Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатися перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед усіх різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку його проводили для учнів Донецької області, згодом ці межі розширили, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

Завдання конкурсу складаються з двох частин. Розв’язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв’язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв’язанні. На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв’язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість завдань не є оригінальною, вона запозичена з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптована для конкурсу.

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2009 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв’язками за 2005, 2006, 2007, 2008 роки надруковано у першому, другому, третьому і четвертому випусках «Математичний конкурс. 4–9 класи», що вийшли в серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв’язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для вчителів.

Завдання заочного туру конкурсу

4–5 класи

Перша частина завдань

1. В автобусі 40 місць. На кожних чотирьох пасажирів, що сидять, припадає ще одне вільне місце. Скільки пасажирів в автобусі?

А	Б	В	Г
24	30	32	36

2. На шкільному подвір'ї було 11 дівчаток і 9 хлопчиків. Яка найменша кількість дівчаток і хлопчиків має до них приєднатися, щоб їх усіх можна було поділити на 5 груп з однаковою кількістю дівчаток і хлопчиків у кожній групі?

А	Б	В	Г
4 і 1	1 і 4	0 і 0	5 і 5

3. Листоноша сказав: «Я сьогодні 5 разів піднімався на 10-й поверх і 10 разів на 5-й. Якби я не спускався кожного разу, то вже піднявся би на ...»

А	Б	В	Г
100-й поверх	85-й поверх	86-й поверх	99-й поверх

4. У прямокутному кінозалі кількість рядів у 36 разів менша від загальної кількості місць і в 3 рази менша від кількості місць у кожному ряду. На скільки більше місць в ряду, ніж рядів у кінозалі?

А	Б	В	Г
На 18	На 12	На 24	На 48

5. В учнів трьох класів проходив урок фізкультури. У шеренгу вишикувалося 90 учнів, чиї спортивні форми були пронумеровані від 10 до 99. Тренер з гімнастики відібрав для занять тих учнів, номери яких ділилися на 4. З них старший тренер з гімнастики відібрав для удосконалення опорного стрибка учнів, номери яких ділилися і на 3. Скільки учнів відібрав старший тренер?

А	Б	В	Г
7	8	9	12

Виразивши r^2 через a, отримаємо рівняння: $2x^2 + ax - a^2 = 0$. Це рівняння має корінь $x = \dfrac{a}{2}$, тобто сторона середнього квадрата вдвічі менша від сторони великого. А це означає, що площа середнього квадрата вчетверо менша від площі великого. Щоб знайти площу маленького квадрата, обчислимо його сторону y в такий самий спосіб, як і x: $r^2 = \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} + y\right)^2 + y^2$, або $a^2 + \dfrac{a^2}{4} = a^2 + 2ay + 2y^2$. Звідси маємо рівняння: $8y^2 + 8ay - a^2 = 0$. Знайдемо його додатний корінь:

$$y = \frac{-8a + \sqrt{64a^2 + 32a^2}}{16} = \frac{-8a + 4\sqrt{6}a}{16} = \frac{a}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$

Тоді площа маленького квадрата $S_1 = \dfrac{a^2}{8}\left(5 - 2\sqrt{6}\right)$. Можливість необмеженого продовження побудови квадратів видно з рис. 2. Після кожної побудови буде залишатися півсегмента кола. Яким би маленьким він не був, можна в ньому розмістити квадрат, як це вимагається в задачі. Цікаво дослідити послідовність довжин сторін цих квадратів.■

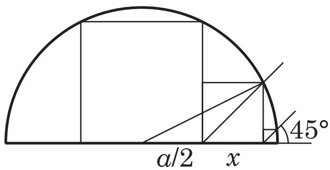


Рис. 2

10. Нехай квадрат є зображенням поля більярдного стола, і куля направлена з верхнього лівого кута поля. Завдяки симетрії можна вважати, що першого разу куля відбилася від нижнього борта. При цьому можливі два випадки:

