

Натисніть тут, щоб

**КУПИТИ КНИГУ НА САЙТІ**

або

**заможляйте по телефону:**

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

УДК 51(023)  
ББК 22.1  
К66

Серію «Класики популяризації науки» засновано 2007 року

Переклад здійснено за виданням:  
Кордемський Б.А. Математическая смекалка. —  
М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство  
«Мир и образование», 2005.

Кордемський Б.А.

К66 Математична кмітливість: Пер. з рос. — Тернопіль:  
Навчальна книга – Богдан, 2010. — 560 с.; іл. (Класики  
популяризації науки).

ISBN 978-966-10-0316-2

Це видання — переклад книги майстра російської науково-популярної літератури Бориса Анастасійовича Кордемського — збірника математичних мініатюр: різноманітних цікавих задач, математичних ігор, жартів і фокусів.

Усі, хто захоплюється математикою, — незалежно від віку — матимуть змогу потренувати мислення, винахідливість і кмітливість.

У перекладному виданні, поряд з примітками автора, подано також редакційні примітки, що певною мірою об'єктивізують дещо «зидеологізовану» спрямованість оригіналу і, маючи здебільшого довідковий характер, прояснюють «фон» тогочасної епохи, в якій створювалась автором ця книга.

ББК 22.1

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина цього видання не може бути відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

© Луковцева А.К., Фохт О.Б.,  
спадкоємці, 2005  
© Навчальна книга – Богдан, макет,  
художнє оформлення, 2010

ISBN 978-966-10-0316-2

## ПЕРЕДМОВА АВТОРА

У роботі, в навчанні, в грі, у всякій творчій діяльності людині потрібні тямовитість, винахідливість, здогад, уміння міркувати — все те, що наш народ влучно визначає одним словом «кмітливість». Кмітливість можна виховати і розвинути систематичними і поступовими вправами, зокрема, розв'язуванням математичних задач як шкільного курсу, так і задач, що виникають на практиці та пов'язані зі спостереженнями світу речей і подій довкола нас.

Кожна сім'я, в якій батьки турбуються про організацію розумового розвитку дітей та підлітків, відчуває потребу в підбраному матеріалі для заповнення дозвілля корисними, розумними і ненудними математичними вправами.

Саме для таких позапрограмових занять, бесід і розваг у вільний вечір у сімейному колі, з друзями або в школі на позакласних зустрічах і призначена «Математична кмітливість» — збірник математичних мініатюр: різноманітних задач, математичних ігор, жартів і фокусів, що потребують роботи розуму, розвивають тямовитість і необхідну логічність міркувань.

У дореволюційний час були широко відомі збірники Є. І. Ігнат'єва «В царстві смекалки». Тепер вони застаріли для читача і тому не перевидаються. Все ж таки в цих збірниках є задачі, які ще не втратили педагогічної й освітньої цінності. Одні з них увійшли до «Математичної кмітливості» без змін, інші — зі зміненним або зовсім новим змістом.

Для «Математичної кмітливості» я також відбирав і, за потреби, обробляв задачі з числа тих, які розсіпані по сторінках великої за обсягом вітчизняної і зарубіжної популярної літератури, прагнучи не повторювати задач, що входять до відомих читачам книг Я. І. Перельмана з цікавої математики<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Значну частину задач або тем для задач я почерпнув з таких книг і журналів: Е. И. Игнат'ев, В царстві смекалки, кн. I, II, 1923; M. Kraitchick, Mathematical recreations, 1943; S. Jones, Mathematical nuts, 1932; «Математика в школі», «Затейник», «Scripta mathematica», «The American Mathematical Monthly» та ін.



«Книжки — книжками,  
та рухай мізками»  
*В. Маяковський*

## РОЗДІЛ ПЕРШИЙ ВИГАДЛИВІ ЗАДАЧІ

### ПІДРОЗДІЛ I

Перевірте й потренуйте свою кмітливість спочатку на таких задачах, для розв'язання яких потрібні лише цілеспрямована наполегливість, терпіння, тямущість і вміння додавати, віднімати, множити та ділити цілі числа.

#### 1. Спостережливі школярі

Школярі — хлопчик і дівчинка — тільки що провели метеорологічні вимірювання.

Тепер вони відпочивають на пагорбі і дивляться на товарний потяг, який проходить повз них.

Паротяг на підйомі відчайдушно димить і пахкає. Уздовж полотна залізниці рівно, без поривів дме вітер.

— Яку швидкість вітру показали наші вимірювання? — запитав хлопчик.

— 7 метрів на секунду.

— Сьогодні мені цього достатньо, щоб визначити, з якою швидкістю рухається потяг.

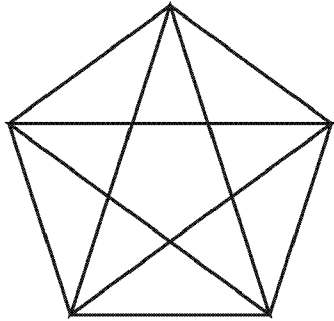
— Невже? — засумнівалась дівчинка.

— А ти придивись уважніше до руху потяга.

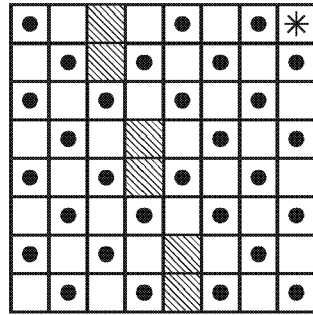
Дівчинка трохи подумала і теж зметикувала, у чому тут річ.

Наприклад, якщо у купці 6 сірників, то й додати до неї можна тільки 6, якщо у купці 4 сірники, то й додати до неї можна тільки 4.

Задача розв'язується у 3 ходи.



Мал. 4



Мал. 5. План яблуневого саду.

### 5. Полічіть!

Перевірте свою геометричну спостережливість: полічіть, скільки трикутників у фігурі, зображеній на мал. 4.

### 6. Шлях садівника

На мал. 5 подано план невеликого яблуневого саду (точки — яблуні). Садівник обробив усі яблуні підряд.

Почав він з клітинки, позначеної зірочкою, і обійшов одну за одною всі клітинки, як ті, які були зайняті яблунями, так і вільні, жодного разу при цьому не повертаючись на пройдену клітинку. По діагоналях він не ходив і на заштрихованих клітинках не був, оскільки там розміщені різні будівлі.

Завершивши обхід, садівник опинився на тій самій клітинці, з якої почав свій шлях.

