

О.І. Демчишин
Б.Г. Шелестовський

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512.1(075.3)
ББК 21.1
Д30

*Рекомендовано до друку Вченою Радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
(протокол № 1 від 24 лютого 2010 року)
як навчальний посібник для студентів
економічних спеціальностей вищих навчальних закладів та слухачів інститутів
і факультетів післядипломного навчання*

Рецензенти: Рудницький В.Б., доктор технічних наук, професор
Ленюк М.П., доктор фізико-математичних наук, професор
Боднар Д.І., доктор фізико-математичних наук, професор

Демчишин О.І., Шелестовський Б.Г.

Д30 Вища математика: Навчальний посібник. —
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 592 с.

ISBN 978-966-10-1156-3

Посібник відповідає навчальній програмі з вищої математики для економічних та інженерно-економічних спеціальностей. У ньому викладено основи теорії множин, елементи лінійної та векторної алгебри, аналітичну геометрію на площині та у просторі, основи математичного аналізу, зокрема, диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння, а також основи теорії рядів.

Теоретичний матеріал подано в доступній для студентів формі. Особливу увагу приділено прикладній і практичній спрямованості курсу для фахової підготовки студентів економічних спеціальностей.

Для студентів вищих навчальних закладів.

ББК 21.1

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

© Навчальна книга – Богдан,
майнові права, 2010

ISBN 978-966-10-1156-3

Передмова

Навчальний посібник написано для студентів економічних та інженерно-економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Його зміст складається із двох частин, в яких викладено такі теми вищої математики: основи теорії множин, елементи лінійної та векторної алгебри, аналітична геометрія на площині і у просторі, лінії другого порядку — у першій частині; основи теорії границь, диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних, інтегральне числення, звичайні диференціальні рівняння, основи теорії рядів — у другій частині. Головна увага приділяється розкриттю змісту понять і їхніх взаємозв'язків, роблячи акцент на наочність із використанням великої кількості графіків. Математичні твердження доводяться без надмірної строгості. Значна частина посібника розрахована на студентів-економістів, при цьому в кожній темі вміщено матеріал з економічного використання розглянутих математичних понять та добірку суто економічних задач, що ілюструють відповідні теорії. Темі містять поряд з теоретичним матеріалом приклади та задачі з розгорнутими розв'язками. Завершуються теми посібника питаннями і завданнями для самостійного опрацювання з метою глибшого засвоєння поданого матеріалу. Матеріал посібника має своєю метою надати студенту широкі можливості для активної самостійної роботи, розвивати у нього в процесі навчання навички самостійного оцінювання свого рівня підготовки та засвоєння знань. Посібник може використовуватися студентами заочної форми навчання для самостійного вивчення матеріалу. Наявність у посібнику питань і завдань для самостійного розв'язання робить підручник корисним при проведенні практичних занять.

Автори висловлюють глибоку подяку рецензентам посібника: завідувачу кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету, доктору технічних наук, професору Рудницькому В.Б.; завідувачу кафедри інформацій-

них систем Чернівецького факультету НТУ «Харківський політехнічний університет», доктору фізико-математичних наук, професору Ленюку М.П.; завідувачу кафедри економічної кібернетики Тернопільського національного економічного університету, доктору фізико-математичних наук, професору Боднару Д.І.

Автори вдячні кандидату фізико-математичних наук, доценту Єрьюменку В.О. за цінні поради при висвітленні методу найменших квадратів та допомогу в оформленні задач посібника, кандидатам економічних наук Заклекті О.І. та Заклекті О.С., доценту Поді А.К. за допомогу у висвітленні прикладного економічного використання розділів математичного аналізу, Чемерис Л.О. за допомогу в оформленні посібника.

Навчальний посібник призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Він може також стати посібником для економістів, які займаються самоосвітою.

Частина 1

**Лінійна
і векторна алгебри.
Аналітична геометрія**

ТЕМА 1

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Розглядається одне з найфундаментальніших понять сучасної математики — поняття множини, означаються основні операції над множинами. Завершується тема висвітленням конкретного представника множин — декартового добутку.