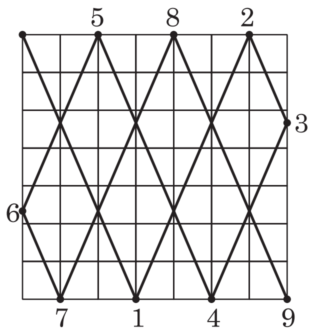


Рис. 1

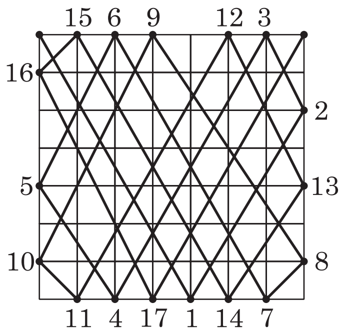


Рис. 2

1) точка, в яку влучила куля, поділяє сторону квадрата у відношенні 3:4, рахуючи від лівого нижнього кута;

2) точка, в яку влучила куля, поділяє сторону квадрата у відношенні 3:4, рахуючи від правого нижнього кута.

На рис. 1 і рис. 2 зображено траєкторію руху кулі в кожному з цих випадків. Під час побудови використано закон відбиття, вказаний в умові. В обох випадках куля потрапляє в лузу після деякої кількості ударів об стінки більярдного стола. У першому випадку таких ударів 8, у другому — 17. Це свідчить про залежність кількості разів відбиття від відношення. Дослідіть, як зміниться ця кількість при зміні величини відношення. ■

Розв'язки завдань очного туру конкурсу

4 клас

Відповіді

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	Г	Б	Г	А	Б	А	В	В	Б

Розв'язки

1. Висота підлоги веранди дорівнює сумі висоти першої сходинки і висоти інших семи сходинок, тобто: $10 + 15 \cdot 7 = 115$ (см). ■

Відповідь: Б. 115 см.

2. Сума чисел, що стоять у всіх рядках, дорівнює $6 + 15 + 24 = 45$. Оскільки сума чисел, що стоять у всіх стовпцях, та сама, а сума чисел, що стоять у перших двох стовпцях, дорівнює $14 + 15 = 29$, то сума чисел третього стовпця дорівнює $45 - 29 = 16$. ■

Відповідь: Г. 16.

3. Від літери «Ч» є два шляхи до літери «И», так само від літери «И» є два шляхи до літери «С». Отже, від літери «Ч» є $2 \cdot 2 = 4$ шляхи до літери «С». Продовжуючи далі, отримаємо $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ шляхів від літери «Ч» до літери «О». ■

Відповідь: Б. 16.

4. Першим ходом гравець міг виставити дубль або не дубль. У першому випадку до дубля можна приставити 6 пластинок, а у другому випадку — з кожного боку можна приставити по 6 пластинок (усього 12 пластинок). Отже, всіх варіантів — $6 + 6 + 6 = 18$. ■

Відповідь: Г. 18.

5. Кількість дітей, що раніше від Дениса закінчили змагання, приймемо за одну частину. Тоді кількість дітей, що прибули до фінішу пізніше за нього, становитиме три частини. Всього у кросі, крім Дениса, взяли участь $37 - 1 = 36$ дітей, що становить $1 + 3 = 4$ частини. На одну частину припадає $36 : 4 = 9$ дітей, тобто раніше від Дениса закінчили змагання 9 дітей. Отже, Денис прибув до фінішу десятим. ■

Відповідь: А. 10-м.

6. Оскільки ліфт зупиниться на четвертому поверсі, то двоє школярів підніматимуться на верхні поверхи, а двоє спускатимуться на нижні поверхи. Загальна кількість розчарувань дорівнюватиме $1 + 2 + 2(1 + 2) = 9$. ■

Відповідь: Б. 9.

7. Очевидно, що після завершення всіх перекладань у кожній коробці буде щонайменше одна кулька. Тому в одній коробочці можна зібрати не більш ніж $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) – 5 = 16$ кульок. Як можна зібрати в одній коробочці 16 кульок, видно з такої послідовності перекладань: (6 5 4 3 2 1) → (8 5 2 3 2 1) → (8 6 1 3 2 1) → (11 3 1 3 2 1) → (11 4 1 3 1 1) → (13 2 1 3 1 1) → (13 1 1 4 1 1) → (15 1 1 2 1 1) → (16 1 1 1 1 1). ■

Відповідь: А. 16.

