Вступ

Лабораторні заняття з методики навчання математики є складовою та обов'язковою формою підготовки майбутніх учителів математики. Вони направлені на формування у студентів умінь ставити реальні цілі й адекватні методичні та навчальні задачі вивчення тем, розв'язування математичних задач, проведення уроків; умінь проводити підбір навчального матеріалу і засобів навчання для досягнення мети та розробляти методику її досягнення; уміння проводити аналіз та планування уроків математики; уміння готувати повні конспекти і розгорнуті плани уроків та проводити уроки чи їх фрагменти у формі ділової гри на заняттях.

Для кваліфікованого розв'язування типових задач професійної діяльності на посаді вчителя математики у загальноосвітніх навчальних закладах I–II рівня (освітньо-кваліфікаційний рівень «бакалавр») випускники педагогічних вищих навчальних закладів мають володіти комплексом умінь з методики навчання математики, до складу якого входять такі уміння.

I. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Аналітико-синтетична діяльність».

1. Уміння виконувати логіко-математичний і семіотичний аналіз означень математичних понять, математичних речень та їх доведень (аксіом, теорем, формул, інших тверджень), правил, алгоритмів, евристичних схем, що є об'єктами засвоєння в курсі математики загальноосвітньої школи.

2. Уміння виконувати логіко-математичний та змістовний аналіз математичних задач як об'єктів вивчення і засобів навчання.

3. Уміння визначати цілі вивчення конкретного навчального матеріалу (означення поняття, теореми, правила тощо) курсу математики загальноосвітньої школи.

4. Уміння виконувати логіко-математичний та змістовний аналіз навчального матеріалу наперед обраної (заданої) теми чи розділу (виділяти стрижневий та супровідний матеріал, провідні ідеї теми,

базові знання та вміння, внутрішні та міжпредметні зв'язки теми тощо, аналізувати навчальний матеріал на предмет реалізації інтегративних зв'язків) курсу математики загальноосвітньої школи.

5. Уміння виконувати аналіз наборів математичних задач до певної теми курсу математики загальноосвітніх шкіл: кількість та якість задач, призначених для розкриття сутності нових об'єктів засвоєння, для формування вмінь, для організації математичної діяльності на шкільному рівні; кількість та якість задач-засобів мотивації, задач-вправ для актуалізації базових знань, задач інтегративного змісту, задач для повторення тощо.

6. Уміння виконувати математичну, семіотичну і методичну типізацію математичних задач курсу математики загальноосвітньої школи.

7. Уміння визначати основні навчальні задачі курсу математики загальноосвітньої школи та відповідні їм навчально-пізнавальні дії.

8. Уміння виконувати постановку методичних задач на матеріалі курсу математики загальноосвітньої школи.

9. Уміння добирати основні методи, прийоми, форми і засоби навчання для організації вивчення учнями матеріалу певної навчальної та програмової теми курсу математики загальноосвітньої школи.

10. Уміння визначати форми контролю та оцінювання результатів навчальної діяльності учнів, що застосовуються у процесі навчання курсу математики у загальноосвітній школі.

11 Уміння реферувати та рецензувати статті, посібники математичного, психолого-педагогічного та методичного змісту.

12. Уміння визначати індивідуальні можливості учнів у навчанні математики та комплектувати гомогенні й гетерогенні групи учнів класу.

II. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Планування та конструювання».

1. Уміння конструювати модель методичної системи (цілі, зміст, методи, форми і засоби навчання) організації вивчення окремої змістової одиниці курсу математики загальноосвітньої школи (на рівні окремого об'єкта засвоєння навчальної та програмової теми).

2. Уміння висувати диференційовані вимоги до результатів засвоєння учнями навчального матеріалу курсу математики загальноосвітньої школи.

3. Уміння розробляти тематичний план організації вивчення учнями програмової теми курсу математики загальноосвітньої школи, виконувати календарне планування.

4. Уміння створювати систему запитань для повторення базових знань учнів при вивченні курсу математики загальноосвітньої школи.

