого разу відлили спирту, після чого в баці залишилося 49 л чистого спирту. Скільки літрів спирту відлили з бака першого і другого разу, якщо в баці було 64 л?

Розв'язання. 1. Вважатимемо, що x літрів спирту відлили першого разу. Тоді $(64 - x)$ літрів спирту залишилося в баці.

2. Після того як бак долили водою, у ньому стало 64 л суміші.

Отже, в 1 л суміші містилося $\frac{64 - x}{64}$ літрів спирту.

3. Оскільки другого разу відлили x літрів суміші, то спирту відлили другого разу $\left(\frac{64 - x}{64}\right)x$ літрів.

4. З умови випливає, що з бака всього відлили $64 - 49 = 15$ л спирту.

5. Складемо рівняння та розв'яжемо його:

$$x + \frac{(64 - x)x}{64} = 15.$$

Звідки

$$x_1 = 8, x_2 = 120 \text{ (не задовольняє умову).}$$

Другого разу відлили

$$\frac{(64 - 8) \cdot 8}{64} = 7.$$

Відповідь. 8 л, 7 л.

Розв'яжіть задачі.

- 1. Задача.** Посудина з об'ємом 8 л наповнена повітрям, що містить 16% кисню. З посудини відкачали x літрів повітря і додали таку ж кількість азоту. Потім відкачали x літрів суміші та знову додали таку ж кількість азоту. В результаті в посудині виявилось лише 9% кисню. Визначити x .
- 2. Задача (№ 13.023).** У посудині було 12 л соляної кислоти. Частину кислоти відлили й посудину долили водою. Потім знову відлили стільки ж і знову долили водою. Скільки рідини відливали щоразу, якщо в посудині виявився 25-відсотковий розчин кислоти?
- 3. Задача (№ 13.341).** З посудини, наповненої кислотою, вилили кілька літрів і долили водою; потім знову вилили стільки ж літрів суміші, тоді в посудині залишилося 24 л чистої кислоти. Ємність посудини 54 л. Скільки кислоти вилили першого і другого разів?

Відповіді. 1. 2 л. 2. 6 л. 3. 18 л і 12 л.

Зміст

Передмова	3
Тема I	5
§1. Натуральні числа і дії над ними.....	5
§2. Додавання та закони додавання.....	5
§3. Віднімання.....	6
§4. Множення та закони множення.....	6
§5. Ділення.....	7
§6. Ознаки подільності чисел	8
§7. Поняття множини	8
§8. Операції над множинами.....	9
§9. Взаємно однозначна відповідність.....	10
§10. Прості й складені числа	10
§11. Найбільший спільний дільник.....	11
§12. Найменше спільне кратне	12
Контрольні запитання.....	12
Тема II.....	14
§1. Звичайні дроби	14
§2. Правильні й неправильні дроби	15
§3. Основна властивість дроби.....	16
§4. Додавання і віднімання дробів	16
§5. Множення дробів.....	17
§6. Ділення дробів.....	19
§7. Десяткові дроби	20
§8. Перетворення десяткового дроби в звичайний і звичайного в десятковий. Періодичні дроби	22
§9. Відношення. Пропорція	24
§10. Властивості пропорції.....	25
§11. Відсоток. Основні задачі на відсотки.....	26
§12. Поділ числа на частини, прямо й обернено пропорційні до даних чисел.....	27
Контрольні запитання.....	28

Тема III	30
§1. Координатна пряма	30
§2. Множина цілих чисел.....	30
§3. Множина раціональних чисел	31
§4. Модуль числа.....	31
§5. Порівняння раціональних чисел	33
§6. Додавання і віднімання раціональних чисел	33
§7. Множення і ділення раціональних чисел.....	34
§8. Піднесення раціональних чисел до степеня з натуральним показником.....	35
Контрольні запитання.....	36
Тема IV	38
§1. Властивості степеня з натуральним показником.....	38
§2. Числові вирази	40
§3. Вирази зі змінними.....	41
§4. Тотожно рівні вирази.....	41
§5. Одночлени.....	41
§6. Многочлени.....	43
§7. Перетворення суми і різниці многочленів	44
§8. Множення многочлена на одночлен і многочлена на многочлен.....	45
§9. Розклад многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки.....	46
§10. Розклад многочлена на множники способом групування.....	48
§11. Формули скороченого множення.....	49
Контрольні запитання.....	53
Тема V	55
§1. Дріб	55
§2. Цілі і дробові вирази.....	57
§3. Тотожне перетворення суми і різниці двох дробів	58
§4. Тотожне перетворення добутку і частки двох дробів	61
§5. Степінь дроби.....	65
Контрольні запитання.....	65