Накресліть у своєму зошиті шлях садівника.

### 7. Треба зметикувати

У кошику лежать 5 яблук. Як розділити ці яблука між п'ятьма дівчатками, щоб кожна дівчинка отримала по одному яблуку і щоб одне яблуко залишилося у кошику?

### 8. Недовго думаючи

Скажіть, скільки кішок у кімнаті, якщо в кожному з чотирьох кутів кімнати сидить по одній кішці, навпроти кожної кішки сидить по 3 кішки і на хвості у кожної кішки сидить по кішці?

### 9. Вниз-вгору

Хлопчик щільно притиснув грань синього олівця до грані жовтого олівця. Один сантиметр (у довжину) притиснутої грані синього олівця, відраховуючи від його нижнього кінця, забруднений фарбою. Жовтий олівець хлопчик тримає непорушно, а синій, не перестаючи притискати до жовтого, опускає на 1 см, потім повертає у попереднє положення, знову опускає на 1 см і знову повертає у попереднє положення; 10 разів він так опускає і 10 разів піднімає синій олівець (20 рухів).

Якщо припустити, що за цей час фарба не висихає і не вичерпується, то на скільки сантиметрів у довжину забрудниться жовтий олівець після двадцятого руху?

Примітка. Цю задачу придумав математик Леонід Михайлович Рибаків по дорозі додому після вдалого полювання на качок. Що надихнуло його на створення задачі, ви прочитаєте на с. 378 після того, як розв'яжете її.

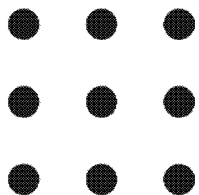
### 10. Переправа через річку (старовинна задача)

Невеликий військовий загін підійшов до річки, через яку необхідно було переправитись. Міст поламаний, а річка глибока. Що ж робити? Раптом офіцер помічає біля берега двох хлопчиків, які граються у човні. Але човен такий малий, що на ньому може переправитись тільки один солдат або тільки двоє хлопчиків — не більше! Однак усі солдати переправилися через річку саме на цьому човні. Яким же чином?

Розв'яжіть цю задачу «про себе» або практично, використовуючи шашки, сірники або щось подібне і пересуваючи їх по столі через уявну річку.

### 11. Вовк, коза і капуста

Це — також старовинна задача; зустрічається у творах VIII століття. Вона має казковий зміст.



## 24. Чотирма прямими

Візьміть аркуш паперу і нанесіть на нього дев'ять точок так, щоб вони розмістилися у формі квадрата, як показано на мал. 14. Перекресліть тепер усі точки чотирма прямими лініями, не відриваючи олівця від паперу.

Мал. 14

## 25. Відокремити кіз від капусти

Розв'яжіть тепер задачу, в певному розумінні протилежну до попередньої. Там ми з'єднували точки прямими лініями, а тут потрібно провести три прямі лінії так, щоб відокремити кіз від капусти (мал. 15). На малюнку цієї книги проводити прямі лінії не варто. Перемалюйте схему розташування кіз і капусти у свій зошит і після цього спробуйте розв'язати задачу. Можна взагалі не проводити ліній, а скористатися в'язальними спицями чи тоненькими дротиками.



Мал. 15. Потрібні негайні заходи від цих ласунок...

## 26. Два потяги

Швидкий потяг вирушив з Москви до Ленінграда<sup>1)</sup> і рухався без зупинок зі швидкістю 60 кілометрів на годину. Інший потяг вирушив йому назустріч з Ленінграда до Москви і також рухався без зупинок зі швидкістю 40 кілометрів на годину.

Яка відстань буде між цими потягами за 1 годину до їхньої зустрічі?

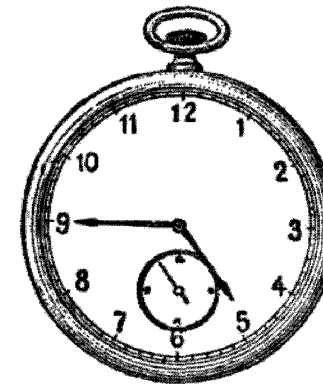
## 27. Під час припливу (жарт)

Недалеко від берега стоїть корабель, в якого вздовж борту спущена на воду мотузьяна драбина. Драбина має 10 сходинок; відстань між сходинками 30 см. Найнижча сходинка торкається поверхні води. Океан сьогодні дуже спокійний, але починається приплив, який піднімає воду цього дня на 15 см. Через який час покриється водою третя сходинка мотузьяної драбини?

## 28. Циферблат

а) Поділити циферблат годинника (мал. 16) двома прямими лініями на три частини так, щоб, додавши числа, у кожній частині отримати однакові суми.

б) Чи можна цей циферблат поділити на 6 частин таким чином, щоб у кожній частині знаходились два числа, причому суми цих двох чисел у кожній із шести частин були би рівними між собою?



Мал. 16.

## 29. Тріснутий циферблат

У музеї я бачив старовинний годинник з римськими цифрами на циферблаті, причому замість відомого нам запису числа чотири (IV) стояли чотири палички (III). Тріщини, що утворилися на циферблаті, поділили його на 4 частини, як зображено на мал. 17. Суми чисел у кожній частині виявилися неоднаковими: у першій — 21, у другій — 20, у третій — 20, у четвертій — 17.

<sup>1)</sup> Ленінград — колишня назва міста Санкт-Петербург (Росія) (прим. ред. укр. видання).

Нас зацікавило наступне запитання.

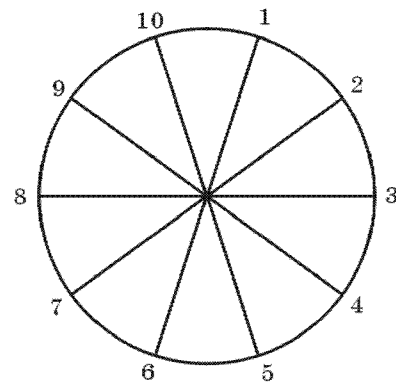
Скільки різних маршрутів можна розробити від пункту А до пункту С, якщо рухатися по вулицях нашого міста тільки вперед і вправо, вправо і вперед? Окремими своїми частинами маршрути можуть збігатися (див. пунктирні лінії на схемі плану).

У нас склалося враження, що це нелегка задача. Чи правильно ми її розв'язали, якщо нарахували 70 різних маршрутів?»

Що потрібно відповісти на цього листа?