5. Уміння створювати систему вправ для актуалізації базових умінь учнів при вивченні курсу математики загальноосвітньої школи.

6. Уміння конструювати систему контрприкладів до понять (їхніх означень, математичних фактів, способів діяльності), що вивчаються в курсі математики загальноосвітньої школи.

7. Уміння добирати задачі, що призначені для різних етапів формування математичних понять, вивчення математичних фактів, правил і алгоритмів, що є об’єктами засвоєння в курсі математики загальноосвітньої школи,для навчання доведень математичних тверджень та для вироблення навичок і вмінь застосовувати набуті знання у стандартних та інших ситуаціях.

8. Уміння складати системи запитань, призначених для розкриття змісту нового навчального матеріалу, для організації застосування знань, навичок і вмінь, для усної й письмової перевірки знань учнів.

9. Уміння складати тести, самостійні та контрольні роботи навчального і контролюючого характеру відповідно до змісту навчального матеріалу курсу математики загальноосвітньої школи.

10. Уміння добирати матеріал до уроку та розробляти розгорнутий конспект або план-конспект уроку.

11. Уміння добирати літературу для вивчення конкретного питання (теореми, задачі, пункту, теми підручника) та складати відповідну картотеку.

12. Уміння планувати та виготовляти найпростіші навчальні та наочні посібники, матеріал для мультимедійних презентацій, кодоскопа тощо.

13. Уміння планувати використання математичних пакетів (типу GRAN, GRAN 2, DG, Advanced Grapher) для організації дослідницької діяльності учнів.

III. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Організація класного колективу та налагодження навчальної співпраці з учнями у процесі навчання математики».

1. Уміння забезпечувати мотивацію вивчення конкретного навчального матеріалу (теми, математичної задачі, теореми тощо) курсу математики загальноосвітньої школи.

2. Уміння забезпечувати прийняття учнями цілей вивчення конкретного матеріалу курсу математики загальноосвітньої школи — розкривати досяжність та особистісну значущість результатів навчання.

3. Уміння формувати пізнавальний інтерес учнів до ходу й результатів вивчення курсу математики в цілому та окремих його складових.

4. Уміння застосовувати прийоми постановки запитань у варіативних ситуаціях.

5. Уміння організовувати пошук розв'язання математичної задачі, доведення математичного твердження тощо.

6. Уміння працювати з довідником, таблицею та іншими аналогічними матеріалами, а також уміння навчати цього учнів.

7. Уміння розташовувати матеріал на дошці, оформляти розв'язування задачі, доведення математичного твердження, знаходження значення числового виразу або виразу зі змінною тощо, а також уміння навчати цього учнів.

8. Уміння застосовувати різні прийоми реагування на відповіді учнів.

9. Уміння використовувати системи запитань, вправ і задач, призначених для навчання учнів виконувати аналіз, синтез, узагальнення, конкретизацію, порівняння, поділ, класифікацію тощо.

10. Уміння реалізовувати складений план на урок (виступ, монолог).

IV. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Оцінювання власної діяльності та вимірювання результатів діяльності учнів у процесі навчання математики».

1. Уміння аналізувати усну відповідь учня, давати їй оцінку та навчати цього учнів.

2. Уміння оцінювати письмову навчальну чи контрольну роботу, аналізувати її результати.

3. Уміння навчати учнів знаходити та виправляти помилки у письмових роботах.

4. Уміння застосовувати різні види, форми, способи і засоби контролю й коригування знань учнів.

5. Уміння аналізувати урок з урахуванням його місця у системі уроків, цілей його проведення та особливостей навчального матеріалу.

Рівні сформованості методичних умінь визначаються так, як це вказано у таблиці.

