

Передмова

Математичні методи дослідження стали важливою складовою частиною пізнання. Сама ж математика перестала бути допоміжною наукою для виробництва, тепер вона є потужним апаратом виробництва, а математичні методи дають можливість дістати статистичні чи інші закони передбачуваного розвитку суспільства.

Одне з основних завдань вивчення математики у вищих навчальних закладах першого та другого рівнів акредитації полягає в тому, щоб дати студентам комплекс математичних знань, необхідних для вивчення загальноосвітніх і спеціальних дисциплін, сформувати вміння математичних досліджень з метою використання їх у майбутній професійній діяльності.

Важливе місце в цьому займає тема «Показникова і логарифмічна функції», яка дозволяє студентам розширити запас відомих функцій, формує вміння застосовувати показникову і логарифмічну функції при моделюванні процесів і явищ навколишнього світу, при розв'язанні різних прикладних задач.

Запропонований навчальний посібник розраховано на програму з математики для спеціальностей техніко-технологічної орієнтації в об'ємі 204–280 годин, де на вивчення теми «Показникова і логарифмічна функції» виділяється 20–24 години. Посібник покликаний надати допомогу викладачам математики у їхній підготовці до проведення лекційних і практичних занять із даної теми. В ньому містяться історичні довідки, приклади використання показникової функції при вивченні явищ оточуючого світу, методичні рекомендації щодо застосування засобів мультимедіа. Викладач, виходячи зі свого можливого навчального часу, може об'єднувати деякі заняття чи питання, скорочувати їхній об'єм.

Посібник допоможе викладачеві і дидактично, бо містить 30 варіантів контрольної роботи, тестового опитування, усні вправи з теми,

а також додаткові вправи для факультативних занять і гурткової роботи.

Подані теоретичні відомості, розв'язання вправ, відповіді до завдань дозволяють використовувати посібник для самостійної підготовки, розвитку вмінь і навичок розв'язання показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Посібник складений на основі багаторічного досвіду роботи в коледжі і є узагальненням педагогічних досягнень у проведенні лекційних і практичних занять, застосуванні сучасних інформаційних технологій, організації різноманітних форм контролю, вдосконалення й узагальнення знань, вмінь і навичок. Посібник може бути використаний і для самостійної підготовки, повторення й узагальнення на завершальній стадії навчання при підготовці до державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

Загальні рекомендації до вивчення теми

«Показникова і логарифмічна функції» (витяг з робочої програми)

Мета вивчення теми — розширити запас функцій, що відомі студентам, за рахунок показникової та логарифмічної функцій, навчити студентів досліджувати їхні основні властивості, будувати графіки, застосовувати ці функції до моделювання реальних процесів.

Основні вимоги

У результаті вивчення теми студенти повинні вміти:

- будувати графіки показникових і логарифмічних функцій і на них ілюструвати властивості функцій;
- застосовувати геометричні перетворення при побудові графіків показникових і логарифмічних функцій;
- диференціювати степеневі, показникові й логарифмічні функції та використовувати похідну для їхнього дослідження;
- обчислювати значення показникових і логарифмічних виразів з допомогою обчислювальних засобів із заданою точністю;
- виконувати перетворення виразів, які містять степені, логарифми;
- застосовувати показникові та логарифмічні функції та їхні похідні до опису реальних процесів;
- розв'язувати найпростіші показникові й логарифмічні рівняння і нерівності та нескладні рівняння і нерівності, що зводяться до найпростіших.

Дидактичні матеріали

3.1. Завдання тестового опитування з теми «Показникова і логарифмічна функції»

Варіант №1

1. Обчислити: $\frac{12^{2+\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}} \cdot 4^{1+\sqrt{3}}}$.

- а) 20; б) 26; в) 30; г) 36.

2. Обчислити: $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{4}$.

- а) -3; б) 3; в) $-\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{3}$.

3. Знайти похідну функції $y = x \cdot e^x$.

- а) e^x ; б) $e^x(x+1)$; в) $e^x(x-1)$; г) $-e^x$.

4. Розв'язати рівняння $3^{x+2} - 3^x = 72$.

- а) 1; б) 2; в) -1; г) 3.

5. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 8x + 12) > -1$.

