

О.С. Істер

ЗБІРНИК НЕСКЛАДНИХ,
АЛЕ КОРИСНИХ ВПРАВ
З ГЕОМЕТРІЇ
ДЛЯ 7–11 КЛАСІВ

Друге видання, перероблене



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 512.1(075.3)
ББК 22.1я72
189

Істер О.С.

189 Збірник нескладних, але корисних вправ з геометрії для 7–11 класів.
2-е вид., перепробл. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 192 с.

ISBN 978-966-10-2633-8

Посібник містить 1472 нескладні, але корисні вправи з усього шкільного курсу геометрії. Переважну більшість вправ, запропонованих у посібнику, можна виконувати без рисунків чи додаткових записів на дошці, хоча посібник містить вправи, в яких додаткові записи є необхідними.

Абсолютна більшість вправ, запропонованих у посібнику, потребує миттєвої відповіді або розв'язується за допомогою 1–3 логічних кроків. Саме такі вправи складають першу частину завдань зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО). Тому посібник також принесе користь тим, хто готується до ЗНО.

Учителям математики, учням 7–11 класів.

ББК 22.1я72

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

**ЗБІРНИК НЕСКЛАДНИХ, АЛЕ КОРИСНИХ ВПРАВ
З ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ 7–11 КЛАСІВ**

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 19.01.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.

Умовн. друк. арк. 11,16. Умовн. фарбо-відб. 11,16.

[В. 2].

Видавництво «Навчальна книга — Богдан»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців

ДК № 370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48

E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com www.bohdan-books.com

Охороняється законом про авторське право.

Жодна частина цього видання не може бути відтворена

в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

ISBN 978-966-10-2633-8

© Навчальна книга – Богдан,
майнові права, 2012

ПЕРЕДМОВА

Посібник містить 1472 нескладні, але корисні вправи з усього шкільного курсу геометрії.

Переважну більшість вправ, запропонованих у посібнику, можна виконувати без рисунків чи додаткових записів на дошці, хоча посібник містить вправи, в яких додаткові записи (наприклад, додаткова побудова) є необхідними. Складніші вправи позначено зірочкою.

Абсолютна більшість вправ, запропонованих у посібнику, потребує миттєвої відповіді або розв'язується за допомогою 1–3 логічних кроків. Саме такі вправи складають першу частину завдань зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО). Тому посібник також принесе користь тим, хто готується до ЗНО.

Основна мета посібника — допомогти вчителю математики у доборі нескладних, але корисних вправ (в основному, початкового та середнього рівнів навчальних досягнень) зі шкільного курсу геометрії. Саме таких вправ бракує у діючих підручниках. Ці вправи учитель може пропонувати на різних етапах навчання: під час повторення, актуалізації опорних знань, вивчення нового матеріалу та його закріплення. Посібник написано відповідно до програми, тому легко адаптується до будь-якого підручника.

Під час виконання запропонованих вправ учні закріплюють теоретичні знання, тренують пам'ять, підвищують свою логічну та загальноматематичну культуру. Нескладні вправи розвивають в учнів уважність, спостережливість, ініціативу, пробуджують інтерес до математики. Розв'язавши нескладну вправу, слабкий учень повинен повірити у свої сили, для середнього та сильного учня розв'язування таких вправ дозволить закласти фундамент для розв'язування складніших вправ.

У посібнику відсутні відповіді до вправ, тому вчитель, придбавши збірник на весь клас (або один примірник на парту), може використувати його як дидактичний матеріал.

Зауваження та пропозиції щодо цього збірника просимо надсилати на e-mail: ister@i.com.ua.

Відвідайте наші сторінки в Інтернеті www.bohdan-books.com та www.i.com.ua/~ister.