1-й рівень	Репродуктивний	Усвідомлюється мета виконання окремої методичної чи навчально-пізнавальної дії, осмислюється її операційний склад. Пошук способів виконання дії здійснюється, здебільшого, на основі взірця, який запропоновано в інструкції
2-й рівень	Продуктивний	Усвідомлюється мета виконання методичної чи навчально-пізнавальної дії, осмислюється її операційний склад. Пошук способів виконання дії здійснюється на основі використання загальних рекомендацій та загальних евристик. Відбувається перенесення окремих сформованих методичних умінь або деяких їхніх комплексів на крупніші блоки навчального матеріалу (на математичний метод, тему, набір математичних задач тощо)
3-й рівень	Творчий	На основі усвідомлення мети виконання методичної чи навчально-пізнавальної дії та осмислення її операційного складу відбувається самостійний вибір і творче використання різноманітних способів і засобів методичної діяльності у відповідності до варіативних ситуацій навчання математики. Розробляються нові способи і засоби методичної діяльності

Лабораторні роботи у посібнику представлені у вигляді певної системи, яка розкриває послідовність дій, що дозволяє визначити основні етапи формування професійних умінь у майбутніх учителів математики.

У **першому циклі** лабораторних робіт (роботи 1–8) передбачається формування умінь проводити логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу підручників з математики, підбирати питання та математичні задачі з метою навчання конкретного змісту математичного матеріалу, організації розв'язування шкільних математичних задач та доведення математичних речень, використовувати моделювання у процесі навчання математики, вимірювати результати навчальної діяльності учнів, добирати матеріал для роботи з математично обдарованими учнями.

У **другому циклі** лабораторних робіт (роботи 9–13) формуються уміння аналізувати уроки математики та сукупність умінь з підготовки вчителя до уроку. Остання сукупність умінь представлена у лабораторних роботах уміннями визначати структуру уроку, відбирати матеріал для конкретного уроку та складати розгорнуті конспекти фрагментів уроку та в цілому конспекти уроків.

У **третьому циклі** лабораторних робіт (роботи 14–19) формуються уміння аналізувати навчальний матеріал шкільних підручників через реалізацію в них конкретних математичних методів: дедуктивного методу доведення математичних речень, координатного та векторного методів, методу геометричних перетворень, методу рівнянь та нерівностей, методу використання диференціального та інтегрального числень. Указаний цикл лабораторних робіт крім того, що дає студентам можливість детально розібратися в особливостях застосування математичних методів при розв'язуванні задач, до того ж дозволяє аналізувати навчальний матеріал підручників з математики з точки зору змісту та структури його викладання.

Проведення лабораторних робіт є однією з необхідних складових практичної підготовки майбутніх учителів математики і передбачає, в основному, формування умінь проводити логіко-дидактичний аналіз різноманітного навчального матеріалу з урахуванням конкретно поставленої мети, відбору засобів та методів навчання. Повний цикл практичної підготовки включає крім лабораторних занять практичні заняття та педагогічну практику.

Лабораторні роботи з логіко-математичного аналізу основних компонентів змісту навчального матеріалу

Лабораторна робота №1

Логіко-математичний аналіз означень, понять і об'єктів. Основні етапи їх формування

Мета роботи. На основі систематизації теоретичних знань про види і структуру означень понять і об'єктів та аналізу шкільних підручників математики розкрити логіко-математичну структуру типових для шкільного курсу математики означень понять і об'єктів.

Сформулювати основні навчальні завдання, які необхідно розв'язувати при формуванні математичних понять і об'єктів, та адекватні їм навчальні дії.

Розкрити на конкретних прикладах основні етапи вивчення математичних понять у школі.

Розкрити математичне трактування деяких фундаментальних понять курсу математики, підібрати з літератури або шкільних підручників інші трактування одних і тих же математичних понять.

Підібрати можливі засоби, з допомогою яких розкривалися б структура означень і їхні математичні трактування.