### 51. Змінити розміщення чисел

На кінцях п'яти діаметрів усі порядкові числа від 1 до 10 розміщено так, як показано на мал. 24. При такому розміщенні лише в одному випадку сума двох сусідніх чисел дорівнює сумі двох протилежно розміщених чисел, а саме:



Мал. 24

$$10 + 1 = 5 + 6,$$

але, наприклад,

$$1 + 2 \neq 6 + 7,$$

або

$$2 + 3 \neq 7 + 8.$$

Перерозмістіть дані числа так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел дорівнювала сумі відповідних двох протилежно розміщених чисел.

Можна очікувати, що ця задача має не один розв'язок, тобто різні розміщення даних чисел задовольняють умову задачі.

Спробуйте знайти такий шлях розв'язання задачі, який дав би змогу встановити і кількість усіх можливих розв'язків.

### 52. Різні дії, один результат

Якщо між двома двійками знак додавання замінити на знак множення, то результат не зміниться. Справді:  $2 + 2 = 2 \times 2$ . Неважко підібрати і 3 числа, що мають ту саму властивість, зокрема:  $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$ . Є і 4 однозначних числа, які при додаванні та множенні одне на одного дають один і той самий результат.

Хто швидше підбере ці числа? Зроблено? Продовжуйте змагання! Знайдіть 5, а потім 6, тоді 7 і т. д. однозначних чисел, що мають таку саму властивість. При цьому майте на увазі, що, починаючи з групи у 5 чисел, відповіді можуть бути різними.

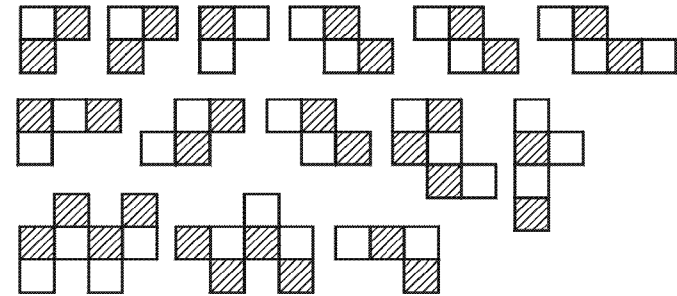
### 53. Дев'яносто дев'ять і сто

Скільки потрібно поставити знаків «плюс» (+) між цифрами числа 987 654 321, щоб отримати суму 99?

Можливі два розв'язки. Знайти хоча б один з них нелегко, зате ви набудете досвіду, який допоможе вам швидко розставити знаки «плюс» між сімома числами 1 2 3 4 5 6 7 так, щоб у сумі було 100 (розміщення цифр змінювати не дозволяється). Школярка з Кемерова стверджує, що і тут можливі два розв'язки.

### 54. Розбірна шахівниця

Веселий шахіст розрізав свою картонну шахівницю на 14 частин, як показано на мал. 25. Утворилася розбірна шахівниця. Товаришам, які приходили до нього грати у шахи, він спочатку пропонував головоломку: скласти з даних 14 частин шахівницю. Виріжте з



Мал. 25. Так веселий шахіст розрізав шахівницю.

паперу в клітинку такі самі фігурки і переконайтеся самі — важко чи легко з них скласти шахівницю.

### 55. Пошуки міні

Після закінчення польових занять із групою суворовців<sup>1)</sup> полковник вирішив запропонувати своїм вихованцям задачу «на

<sup>1)</sup> Суворовець — вихованець спеціалізованого середнього військового навчального закладу (училища) (прим. ред. укр. видання).

### 61. Прилади для Цимлянського гідровузла

У виконанні термінового замовлення з виготовлення вимірювальних приладів для Цимлянського гідровузла взяла участь бригада висококваліфікованих фахівців у складі бригадира — старого, досвідченого робітника — і 9 молодих робітників, які нещодавно закінчили ремісниче училище.

Упродовж дня кожен з юних робітників змонтував по 15 приладів, а бригадир — на 9 приладів більше, ніж у середньому кожен з 10 членів бригади.

Скільки всього вимірювальних приладів бригада змонтувала за один робочий день?

### 62. Хлібоздачу — вчасно

Правління колгоспу, починаючи здавання хліба державі, вирішило доставити до міста ешелон із зерном рівно на 11 годину ранку. Якщо машини поїдуть зі швидкістю 30 км/год, то колона прибуде до міста о 10 годині ранку, а якщо зі швидкістю 20 км/год — то о 12 годині дня.

Як далеко від колгоспу до міста і з якою швидкістю потрібно їхати, щоб прибути якраз вчасно?

### 63. У дачному потязі

У вагоні електропотяга їхали з міста на дачу дві подружки-школярки.

— Я зауважую, — сказала одна з подруг, — що зворотні дачні потяги зустрічаються нам через кожні 5 хвилин. Як ти гадаєш, скільки дачних потягів прибуває до міста протягом однієї години, якщо швидкості потягів в обох напрямках однакові?

— Звичайно, 12, оскільки  $60 : 5 = 12$ , — сказала інша подруга.

Проте школярка, яка поставила запитання, не погодилася з відповіддю подруги і навела їй свої міркування.

А що ви думаєте з цього приводу?

### 64. Від 1 до 1 000 000 000

Розповідають, що коли 9-річному Гауссу<sup>1)</sup> вчитель запропонував знайти суму всіх цілих чисел від 1 до 100,  $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ , то маленький Гаусс, поміркувавши, сам визначив, в який спосіб можна дуже швидко виконати це додавання.

<sup>1)</sup> Гаусс К. Ф. (1777–1855) — видатний німецький математик (прим. автора).

Треба додати перше число до останнього, друге до передостаннього і т. д. Сума кожної такої пари чисел дорівнює 101 і повторюється вона 50 разів.

Отже, сума всіх цілих чисел від 1 до 100 буде дорівнювати:  $101 \times 50 = 5050$ .

Цей самий спосіб використайте для розв'язання важчої задачі: знайти суму всіх цифр у всіх цілих числах від 1 до 1 000 000 000.

Зверніть увагу: тут йдеться не про суму чисел, а про суму цифр усіх чисел!

### 65. Страшний сон футбольного вболівальника

Уболівальник, засмучений поразкою «свої» команди, спав неспокійно. Йому снилася велика квадратна кімната без меблів. У кімнаті тренувався воротар. Він бив футбольним м'ячем об стіну, а потім ловив його.