7 КЛАС

РОЗДІЛ І. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Геометрична фігура. Точка і пряма та їхні властивості

- На рис. 1 зображено трикутник, квадрат і коло. Назвати точки, в яких перетинаються:
 - коло і трикутник;
 - трикутник і квадрат;
 - коло і квадрат;
 - усі три фігури.
- Чи перетинаються прямі AB і m на рис. 2?
 - Назвати всі точки, які належать прямій m ; прямій AB .
 - Назвати всі точки, які не належать прямій AB ; прямій m .
- Побудувати (на око) точку перетину прямих a і b (рис. 3). Перевірити свій окомір за допомогою лінійки.

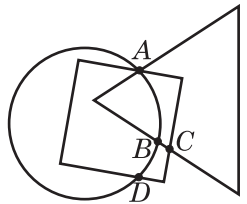


Рис. 1

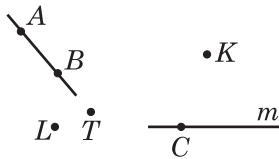


Рис. 2

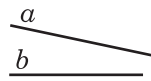


Рис. 3

- Назвати на рис. 4:
 - прямі, які не проходять через точку A ;
 - прямі, які проходять через точку B ;
 - прямі, яким точка M не належить;
 - прямі, які перетинаються в точці C , але не проходять через точку A ;
 - довільні три точки, які не належать одній прямій.

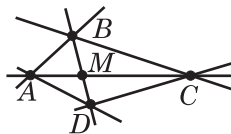



Рис. 4

- Визначити, які з тверджень, поданих нижче, правильні.
 - Дві прямі завжди перетинаються не менше, ніж в одній точці.
 - Через точку площини можна провести не менше, ніж 2011 прямих.
 - На кожній прямій можна вибрати принаймні 2012 точок.
 - Сполучивши попарно три дані точки на площині, завжди отримаємо три різні прямі.

Відрізок. Основні властивості вимірювання відрізків

- Які з точок, позначених на рис. 5, лежать між двома іншими точками?
 
- Чи лежить точка C між A і B , якщо $AB = 9$ см і:
 - $AC = 2$ см, $CB = 7$ см;
 - $AC = 2,7$ см, $CB = 6,4$ см;
 - $AC = 3\frac{1}{7}$ см, $CB = 5\frac{6}{7}$ см;
 - $AC = 10$ см, $CB = 1$ см?
- AB — відрізок прямої a . Точка C належить відрізку AB . Чи належить точка C прямій a ?
- AB — відрізок прямої a . Точка C належить прямій a . Чи можна стверджувати, що C належить відрізку AB ?
- Назвати усі відрізки, зображені на рис. 6–8.

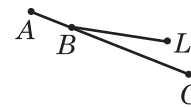


Рис. 6

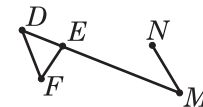


Рис. 7

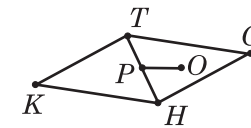


Рис. 8

- AB — відрізок прямої a . Точка D належить прямій a . Чи належить точка D відрізку AB , якщо:
 - $DB > AB$;
 - $DB < AB$;
 - $AD + DB = AB$?
- Точка C лежить між точками A і B . Знайти невідому третю відстань між даними точками, якщо:
 - $AC = 2,3$ см, $CB = 3,7$ см;
 - $CA = \frac{1}{7}$ см, $AB = 5$ см;
 - $BA = 3,9$ см, $BC = \frac{1}{4}$ см.