Основний зміст

І. Означення математичних об'єктів і види означень

Питання про поняття, об'єкти та їхні означення дуже складне за змістом і може розглядатися з різних точок зору: логічної, змістовної (наочної) або пізнавальної (гносеологічної) і через це навіть в різних методичнихрекомендаціях даються різні його аспекти. За основу необхідно вибрати логічну структуру об'єктів з урахуванням математичних трактувань. Враховуючи, що навчання можливе тільки в діяльності, необхідно розглядати дії, адекватні видам означень понять і об'єктів. Тому в зміст роботи входитиме актуалізація і сис-

Лабораторна робота №6

Використання моделювання при навчанні математики в загальноосвітній школі

Мета роботи. Актуалізувати знання та уміння студентів про моделювання та його види; розглянути наочні моделі (принцип наочності, функції наочності і правила її підбору, види наочності) та комп'ютерні моделі (пакети прикладних програм для вивчення математики, дослідницький метод та його використання у навчанні математики).

Основний зміст

Поняття про моделювання. *Моделювання* являє собою один з основних методів пізнання, є формою відображення дійсності і полягає в з'ясуванні чи відтворенні тих чи інших властивостей реальних об'єктів, предметів і явищ з допомогою інших об'єктів, процесів, явищ або з допомогою абстрактного опису у вигляді зображення, плану, карти, сукупності рівнянь, алгоритмів і програм.

Можливості моделювання, тобто перенесення результатів, отриманих у ході побудови і дослідження моделі, на оригінал засновані на тому, що модель у визначеному змісті відображає (відтворює, моделює, описує, імітує) деякі цікаві для дослідника риси об'єкта.

У даний час моделювання дуже широко використовується не тільки в наукових дослідженнях, але і при розв'язуванні задач із техніки, економіки, геології, медицини та інших галузей. Тому поняття «моделювання» і «модель» розглядаються в широкому змісті.

Моделлю деякого об'єкта A (оригіналу) називають об'єкт B, в деякому відношенні подібний (аналогічний) оригіналу А, вибраний чи спеціально побудований людиною для однієї з поставлених цілей:

1) замінити оригінал A в уявній чи реальній дії. Така заміна виконується тоді, коли для дії в даних умовах об'єкт B більш зручний (у цьому випадку ми маємо справу з моделлю-замінником);

2) створити уявлення про оригінал A з допомогою об'єкта B (модель-уявлення);

3) розтлумачити об'єкт A у вигляді об'єкта B (модель-інтерпретація);

4) дослідити об'єкт A з допомогою об'єкта B (дослідницька модель).

Зазвичай людина вибирає чи будує модель для однієї з перерахованих цілей, тому вид моделі і визначається цією метою. Але модель може бути використана, як правило, одночасно і для других цілей. Наприклад, для розв'язування текстових задач будуємо модель тієї ситуації, яка відображена в задачі, — рівняння. Це рівняння є дослідницькою моделлю (воно дає можливість установити ряд властивостей, які характеризують дану ситуацію), і моделлю-уявленням (дає нам узагальнене уявлення про розглядувану задачу), і моделлю-інтерпретацією (рівняння на мові алгебри фіксує і пояснює суттєві особливості наявної у задачі ситуації).

Говорячи про моделювання, мають на увазі діяльність з побудови (або вибору) моделей до вказаних вище цілей.

Моделі класифікують, виходячи з найбільш істотних ознак об'єктів. Цими ознаками є:

1) закон функціонування і характерні особливості вираження властивостей і відношень оригіналу;

2) основи для перетворення властивостей і відношень моделі у властивості і відношення оригіналу.

Моделі можна розділити:

- за першою ознакою на *логічні* (за законами логіки у свідомості людини) і *матеріальні* (за об'єктивними законами природи) моделі;

  – у свою чергу, логічні моделі поділяються на *образні*, *знакові*, *образно-знакові* (змішані) моделі;

  – матеріальні моделі — на *функціональні*, *геометричні*, *функціонально-геометричні* моделі;

  – функціональні і функціонально-геометричні моделі в залежності від фізичної однорідності і різнорідності з оригіналом розділяються на *фізичні* і *формальні*;
- за другою ознакою розрізняють *умовні* (на підставі умови чи угоди), *аналогові* (на підставі умовиводу за аналогією, неперервні) і *математичні* (математичні методи вираження) моделі.