- а) $(0; 2) \cup (6; 8)$; б) $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$;
в) $(0; 8)$; г) $(8; +\infty)$.

Варіант №2

1. Обчислити: $5^0 + 8^{\frac{2}{3}}$.

- а) 13; б) 4; в) 5; г) 12.

2. Обчислити: $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[10]{27}$.
- а) $-\frac{3}{20}$; б) 30; в) $\frac{3}{10}$; г) $-\frac{3}{10}$.
3. Знайти похідну функції $y = x \ln x$.
- а) $\ln x$; б) $\ln x + 1$; в) 1; г) $\ln x - 1$.
4. Розв'язати рівняння $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.
- а) 10; б) 12; в) 14; г) 16.
5. Розв'язати нерівність $0,5^{5-2x} < 8$.
- а) $(-\infty; 4)$; б) $(4; +\infty)$; в) $(-\infty; \frac{1}{2})$; г) $(2; +\infty)$.

Варіант №3

1. Обчислити: $49^{0,5} \cdot 7^{-1}$.
- а) 7; б) 1; в) 14; г) $\frac{1}{7}$.
2. Обчислити: $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{256}$.
- а) -0,4; б) 4; в) -2; г) -10.
3. Знайти похідну функції $y = \frac{e^x}{x}$ в точці $x = 1$.
- а) 1; б) -1; в) 0; г) 2.
4. Розв'язати рівняння $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$.
- а) 1; б) -1; в) 0; г) 2.
5. Розв'язати нерівність $\log_2 x < 3$.
- а) (0;3); б) (3;+∞); в) (0;8); г) (8;+∞).

Варіант №4

1. Обчислити: $\frac{15^{3+\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}} \cdot 5^{2+\sqrt{3}}}$.
- а) 1; б) 125; в) 135; г) 45.
2. Обчислити: $10^{31 \lg 2}$.
- а) 8; б) 10; в) 1000; г) 100.
3. Знайти похідну функції $y = 2^x$ в точці $x = 0$.
- а) 4; б) 1; в) 2; г) 3.
4. Розв'язати рівняння $\lg x - \lg 11 = \lg 19 - \lg(30 - x)$.
- а) 11; б) 19; в) 11; 19; г) 10; 9.

7) Графік наближається до осі Oy , але ніколи не перетинає її.

8) Графік знаходиться у правій півплощині.

9) Логарифмічна функція має обернену функцію — показникову.

Примітка. Для побудови схематичного графіка логарифмічної функції $y = \log_a x$ достатньо побудувати три контрольні точки: $(1; 0)$,

$$(a; 1), \left(\frac{1}{a}; -1\right).$$

IV. Закріплення вивченого матеріалу.

Приклад 1. Побудуйте графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = \lg x$.

Контрольні точки для $y = \log_2 x$: $(1; 0)$, $(2; 1)$, $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, для $y = \lg x$:

$$(1; 0), (10; 1), \left(\frac{1}{10}; -1\right) \text{ (рис. 21).}$$

Приклад 2. Побудуйте графіки функцій $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ і $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Контрольні точки для $y = \log_{\frac{1}{2}} x$: $(1; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $(2; -1)$,

для $y = \log_{\frac{1}{3}} x$: $(1; 0)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $(3; -1)$ (рис. 22).

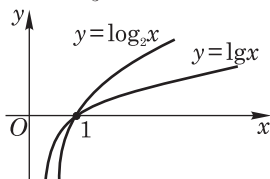


Рис. 21

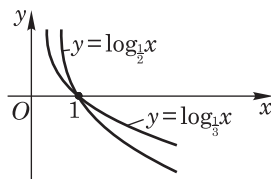


Рис. 22

Приклад 3. Знайдіть помилку в міркуваннях:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3; \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3; 2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}; 2 > 3.$$

Приклад 4. Знайдіть область визначення функції $y = \log_2 \lg x$.

V. Вивчення нового матеріалу.

2. Похідна показникової функції: $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$.

Похідна логарифмічної функції: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Наприклад: $(5^x)' = 5^x \ln 5$; $(5^{2x-5})' = 5^{2x-5} \ln 5 \cdot 2$; $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$;
 $(\log_2(4-x^2))' = -\frac{2x}{(4-x^2)\ln 2}$.