1.1. Множини

1.1.1. Поняття множини, підмножини

1*. **Поняття множини.** Множина – одне з основних, первісних і неозначених понять математики. За Г. Кантором, множиною є сукупність, клас, група об'єктів об'єднаних за якоюсь ознакою. Дане твердження не можна розглядати як означення, оскільки воно визначається синонімами цього слова. Однак множину можна описати на прикладах. Навіть не вживаючи слово “множина”, розуміють саме її, коли говорять про систему, групу певних об'єктів. Так, живучи в місті, ми перебуваємо у спільноті жителів міста; купівля в магазині здійснюється з наявного асортименту товарів; ліс – це масив дерев. Множинами є також: точки відрізка, прямої, площини, простору; натуральний ряд чисел; парні (непарні) числа натурального ряду і т.ін. Перелік множин можна продовжити до нескінченності. На понятті множини ґрунтується багато розділів математики: теорія чисел, математична логіка, дискретна математика, теорія імовірностей тощо.

Математичний зміст слова “множина” відмінний від його побутового розуміння, яке обов'язково передбачає сукупність, що містить

багато об'єктів. Слово “множина” використовується в математиці для будь-якої кількості об'єктів, навіть для одного об'єкта.

Множини позначаються **великими буквами** латинського та грецького алфавітів: $A, B, C, \dots, L, W, \dots$. Об'єкти, з яких утворено множину, називають її **елементами**. Елементи множини прийнято позначати **малими буквами** латинського алфавіту: a, b, c, \dots (можливі й інші позначення: $\mathfrak{A}, a^*, D, \dots$). Різні елементи довільної множини M завжди позначаються різними буквами (символами).

Один і той же елемент множини може мати два або більше різних позначень (назв), наприклад, a — ромб, у якого всі кути прямі, і b — прямокутник, у якого всі сторони рівні, описують один і той самий геометричний об'єкт — квадрат.

У таких випадках пишуть: $a = b$. Очевидно, що з цієї рівності випливають такі властивості:

- 1) $a = a$;
- 2) якщо $a = b$, то $b = a$;
- 3) якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$.

Якщо ж a і b — різні елементи множини, то пишуть: $a \neq b$.

Окремим випадком скінченної множини є **порожня множина**, яка не містить жодного елемента. Множина точок перетину паралельних прямих в евклідовому просторі, множина живих мамонтів у наші дні, множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$ — ось неповний перелік порожніх множин.

Довільні порожні множини рівні між собою.

Наступним після поняття множини є інше поняття — поняття **належності** (або “відношення належності”).

Вирази вигляду “об'єкт a належить множині A ” і “об'єкт a не належить множині A ” записують, використовуючи символи “ $a \in A$ ” та “ $a \notin A$ ”. Походить знак “ \in ” від букви ε (епсилон) — першої букви грецького слова $\varepsilon\omicron\tau\iota$, що означає “ ε ”.

Приклад 1.1. Нехай A — множина однозначних чисел. Вираз “ $3 \in A$ ” читається: “Число 3 — однозначне”; “Число 3 належить множині однозначних чисел” і т.д. Запис “ $12 \notin A$ ” означає: “Число 12 не є однозначним”.

Залежно від кількості елементів, множини поділяються на **скінченні і нескінченні**.

Скінченні множини мають цілком визначену кількість елементів (кількість елементів виражається натуральним числом). Для їхнього запису використовують фігурні дужки:

1) у фігурні дужки для зображення множини вписуються лише різні елементи (сукупності “м; а; т; е; м; а; т; и; к; а” і “м; а; т; е; м; а; т; и; к” описують одну і ту ж множину {м; а; т; е; и; к});

2) усередині фігурних дужок порядок вписування елементів множини не має значення.

Приклад 1.2. 1) Множина {а} – одноелементна множина (множина з одним елементом а); 2) $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{4; 2; 6\}$, $C = \{2; 2; 6; 4; 4\}$ є рівними множинами, оскільки складаються з одних і тих же елементів. Множини А і В відрізняються лише порядком розміщення своїх елементів, а третя, множина С, відрізняється тим, що в ній елементи 2 і 4 присутні у двох екземплярах.