Раптом воротар став зменшуватися, зменшуватися і, нарешті, перетворився на маленький целулоїдний м'ячик від «настільного тенісу», а футбольний м'яч виявився чавунною кулею. Куля шалено крутилася на гладкій підлозі кімнати, намагаючись розчавити маленький целулоїдний м'ячик. Бідолашний м'ячик у розпачі гасав з боку в бік, знесилившись і не маючи змоги підстрибнути.

Чи міг він, не відриваючись від підлоги, все-таки сховатися де-небудь від переслідувань чавунної кулі?



Мал. 30. Куля намагалася розчавити м'ячик.

### 85. Хто має рацію?

Марічка розв'язувала арифметичну задачу. Остання дія полягала у визначенні об'єму земляних робіт, а для цього треба було обчислити добуток трьох чисел.

Дівчинка вдало перемножила перших два числа і тільки-но взялася перемножувати отриманий результат на третє число, як раптом помітила, що другий співмножник вона записала неправильно; він виявився більшим від того числа, яке мало би бути за умовою, на  $\frac{1}{3}$  його величини.

Тоді Марічка, щоб не переробляти вже виконану дію, вирішила, що все одно отримає правильний результат, якщо тепер третій співмножник попередньо зменшить на  $\frac{1}{3}$  його величини, тим більше, що він був рівним другому співмножнику.

— Так робити не можна, — сказала їй подруга, — ти при цьому помилилася на 20 кубометрів.

— Яка ж тут може бути помилка? — заперчила Марічка. — Якщо одне число я взяла збільшеним, а інше, яке рівне йому, на таку ж саму частину зменшеним, то я гадаю, що добуток залишився незмінним.

Хто має рацію?

А чи зможете ви, користуючись наведеними даними, знайти розв'язок задачі?

### 86. Три підсмажені скибочки — на вечерю

Мама дуже смачно підсмажує скибочки хліба, користуючись спеціальною маленькою сковорідкою. Підсмаживши один бік кожної скибочки, вона перевертає її на інший бік. Підсмажування кожного боку скибочки триває 30 секунд, причому на сковорідці вміщується поряд тільки дві скибочки.

Поміркувавши, з'ясуйте, яким чином за цих умов мама підсмажує обидва боки трьох скибочок тільки за  $1\frac{1}{2}$  хвилини, а не за 2, і ви отримаєте на вечерю три смачні підсмажені скибочки.



## РОЗДІЛ ДРУГИЙ СКРУТНІ СИТУАЦІЇ

### 87. Кмітливий коваль Хечо

Мандруючи минулого літа Грузією, ми іноді розважалися тим, що вигадували всілякі незвичайні історії, нав'яні якою-небудь пам'яткою давнини.

Одного разу підійшли ми до одинокої старовинної вежі. Оглянули її, сіли відпочити. А був серед нас студент-математик; він одразу ж вигадав цікаву задачу:

«Десь років 300 тому жив тут князь лихий та пихатий. Була у князя донька-наречена, на ймення Даріджан. Обіцяв князь свою Даріджан за дружину багатому сусідові, а вона покохала хлопця з простолюду, коваля Хечо. Спробували було Даріджан і Хечо втекти у гори від неволі, але зловили їх слуги князеві.

Розлютився князь і вирішив назавтра стратити обох, на ніч же наказав їх замкнути ось у цю високу, похмуру, закинуту, недобудовану вежу, а разом з ними ще й служницю Даріджан, дівчинку-підлітка, яка допомагала їм втікати.

Не розгубився у вежі Хечо, роздивився, піднявся по сходинках у верхню частину вежі, у вікно визирнув — стрибати неможливо, розіб'єшся. Тут помітив Хечо біля вікна мотузку, яку забули будівельники. Вона була перекинута через заіржавлений блок, закріплений трохи вище від вікна. До кінців мотузки були прив'язані порожні кошики, до кожного кінця — по кошику.



таке вільне місце, на якому могли би поміститися не більше ніж 2 шашки (монети). Користуючись вільним місцем, можна переміщати щоразу тільки по дві шашки (монети), що знаходяться поряд, не змінюючи при цьому їхнього взаємного розміщення.

Достатньо зробити 4 таких переміщення пар шашок, щоб опинилися підряд усі чорні, а за ними — всі білі шашки.

Переконайтеся в цьому!

### 97. Ускладнення задачі

Зі збільшенням кількості шашок (монет), узятих напочатку, задача ускладнюється.

Так, якщо ви помістите в ряд 5 білих і 5 чорних шашок, чергуючи їхній колір, то буде потрібно 5 переміщень, аби розмістити чорні шашки з чорними, а білі — з білими.

У випадку шести пар шашок буде потрібно 6 переміщень; у випадку семи пар — 7 переміщень і т. д. Знайдіть розв'язки задачі для п'яти, шести і семи пар шашок.

Пам'ятайте, що при початковому розкладенні шашок необхідно залишати зліва (або справа) вільне місце не більше ніж для двох шашок і переміщувати щоразу по 2 шашки без зміни їхнього взаємного розміщення.

### 98. Картки укладаються за порядком номерів

Наріжте з картону 10 карток розміром 4×6 см і пронумеруйте їх числами від 1 до 10. Склавши картки купкою, візьміть їх у руку. Починаючи з верхньої картки, покладіть першу картку на стіл, другу — під низ купки, третю картку на стіл, четверту — під низ купки. Робіть так доти, доки не покладете на стіл усі картки.

З упевненістю можна сказати, що картки розмістяться не за порядком номерів.

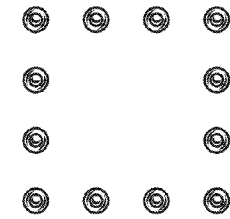
Поміркуйте, в якій послідовності необхідно спочатку скласти картки в купку, аби при вказаному розкладенні вони розмістилися за порядком номерів від 1 до 10.

### 99. Дві головоломки розміщення

Перша головоломка. Дванадцять шашок (монет, шматочків паперу тощо) неважко розмістити на столі у формі квадратної

рамки по 4 шашки вздовж кожної сторони. Однак спробуйте покласти ці шашки так, щоб уздовж кожної сторони квадрата їх було по 5 (мал. 39).

Друга головоломка. Розкладіть на столі 12 шашок так, щоб утворилися 3 ряди по горизонталі та 3 ряди по вертикалі і щоб у кожному з цих рядів було по 4 шашки.



Мал. 39. Як покласти ці шашки по 5 шашок з кожної сторони?

