Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатися перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед усіх різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп’ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку його проводили для учнів Донецької області, згодом ці межі розширили, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

Завдання конкурсу складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість завдань не є оригінальною, вона запозичена з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптована для конкурсу.

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2011 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 і 2010 роки надруковано у першому, другому, третьому, четвертому, п'ятому і шостому випусках «Математичний конкурс. 4–9 класи», що вийшли в серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для вчителів.

Усі зауваження і побажання просимо надсилати за адресою: alex4909@gmail.com.

Завдання заочного туру конкурсу

4–5 класи

Перша частина завдань

1. Довжина прямолінійної огорожі дорівнює 20 метрів. Скільки в огорожі стовпів, якщо вони розміщені один від одного на відстані двох метрів?

А	Б	В	Г
10	11	9	19

2. У дитячий садок привезли 300 кг овочів. Картоплі та моркви — 230 кг, а картоплі та цибулі — 200 кг. Скільки кілограмів моркви привезли в дитячий садок?

А	Б	В	Г
130 кг	70 кг	100 кг	30 кг

3. Бабуся сидить на лаві поруч з онукою Марічкою, але не поруч з лялькою. Лялька не сидить поруч з мамою Марічки. Хто сидить поруч з мамою Марічки?

А	Б	В	Г
Бабуся	Марічка	Марічка і бабуся	Бабуся і лялька

4. Із куска дроту зігнули фігуру квадратної форми, площа якої 36 см^2. Потім дріт розігнули і зігнули з неї фігуру трикутної форми з рівними сторонами. Яка довжина сторін трикутної фігури?

А	Б	В	Г
12 см	9 см	18 см	8 см

5. У супермаркеті проходить рекламна акція: купуючи дві шоколадки, третю шоколадку покупець отримує в подарунок. Шоко-

6–7 класи

Перша частина завдань

Відповіді

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	Г	А	Б	А	Б	В	Б	Г	В	А	Б	А	Г	Г

Розв’язки

1. Якщо a — початкова ціна квитка, b — отриманий прибуток, то $b = a \cdot n$, де n — кількість глядачів. Отже, рівність після зниження вартості квитка має вигляд:

$$b \cdot 1{,}1 = a \cdot 0{,}5 \cdot n\left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

де x — кількість відсотків, на які зросла кількість глядачів. Звідси,

$$b \cdot 2{,}2 = a \cdot n \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \text{ або } 2{,}2 = 1 + \frac{x}{100},\ 1{,}2 = \frac{x}{100},\ x = 120\%.$$ ■

Відповідь: В. 120%.

2. Неважко зрозуміти, що кожен юнак танцював з кожною дівчиною, адже незнайому він сам запрошував, а знайома запрошувала його. Те саме можна сказати і про дівчат. Усього пар, у які входить даний юнак, буде 9, а вибір юнака можна реалізувати 10-ма способами. Загальна кількість різних пар дорівнює $9 \cdot 10 = 90$. ■

Відповідь: Г. 90.

3. Серед вказаних номерів чисел, що діляться на 3, усього 16, а 34 — взаємно прості з 3. Тому серед довільних 36 чисел обов’язково є два числа, кратні 3, а їхній добуток ділиться на 9. Добуток меншої кількості чисел може і не ділитися на 9. Наприклад, досить взяти 3 і всі числа, взаємно прості з 3. ■

Відповідь: А. 36.

4. Останні два рядки заповнюємо однозначно: у передостанній рядок слід поставити 2, а в останній — 4 і 3. Далі, в довільну клітинку квадрата, що залишилася вільною у двох останніх стовпцях, ставимо 1 або 2 і автоматично заповнюємо решту його клітинок у цих

	1	3	4
1	2		

стовпцях. Те ж саме маємо з незаповненими клітинками квадрата, що стоять у перших двох стовпцях (ще маємо два варіанти). Отже, всього варіантів — 4.■

Відповідь: Б. 4.

5. Дані числа можна записати у вигляді $4k + 1$, де k набуває значень 0, 1, 2, ..., 7. Тому шукана кількість збігається з кількістю різних чисел, які можна отримати, додаючи по три різні числа із сукупності 0, 1, 2, ..., 7. Найбільшою сумою є $7 + 6 + 5 = 18$, а найменшою — $2 + 1 + 0 = 3$. Неважко переконатись, що довільне натуральне число від 3 до 18 (а їх усього — 16) можна подати у вигляді суми трьох різних цілих чисел від 0 до 7.■

Відповідь: А. 16.

6. З умови випливає, що чотири місяці відсоток заселення становив 90%, два місяці — 60%, по три місяці 48% і 36%. За означенням і властивостями середнього арифметичного маємо: $(4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 48 + 3 \cdot 36) : 12 = 61\%$.■

Відповідь: Б. 61%.

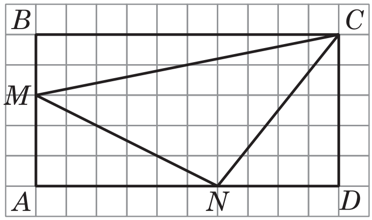
7. Позначивши через r остачу від ділення числа 42 157 на деяке натуральне число q, одержимо: $42\,157 = 231 \cdot q + r$, або $q = 182 + \frac{115 - r}{231}$. Оскільки $r < 231$, q буде цілим тільки за умови, що остача дорівнює 115. Тоді шуканий дільник дорівнює 182.■

Відповідь: В. 182.