У нескінченній множині — нескінченна кількість елементів.

Прикладами нескінченних множин є натуральний ряд чисел, пряма, площина тощо.

Числові множини у математиці переважно позначаються буквами: множина натуральних чисел — $N = \{1; 2; 3; \dots\}$; множина цілих чисел — $Z = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$; множина раціональних чисел — $Q = \left\{ \frac{m}{n}; m \in Z; n \in N \right\}$; R — множина дійсних чисел.

Для назви множини іноді використовують яке-небудь одне слово, що є його синонімом (глядачі, зграя, сім'я, фрукти тощо). При цьому, **множина є заданою, якщо про будь-який її елемент можна сказати, належить він їй чи ні.**

Є два загальних способи задати множину:

1) за допомогою **безпосереднього переліку** її елементів;

2) за допомогою **характеристичної властивості**, яка об'єднує елементи у множину.

Перший спосіб характерний для скінченних множин з невеликою кількістю елементів. Він передбачає можливість безпосереднього визначення належності елементів.

Наприклад, якщо множина А складається з чисел 3, 4, 5 і 6, то цим самим вона повністю визначається, оскільки всі елементи перераховані. У цьому випадку правомірним є запис $A = \{3; 4; 5; 6\}$.

Якщо ж множина нескінченна або скінченна, але має велику кількість елементів, то її елементи перерахувати неможливо. У цих випадках використовують інший спосіб задання — **вказують характеристичну властивість множини**, тобто властивість, яку має кожний елемент, що належить множині, і не мають елементи, які даній множині не належать.

Нехай B — множина двозначних чисел. Кожний елемент множини має властивість — **“бути двозначним числом”**. Ця характеристична властивість дає можливість визначити, чи належить яке-небудь число множині, чи ні. Так, число 21 знаходиться в множині B , оскільки воно двозначне, а число 145 не є двозначним і, отже, множині B не належить.

Другий спосіб більш загальний: він дозволяє, на відміну від першого, задавати і скінченні, і нескінченні множини.

Одну і ту ж множину можна задати і першим, і другим способами. Наприклад, множину C натуральних чисел, які менші за 7, можна задати за допомогою **характеристичної властивості** — “натуральне число менше за 7” або **переліком усіх елементів множини** — $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2*. Підмножини. Розгляд множин показує, що елементи однієї з них можуть бути і в іншій: **різні множини матимуть спільні елементи**. Так, множини $A = \{a; b; c; d; e\}$ і $C = \{c; d; e\}$ мають спільні елементи і, крім того, кожний елемент множини C є елементом множини A . У цьому випадку говорять: множина C включена у множину A , або: множина C є **підмножиною** множини A .

Означення. Якщо множина P складається з деяких елементів даної множини M (і лише з них), то множина P називається **підмножиною** множини M .

Це записують так: $P \subset M$ або $M \supset P$ (читається: “множина P міститься у множині M ” або “ P — підмножина множини M ”). У зазначеному прикладі $C \subset A$. Якщо ж P належить M , але може і співпадати з M , то вживається запис $P \subseteq M$.

Символи “ \subset ” і “ \subseteq ” називаються, відповідно, знаками строгого і нестрогого включення.

Щоб обґрунтувати включення $A \subseteq B$, достатньо встановити:

1) якщо $a \in A$, то $a \in B$; 2) якщо $a \notin B$, то $a \notin A$.

Для підмножин, які об'єднані знаком строгого включення, справедливими є такі властивості:

- 1) $A \subset A$;
- 2) якщо $A \subset B$ і $B \subset A$ то $A = B$;
- 3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$ то $A \subset C$.

З першої властивості випливає, що **довільна множина є підмножиною самої себе**. Друга властивість показує, що якщо дві множини X і Y складаються з одних і тих же елементів, то їх називають **рівними** і пишуть $X = Y$ (у цьому випадку одночасно мають місце наступні включення: $X \subset Y$ і $Y \subset X$).