### 100. Загадкова скринька

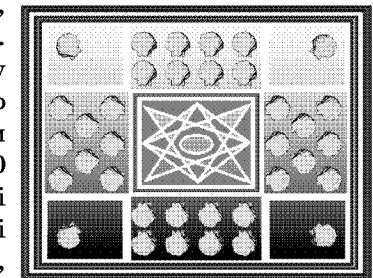
Мишко відпочивав улітку в Артеку<sup>1)</sup> і привіз звідти подарунок своїй молодшій сестрі Іринці — гарну скриньку, оздоблену 36 мушлями. На кришці скриньки випалено лінії так, що вони поділяють кришку на 8 секцій.

Іринка до школи ще не ходить, але вона вміє рахувати до 10. Найбільше дівчинці у Мишковому подарункові сподобалося те, що вздовж кожної сторони кришки скриньки розміщено рівно по 10 мушель (мал. 40). Рахуючи мушлі вздовж сторони, Іринка враховує всі мушлі, що знаходяться у секції, суміжній до цієї сторони. Мушлі, які розміщені у кутових секціях, Іринка зараховує і до тієї, і до іншої сторони.

Одного разу мама, протираючи скриньку ганчіркою, ненароком розчавила 4 мушлі. Тепер уже не виходить по 10 мушель уздовж кожної сторони кришки. Яка неприємність! Прийде Іринка з дитячого садка і дуже засмутиться.

— Віда невелика, — заспокоїв маму Мишко.

Він обережно відклеїв частину мушель із тих 32, які залишилися, і так уміло їх наклеїв знову на кришку скриньки, що вздовж кожної її сторони знову було по 10 мушель.



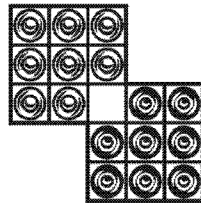
Мал. 40. Уздовж кожної сторони кришки скриньки — 10 мушель.

<sup>1)</sup> Артек — всесоюзний піонерський табір у Криму, на березі Чорного моря, поблизу Гурзуфа, кліматична здравниця в СРСР (прим. ред. укр. видання).

Не забираючи шашок з клітинок, а тільки переміщуючи їх, пересуньте шашку з цифрою 1 на клітинку № 1. Можна тимчасово ставити по одній шашці на клітинки  $A$ ,  $B$  і  $B$ ; перестрибувати однією шашкою через іншу не можна. Коли шашка з цифрою 1 перейде на своє місце — на клітинку № 1, то й усі інші шашки повинні опинитися на попередніх місцях, тобто так, щоб номери шашок і клітинок збігалися.

**Друга головоломка.** Для другої задачі візьміть 8 чорних і 8 білих шашок та розставте їх так, як показано на мал. 56. Необхідно, не забираючи шашок з поля, за 46 ходів перемістити всі чорні шашки на місця білих, а білі — на місця чорних.

Шашки можна пересувати вперед і назад, управо і вліво, але не навскоси. У тих самих напрямках дозволяється перестрибувати через одну шашку на вільну клітинку. Дві шашки на одну клітинку поміщати не можна. Черговості у переміщенні білих і чорних шашок дотримуватися не потрібно; якщо потрібно, то можна переміщувати кілька разів підряд шашки одного кольору.



Мал. 56.

### 112. Оригінальне угруповання цілих чисел від 1 до 15

Подивіться, як гарно можна розмістити всі цілі числа від 1 до 15 у 5 груп по 3 числа у кожній групі:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 8 \\ 15 \end{array} \right\} d = 7; \quad \left. \begin{array}{l} 4 \\ 9 \\ 14 \end{array} \right\} d = 5; \quad \left. \begin{array}{l} 2 \\ 6 \\ 10 \end{array} \right\} d = 4; \quad \left. \begin{array}{l} 3 \\ 5 \\ 7 \end{array} \right\} d = 2; \quad \left. \begin{array}{l} 11 \\ 12 \\ 13 \end{array} \right\} d = 1.$$

Числа розподілені за групами так, що у кожній групі різниця  $d$  одна і та сама як між другим та першим, так і між третім та другим числами. Наприклад,  $8 - 1 = 7$  і  $15 - 8 = 7$  або  $9 - 4 = 5$  і  $14 - 9 = 5$  (кожна група чисел з постійною різницею між сусідніми числами утворює послідовність, яку називають *арифметичною прогресією*). Цей цікавий розподіл п'ятнадцяти порядкових цілих чисел на 5 груп із вказаними різницями є не єдиною можливістю. Залишивши першу групу чисел (1, 8, 15) без змін, інші 12 чисел (2,

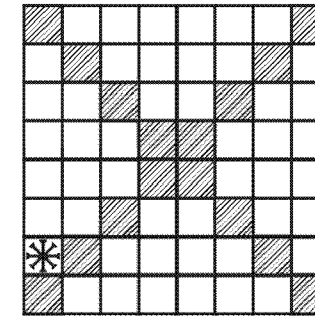
3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14) можна згрупувати в нові трійки чисел, але з попередніми різницями:  $d = 5$ ;  $d = 4$ ;  $d = 2$  і  $d = 1$ .

Знайдіть це нове угруповання даних чисел.

Ті, хто виявить бажання, можуть спробувати розмістити ці самі числа від 1 до 15 у групи арифметичних прогресій з іншими значеннями  $d$ .

### 113. Вісім зірочок

В одну з білих клітинок на мал. 57 я помістив зірочку. Розмістіть у білих клітинках ще 7 зірочок так, щоб ніякі 2 зірочки (з восьми) не знаходилися на одній горизонталі чи вертикалі, чи якій-небудь діагоналі.



Мал. 57.

Розв'язувати задачу, звичайно, потрібно шляхом проб, тому додатковий інтерес задачі ще й у тому, щоб у процес необхідних випробувань внести відому систему.

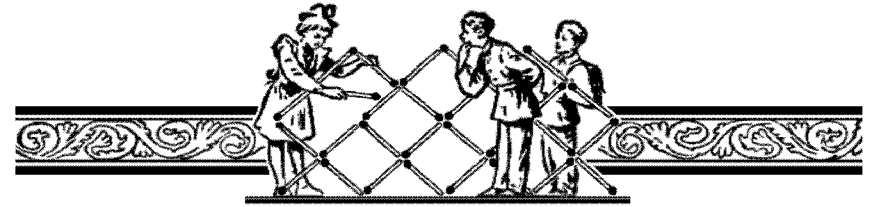
### 114. Дві задачі на розставлення букв

**Перша задача.** У квадраті, розділеному на 16 рівних квадратів, розставте 4 букви так, щоб у кожному горизонтальному ряду, в кожному вертикальному ряду і в кожній з двох діагоналей великого квадрата зустрічалася тільки одна буква. Скільки розв'язків цієї задачі буде у тому випадку, коли букви, що розставляються, однакові й у тому випадку, коли вони різні?