Тема VI	67
§1. Поняття про ірраціональне число.....	67
§2. Розвиток поняття про число. Множина дійсних чисел	67
§3. Корінь k -го степеня з дійсного числа.....	69
§4. Алгоритм добування квадратного кореня з числа.....	71
§5. Арифметичні дії з дійсними числами.....	73
§6. Перетворення арифметичних коренів.....	74
§7. Степінь з цілим і дробовим показником	80
Контрольні запитання.....	84
Тема VII	86
§1. Рівняння з однією змінною	86
§2. Поняття про рівносильність рівнянь	87
§3. Властивості числових рівностей і теореми про рівносильність рівнянь.....	88
§4. Лінійне рівняння з однією змінною, що містить параметр.....	91
Контрольні запитання.....	94
Тема VIII	95
§1. Поняття функції	95
§2. Способи задання функції	96
§3. Монотонність функції	97
§4. Парні і непарні функції	98
§5. Періодичні функції	100
§6. Проміжки знакосталості і корені функції	101
Контрольні запитання.....	101
Тема IX	103
§1. Геометричні перетворення графіків функцій	103
§2. Лінійна функція і її графік.....	105
§3. Квадратична функція і її графік.....	107
§4. Функція $y = \frac{k}{x}$ і її графік	111
§5. Дробово-лінійна функція і її графік	112
Контрольні запитання.....	116

Тема X	118
§1. Квадратні рівняння	118
§2. Теорема Вієта.....	125
§3. Графічний спосіб розв'язування квадратних рівнянь.....	127
§4. Рівняння з багатьма змінними.....	129
§5. Системи рівнянь.....	130
Контрольні запитання.....	140
Тема XI	141
§1. Нерівності.....	141
§2. Основні властивості нерівностей.....	142
§3. Дії з нерівностями.....	144
§4. Доведення нерівностей.....	146
§5. Нерівності, що містять змінну.....	149
§6. Розв'язування лінійних і квадратних нерівностей.....	149
Контрольні запитання.....	154
Тема XII	155
§1. Системи і сукупності нерівностей.....	155
§2. Нерівності і системи нерівностей з двома змінними.....	162
§3. Розв'язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля.....	166
§4. Розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.....	168
Контрольні запитання.....	171
Тема XIII	172
§1. Числова послідовність.....	172
§2. Арифметична прогресія.....	173
§3. Геометрична прогресія.....	177
§4. Сума нескінченної геометричної прогресії при $ q < 1$	183
Контрольні запитання.....	185
Тема XIV	186
§1. Градусне вимірювання кутових величин.....	186
§2. Радіанне вимірювання кутових величин.....	187
§3. Синус і косинус числового аргументу.....	190

§4. Тангенс і котангенс числового аргументу, секанс і косеканс числа α	194
§5. Основні тригонометричні тотожності	196
§6. Додаткові властивості тригонометричних функцій	199
Контрольні запитання	201
Тема XV	203
§1. Формули зведення	203
§2. Формули додавання	207
§3. Формули подвійного кута	210
§4. Перетворення добутку тригонометричних функцій на суму	214
§5. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій	216
§6. Тригонометричні функції половинного аргументу	219
§7. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу	222
Контрольні запитання	224
Тема XVI	226
§1. Властивості функції $y = \sin x$ і її графік	226
§2. Властивості функції $y = \cos x$ і її графік	234
§3. Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ і її графік	237
§4. Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$ і її графік	241
§5. Знаходження періодів тригонометричних функцій	244
Контрольні запитання	246
Тема XVII	247
§1. Арксинус і арккосинус	247
§2. Арктангенс і арккотангенс	251
Контрольні запитання	256
Тема XVIII	258
§1. Розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$	258
§2. Розв'язування рівнянь виду $\sin x = a$	261
§3. Розв'язування рівнянь виду $\operatorname{tg} x = a$	265
§4. Розв'язування тригонометричних рівнянь, що зводяться до квадратного	269