100. Як побудувати коло, довжина якого дорівнює сумі довжин двох даних кіл?
101. У квадрат зі стороною 20 см вписано коло. Яка його довжина?
102. 1) Знайти довжину дуги кола, радіус якого 10 м, якщо ця дуга дорівнює:
а) 24° ; б) 36° ; в) 90° ; г) 135° .
2) Знайти довжину кола, якщо довжина дуги цього кола 5 м і її градусна міра дорівнює:
а) 45° ; б) 36° ; в) 90° ; г) 150° .
103. На рисунку радіус кола дорівнює 2 м. Як на цьому рисунку відкласти дугу кола довжиною π дм?
104. На рис. 407 $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 90^\circ$. Яка довжина лінії, що обмежує затушовану фігуру?
105. На рис. 408 $ABCD$ — квадрат, сторона якого 4 см. Яка довжина лінії, що обмежує затушовану фігуру?
106. Навколо трикутника ABC зі стороною $AB = 4$ см і $\angle C = 30^\circ$ описано коло. Знайти його довжину.
107. У квадрат вписано коло. У скільки разів периметр квадрата більший від довжини кола?
- 108*. На рис. 409 радіус кола дорівнює 1. Навколо нього описано квадрат і вписано правильний шестикутник. Користуючись рисунком, показати, що $3 < \pi < 4$.

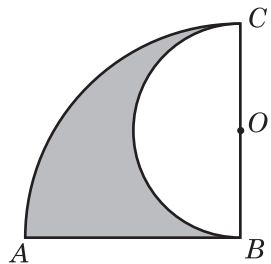


Рис. 407

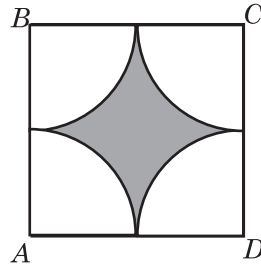


Рис. 408

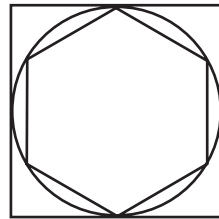


Рис. 409

Радіанна міра кута

109. Знайти радіанну міру кутів:
1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 90° ; 5) 120° .

110. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{8}$; 5) 2π .
111. Чи може кожен кут трикутника дорівнювати цілому числу радіан? Чому?
112. Радіус кола дорівнює 1 см. Знайти довжину дуги кола, що відповідає куту в 2 радіани.
113. Виразити у радіанах суму кутів:
1) трикутника; 2) опуклого чотирикутника;
3) опуклого n -кутника; 4) опуклого n -кутника.

Площа круга та його частин

114. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює:
1) 2 см; 2) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ см; 3) $\frac{3}{\pi}$ см; 4) π см.
115. Площа круга дорівнює 9π см². Знайти радіус круга.
116. Площа одного круга у 16 разів більша від площі іншого. Яке відношення їхніх радіусів?
117. Площа круга чисельно дорівнює довжині кола. Знайти радіус.
118. Радіус круга збільшили у 3 рази. У скільки разів збільшилась площа круга?
119. Знайти площу круга, довжина кола якого дорівнює 4π см.
120. Довжини двох кіл дорівнюють 4π і 6π . Чому дорівнює відношення площ відповідних кругів?
121. Знайти відношення вписаного і описаного кругів для правильного трикутника.
122. Знайти площу кільця, розташованого між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 2 см і 3 см.
123. Знайти площу сектора круга з радіусом 1 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює:
1) 60° ; 2) 90° ; 3) 45° ; 4) 120° .
124. Яку частину площі круга становить площа сектора, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює:
1) 30° ; 2) 150° ; 3) 180° ?

312. Подібні тіла мають однакові об'єми. Чи можна стверджувати, що тіла рівні?

Площі бічної і повної поверхонь циліндра

313. Знайти повну поверхню циліндра, радіус якого 3 см, а висота 7 см.
314. Площа бічної поверхні циліндра чисельно дорівнює його об'єму. Чи може таке бути? Знайти радіус циліндра.
315. Радіус циліндра збільшили в m разів, а висоту зменшили в m разів. Чи змінилася при цьому площа бічної поверхні?
- 316*. Площа осевого перерізу циліндра S . Знайти площу бічної поверхні.
- 317*. Осевий переріз циліндра — квадрат. У скільки разів площа повної поверхні циліндра більша від площі його основи?
318. Прямокутник зі сторонами a та b обертається спочатку навколо однієї сторони, а потім — навколо іншої. У якому випадку площа бічної поверхні буде більшою?
319. У куб з ребром a вписано циліндр. Знайти його повну поверхню.
320. Навколо куба з ребром b описано циліндр. Знайти його бічну поверхню.