Рівні множини складаються з одних і тих же елементів, а порядок запису елементів множини є неістотним.

Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини ($\emptyset \subset A$).

Серед усіх підмножин заданої множини A обов'язково повинні бути порожня множина і сама множина A .

Як **приклад**, випишемо всі підмножини множини $A = \{2; 3; 4\}$. Серед них будуть: одноелементні підмножини: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$; двоелементні підмножини: $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{3; 4\}$; сама множина $A = \{2; 3; 4\}$; порожня множина \emptyset . Таким чином, дана множина має 8 підмножин.

У теорії множин розглядають множини, елементами яких є всі підмножини заданої множини. Так, якщо для множини A скласти всі можливі підмножини й, узявши їх за елементи, утворити множину, то отримаємо **множину підмножин $B(A)$** , яка називається **буліаном** (на честь англійського математика і логіка Дж. Буля). Можна легко переконатись, що для n -елементної множини A отримаємо буліан $B(A)$, який матиме 2^n елементів.

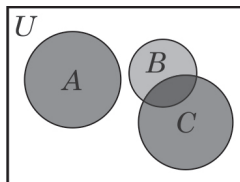
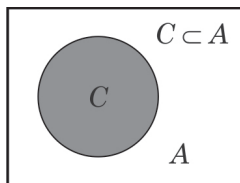
Приклад 1.3. Чотирьохелементна множина $A = \{a; b; c; d\}$ матиме буліан $B(A)$, який складається з $2^4 = 16$ елементів: $B(A) = \{ \emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{a; d\}; \{b; c\}; \{b; d\}; \{c; d\}; \{a; b; c\}; \{a; b; d\}; \{a; c; d\}; \{b; c; d\}; \{a; b; c; d\} \}$.

Множину, різні підмножини якої доводиться розглядати в процесі вивчення властивостей множин, називають **універсальною**

множиною і переважно позначають буквою U . В залежності від конкретної задачі універсальними множинами можуть бути множини: натуральних N , цілих Z , раціональних Q , дійсних R чисел, точок площини d або прямої l , множини векторів на площині або у просторі тощо.

Відношення між множинами доцільно зображати наочно за допомогою особливих малюнків, які називаються кругами Ейлера (Леонард Ейлер (1707 – 1783) – швейцарський математик). Для цього множини, скільки б вони не містили елементів, зображаються кругами, овалами, прямокутниками або іншими геометричними фігурами.

Розуміння дій над множинами і взаємозв'язків між ними визначає вміння встановлювати відношення за допомогою цих кругів. Наприклад, на малюнку за допомогою кругів Ейлера зображено відношення включення між множинами $A = \{a; b; c; d; e\}$ і $C = \{c; d; e\}$.

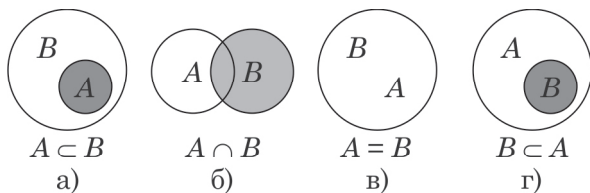


На діаграмах, з використанням кругів Ейлера, в переважній більшості випадків універсальну множину U зображають у вигляді прямокутника, а різні підмножини множини U — у вигляді кругів (або інших фігур).

Наприклад, вяснимо як зв'язані між собою множина A парних чисел і множина B чисел, які кратні 4. Розглянемо чотири можливі випадки взаємного розміщення кругів.

Малюнок а) говорить про те, що всі парні числа множини A повинні ділитися на 4 (характерна властивість елементів множини B), що є хибним для нашої задачі, наприклад, парне число 14 не ділиться на 4.

Малюнок б) показує, що серед чисел, які кратні 4, є парні, але є і такі, які не діляться на 2, що також є хибним твердженням, бо будь-яке число, яке кратне 4, є парним числом. Неможливим є і малюнок в), який привіює всі парні числа до чисел, кратних 4.