8. Перший автомобіль за одну годину долає 1000 м $\times 60 = 60\,000$ м, або 60 км. Другий автомобіль за одну годину долає 90 км, тобто на 30 км більше від першого. ■

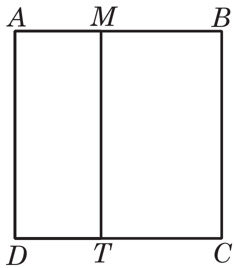
Відповідь: В. На 30 км.

9. Кількість зіграних ігор буде найбільшою, якщо команди досягнуть рахунку 4 : 4. Тоді наступна, дев’ята гра буде останньою. ■

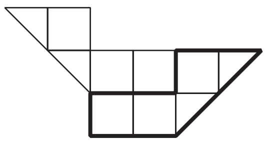
Відповідь: В. 9.

10. Прямокутник *AMTD* має сторони завдовжки 12 см і 5 см, його периметр дорівнює 34 см. Сторони прямокутника *MBCT* дорівнюють 12 см і $12 – 5 = 7$ см. Його периметр дорівнює 38 см, що на 4 см більше від периметра прямокутника *AMTD*. ■

Відповідь: Б. На 4 см.

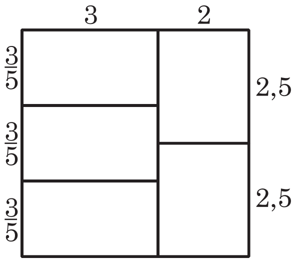


11. Розв’язок наведено на рисунку. ■

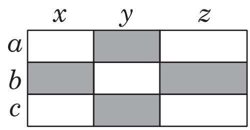


12. Нехай цифра одиниць становить одну частину, тоді цифра десятків — дві, а сума цифр — три. Отже, на одну частину припадає

12. На рисунку зображено розбиття квадрата з розмірами 5×5 м на 5 прямокутників, площа кожного з яких однакова і дорівнює 5 м^2. Сума периметрів усіх прямокутників дорівнює 33 м. Якщо нехтувати витратами на скріплення частин сітки, то можна вважати, що рулону сітки завдовжки 33 м для огорожі вистачить. ■



13. Позначимо через x, y, z, a, b, c довжини відрізків на сторонах прямокутника, як це показано на рисунку. Нехай сума площ затушованих прямокутників дорівнює сумі площ незатушованих. Тоді



$$ax + az + by + cx + cz = ay + bx + bz + cy,$$

або

$$a(x + z) + by + c(x + z) = (a + c)y + (x + z)\, b,$$

або

$$(x + z)(a + c - b) = (a + c - b)y.$$

Останню рівність задовольняють усі значення x, y, z, які є розв'язками рівняння $x + z = y$. Таким чином, якщо провести вертикальні розрізи так, що $x + z = y$, а горизонтальні довільно, то таке розбиття задовольняє вимоги задачі. ■

14. Запишемо рівняння у вигляді $xy + x + y + 1 = 2009$, або $(x + 1)(y + 1) = 7 \cdot 7 \cdot 41$. Цілі додатні розв'язки останнього рівняння є розв'язками сукупності систем рівнянь:

$$\begin{cases} x+1=7, \\ y+1=287, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=287, \\ y+1=7, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=49, \\ y+1=41, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=41, \\ y+1=49. \end{cases}$$

Шуканими розв'язками даного рівняння є такі пари чисел: (6; 286), (286; 6), (48; 40), (40; 48). ■

9 клас

Відповіді

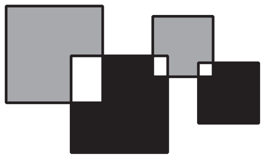
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	В	Б	Г	В	Б	Б	Г	В	Г