Площі бічної і повної поверхонь конуса

321. Обчислити бічну поверхню конуса, радіус якого дорівнює 4 см, а висота — 3 см.
322. Конус і циліндр мають однакові площі бічних поверхонь і рівні радіуси. У скільки разів твірна циліндра більша або менша від твірної конуса?
323. Осевий переріз конуса — рівносторонній трикутник. Обчислити повну поверхню конуса, якщо його радіус дорівнює R .
324. Осевий переріз конуса — прямокутний трикутник (рис. 647). Радіус конуса дорівнює R . Знайти бічну поверхню конуса.
325. Бічна поверхня конуса дорівнює S . Через середину його висоти паралельно до основи проведено переріз. Знайти бічну поверхню відрізаного конуса.

326. Знайти повну поверхню тіла на рис. 649, яке складається з циліндра і конуса.
327. У куб з ребром a вписано конус (рис. 646). Знайти повну поверхню конуса.

Площі бічної і повної поверхонь зрізаного конуса

328. Знайти площу повної поверхні зрізаного конуса, в якого радіуси основ дорівнюють 1 см і 3 см, а твірна дорівнює 4 см.
329. Прямокутна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 12 см, а висота дорівнює 6 см, обертається навколо меншої бічної сторони. Знайти площу бічної поверхні утвореного зрізаного конуса.

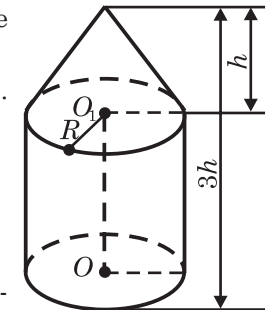


Рис. 649

Площа сфери

330. Сфера вписана в куб з ребром a . Знайти її поверхню.
331. Обчислити площу поверхні півкулі з радіусом R .
332. Площа великого круга кулі дорівнює S . Чому дорівнює площа сфери цієї кулі?
333. Навколо куба з ребром b описана сфера. Знайти її поверхню.
334. Чи є така сфера, в якій об'єм і поверхня виражаються одним і тим самим числом?
335. Об'єм однієї кулі у 8 разів більший від об'єму другої. У скільки разів площа сфери першої кулі більша від площі сфери другої кулі?
336. Площа сфери однієї кулі у 9 разів більша від площі сфери другої кулі. У скільки разів об'єм першої кулі більший від об'єму другої?
337. Навколо сфери описано циліндр. Чи правильно, що площа сфери дорівнює площі бічної поверхні циліндра?
338. Банки фарби вистачає, щоб пофарбувати кулю з радіусом R . Яку кількість куль з радіусом $\frac{R}{5}$ можна пофарбувати цією фарбою?
339. Сума площ n сфер з радіусом R дорівнює площі сфери з радіусом $2R$. Знайти n .

ЗМІСТ

Передмова..... 3

7 клас

Розділ I. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості 4

Геометрична фігура. Точка і пряма та їхні властивості 4
Відрізок. Основні властивості вимірювання відрізків 5
Півплощина 7
Промінь 8
Кут. Основні властивості вимірювання кутів 9
Відкладання відрізків і кутів 10
Бісектриса кута 11

Розділ II. Взаємне розташування прямих на площині..... 12

Суміжні і вертикальні кути, їхні властивості. Кут між двома прямими, що перетинаються 12
Паралельні і перпендикулярні прямі, їхні властивості 14
Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої 15
Кути, утворені при перетині двох прямих січною 15
Ознаки паралельності прямих 15
Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 16