**Друга задача.** У квадраті, розділеному на 16 рівних квадратів, розставте по 4 рази кожна з чотирьох букв  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  так, щоб

На плані підземелля показано, в який бік можна пройти через кожні двері, що відчиняються без ключа, але в якому порядку треба відчиняти замкнені двері, невідомо. Через одні й ті самі двері дозволяється проходити будь-яку кількість разів, зрозуміло, дотримуючись умов, за яких вони відчиняються.

В'язень перебуває у камері *O*. Вкажіть йому шлях, що веде до виходу на волю.



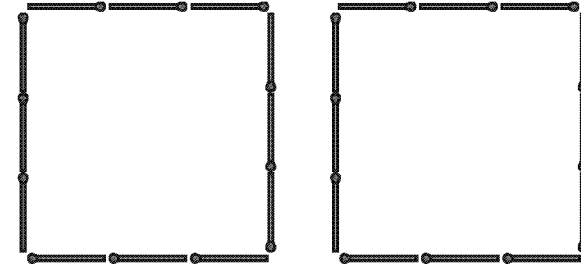
## РОЗДІЛ ТРЕТІЙ

### ГЕОМЕТРІЯ НА СІРНИКАХ

Коробка сірників чи пучок паличок однакової довжини — чудове приладдя для геометричних розваг, що потребують винахідливості і розвивають кмітливість.

Із сірників можна скласти різноманітні прямолінійні фігури; перетворювати одну фігуру на іншу шляхом перекладання сірників; навіть теореми можна доводити на сірниках. Розглянемо, для прикладу, таку задачу.

Скільки однакових квадратів можна скласти з 24 сірників, не ламаючи їх і використовуючи при цьому всі сірники?



Мал. 64. Із 24 сірників — 2 квадрати.

Якщо на кожну сторону квадрата використати по 6 сірників (більше не можна), то утвориться один квадрат.

Якщо сторона квадрата складається з 5 або 4 сірників, то однакових квадратів зі всіх 24 сірників не вийде. Якщо сторона складається з 3 сірників, то можна викласти два квадрати (мал. 64).

### 142. Знайти контур фігури<sup>1)</sup>

Дано 12 сірників. Прийmemo кожного з них за одиницю довжини. Потрібно викласти з 12 сірників таку фігуру, яка охопила би площу в 3 квадратні одиниці.

Це важка задача, якщо не брати до уваги найпростіший випадок фігури, складеної з трьох квадратів, зчеплених вершинами.

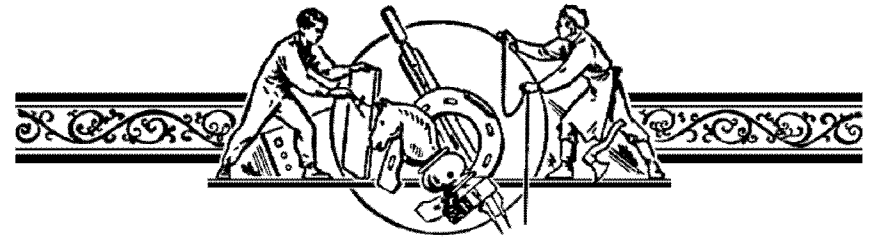
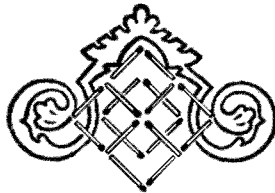
### 143. Знайти доведення

Розмістіть два сірники поряд так, щоб вони утворили одну пряму лінію, і доведіть за допомогою міркувань правильність вашої побудови.

Для доведення потрібно виконати додаткову побудову на сірниках, для чого дозволяється користуватися будь-якою кількістю сірників.

### 144. Побудувати та довести

Побудувати зі сірників правильний шестикутник. Довести правильність побудови.

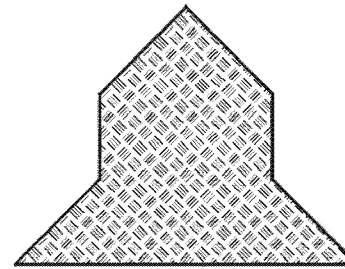


## РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ

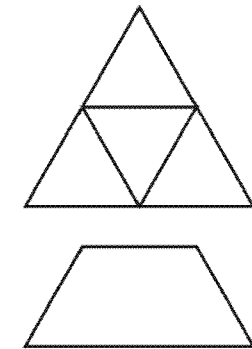
## СІМ РАЗІВ ВІДМІР, ОДИН РАЗ ВІДРІЖ

### 145. На рівні частини

Задача 1. Перемалюйте фігуру, зображену на мал. 85, на аркуш паперу і розріжте її на 4 рівних чотирикутники (фігури називаються рівними, якщо при накладанні вони збігаються всіма своїми частинами).



Мал. 85. Як розрізати на рівні чотирикутники?

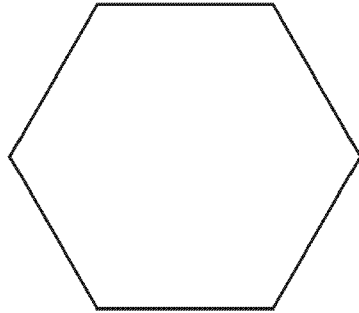


Мал. 86. Як трапецію розрізати на 4 рівні трикутники?

Задача 2. Як розрізати рівносторонній трикутник на 4 рівні частини, показано на мал. 86. Заберіть верхній трикутник; 3 трикутники, що залишилися, утворюють фігуру, яку в геометрії називають трапецією. Спробуйте її розрізати теж на 4 рівні частини.

<sup>1)</sup> Останні три задачі призначені для учнів 7–9-х класів (прим. ред. укр. видання).

Як, наприклад, найкраще розрізати даний правильний шестикутник (мал. 112) прямолінійними розрізами, щоб з його частин можна було скласти суцільний правильний трикутник?