Отже, множина чисел, кратних 4, є підмножиною множини парних чисел. Цей зв'язок відображений на малюнку г).

1.1.2. Операції над множинами та їхнє схематичне зображення

З елементів декількох множин у результаті виконання операцій можна утворити нові множини. Основних операцій усього три: **об'єднання, перетин і доповнення**. Вони чимось нагадують шкільні операції додавання, множення і зміну знака. Крім цих операцій, розглянемо ще операцію знаходження різниці множин.

1*. Об'єднання множин. Якщо необхідно об'єднати елементи декількох множин в одну множину, то цим самим виконується **операція об'єднання**. Так, наприклад, множини студентів груп на курсі можна об'єднати у множину студентів факультету.

Означення. Об'єднанням (або сумою) двох множин A та B називається множина C , яка складається з елементів, які належать принаймні одній із цих множин.

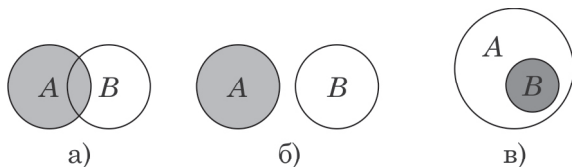
Операцію об'єднання множин A та B позначають знаком “ \cup ” або “ $+$ ” і читають: “об'єднання множин A та B ” або “ A плюс B ” ($C = A \cup B$ або $C = A + B$). При цьому знак “ $=$ ” свідчить про те, що множини $A \cup B$ ($A + B$) і C — рівні.

Отже, за означенням об'єднання двох множин A та B , маємо:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} A \cup B, \\ A + B \end{array} \right\} = \{x : x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Зображення множин A та B за допомогою кругів Ейлера визначає такі випадки об'єднання цих множин.

1) Якщо у множин A та B є спільні елементи, то у множину $C = A \cup B$ береться лише один елемент (мал. а). При цьому кількість елементів множини C менша за суму елементів множин A і B .



2) Якщо множини A та B не перетинаються, то їхнє об'єднання буде складатися з усіх елементів обох множин (мал. б). Кількість елементів множини C дорівнює сумі елементів множин A та B .

3) Якщо множина B є правильна підмножина множини A ($B \subset A$), то $A \cup B = A$ (мал. в).

В конкретних випадках об'єднання множин знаходиться таким чином:

а) якщо елементи множин A та B скінченні з невеликою кількістю елементів, то знаходження $A \cup B$ зводиться до перерахунку елементів, які належать одній із множин, і приєднання до них не перерахованих ще елементів іншої множини (якщо $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{5; 6; 7; 8; 9\}$, то $A \cup B = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$);

б) якщо множини A та B задані характеристичними властивостями своїх елементів, то утворена множина може мати свою назву, а характеристична властивість елементів об'єднання множин утворюється об'єднанням характеристичних властивостей множин A та B сполучником “*або*”.

Якщо A – множина відмінників групи студентів і B – множина спортсменів даної групи, то в об'єднання даних множин “славні студенти групи” увійдуть студенти з характеристичними властивостями або множини A , або множини B . Принциповим є те, що студенти, які є одночасно відмінниками і спортсменами, увійдуть в об'єднання лише один раз.

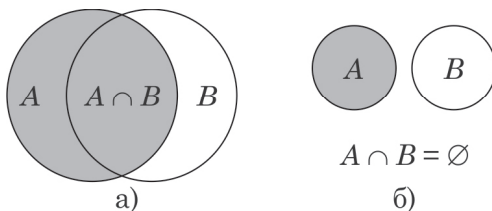
2*. Перетин множин. Нехай задано дві множини: $A = \{2; 4; 6; 8\}$ і $B = \{5; 6; 7; 8; 9\}$. Утворимо множину C із спільних елементів множин A та B : $C = \{6; 8\}$. Говорять, що така множина створена **перетином множин A та B** .

Означення. Перетином множин A та B називається множина, яка містить лише такі елементи, які належать множині A і множині B .