§5. Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь	271
§6. Тригонометричні рівняння, які розв'язуються за допомогою формул додавання, пониження степеня	274
§7. Розв'язування систем тригонометричних рівнянь	280
Контрольні запитання	287
Тема XIX	289
§1. Розв'язування тригонометричних нерівностей виду $\sin x > a$, $\sin x < a$	289
§2. Розв'язування тригонометричних нерівностей виду $\cos x > a$, $\cos x < a$	295
§3. Розв'язування тригонометричних нерівностей виду $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$	300
§4. Розв'язування тригонометричних нерівностей	303
Контрольні запитання	306
Тема XX	307
§1. Приріст аргументу і приріст функції	307
§2. Границя функції	309
§3. Неперервність функції	311
§4. Означення похідної	313
§5. Похідна суми, добутку, частки	316
§6. Похідна степеневої і складної функції	318
§7. Похідні тригонометричних функцій	323
Контрольні запитання	329
Тема XXI	331
§1. Застосування похідної до знаходження проміжків монотонності функції	331
§2. Критичні точки функції, її максимуми та мінімуми	333
§3. Загальна схема дослідження функції	337
§4. Задачі на знаходження найменшого та найбільшого значення функції	342
Контрольні запитання	346
Тема XXII	348
§1. Формули наближених обчислень	348
§2. Дотична до графіка функції	350
§3. Швидкість і прискорення в даний момент часу	355

§4. Графіки гармонійних коливань	356
Контрольні запитання	358
Тема XXIII	359
§1. Втрачені та сторонні корені при розв'язуванні рівнянь (на прикладах)	359
§2. Сторонні корені ірраціонального рівняння (на прикладах)	361
§3. Розв'язування ірраціональних рівнянь	361
§4. Розв'язування ірраціональних нерівностей	366
Контрольні запитання	368
Тема XXIV	369
§1. Показникова функція, її властивості та графік	369
§2. Показникові рівняння	372
§3. Показникові нерівності	375
§4. Системи показникових рівнянь і нерівностей	377
Контрольні запитання	379
Тема XXV	381
§1. Обернена функція	381
§2. Поняття логарифма	383
§3. Властивості логарифмів	385
§4. Логарифмічна функція, її властивості та графік	386
§5. Теореми про логарифм добутку, частки і степеня. Формула переходу до нової основи	390
§6. Десяткові логарифми та їх властивості	393
§7. Логарифмування та потенціювання	394
Контрольні запитання	395
Тема XXVI	397
§1. Логарифмічні рівняння	397
§2. Логарифмічні нерівності	401
§3. Системи логарифмічних рівнянь і нерівностей	405
§4. Похідні логарифмічної і показникової функцій. Число e	407
Контрольні запитання	410

Тема XXVII.....	412
§1. Поняття первісної функції.....	412
§2. Основна властивість первісної функції.....	414
§3. Три правила знаходження первісних.....	417
§4. Криволнійна трапеція та її площа.....	419
Контрольні запитання.....	421
Тема XXVIII.....	422
§1. Формула Ньютона – Лейбніца.....	422
§2. Основні правила інтегрування.....	426
§3. Обчислення площ за допомогою інтеграла.....	428
§4. Механічні та фізичні додатки визначеного інтеграла ...	434
Контрольні запитання.....	438
Додаток	439
Вступ	439
1. Задачі на рух	439
2. Задачі на спільну роботу.....	451
3. Задачі на планування	457
4. Задачі на залежність між компонентами арифметичних дій.....	462
5. Задачі на відсотки.....	467
6. Задачі на суміші (сплави)	469
7. Задачі на розведення.....	471