Олег КУРИЛЯК

ПРАКТИЧНІ І ТЕОРЕТИЧНІ РОБОТИ З ГЕОМЕТРІЇ.

Трикутники

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72
К93

Куриляк О.

К93 Практичні і теоретичні роботи з геометрії. Трикутники / О. Куриляк. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 115 с.

ISBN 978-966-10-4005-1

У посібнику розглядаються властивості трикутників, причому стосовно конкретних видів трикутників подаються практичні й теоретичні роботи.

Теоретичні відомості з широким використанням методів аналітичної геометрії є основою для побудови як теоретичних, так і практичних робіт. Цікавим є те, що читачеві пропонується роль як дослідника-теоретика, так і дослідника-практика.

Цей посібник адресовано, в першу чергу, тим зацікавленим читачам, які прагнуть глибше осягнути геометрію. Може бути корисним також учителям математики при проведенні факультативнх занять чи як довідковий матеріал з вивчення й дослідження трикутників.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

ISBN 978-966-10-4005-1

Вступ

У підручнику[1] в довідниковому порядку розглядаються властивості трикутників, які досліджуються чи перевіряються у формі практичних і теоретичних робіт відносно конкретних трикутників. Всі необхідні теоретичні відомості подаються перед, а часто по ходу розгляду тих чи інших завдань з огляду зручності їх застосування, як і проведення практичної чи теоретичної робіт. У виконанні теоретичних робіт широко застосовуються методи аналітичної геометрії.

Адресовано читачеві, що вже закінчив загальноосвітню школу I–II ступенів, продовжує навчання і хоче самостійно займатися геометрією. Може бути також використаний вчителями математики на уроках геометрії, як один з практично-теоретичних методів викладання планіметрії, на факультативних заняттях чи як довідковий матеріал при вивченні або повторенні властивостей трикутників.

[1]навчально-методичний посібник (прим. автора)

In primis animi puritatem custodire, et rectam in studiis intentionem habere scholastici nostri conentur; nihil aliud in his, nisi divinam gloriam et animarum fructum quaerentes; et in suis orationibus gratiam, ut in doctrina proficiant, crebro petant, ut tandem idonei, sicut ab iis sperat Societas, ad vinaem Chisti Domini Nostri exemplo ac doctrina excolendam evadant[2].

[2]Найперше нехай наші школярі зберігають чистоту душі і у цьому напрямку під час навчання прикладають зусилля; нічого іншого у студіюванні нехай не шукають тільки Божу славу і пожиток для душ. А у своїх молитвах нехай часто просять ласку поступу у навчанні, щоб на кінець виявитися компетентними своїм прикладом як і навченістю леліяти виноградник Христа Господа нашого, чого і сподівається від них Товариство. (Взято з "Укладу студій Товариства Ісусового.")

Товариство Ісуса — орден Єзуїтів, засновником якого у XVI ст. був святий отець Ігнатій Лойола. Відоме у Європі і світі своєю релігійною та, зокрема, освітньою діяльністю. Серед отців Єзуїтів було і є багато видатних богословів, місіонерів, вчених, церковних діячів. Єзуїтом є теперішній Папа Римський Франциск. (Переклад з латини і примітка автора)

Передмова

Пропонуємо читачеві підручник з геометрії, в якому розглядаються трикутники та їх властивості. Без сумніву, підручник з математики треба читати уважно, роздумувати над змістом прочитаного, запам'ятовувати, виконувати вправи. Роль читача в нашому підручнику дещо інша, можливо цікавіша. Ми йому пропонуємо вже з самого початку роль дослідника-практика, спорядженого необхідним креслярським приладдям та калькулятором, готового по ходу читання будувати геометричні фігури, вимірювати довжини відрізків, величини кутів, обчислювати і співставляти отримані результати. Пропонуємо також роль дослідника-теоретика, що шукає теоретичні способи підходу до поставленої мети.

Хоча немає у нашому тексті ані поезії, ані лірики, зате перед кожним завданням є чіткі обриси означень, теорем, співвідношень, а хто любить абстрактне образотворче мистецтво, то є достатня кількість геометричних етюдів і картин.

Як правило до виконання кожного завдання пропонуємо два шляхи: практичну і теоретичну роботи, які на своєму рівні повинні дати результати відносно тих самих шуканих величин.