8. Якщо x, y, z відповідно довжина, ширина і товщина шматка мила, то його виміри після восьмиденного використання дорівнюватимуть $\frac{4}{5}x$, $\frac{3}{4}y$, $\frac{1}{3}z$. Об'єм шматка мила був xyz, а після 8 днів використання — $\frac{4}{5}x \cdot \frac{3}{4}y \cdot \frac{1}{3}z = \frac{1}{5}xyz$. Тобто за 8 днів змилили $\frac{4}{5}$ об'єму (і, звичайно, маси). Враховуючи, що щоденні витрати мила однакові за масою, $\frac{1}{5}$ об'єму шматка мила вистачить на 2 дні.■

Відповідь: Б. На 2.

9. Неважко переконатись, що учні, яких називали найменше у двох відповідях, не могли розв'язати всі задачі, бо в чотирьох з п'яти відповідей учнів обидві частини є неправильними. Тому А, В, Е не



9. Шукана площа трикутника дорівнює різниці між площею прямокутника $ABCD$ і сумою площ прямокутних трикутників AMN, MBC, CDN. Оскільки

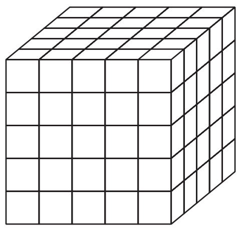
$$S_{ABCD} = 10 \cdot 5 \cdot 3 =$$

$$= 150 \text{ см}^2,\ S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ см}^2,$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3 = 30 \text{ см}^2,\ S_{CDN} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 30 \text{ см}^2,$$

то шукана площа дорівнює 150 – (27 + 30 + 30) = 63 см^2.■

Відповідь: В. 63 см^2.

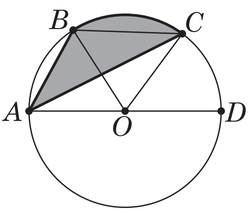


10. Умову задачі задовольняють лише кубики, в яких рівно одне ребро належить ребру великого куба. Кожному ребру куба відповідає три таких кубика. У куба — 12 ребер. Тому шукана кількість кубиків дорівнює 36.■

Відповідь: А. 36.

11. Оскільки $(999\ 999\ 999)^2 = (1\ 000\ 000\ 000 - 1)^2 = (10^9 - 1)^2 = 10^{18} - 2 \cdot 10^9 + 1 = 999\ 999\ 998\ 000\ 000\ 001$, то сума цифр даного числа дорівнює 81.■

Відповідь: 81.



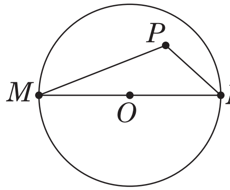
12. Розглянемо сектор OBC (див. рис.). Його площа дорівнює площі даної фігури. Це випливає з того, що $BC \parallel AD$ ($\angle COD = \angle BCO = 60°$). Тому площі трикутників ABC і BOC також рівні: у них спільна сторона і рівні висоти, проведені до неї. Сегмент з дугою BC у сектора і в даної фігури спільний. Тому їхні площі рівні. Площа сектора OBC становить $\frac{1}{6}$ площі круга S, оскільки $\angle BOC = 60°$. Шукана площа дорівнює $\frac{1}{6}S$.■

Відповідь: $\frac{1}{6}$ S.

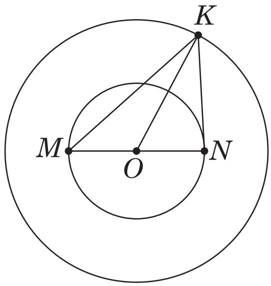
13. Нехай $a + b + c = S$. За умовою, $2a + b + c = 1{,}2S$, $a + 2b + c = 1{,}35S$. Тоді $a + b + 2c = 4a + 4b + 4c - 3a - 3b - 2c = 4(a + b + c) - (2a + b + c) - (a + 2b + c) = 4S - 2{,}55S = 1{,}45S$. Тому зазначена в умові сума зросте на 45%.■

Відповідь: На 45%.

14. Візьмемо дві точки з даної сукупності, відстань між якими найменша. Нехай це точки M і N (див. рис.). Для довільної точки P круга, діаметром якого є відрізок MN, справджуються нерівності: $PN < MN$, $PM < MN$. Тому в даному крузі немає точок з даної сукупності точок.



Нехай K — найближча до побудованого круга точка з даної сукупності. За умовою, $KN \geq MN$, $KM \geq MN$, тобто MN — найменша сторона трикутника MNK. Розглянемо круг з центром у середині O відрізка MN і з радіусом OK. За побудовою лише дві його внутрішні точки належать даній множині точок (M і N). Проведемо через точку K коло, яке міститься у крузі і точки M і N є внутрішніми для круга, обмеженого цим колом (див. рис.). Якщо його радіус дещо збільшити так, щоб точка K була внутрішньою, то одержане коло буде шуканим.■



Відповідь: Так.

Зміст

Навчальне видання

Готуємося до математичних турнірів

Упорядники:
ПАВЛОВ Олександр Леонідович, БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович,
СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинович

МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС. 4–9 КЛАСИ
Посібник для підготовки до математичних турнірів
Випуск 7

Підписано до друку 19.04.2013. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 4,19. Умовн. фарбо-відб. 4,19.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-3425-8

9 789661 034258