Перетин множин A та B (добуток множин A та B) позначається символом “ \cap ” або “ \cdot ” ($C = A \cap B$ або $C = A \cdot B$) і складається з усіх тих і лише тих елементів x , які належать кожній з даних множин одночасно:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} A \cap B, \\ A \cdot B \end{array} \right\} = \{x : x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Зображення множин A та B за допомогою кругів Ейлера показує, що перетином буде їхня спільна частина (мал. а).



Якщо множини A та B не мають спільних елементів, тоді говорять, що перетином множин є порожня множина (мал. б). Якщо ж $B \subset A$, то $A \cap B = B$.

У конкретних випадках перетину множин визначаємо наступне.

а) Якщо елементи множин A та B перераховані, то для знаходження $A \cap B$ достатньо перерахувати елементи, які належать одночасно A та B , тобто їхні спільні елементи.

Приклад 1.4. Якщо A – множина всіх дільників числа 32 ($A = \{1; 2; 4; 8; 32\}$), B – множина всіх дільників числа 24 ($B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$), то перетином $A \cap B$ буде множина $C = \{1; 2; 4; 8\}$, яка складається зі спільних дільників чисел 32 і 24.

б) Якщо множини A та B задані характеристичними властивостями своїх елементів, то характеристична властивість множини $A \cap B$ складається з характеристичних властивостей множин A та B за допомогою сполучника “і”.

Перетином множини A – парних натуральних чисел – і множини B – двозначних натуральних чисел – буде множина з характеристичною властивістю елементів – “бути парним і двозначним натуральним числом”. Множина $A \cap B$ складається з парних двозначних чисел (сполучник “і” можна пропустити). Отримана множина не буде порожньою.

Наприклад, $24 \in A \cap B$, оскільки число 24 є парним і двозначним.

Об’єднання і перетин множин характеризуються наступними **законами операцій**.

1) Комутативність операцій об’єднання і перетину:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

2) Асоціативність операцій об’єднання і перетину:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3) Дистрибутивність операцій об’єднання і перетину:

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C).$$

4) Ідемпотентність операцій об’єднання і перетину:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

5) Об'єднання і перетин множини з порожньою множиною:

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

6) Об'єднання і перетин множини з універсальною множиною:

$$A \cup U = U, A \cap U = A.$$

Операції об'єднання і перетину можуть бути поширені і на випадок довільного скінченного числа множин:

— об'єднанням скінченного числа n множин A_i є множина, яка складається з елементів, кожний з яких належить хоча б одній із множин A_i , і записується $\bigcup_{i=1}^n A_i$;

— перетином скінченного числа n множин B_i є множина, яка складається з елементів, спільних для всіх множин одночасно, і записується $\bigcap_{i=1}^n B_i$.

Приклад 1.5. Дано множини $A = \{0; -2; 3; 4\}$, $B = \{1; 7; 3; 0\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A - B$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \setminus (A \cup B)$.

Розв'язування. $A \cup B = \{0; -2; 3; 4; 1; 7\}$; $A \cap B = \{0; 3\}$; $A \setminus B = \{0; -2; 3; 4\}$; $A - B = \{0; -2; 3; 4\}$; $A \setminus (A \cap B) = \{0; -2; 3; 4\}$; $A \setminus (A \cup B) = \{0; -2; 3; 4\}$.

3*. Різниця множин. Дана операція дає можливість визначити у множині наявні лише їй елементи і відкинути елементи, спільні з іншою множиною.

Означення. Різницею двох множин A та B називається сукупність елементів множини A , які не належать множині B .

За цієї операцією множина C буде мати лише наявні множині A елементи і не буде мати елементів множини B . Позначають цю операцію символом “ \setminus ” або “ $-$ ” і читають “ A мінус B ” або “різниця множин A та B ”. За означенням різниці двох множин A та B :

$$C = \begin{cases} A \setminus B, \\ A - B \end{cases} = \{x : x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Схематично різницю двох множин можна зобразити малюнком.

Означена операція є результатом відкидання від множини A елементів множини перетину множин $A \cap B$.

