

ВІД АВТОРА

З 2008-го року складання зовнішнього незалежного оцінювання (далі ЗНО) стає обов'язковим для бажаючих вступити до вищих навчальних закладів, хоча випускне тестування запровадили набагато раніше. Від самого початку і по 2009-й рік включно я брав участь у перевірці третьої частини ЗНО як в якості експерта, так і в якості старшого інструктора і, навіть, в якості куратора. Тому специфіку завдань і тематику ЗНО знаю, як то кажуть, зсередини. Структура завдань була трирівневою. Перша частина містила завдання на вибір правильної відповіді, і кожне завдання оцінювалось в 1 бал. Друга частина містила завдання, до яких у спеціально відведені клітинки бланку відповідей треба було вписати числове значення відповіді; кожне завдання цієї частини оцінювалось у 2 бали. Третя частина містила завдання, до яких абітурієнт мав надати детальні пояснення. Оцінювались завдання цієї частини від 4-ох до 7-ми балів, в залежності від рівня складності, і перевірялись фахівцями, що залучались центрами моніторингу якості освіти з числа найдосвідченіших викладачів.

З 2009-го року держава відмовилась від такої структури ЗНО. Перша частина залишилась такою ж, і кількість балів за кожне завдання не змінилась. Друга частина стала містити завдання на встановлення відповідності між запитаннями (1–4) та відповідями до них (А–Д). Кожне завдання цієї частини оцінювалось від 0 до 4 балів, в залежності від кількості наведених правильних відповідей. Третя ж частина містить завдання, до кожного з яких абітурієнт має вписати у бланк відповідей числове значення розв'язку. Оцінка за кожну правильно записану відповідь — 2 бали. Особливістю цього тестування є те, що бланк відповідей перевіряється лише комп'ютером, без залучення фахівців. Може це й на краще, бо економляться державні кошти, які треба було б заплатити фахівцям, що перевіряли б третю частину. Але, як на мене, втрачено творчий підхід до перевірки складних завдань.

Як би там не було, але на сьогоднішній день результати ЗНО є основним чинником вступу до вищих навчальних закладів. Пропрацювавши 6 років у системі довузівської підготовки в рамках інституту довузівської підготовки при національному технічному університеті України «КПІ», а потім при фізико-технічному інституті (один з

факультетів НТУУ «КПІ»), створив власну, більш гнучку програму курсової довузівської підготовки абітурієнтів, і вже чотири роки випускники моїх курсів *стовідсотково* вступають до різних вищих навчальних закладів України на бюджетну форму навчання!

Посібник, передусім, адресовано *учням випускних 11-их класів* загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, коледжів, гімназій тощо, *випускникам* минулих років, що складатимуть ЗНО з математики; *викладачам* системи довузівської підготовки, а також призначено для *факультативних занять*. Посібник містить 16 тематичних розділів і 17-й розділ — повторення. Кожна тема завершується тематичним тестом, що є зворотним зв'язком між слухачами курсів підготовки та викладачем. Тематичні тести розроблені у двох варіантах і схожі, за структурою, на тести ЗНО. Всі вони, як і 17-й випускний тест (пробне тестування) містяться у додатку «Тести. Додаток до посібника “Повний курс підготовки до ЗНО з математики”». 17-й тест подано у двох варіантах: «Зошит 1» і «Зошит 2». Але сімнадцятий (випускний) тест існує у 8-ми (!) варіантах, замовити які можна в автора за електронною адресою africa91@ukr.net, як і інші тематичні тести. Всі вони набрані у Word-і і готові до друку у форматі А4 на будь-якому принтері, який є сьогодні чи не в кожній сім'ї. Це має зацікавити *викладачів, що ведуть курсову довузівську підготовку*.

Чотирирічна практика показала, що, займаючись тричі на тиждень по три академічні години на день, з жовтня по квітень включно, 252-ти годин достатньо для того, щоб вичитати всю програму курсової підготовки.

До всіх 1548-ми задач посібника наведено відповіді. До тематичних тестів і до двох варіантів випускного тесту відповіді наведено в *Розв'язнику*, який видано окремо. Він буде корисним для учнів, що не мають змогу відвідувати курси підготовки, бо в ньому надано розв'язки всіх ключових задач збірки та задач підвищеної складності.