Практичні роботи мають, звичайно, свою емоційно-чуттєву складову: ми можемо побудувати фігуру, її внутрішні чи зовнішні елементи, як будівничі можемо оцінювати зором цілість будови і доторкатися до неї вимірювальними приладами, чи виконати, як кажемо, приблизні обчислення (використовуючи калькулятор), щоб оцінити "вартість" її окремих фрагментів чи цілості. Результати практичної роботи і є ті "вартості", які виражаються приблизними значеннями, оскільки не були знайдені точно. Притому теоретичні роботи вимагають знання формул і навичок користування ними, вміння робити теоретичні вимірювання, виконувати математичні перетворення, розв'язувати рівняння, системи рівнянь, логічно мислити, осмислювати кожен крок, кожен етап і весь шлях для отримання теоретичних результатів, які ми називаємо точними значеннями (сюди також можна включити доведення, які є конструктивним, хоча вузьким спектром теоретичних робіт).

Цікавим і, здається, інтригуючим буде для нашого читача знаходження відносної похибки приблизного значення шуканої величини. Коли під час виконання практичної роботи знайдено приблизне значення цієї величини, а під час теоретичної — точне, то відносна похибка, якби демонструє певне оціночне взаємовідношення між знайденими значеннями шуканої величини і є одночасно "критерієм" правдоподібності двох результатів (особливо у психологічному вимірі).

Виконання практичних робіт формує практичні навички і вміння, практичний досвід, який одночасно є добрим грунтом для глибшого розуміння теорії. А теоретичні роботи дають можливість пригадати вже відомі з теорії факти, перевірити як вони працюють у конкретному випадку, зрештою критично поставитися до них, шукаючи підтверджень їх істинності. Все це спонукає читача усвідомлювати себе як дослідника, який водночас і вчиться, і експериментує, і перевіряє; сприяє заглибленню в предмет досліджень, його логічну математичну будову.

На думку автора, хто не пошкодує часу, зусиль і праці на читання, побудову фігур, вимірювання, скрупульозне обчислення, аналізування і узагальнення тексту підручника, а особливо на виконання запропонованих самостійних робіт, знайде для себе неабиякий пожиток.

"Нехай вони (школярі прим. автора) вирішать для себе постійно і серйозно прикладати розум до навчання та остерігатися того, щоб у запалі студій не остигла любов до основних чеснот і побожного життя. Нехай так себе взаємно переконують, що нічого Богові милішого у колегіях не вчинять, як тільки старанно присвятять себе навчанню, з тою настановою, про яку вже говорилося."[3]

Та все, звичайно, поволі, крок за кроком від простого до складнішого. І знай, що саме так можна осягнути дуже багато.

[3]Уклад студій Товариства Ісусовго. Поєднання основних чеснот і студій. (Переклад з латини автора)

Тож перед нами вже відкриті дороги, щоб рушати далі. Бажаю успіхів!

Умовні позначення і терміни

1. Відрізки:

1.1. AB — відрізок AB;

1.2. AB — точне значення довжини відрізка AB;

1.3. $\widetilde{AB}$ — приблизне значення довжини відрізка AB;

1.4. $A\widetilde{B}$ — відрізок AB, у якому координати точки A точні значення, точки B приблизні значення;

1.5. $A\widetilde{B}$ — приблизне значення довжини відрізка AB;

1.6. a — відрізок a;

1.7. a — точне значення довжини відрізка a;

1.8. $\widetilde{a}$ — приблизне значення довжини відрізка a.

2. Прямі:

2.1. AB — пряма AB;

2.2. a — пряма a;

2.3. $a \| b$ — пряма a паралельна прямій b;

2.4. $a \perp b$ — пряма a перпендикулярна прямій b.

3. Точки:

3.1. A — точка A, координати якої точні;

3.2. $\widetilde{A}$ — точка $\widetilde{A}$, координати якої приблизні.

4. Кути:

4.1. $\angle A$ — кут A;

4.2. $\angle A$ — точне значення градусної міри кута A;

4.3. $\angle\widetilde{A}$ — приблизне значення градусної міри кута A;

4.4. α — кут α або площина α;

4.5. α — точне значення градусної міри кута α;

4.6. $\widetilde{\alpha}$ — приблизне значення градусної міри кута α.

5. Тригонометричні співвідношення:

5.1. $\sin\angle A$ — синус точного значення кута A;

5.2. $\sin\widetilde{\angle A}$ — синус приблизного значення кута A;

5.3. $\widetilde{\sin}\angle A$ — приблизне значення синуса кута A.