Математичне моделювання є основним прийомом розв'язування математичних задач. Вид і характер моделювання визначаються головним чином характером сформованих в учня умінь та навичок оперування вивченим матеріалом, відпрацьованих евристичних схем пошуку розв'язання і характером самої задачі. Будемо у подальшому викладі розуміти *математичну модель* як спеціальний опис деякої проблеми, ситуації, який дає можливість у процесі її аналізу застосувати формально-логічний апарат математики.

При *математичному моделюванні* маємо справу зі знаковою системою (наприклад, у вигляді графічної схеми), яка в математичній формі виражає основні закономірності, властивості об'єкта, що вивчається. У процесі математичного моделювання виділяють три етапи: 1) формалізація — переклад запропонованої задачі (ситуації) на мову математичної теорії (побудова математичної моделі задачі); 2) розв'язування задачі всередині математичної моделі, результатом якого буде або нова модель задачі, або кінцева відповідь; 3) транслювання результату математичного розв'язання задачі на ту мову, на якій була сформульована задача (інтерпретація одержаного математичного розв'язку).

Отже, під процесом *розв'язування математичної задачі* будемо розуміти процес послідовної побудови нових моделей задачної ситуації певної задачі, причому кожна нова модель задачі буде мати меншу невизначеність, ніж попередня.

Комп'ютерне моделювання. Основні *фактори методичного та методологічного впливу використання інформаційно-комп'ютерних технологій* (ІКТ) (у контексті реалізації можливостей комп'ютерного моделювання) на еволюцію математичної освіти можна визначити так:

1. ІКТ є складовою частиною забезпечення інтеграції змісту шкільної математичної освіти.
2. ІКТ є одним із чинників забезпечення організації навчання розв'язування математичних задач з використанням моделей та модельних переходів.
3. ІКТ є складовою забезпечення реального застосування теоретичних положень шкільного курсу математики у площину розв'язування практичних задач.
4. ІКТ є чинником забезпечення інтеграції математичних знань із загальними науковими, енциклопедичними та популярними знаннями про інформацію.
5. ІКТ стають одним із найважливіших чинників реалізації принципів дидактики — науковості, доступності, системності, наочності та фундаментальності, інтеграції знань, активізації пізнавальної діяльності учнів.
6. ІКТ розширюють можливості для розв'язування нових класів задач, які без застосування ІКТ розв'язати неможливо у межах «класичної математики».

Серед різноманіття комп'ютерних програм, розроблених для розв'язування з допомогою комп'ютера широкого кола математичних задач різних рівнів складності, найбільш придатними видаються програмні засоби, які розраховані на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вищих навчальних закладів, що лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики. Це GRAN2, GRAN3, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія). Для їх використання не вимагаються надто потужні комп'ютери з великою швидкодією, значними обсягами оперативних запам'ятовуючих пристроїв, високими вимогами до можливостей графічних побудов. Названі програми прості у користуванні, оснащені досить зручним інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо), контекстночутливою допомогою. Від користувача не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів загальноосвітніх шкіл.

Функції наочності. *Наочність навчання* — один із принципів дидактики.

Застосування наочності при навчанні математики має коріння в теорії пізнання і узгоджується з методологією математики.

Можна умовно виділити три *етапи пізнання*: *сприйняття, уявлення і абстрактне мислення*. Умовно процес пізнання можна розбити на *два ступені*: *чуттєвий* (сприйняття і уявлення) і *логічний* (перехід від уявлення до поняття з допомогою узагальнення і абстрагування). Чуттєвий ступінь відповідає першому етапу шляху пізнання, і тут роль наочності важлива: вона використовується для здобуття знань про зовнішні властивості математичних об'єктів, про взаємозв'язок об'єктів, про їх схожість і відмінність. На третьому етапі пізнання наочність дає можливість показати учням глибинні зв'язки між властивостями математичних об'єктів, створити правильні образи.

Основним правилом підбору і використання наочності психологи вважають виявлення дій, які мотивуватимуть в учнів засоби наочності, і визначення дій, які повинні виконувати учні, щоб свідомо опанувати навчальний матеріал.