Необхідну теоретичну складову в посібнику розміщено, як правило, на початку теми. Вона дає змогу не залучати до підготовчого процесу інші збірники та підручники. В кінці видання компактно зібрано довідниковий матеріал.

У посібнику наведено завдання ЗНО з математики з відповідями за 2010-й, 2011-й та 2012-й роки.

Бажаю Вам успіху, шановний читачу, здійснення мрій і прагнень!

Тема 1

ВІДСОТКИ. ЧИСЛОВІ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

Заняття №1–3

Відсотки

Знаходження відсотка від числа

Щоб знайти відсоток від числа, треба число помножити на цей відсоток. Для зручності відсоток можна перевести у десятковий дріб.

Задача 1.1. З молока одержують 10% сиру. Скільки сиру одержать зі 40 л молока?

Відсоткове відношення чисел

Щоб знайти відсоткове відношення чисел, треба одне число поділити на інше і їхню частку помножити на 100%.

Задача 1.2. З 20 учнів класу 3 відмінники. Який відсоток усіх учнів класу складають відмінники?

Знаходження числа за його відсотком

Щоб знайти число за його відсотком, треба відоме число розділити на відповідний відсоток, переведений у десятковий дріб.

Задача 1.3. У кіоску в перший день продали 38% усіх зошитів, у другий день 55% усіх зошитів, а в третій — решту 126 зошитів. Скільки разом зошитів продали в кіоску за три дні?

Складні відсотки

$$n \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right)^k,$$

де n — початкова сума, k — кількість років користування депозитом банку, α — банківський депозитний відсоток.

Задача 1.4. Зарплату робітнику підвищили спочатку на 15%, а потім через рік — ще на 20%. На скільки відсотків підвищилась зарплата робітника в порівнянні з початковою?

Задача 1.5. Вкладник вніс в Ощадбанк 3000 грн. Ощадбанк нараховує щорічно 12% від суми внеску. Якою стане сума на рахунку вкладника через 4 роки?

Властивості степенів та арифметичні дії з ними

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n. \quad \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (a^m)^n = a^{mn}. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$a^0 = 1, a \neq 0. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Знайдіть значення числових виразів (1.6 – 1.9):

1.6. $\left(-\frac{2}{3} \right)^{-2}$.

1.7. $\frac{14^{15}}{2^{13} \cdot 7^{14}}$.

1.8. $\frac{34^{10}}{2^{11} \cdot 17^{12}} : \frac{7^6 \cdot 2^7}{14^8}$.

1.9. $\left(\frac{16^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-1,6}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{9}}} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Запишіть вирази у вигляді степеня з основою x (1.10 – 1.13):

1.10. $(-x)^2 \cdot x^3$. 1.11. $x^3 \cdot (-x)^{-4}$. 1.12. $\left(\frac{x}{x^6} \right)^{-7}$. 1.13. $x^{n^2-4} : x^{n^2-n}$.

Формули скороченого множення.**Тотожні перетворення алгебраїчних виразів**

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Вписані та описані кола. Теорема Птолемея

У чотирикутнику, вписаному в коло, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін, $d_1 d_2 = ac + be$ (рис. 11.14).

У чотирикутнику, описаному навколо кола, суми протилежних сторін рівні.

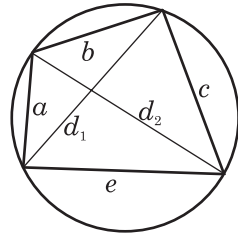


Рис. 11.14

Знайдіть довжину кола, описаного навколо (11.57 – 11.64):

- 11.57. квадрата зі стороною a .
 11.58. прямокутника зі сторонами a і b .
 11.59. правильного трикутника зі стороною a .
 11.60. прямокутного трикутника з катетами a і b .
 11.61. прямокутного трикутника з катетом a і протилежним кутом α .
 11.62. рівнобедреного трикутника з основою a і висотою h , проведеною до основи.
 11.63. рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b .
 11.64. прямокутника зі стороною a і гострим кутом α між діагоналями.