6. Відносна похибка:

6.1. $\varepsilon(\widetilde{AB})$ — відносна похибка приблизного значення довжини відрізка $\widetilde{AB}$;

6.2. $\varepsilon(\widetilde{\angle A})$ — відносна похибка приблизного значення градусної міри $\angle A$.

7. Множини:

7.1. $\{1, 2, 3\}$ — множина, елементами якої є числа 1, 2, 3;

7.2. F — фігура F, як множина точок на площині;

7.3. $y = f(x), f(x, y) = 0$ — графік функції і графік рівняння відповідно, як множина точок на площині.

8. Значок належності:

8.1. $X \in F$ — точка X належить фігурі F($X \notin F$ — точка X не належить фігурі F);

8.2. $A \in a$ — точка A належить прямій a($A \notin a$ — точка A не належить прямій a);

9. Значок відповідності:

9.1. $X \to X'$ — точці X ставиться у відповідність точка X';

9.2. $F \xrightarrow{f} F'$ — фігурі F ставиться у відповідність фігура F' при застосуванні перетворення f.

10. $\Rightarrow$ — "звідси випливає, що ...".

11. $\forall$ — будь-який.

12. Площина xy — площина, в якій введено прямокутну декартову систему координат.

13. п.1 — параграф перший.

14. Терміни:

14.1. практична робота — термін для визначення виду діяльності, пов'язаної з побудовою геометричних фігур, знаходженням величин за допомогою вимірювальних приладів, виконанням приблизних обчислень;

14.2. теоретична робота — термін для визначення виду діяльності, пов'язаної з знаходженням величин за допомогою теоретичних вимірювань, які передбачають застосування формул, як також знаходженням самих формул, які дають можливість зробити відповідні вимірювання. Сюди також відносяться доведення властивостей геометричних фігур, які операються на аксіоми, означення і твердження (теореми).

1. Точка, пряма, площина, простір, множина. Аксіоми. Фігура. Прямокутна декартова система координат. Як задати фігуру?

Такі поняття в геометрії як точка, пряма, площина, простір, множина не визначаються. Ми маємо певні уявлення про них: точка не має вимірів (довжини, ширини, висоти), пряма не має кінців, простір не має меж, множина складається з своїх елементів, або позбавлена їх (порожня множина)...

Ці поняття задають об'єкти наших наступних досліджень. Щоб більше довідатися про них звернемося до аксіом. Як відомо, аксіоми задають елементарні (очевидні з пункту зору нашого життєвого досвіду) їх властивості.

Аксіома належності (на площині). *Для будь-яких точок A і B існує не більше однієї прямої, що проходить через ці точки.* Очевидно, що через дві різні точки на листку паперу ми можемо провести тільки одну пряму.

Аксіома порядку (на площині). *Серед будь-яких трьох різних точок, які лежать на прямій, існує не більше однієї точки, що лежить між двома іншими.* Цей факт є також очевидний.

Аксіома рівності (на площині). *Якщо відрізок A_1B_1 і відрізок A_2B_2 рівні одному і тому ж відрізку AB, то відрізки A_1B_1 і A_2B_2 рівні.* Такий факт легко перевірити, використовуючи циркуль.

Аксіома належності (для простору). *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну.*

Вся сукупність аксіом складає аксіоматику геометрії, яка встановлює "порядок і справедливість" між геометричними об'єктами. І так як юрист повинен знати право, так геометр повинен знати аксіоматику.

Означення 1. *Геометричною фігурою* у просторі або на площині називають довільну множину точок у просторі або на площині.

Зауваження 1. Фігура, яка складається з однієї точки теж згідно з означення 1 є геометричною фігурою. Ця фігура — точка. Фігури ж, яка складається з порожньої множини точок не існує.

Зауваження 2. Говорять, що якась точка A належить фігурі F, якщо вона містить цю точку серед множин своїх точок і записують це так: $A \in F$. В протилежному випадку $A \notin F$; говорять, що відрізок AB належить прямій a, якщо вся множина точок відрізка належить множині точок прямої (або, що пряма a містить відрізок AB, коли частина її точок складається з усіх точок відрізка).

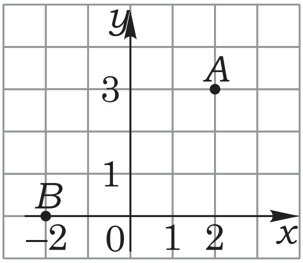
Зауваження 3. Частина геометрії, в якій вивчаються властивості фігур на площині називається *планіметрією.* Оскільки в практичних і теоретичних роботах ми будемо досліджувати властивості геометричних фігур на площині, так званих плоских фігур, то надалі нас будуть цікавити лише ті об'єкти, що належать одній площині.