У своїй роботі вчитель повинен мати на увазі, що засоби наочності мають різні функції в процесі навчання.

Відбираючи засоби наочності до уроку, вчитель повинен ясно уявляти, яку саме функцію ця допомога повинна виконувати в на-

Знайдемо висоту піраміди:

$$SM = MB \cdot \mathrm{tg}\angle SBM = x \cdot \mathrm{tg}\,2\angle OBM = x \cdot \frac{2\dfrac{r}{x}}{1-\dfrac{r^2}{x^2}} = \frac{2rx^2}{x^2-r^2}.$$

Тоді об'єм піраміди визначимо так:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3}(2x)^2 \cdot \frac{2rx^2}{x^2-r^2} = \frac{8rx^4}{3(x^2-r^2)}.$$

Отже, для визначення найменшого значення відношення об'ємів правильної чотирикутної піраміди та правильної чотирикутної призми, описаних навколо однієї сфери, треба побудувати функцію $F(x)$ та дослідити побудовану функцію на найменше значення:

$$F(x) = \frac{V_{\text{піраміди}}}{V_{\text{призми}}} = \frac{1}{3r^2} \cdot \frac{x^4}{x^2-r^2}.$$

Це можна зробити двома способами. *Перший спосіб* ґрунтується на застосуванні *правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку*. Це програмний матеріал курсу «Алгебри та початків аналізу» 11 класу. *Другий спосіб* ґрунтується на *використанні ІКТ при дослідженні властивостей функцій*. Ми будемо розглядати його використання з точки зору розширення поля можливостей учня у розв'язуванні задачі.

Отже, визначимо межі зміни x — це буде необхідно для застосування правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції. Очевидно, що $x \in (r; +\infty)$. Відмітимо певну невідповідність текстів шкільних підручників *реальним потребам використання правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відкритому проміжку* для розв'язування текстових задач (ці потреби полягають у необхідності знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відкритому проміжку). Тому, знайшовши точки екстремуму функції $F(x)$ на проміжку $x \in (r; +\infty)$, скориставшись правилом знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відкритому проміжку та оцінивши значення функції в точках екстремуму та на кінцях проміжку, отримаємо, що найменше значення функції $F(x)$ досягається при $x = \sqrt{2}r$ і дорівнює $\dfrac{4}{3}$.

Використаємо другий спосіб розв'язування задачі, проілюструвавши та вивчивши розв'язування задачі з використання пакету AG. Побудуємо графік функції $F(x)$ для різних значень радіуса сфе-