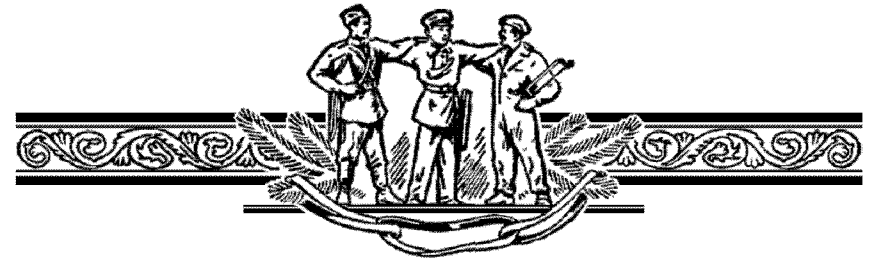
Мал. 112. Як розрізати, щоб скласти правильний трикутник?

Існує кілька розв'язків цієї задачі; у кожному з них проводиться поділ шестикутника тільки на 6 частин.

Спробуйте знайти такий розв'язок.

\* \* \*

Між іншим, можливість поділу шестикутника на 5 таких частин, з яких можна було би скласти правильний трикутник, досі ніхто не виявив, але ніхто не довів і неможливість такого поділу.

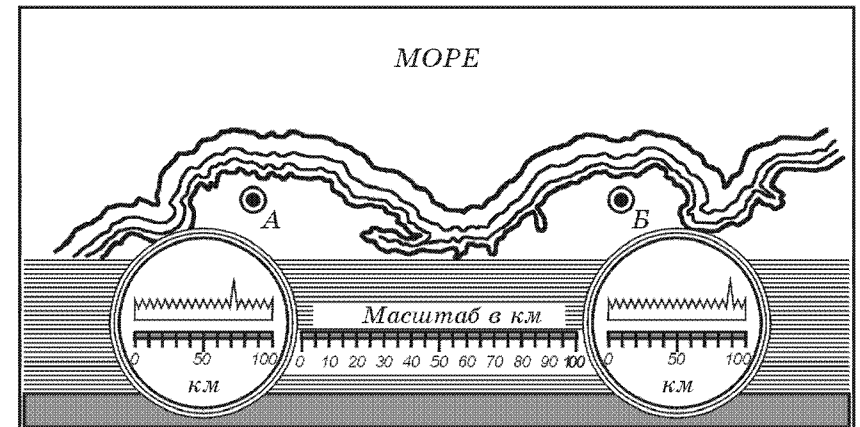


## РОЗДІЛ П'ЯТИЙ

### СПРАВЖНІЙ УМІЛЕЦЬ ЗАВЖДИ ЗНАЙДЕ ДІЛО

#### 169. Де знаходиться ціль?

На мал. 113 зображено в кружечках екрани радіолокаційних станцій. На екранах світиться або записується зигзагоподібна лінія; під нею міститься покажчик відстаней.



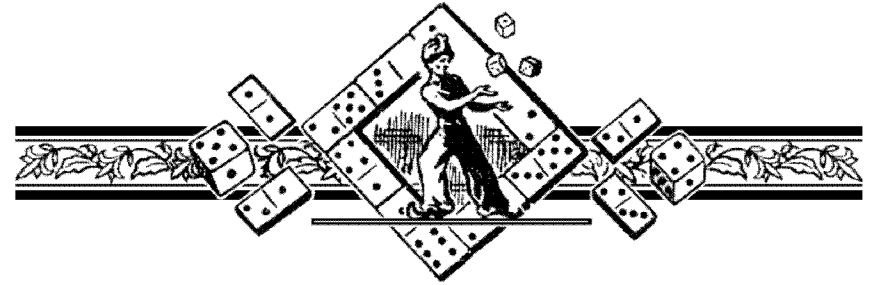
Мал. 113. В якому пункті моря знаходиться корабель?

Зі станції відправляється радіохвиля. На екрані цей момент відповідає нульовій точці шкали. Через деякий час радіохвиля, відбившись від цілі (наприклад, від корабля у морі), повертається

Теоретично побудова є точною, практично ж точність побудови визначатиметься ступенем акуратності виготовлення приладу.

Описаний механізм може бути виготовлений з дерева або легкого металу.

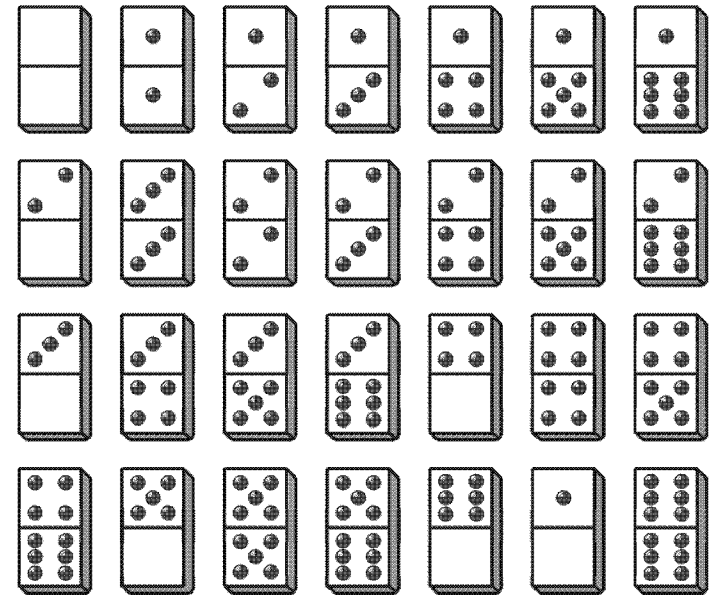
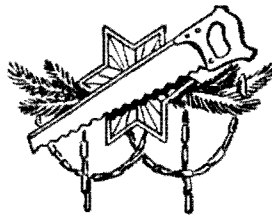
**Задача.** Ви, звичайно, вмієте ділити кут навпіл, користуючись циркулем і лінійкою. Так ось, поміркуйте, як побудувати кут, що дорівнює  $1^\circ$ , користуючись спочатку описаним шарнірним механізмом, а потім циркулем і лінійкою.



## РОЗДІЛ ШОСТИЙ ДОМІНО Й КУБИК

### А. ДОМІНО

Гра «доміно» найчастіше складається з 28 прямокутних пластинок — пластинок (мал. 137). Кожна пластинка розділена на



Мал. 137. 28 пластинок доміно.

Метод відгадування. Відняти 7 від оголошеної частки і різницю поділити на 9. Цифри отриманої частки і покажуть початкове розміщення кубиків.