Тепер повернемося до останньої аксіоми належності для простору. Припустимо, що ми у просторі зафіксували дві взаємно перпендикулярні прямі. Згідно з твердженням цієї аксіоми через них можна провести єдину площину.

Означення 2. *Прямокутною декартовою*[4] *системою координат на площині* називають впорядковану пару взаємно перпендикулярних прямих, на кожній з яких вказано стрілкою додатній напрям і вибрані одиничні відрізки.

Зауваження 4. Горизонтальну пряму x називають *віссю* x, або *віссю абсцис*, вертикальну пряму y називають *віссю* y, або *віссю ординат* (див. мал. 1), точку перетину прямих x та y — *початком координат* (точка O). За одиничні відрізки на прямих вибираємо відрізки довжиною 1 см. В такій системі координат площина

[4]Систему координат назвали декартовою на честь відомого французького вченого, філософа і математика Рене Декарта (1596–1650), співзасновника аналітичної геометрії, який свою початкову освіту (1604–1612) здобув у єзуїтській колегії, де і отримав грунтовну математичну освіту.



Мал. 1

“фіксована”, кожна точка має свій незмінний числовий адрес (свої координати). Координати точки A можна знайти використовуючи найпростіший дитячий алгоритм: по осі x “вулиця 2”, по осі y “дім 3”, тобто $A(2;3)$. Координату точки A по осі x називають абсцисою, по осі y — ординатою. Аналогічно $B(-2;0), O(0;0)$.

Зауваження 5. Якщо на площині задана прямокутна декартова система координат, то її називають *площиною xy.*

Зауваження 6. Ми розглянемо два способи переміщення площини відносно системи координат, які називають перетвореннями площини. В результаті перетворення площини її точки за певним алгоритмом змінюють свої “адреси” на інші.

Введення декартової системи координат на площині дає можливості застосовувати алгебру в геометрії, тобто розв’язувати геометричні задачі алгебраїчним способом: задавати геометричні фігури алгебраїчними рівняннями і досліджувати їх властивості шляхом дослідження властивостей відповідних рівнянь. Таку геометрію називають аналітичною. Вона є одним з розділів сучасної геометрії. Основні принципи (правила) аналітичної геометрії вперше сформулював Рене Декарт у 1637 р., а такі відомі вчені, як Ґотфрід Лейбніц, Ісаак Ньютон та Леонард Ейлер надали їй сучасної структури.

Означення 3. *Графіком функції $y = f(x)$* називають множину точок на площині xy з координатами $(x; f(x))$.

Нагадаємо, що функцією у алгебрі називають таку відповідність, при якій кожному x з області визначення функції ставиться єдине y з області її значень.

Наприклад розглянемо лінійну функцію $y = 2x - 7$, якщо $x = -3$, то $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 7 = -13$, отже точка з координатами $(x; f(x)) = (-3; -13)$ на площині xy належить графіку цієї функції. Очевидно (означення 1), що графік функції є фігурою і ця фігура має алгебраїчну назву $y = f(x)$(пряма $y = 2x - 7$).

Аналогічно рівняння з двома змінними $f(x, y) = 0$ має розв'язком пару чисел $(x; y)$, які (при підстановці) перетворюють його у правильну рівність. Цій парі чисел на площині xy відповідає точка з координатами $(x; y)$, яку називають розв'язком рівняння.

Означення 4. *Графіком рівняння з двома змінними* $f(x, y) = 0$ є множина точок $(x; y)$ на площині xy, які є розв'язками цього рівняння.

Очевидно (означення 1), що графік рівняння є фігурою, яка задається рівнянням $f(x, y) = 0$ (коло $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 1$).

Задати фігуру на площині xy означає вказати там її точне місце. Як ми бачили вище, це можна зробити алгебраїчним способом: $y = f(x)$, $f(x, y) = 0$. Це можна зробити також, вказавши координати вершин фігури. Наприклад $\triangle ABC$ можна задати, вказавши координати його вершин — точок A, B, C. Також фігура вважається заданою на площині xy тоді, коли вона там вже побудована.

2. Відрізок. Відстань між двома точками. Точне і приблизне значення вимірюваної величини. Відносна точність приблизного значення

Означення 5. *Відрізок* — це множина точок прямої, що лежать між двома заданими на ній точками. Ці точки називають *кінцями відрізка.*