Знайдіть довжину кола, вписаного (11.65 – 11.72):

- 11.65. у квадрат зі стороною a .
 11.66. у рівносторонній трикутник зі стороною a .
 11.67. у рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою c .
 11.68. у прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α .
 11.69. у прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього кутом α .
 11.70. у рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α , протилежним основі.
 11.71. у рівнобедрений трикутник з кутом α при основі і висотою h , опущеною на основу.
 11.72. у рівнобедрену трапецію з більшою основою a і гострим кутом α .

Розв'яжіть задачі (11.73 – 11.76):

- 11.73. Обчисліть площу рівнобедреної трапеції, описаної навколо кола з радіусом r , якщо відомо, що її бічна сторона дорівнює c .
 11.74. Коло дотикається до більшого катета прямокутного трикутника, проходить через вершину протилежного гострого кута і має центр на гіпотенузі. Знайдіть його радіус, якщо катети дорівнюють 3 см і 4 см.

11.75. Навколо кола з радіусом r описано рівнобедрений трикутник із кутом 120° . Знайдіть його сторони.

11.76. Основа трикутника дорівнює 12 см, а сума бічних сторін — 20 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до основи, аби при цьому його площа була найбільшою.

Заняття №157–159

Практикум з розв'язування задач

Розв'яжіть задачі (11.77–11.80):

11.77. На рис. 11.15 зображено прямокутний трикутник ABC , гіпотенуза якого дорівнює 6, а гострий кут — 60° . На гіпотенузі AB побудовано рівносторонній $\triangle ABD$, а на катеті CB — рівносторонній $\triangle CBE$. Установіть відповідність між площами заданих фігур (1–4) і числовими значеннями (А–Д).

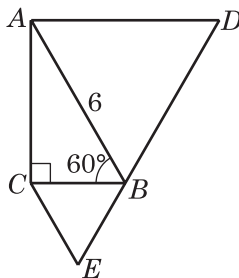


Рис. 11.15

- | Площа | Числове значення |
|--------------------------|--------------------------|
| 1 Площа трикутника ABC | А $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ |
| 2 Площа трикутника CBE | Б $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ |
| 3 Площа фігури $ADBC$ | В $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ |
| 4 Площа трикутника ADC | Г $12\sqrt{3}$ |
| | Д $9\sqrt{3}$ |



11.78. На рис. 11.16 зображено трикутник ABC . Установіть відповідність між тригонометричними функціями заданих кутів (1–4) і їхніми числовими значеннями (А–Д).

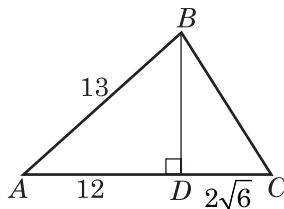


Рис. 11.16

$$8. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C.$$

$$9. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C.$$

$$10. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

Комбінаторика

1. Розміщення:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-2))(n-(m-1)), \text{ або } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

2. Перестановки: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

3. Комбінації: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

4. Біном Ньютона:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + \dots + C_n^m a^m x^{n-m} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n.$$

5. Формула загального члена розкладу бінома Ньютона:

$$T_{m+1} = C_n^m a^m x^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m x^{n-m}.$$

Властивості комбінаторики

1. $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \Rightarrow C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. Якщо $m = n$, то $A_n^m = P_n$.
3. При $m = n$, $A_n^m = P_n$, $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$, $\frac{n!}{0!} = n!$, $\Rightarrow 0! = 1$.