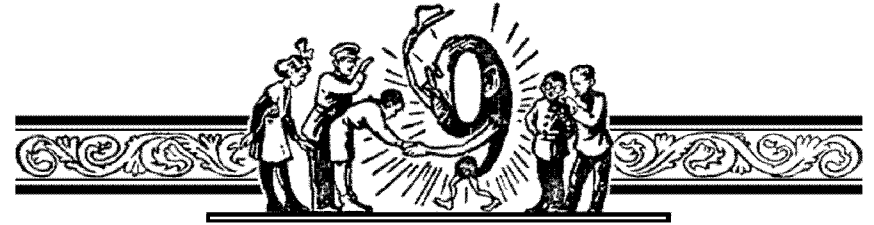
Так, продовжуючи розглядати приклад, отримаємо:

$$254\ 523 : 111 = 2\ 293;$$

$$2\ 293 - 7 = 2\ 286;$$

$$2\ 286 : 9 = 254.$$

У чому математична суть цього фокуса?



## РОЗДІЛ СЬОМИЙ ВЛАСТИВОСТІ ДЕВ'ЯТКИ

Деякі особливості арифметичних операцій над цілими числами пов'язані з числом 9. Кожна властивість дев'ятки, яку ви помітили, може стати приводом для придумування різноманітних математичних розваг. Відома, наприклад, ознака подільності на 9: число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на дев'ять. Звідси випливає, що сума цифр у добутку будь-якого числа на 9 дорівнює дев'яти або кратна дев'яти (тобто ділиться на дев'ять). Наприклад,  $354 \times 9 = 3186$ , тоді:  $3 + 1 + 8 + 6 = 18$  (ділиться на дев'ять).

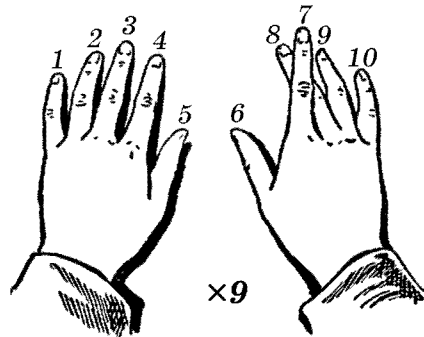
Тому, коли один малюк скаржився, що йому важко запам'ятати таблицю множення перших десяти чисел на дев'ять, батько малюка запропонував йому простий спосіб допомогти пам'яті пальцями своїх рук.

Ось цей спосіб на користь і допомогу іншим.

**Порухом пальця.** Покладіть обидві руки поряд на стіл і простягніть пальці. Кожен палець зліва направо означатиме відповідне порядкове число: перший зліва — 1, другий — 2, третій — 3, четвертий — 4 і т. д. до десятого, який позначатиме число 10. Нехай потрібно помножити тепер будь-яке число з першого десятка на 9. Для цього вам варто тільки, не зрушуючи рук зі столу, трохи підняти вгору той палець, який позначає множене. Тоді число інших пальців, що лежать ліворуч від піднятого пальця, буде числом десятків добутку, а число пальців праворуч — числом одиниць.

Приклад. Помножити 7 на 9. Кладіть руки на стіл і підніміть сьомий палець (мал. 153); ліворуч від піднятого пальця лежать 6 пальців, а праворуч — 3. Отже, результат множення 7 на 9 дорівнює 63. Це дивовижне на перший погляд механічне множення зараз же стане зрозумілим, якщо пригадати, що сума цифр у кожному добутку чисел таблиці множення на дев'ять дорівнює дев'яти, а число десятків у добутку завжди на 1 менше від того числа, яке ми множимо на 9. Підняттям відповідного пальця це ми і відзначаємо, а отже, і... множимо.

Людська рука — одна з перших лічильних машин!



Мал. 153. «Лічильна машина».

Ще деякі властивості. Ось ще кілька цікавих і корисних для подальшого розв'язування задач властивостей, пов'язаних із числом 9.

1. Завжди ділиться на 9:

- різниця між будь-яким числом і сумою його цифр;
- різниця двох чисел з однаковими цифрами, але різним порядком їхнього розміщення;
- різниця двох чисел з однаковими сумами цифр у кожного з них.

2. Якщо з яких-небудь цифр складено числа, які відрізняються лише порядком наступності цифр, то при діленні на 9 кожного з них отримується одна і та сама остача. Вона дорівнює остачі від ділення на 9 суми цифр якого-небудь зі згаданих чисел.

3. Якщо остачу від ділення суми цифр числа на 9 називатимемо «надлишком», то:

- надлишок  $\frac{\text{суми}}{\text{різниці}}$  чисел дорівнює надлишку  $\frac{\text{суми}}{\text{різниці}}$  надлишків доданків;

б) надлишок добутку двох чисел дорівнює надлишку добутку надлишків даних чисел.

Ви легко перевірите ці властивості на числових прикладах, а якщо маєте певні знання з алгебри, то можете їх довести.

Як самостійну вправу знайдіть аналогічне співвідношення для надлишку частки від ділення двох чисел.

Розібравшись у розв'язках задач цього розділу, ви можете багато з них використовувати як математичні фокуси.

## 210. Яку цифру закреслено?

Задача 1. Нехай ваш друг напише, не показуючи вам, число з трьох або більше цифр, поділить його на 9 і назве вам остачу від такого ділення. Тепер запропонуйте йому закреслити одну цифру (будь-яку) в числі, яке він узяв; число, що утворилося після закреслення цифри, нехай він знову поділить на 9 і знову назве вам остачу від цього ділення. Відразу ж ви можете сказати, яку цифру було закреслено, керуючись такими правилами:

- якщо друга остача менша від першої, то, віднімаючи від першої остачі другу, ви якраз і отримаєте закреслену цифру;
- якщо друга остача більша від першої, то закреслену цифру ви отримаєте, віднімаючи другу остачу від першої, збільшеної на 9;
- якщо остачі рівні, то закреслено або цифру 9, або 0. Чому це так?

Задача 2. Тепер запропонуйте вашому другові придумати два числа з однаковими цифрами, але різним порядком їхнього розміщення і відняти від більшого числа менше. Ні написаних чисел, ні отриманої різниці він вам, звичайно, не має казати, але нехай ваш друг закреслить одну цифру різниці (тільки не 0) і скаже вам суму всіх цифр різниці, які залишилися. Щоб визначити закреслену цифру, вам достатньо доповнити число, яке він назвав, до найближчого, кратного дев'яти.

Наприклад,

$$72\ 105 - 25\ 071 = 47\ 034.$$

Закреслюємо цифру 3. Сума цифр, які залишилися:  $4 + 7 + 4 = 15$ . Доповнення числа 15 до найближчого числа, що ділиться на 9, тобто до 18, дорівнює 3, що й дає закреслену цифру.

Чому це так?