Розділ III. Трикутники 18

Трикутник і його елементи. Рівність трикутників 18
Ознаки рівності трикутників 18
Види трикутників. Рівнобедрений трикутник, його властивості та ознаки 21
Висота, бісектриса і медіана трикутника. Властивості медіани рівнобедреного трикутника 22
Сума кутів трикутника 23
Зовнішній кут трикутника та його властивості 25
Прямокутний трикутник. Властивості прямокутних трикутників 26
Ознаки рівності прямокутних трикутників..... 27
Нерівність трикутника 28

Розділ IV. Коло і круг. Геометричні побудови 30

Коло. Круг 30
Дотична до кола, її властивості 31
Властивості бісектриси кута. Коло, вписане у трикутник 34
Властивості серединного перпендикуляра відрізка.
Коло, описане навколо трикутника 35
Основні задачі на побудову 35
Поняття про геометричне місце точок. Метод геометричних місць 36

8 клас

Розділ I. Чотирикутники 37

Чотирикутник та його елементи 37
Паралелограм та його властивості. Ознаки паралелограма 39
Прямокутник, його властивості 43
Ромб, його властивості 45
Квадрат, його властивості 47

Вписані та центральні кути 48
Вписані та описані чотирикутники 50
Теорема Фалеса 50
Середня лінія трикутника, її властивості 51
Трапеція, її властивості 52
Середня лінія трапеції, її властивості 54

Розділ II. Подібність трикутників. 57

Узагальнена теорема Фалеса 57
Подібні трикутники 58
Ознаки подібності трикутників 59
Подібність прямокутних трикутників. Середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику 62
Властивість бісектриси трикутника 63
Пропорційність відрізків хорд і прямих, що перетинають коло 63

Розділ III. Многокутники. Площі многокутників 65

Многокутник та його елементи. Опуклі і неопуклі многокутники 65
Сума кутів опуклого многокутника 65
Поняття площі многокутника. Основні властивості площ 66
Площа прямокутника 67
Площа паралелограма 68
Площа трикутника 69
Площа трапеції 71

Розділ IV. Розв'язування прямокутних трикутників 72

Теорема Піфагора 72
Перпендикуляр і похила, їхні властивості 75
Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника 76
Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника 77
Значення синуса, косинуса і тангенса деяких кутів 78
Розв'язування прямокутних трикутників. Прикладні задачі 78

9 клас

Розділ I. Розв'язування трикутників 81

Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності 81
Теорема косинусів 82
Теорема синусів 83
Співвідношення між кутами і протилежними сторонами трикутника 84
Розв'язування трикутників. Прикладні задачі 84
Формули для знаходження площі трикутника і паралелограма 86
Формули для радіусів вписаного і описаного кіл трикутника 88

Розділ II. Правильні многокутники 89

Правильні многокутники 89
Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників 90
Побудова деяких правильних многокутників 90
Довжина кола. Довжина дуги кола 91
Радіанна міра кута 92
Площа круга та його частин 93

Розділ III. Декартові координати на площині 95

Прямокутна система координат на площині 95

Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами	97
Рівняння кола	98
Рівняння прямої	100
Розміщення прямої відносно системи координат	100
Кутівий коефіцієнт у рівнянні прямої	102
Розділ IV. Геометричні перетворення	103
Переміщення та його властивості	103
Симетрія відносно точки	103
Симетрія відносно прямої	105
Поворот	106
Паралельне перенесення	107
Рівність фігур	107
Перетворення подібності та його властивості. Гомотетія. Подібність фігур	107
Площі подібних фігур	108
Розділ V. Вектори на площині	110
Вектор. Модуль і напрям вектора. Рівність векторів	110
Координати вектора	110
Додавання і віднімання векторів	112
Множення вектора на число	113
Колінеарні вектори	114
Скалярний добуток векторів. Кут між векторами	115
Розв'язування задач за допомогою координат та векторів	116
Розділ VI. Початкові відомості стереометрії	117
Взаємне розміщення прямих у просторі	117
Взаємне розміщення площин	117
Взаємне розміщення прямої і площини	118
Перпендикуляр до площини	118
Многогранник	119
Пряма призма. Площа поверхні та об'єм прямої призми	119
Піраміда. Площа поверхні та об'єм піраміди	120
Циліндр. Площа поверхні та об'єм циліндра	120
Конус. Площа поверхні та об'єм конуса	121
Куля. Площа поверхні та об'єм кулі	121
Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру	121