Розв'язки

1. Номер місяця у шуканій даті не може дорівнювати 11 і 12, бо в цьому випадку не всі цифри будуть різними. Він не може дорівнювати і 10, оскільки тоді з 1 не зможе розпочинатись номер дня місяця. Отже номер місяця має вигляд $\overline{0a}$, а номер дня місяця — $\overline{1b}$ або 31. Останній випадок може привести, наприклад, до дати 31.05.2496. Це не буде першою датою після зазначеної, в запису якої всі цифри різні. Шукана дата має вигляд $\overline{1b}.\ \overline{0a}.2345$. Звідси, $a = 6$, $b = 7$. Шукана дата — 17.06.2345, а шукана кількість років — 336.■

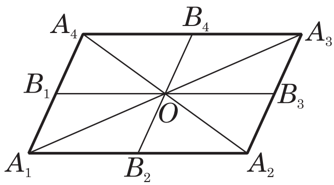
Відповідь: Г. 336 років.

2. Сума площ двох сірих фігур дорівнює різниці між сумою площ великого і маленького квадратів і сумою площ трьох білих прямокутників. Те саме маємо і для суми площ чорних фігур. Оскільки, за умовою, дано пари рівних квадратів, то площі, що порівнюються, — однакові.■



Відповідь: В. $S_с = S_ч$.

3. Нехай B_1, B_2, B_3, B_4 — середини сторін паралелограма $A_1A_2A_3A_4$, O — точка перетину його діагоналей (див. рис.). Відрізки B_1B_3, B_2B_4 розбивають паралелограм на чотири рівні паралелограми. Діагоналі цих паралелограмів розбивають їх на пари рівних трикутників, які між собою не є рівними. Серед чотирьох трикутників, утворених з двох трикутників, нерівними є два, наприклад, A_1OA_2 і A_2OA_3. Крім того, діагоналі даного паралелограма розбивають його на дві однакові пари нерівних між собою трикутників. Таким чином, на рисунку зображено шість нерівних трикутників: $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_2$, A_1OA_2, A_2OA_3, A_1OB_2, B_2OA_2.■



Відповідь: Б. 6.

4. Кількість учнів, що отримали незадовільний результат тестування, менша від $215 \cdot 0{,}05 = 10{,}75$ і більша від $215 \cdot 0{,}04 = 8{,}6$. Тобто їх було 9 або 10. Успішно пройшли тестування 206 або 205 учнів. ■

Відповідь: Г. Інша відповідь.

5. Знайдемо спочатку кількість розчарувань у випадку, коли ліфт зупинився на 67-му поверсі. Сумарна кількість поверхів, яку повинні пройти діти, що піднімаються вгору, дорівнює $1 + 2 + \ldots + 33 = 561$. Це призведе до $561 \cdot 2 = 1122$ розчарування. Сумарна кількість поверхів для тих, що сходять вниз, дорівнює $1 + 2 + \ldots + 65 = 2145$. Відповідно кількість розчарувань дорівнює 2145. Загальна кількість розчарувань дорівнює $2145 + 1122 = 3267$. Аналогічно обчислюємо загальну кількість розчарувань у тому випадку, коли ліфт зупиниться на 68-му поверсі. Вона дорівнює: $(1 + 2 + \ldots + 66) + 2\,(1 + 2 + \ldots + 32) = 3267$. Тут застосовано формулу суми перших членів арифметичної прогресії. Таким чином, кількості розчарувань в обох випадках є однаковими. ■

Відповідь: В. Однаково.

6. П’ять перших дисків з урахуванням 2-відсоткової знижки коштують $0{,}98x \cdot 5 = 4{,}9x$. На наступні $(y - 5)$ дисків діє 3-відсоткова знижка, тому вони коштують $0{,}97(y - 5)x = 0{,}97xy - 4{,}85x$. Звідси, $S = 4{,}9x + 0{,}97xy - 4{,}85x = 0{,}97xy + 0{,}05x$. ■

Відповідь: Б. $S = 0{,}97xy + 0{,}05x$.