Формули теорії ймовірностей

1. Ймовірність події $P = \frac{m}{n}$, де m — кількість очікуваних подій, n — кількість усіх можливих подій.
2. Формула Бернуллі: $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $q = 1 - p$.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г.В. Хитромудрий модуль. К.: «Поліграфсервіс», 2001.
2. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Перші зустрічі з параметром. — К.: ФАКТ, 2004.
3. Гальперина А.Р. Математика. Типові тестові завдання. — К.: Літера ЛТД, 2012.
4. Дуда О.Д., Романюк В.Я., Балінська Л.А. Алгебра. Завдання для підготовки до екзамену в 9-их класах. — Львів: ВНТЛ, 1999.
5. Дуда О.Д., Романюк В.Я., Балінська Л.А. Геометрія. Завдання для підготовки до екзамену в 9-их класах. — Львів: ВНТЛ, 1999.
6. Істер А.С. 200 варіантів вступительного екзамена по математиці. — Каменец-Подольський: АБЕТКА, 2001.
7. Істер О.С. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. — К.: ФАКТ, 1997.
8. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина II. Геометрія. Л.: ВНТЛ, 1997.
9. Саакян С.М., Гольдман А.М., Денисов Д.В. Задачі по алгебре и началам анализа для 10 – 11 классов. М.: Просвещение, 1990.
10. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників до вузів. — К.: Вища школа, 1992.
11. Титаренко О.М. 5770 задач з математики з відповідями. — Х.: Торсінг Плюс, 2005.
12. Український центр оцінювання. Зовнішнє незалежнє оцінювання, 2008. Тест із математики.
13. Український центр оцінювання. Зовнішнє незалежнє оцінювання, 2009. Тест із математики.
14. Український центр оцінювання. Зовнішнє незалежнє оцінювання, 2010. Тест із математики.
15. Український центр оцінювання. Зовнішнє незалежнє оцінювання, 2011. Тест із математики.
16. Український центр оцінювання. Зовнішнє незалежнє оцінювання, 2012. Тест із математики.
17. Ясінський В.В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ». — К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2005.

ЗМІСТ

Від автора	3
Тема 1. Відсотки. Числові та алгебраїчні вирази	5
Тема 2. Алгебраїчні рівняння	12
Тема 3. Рівняння з параметрами	20
Тема 4. Системи алгебраїчних рівнянь з двома змінними	28
Тема 5. Нерівності та їх системи	34
Тема 6. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи	41
Тема 7. Функції, їх властивості та графіки	45
Тема 8. Прогресії. Ціла та дробова частини числа	51
Тема 9. Тригонометричні функції, їх графіки та властивості	56
Тема 10. Показникова та логарифмічна функції	80
Тема 11. Планіметрія	90
Тема 12. Декартові координати. Вектори	108
Тема 13. Стереометрія	118
Тема 14. Похідна та її застосування	132
Тема 15. Первісна та інтеграл	140
Тема 16. Комбінаторика. Теорія ймовірностей. Математична статистика	144
Тема 17. Повторення	154
Відповіді	184
Тема 1. Відсотки. Числові та алгебраїчні вирази	184
Тема 2. Алгебраїчні рівняння	185
Тема 3. Рівняння з параметрами	186
Тема 4. Системи алгебраїчних рівнянь з двома змінними	188
Тема 5. Нерівності та їх системи	189
Тема 6. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи	191

Тема 7. Функції, їх властивості та графіки	191
Тема 8. Прогресії. Ціла та дробова частини числа	197
Тема 9. Тригонометричні функції, їх графіки та властивості	198
Тема 10. Показникова та логарифмічна функції	202
Тема 11. Планіметрія	204
Тема 12. Декартові координати. Вектори	205
Тема 13. Стереометрія	206
Тема 14. Похідна та її застосування	207
Тема 15. Первісна та інтеграл	208
Тема 16. Комбінаторика. Теорія ймовірностей. Математична статистика	209
Тема 17. Повторення	209
До ЗНО-2010. Зошит 13	211
До ЗНО-2011. Зошит 13	211
До ЗНО-2012. Зошит 13	211
Довідник	212
Формули скороченого множення	212
Елементарні перетворення графіків функцій	212
Основні формули тригонометрії	214
Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями	216
Властивості степенів	219
Властивості логарифмів	220
Трикутники	220
Чотирикутники	222
Площа трикутника	222
Декартові координати	222
Вектори	224
Похідні елементарних функцій та правила їх обчислення	225
Таблиця основних невизначених інтегралів	226
Комбінаторика	227
Властивості комбінаторики	228
Формули теорії ймовірностей	228
Використана література	229