10 клас

Розділ I. Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії	123
Аксіоми планіметрії. Система опорних фактів курсу планіметрії. Геометричні і аналітичні методи розв'язування планіметричних задач	123
Приклади застосування координат і векторів до розв'язування планіметричних задач та складання рівнянь чи систем рівнянь за умовою геометричної задачі	124
Розділ II. Вступ до стереометрії	126
Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Просторові геометричні фігури. Приклади неплоских просторових фігур	126
Найпростіші задачі на побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда, піраміди	129

Розділ III. Паралельність прямих і площин у просторі	130
Розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються, паралельні прямі, мимобіжні прямі	130
Розміщення прямої та площини у просторі: пряма і площина, що перетинаються, паралельні пряма і площина. Ознака паралельності прямої та площини	132
Паралельне проектування, його властивості. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії	134
Розділ IV. Перпендикулярність прямих і площин у просторі	136
Перпендикулярність прямих у просторі	136
Перпендикулярність прямої та площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини	136
Перпендикуляр і похила	139
Теорема про три перпендикуляри	141
Двогранний кут	143
Перпендикулярність площин. Ознака перпендикулярності площин. Залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин	144
Відстані у просторі: від точки до прямої, від точки до площини, від прямої до паралельної їй площини, від точки до фігури, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими, між двома фігурами	145
Кут між мимобіжними прямими	147
Кут між прямою і площиною	148
Кут між площинами	150
Ортогональне проектування. Площа ортогональної проекції многокутника	151

11 клас

Розділ I. Координати та вектори у просторі	152
Прямокутна система координат у просторі	152
Відстань між точками. Координати середини відрізка	153
Рух у просторі та його властивості. Симетрії	154
Паралельне перенесення у просторі	155
Перетворення подібності та його властивості. Подібність і гомотетія просторових фігур	155
Вектори у просторі. Рівність векторів	156
Додавання та віднімання векторів	156
Множення вектора на число. Колінеарність векторів	157
Компланарність векторів	158
Скалярний добуток векторів. Кут між векторами	158
Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами	159
Рівняння площини	159
Рівняння сфери	160
Розділ II. Многогранники	161
Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута	161
Многогранні кути	161
Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники	162
Призма	163
Пряма призма	163

Правильна призма	164
Паралелепіпед	165
Площа бічної і повної поверхонь призми	166
Піраміда	167
Правильна піраміда	169
Площа бічної і повної поверхонь піраміди	171
Зрізана піраміда. Площа бічної і повної поверхонь зрізаної піраміди	171
Перерізи многогранників та їхня побудова	172
Правильні многогранники	173
Розділ III. Тіла обертання	175
Тіла і поверхні обертання	175
Циліндр	175
Осьовий переріз циліндра	176
Переріз циліндра площиною, паралельною основі	177
Конус	177
Осьовий переріз конуса	178
Переріз конуса площиною, паралельною основі	178
Зрізаний конус	178
Куля і сфера	179
Переріз кулі площиною	179
Площина, дотична до сфери	180
Комбінації геометричних тіл	180
Розділ IV. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл	181
Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів	181
Об'єми паралелепіпеда та призми	181
Об'єм піраміди	182
Об'єм циліндра	184
Об'єм конуса	184
Об'єм зрізаного конуса	185
Об'єм кулі та її частин	185
Відношення об'ємів подібних тіл	185
Площі бічної і повної поверхонь циліндра	186
Площі бічної і повної поверхонь конуса	186
Площі бічної і повної поверхонь зрізаного конуса	187
Площа сфери	187