7. З умови випливає, що маса одного великого ящика дорівнює масі трьох малих ящиків. Розглядаючи різні варіанти завантаження машини великими і малими ящиками, можна дійти висновку, що загальна кількість ящиків є парною. Тому 19 ящиків не можна завантажити. Можливість завантаження машини іншими кількостями ящиків, зазначених у відповідях, перевіряємо таким чином: 28 ящиків — це 27 маленьких і 1 великий, 20 ящиків — це 5 великих і 15 маленьких, 18 ящиків — це 6 великих і 12 маленьких. ■

Відповідь: Б. 19.

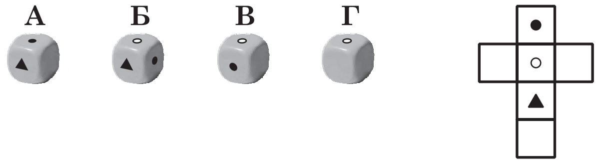
8. Якщо враховувати всі можливі варіанти напряму руху автомобілів і те, що за 2 хв вони проходять 3 і 2 км відповідно, а на початку відстань між ними була 10 км, то маємо такі варіанти відстані між ними:

1) $10 - (3 + 2) = 5$ км;
2) $10 - 3 + 2 = 9$ км;
3) $10 + 3 - 2 = 11$ км;

4) $10 + 3 + 2 = 15$ км. ■

Відповідь: Г. Інша відповідь.

9. Кубики на рисунку **А**, **Б** не можуть мати зазначену розгортку, бо на них чорні круг і трикутник містяться на сусідніх гранях, а в розгортці — ні. Кубик на рисунку **Г** також не може мати цю розгортку, бо дві сусідні бічні грані цього кубика не містять чорних фігур. ■



Відповідь: В.

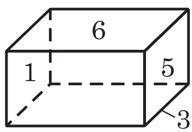
10. Оскільки умова не виключає, що даний чотирикутник є квадратом, то відповіді **А**, **Б**, **В** не можуть бути правильними. ■

Відповідь: Г. Інша відповідь.

11. За умовою, $c + bc + c^2 < 0$, або $-4c > 4(bc + c^2)$. Тому $b^2 - 4c > b^2 + 4bc + 4c^2 = (b + 2c)^2 \geq 0$. Оскільки дискримінант $b^2 - 4c$ є додатним, то дане рівняння має корені. ■

12. Довжина діагоналі квадрата дорівнює $\sqrt{2} \cdot 100$ см. Під час обходу круга, діаметр якого лежить на діагоналі квадрата, довжина кожної ділянки завдовжки d може збільшитись щонайбільше у $\frac{\pi}{2}$ разів. Отже, довжина шляху з однієї вершини квадрата до протилежної більше за довжину діагоналі не більш ніж у $\frac{\pi}{2}$ разів, тобто вона не більша, ніж $50\sqrt{2} \cdot \pi$ см. Оскільки $50\sqrt{2} \cdot \pi < 50 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}2 = 240$, то протилежні вершини квадрата можна сполучити лінією, яка не має спільних точок з кругами і довжина якої менша від 240 см. ■

13. Нехай на верхній грані кубика позначено число 6. Тоді на протилежній грані може бути тільки число 3: $21 - 6 = 15 = 12 + 3$. На грані, протилежній грані з числом 5, знаходиться число 1: $21 - 5 = 16 = 15 + 1$. Тоді сусідніми для грані з числом 4 є грані з числами 1, 3, 5, 6. Їхня сума не ділиться на 4. ■



14. Якщо чотири однакові цифри розміщені поспіль, то три інші цифри можна записати 10^3 способами. Крім того, чотири місця підряд із семи можна вибрати чотирма способами. Якщо врахувати, що на ці місця можна записати цифру 10-а способами, то виявиться, що кількість «особливих» номерів дорівнює $4 \cdot 10^4$. А всього семицифрових номерів 10^7. Тому шанси випадково придбати «особливий» номер дорівнюють 0,004, практично близькі до 0. ■

Зміст