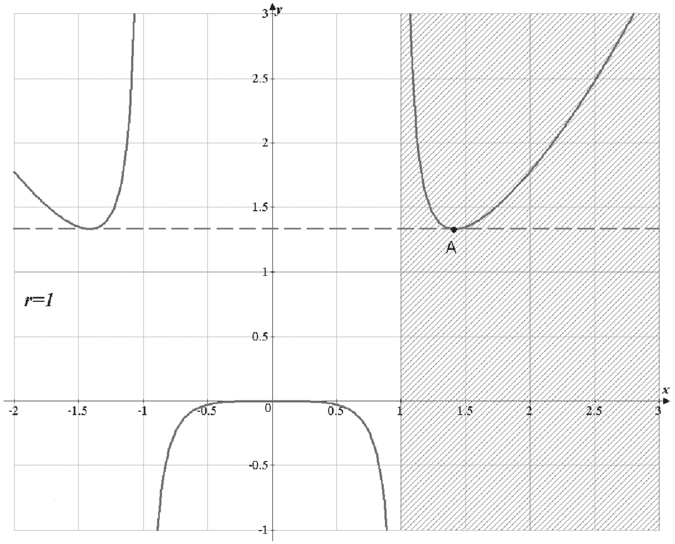

Рис. 19-5

ри. При r = 1 функція буде мати вигляд $F(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{x^2-1}$. З рис. 19-5 видно, що на проміжку $x\in(1;+\infty)$ (заштрихована частина координатної площини) функція буде мати одне найменше значення при $x_1\approx 1{,}41$ (це знаходимо через меню «исследование функции», на рис. 19-5 — це перша координата точки A), причому $F(x_1)\approx 1{,}33$ (на рис. 19-5 це показано пунктирною горизонтальною лінією, що проходить через точку A). Врахувавши, що $\frac{4}{3}\approx 1{,}33$ та $1\cdot\sqrt{2}\approx 1{,}41$, робимо висновок, що найменше значення функції $F(x)$ досягається при $x=\sqrt{2}r$ і дорівнює $\frac{4}{3}$. Аналогічне дослідження можна провести для випадку $r=2$ (рис. 19-6), де функція задається формулою $F(x)=\frac{1}{12}\cdot\frac{x^4}{x^2-4}$, точка A, згідно з рис. 19-6 та дослідженням через меню «исследование функции», має координати $A(2{,}82;1.33)$, що є наближеним значенням реальних координат цієї точки згідно із загальними результатами дослідження — $A\left(2\sqrt{2};\frac{4}{3}\right)$.

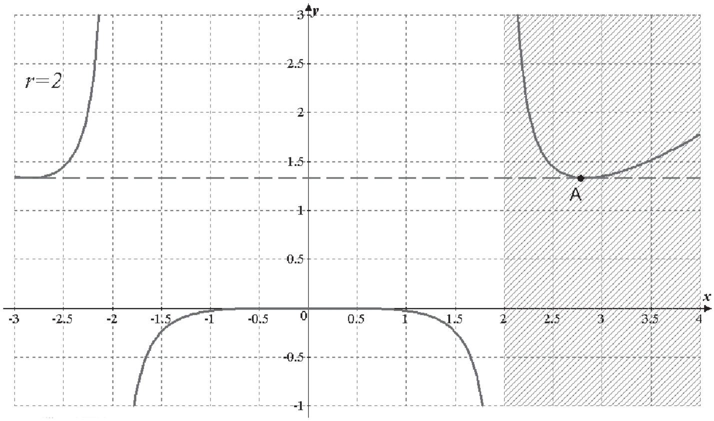

Рис. 19-6

Продовжити дослідження даної задачі можна таким чином, щоб максимально використати можливості комп'ютерного моделювання для отримання нових результатів творчого пошуку. Поставимо проблему так. А що зміниться у розв'язанні задачі, якщо замість чотирикутних правильних піраміди і призми вивчити співвідношення між об'ємами п'ятикутних піраміди і призми? Шестикутних? А чи не отримаємо ми узагальнення цієї задачі, якщо вивчити співвідношення між об'ємами описаного конуса та циліндра? Відмітимо, що розв'язування усіх цих задач буде аналогічним, а відповідь — така ж сама.

Завдання 1. Проведіть вказані у попередньому абзаці дослідження одним з описаних способів.

Можна піти іншим шляхом — дослідити відношення об'ємів описаних навколо даної сфери чотирикутної правильної зрізаної піраміди та чотирикутної правильної призми. Пропонуємо саме такий розвиток творчого вивчення розв'язаної попередньої задачі.

Задача. Знайти найменше (або найбільше) значення відношення об'ємів правильної зрізаної чотирикутної піраміди та правильної чотирикутної призми, описаних навколо однієї сфери з радіусом 1.

Використавши позначення попередньої задачі, покладемо, що половина сторони нижньої (більшої) основи зрізаної правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює x. Використаємо для знаходження об'єму зрізаної правильної чотирикутної піраміди формулу:

$$V_{\text{зріз. піраміди}} = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

де $H = 2$ (висота зрізаної піраміди, очевидно, дорівнює двом радіусам сфери), S_1 та S_2 — площі нижньої та верхньої основ піраміди. Тоді функція $F(x)$ набуде вигляду:

$$F(x) = \frac{V_{\text{зріз. піраміди}}}{V_{\text{призми}}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left((2x)^2 + 2x \cdot \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x} \right)^2 \right)}{8} = \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Побудуємо в AG графік цієї функції (рис. 19-7), врахувавши при цьому, що $x \in [1; +\infty)$ (граничний варіант, коли половина сторони більшої основи піраміди дорівнює радіусу сфери, тобто піраміда стає призмою, — теж може розглядатися; варіант, коли сторона нижньої основи менша від сторони верхньої основи піраміди розглядати не будемо як такий, що не містить нової інформації). Точка A має координати (1; 1), а, отже, мінімальне значення відношення об'ємів дорівнює 1 і набувається тоді, коли половина сторони більшої основи описаної зрізаної піраміди дорівнює радіусу сфери (тобто при $x = 1$). Максимального ж значення відношення об'ємів не існує, оскільки

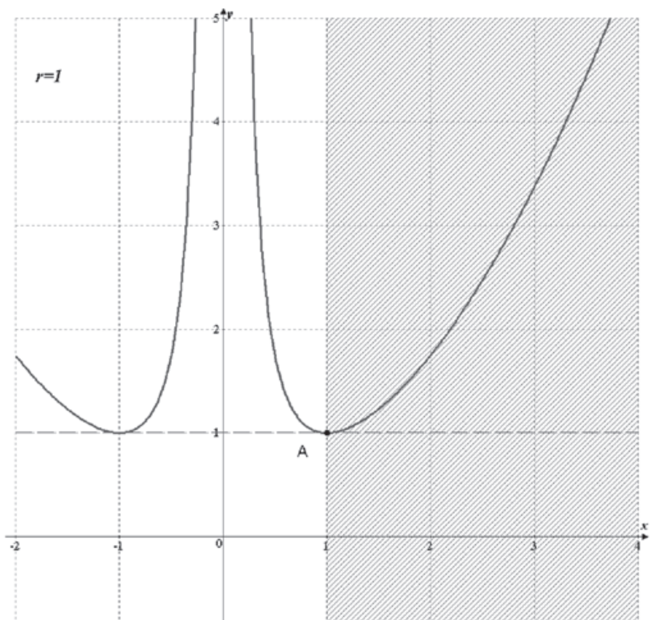

Рис. 19-7

на проміжку $x \in [1; +\infty)$ функція $F(x)$ є зростаючою (це видно з рис. 19-7 і може бути підтверджене дослідженням функції в межах пакета), тому при $x \to +\infty$ значення функції $F(x) \to +\infty$. Отже, сформульована гіпотеза розв'язування задачі виглядає так: максимальне значення відношення об'ємів не досягається ніколи, а мінімальне значення такого відношення дорівнює 1 і досягається при $x = 1$. Доводити дану гіпотезу вже треба аналітичними методами.

Розв'язавши подібним методом таку ж задачу, але при $r = 2$, отримаємо аналогічний результат — мінімальне значення відношення об'ємів досягається при $x = 2$ і дорівнює 1.

Завдання 2. Сформулюйте гіпотезу для загального випадку величини r та у процесі дослідження доведіть, що мінімальне значення відношення об'ємів дорівнює 1 і досягається тоді, коли $x = r$.

Завдання 3. Розробіть сценарій використання дослідницького методу при розв'язуванні задачі: «У кут, що містить 60°, у бік, протилежний від вершини, вписано п'ять кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з другого, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ усіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?». Сплануйте можливе творче вивчення та розвиток умови даної задачі.

Самостійна робота

1. **Виділіть поняття та наведіть приклад фрагменту уроку, де вибране поняття може бути введене з використанням дослідницького методу.**
2. **Розв'яжіть задачу, продумайте розвиток вивчення задачі у контексті знаходження інших способів її розв'язання. Змініть умову задачі. Проаналізуйте результат.**

Задача. Яким має бути число a, щоб існувало рівно чотири різні пари чисел $(x; y)$, для яких справджуються обидві рівності

$$25x^2 + y^2 + 2y = a - 1 \text{ і } \sqrt{5|x|} + \sqrt{|y+1|} = 3.$$

Література: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [15], [18], [19], [24], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [38], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55],[56], [57],[58].