VI. Закріплення вивченого матеріалу (самостійна робота).

Приклад 5. Знайдіть помилки в знаходженні похідної даних функцій:

а) $y' = (x \ln x)' = \ln x - 1$; б) $y' = \left(\frac{2^x}{\cos x}\right)' = \frac{2^x \ln 2}{-\sin x}$;
 в) $y' = (\ln(2+x))' = \frac{2}{2+x}$; г) $y' = (\sqrt{\lg x})' = \frac{1}{2\sqrt{\lg x}}$.

Студенти обмінюються зошитами й оцінюють самостійну роботу.
 Правильні відповіді:

а) $y' = (x \ln x)' = x' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$;
 б) $y' = \left(\frac{2^x}{\cos x}\right)' = \frac{(2^x)' \cos x - 2^x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{2^x \ln 2 \cos x + 2^x \sin x}{\cos^2 x} =$
 $= \frac{2^x (\ln 2 \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$;
 в) $y' = (\ln(2+x))' = \frac{1}{2+x} (2+x)' = \frac{1}{2+x}$;
 г) $y' = (\sqrt{\lg x})' = \frac{1}{2\sqrt{\lg x}} (\lg x)' = \frac{1}{2x \ln 10 \sqrt{\lg x}}$.

VII. Підведення підсумків заняття у формі фронтального опитування.

Контрольні запитання

1. Яка функція називається логарифмічною?
2. Яким є план побудови графіка логарифмічної функції?
3. Якими є властивості логарифмічної функції?
4. Як шукати похідну логарифмічної і показникової функцій?

VIII. Домашнє завдання. Підготуватися до практичного заняття з даної теми.

Висновки

Заняття насичене інформацією. Раніше графічна інформація готувалась заздалегідь на переносній дошці, в таблицях, а тепер відпадає у цьому потреба, бо допомагають технічні засоби. В додатку подаються слайди до поданого лекційного заняття, які не тільки економлять час на занятті і дозволяють збагатити його інформацією і дидактично, а й роблять навчання розвиваючим і цікавим. Слайди можна використовувати для створення проблемних ситуацій, їхній показ може бути засобом перевірки самостійної пошукової роботи, виправлення помилок і т.ін.

Як бачимо, використання засобів мультимедіа допомагає викладачеві математики в реалізації навчальних і виховних цілей занять, підвищує його ефективність і насиченість цікавою інформацією, сприяє гармонійному розвитку особистості студента. Такі інформаційні технології повинні стати вірним помічником педагога і студента в проведенні позакласної роботи, наукових конференцій та інших заходів.

Однак варто знати, що, створюючи навчальні комп'ютерні демонстрації, треба орієнтуватися на оптимальну швидкість подання інформації, яка б не перевищувала сприймальної здатності людини (15–10 хвилин) і була достатньою для активізації студента.

Враховуючи зазначене, викладачеві необхідно вміло чергувати різні види діяльності на занятті, використовувати цікаві прикладні задачі, елементи ігор та змагань.

Застосування методу комп'ютерних презентацій у навчальному процесі при вивченні математики сприяє інтенсифікації вивчення нового матеріалу, підвищує ефективність знань, дозволяє проводити їх на новому якісному рівні, використовуючи замість традиційної аудиторної дошки мультимедійний проектор та невеликий екран.

Можливість використання презентацій на занятті з математики відкриває для педагога нові можливості для творчого управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів, сприяє комплексному розвитку особистості та самовдосконаленню.

Зміст

Передмова	3
Загальні рекомендації до вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції» (витяг з робочої програми)	5
Розділ 1. Лекційні заняття	8
1.1. Степінь з будь-яким дійсним показником і його властивості. Степеневі функції, їхні властивості та графіки	8
1.2. Показникова функція, її властивості та графік. Похідна показникової функції. Логарифми	13
1.3. Властивості логарифмів. Формула переходу від логарифмів за однією основою до логарифмів за іншою основою. Логарифмування і потенціювання виразів	18
1.4. Логарифмічна функція, її властивості та графік. Похідна логарифмічної функції	23
1.5. Показникові рівняння та їх розв'язання	25
1.6. Логарифмічні рівняння та їх розв'язання	27
1.7. Показникові і логарифмічні нерівності та їх розв'язання ..	31
Розділ 2. Практичні заняття	35
2.1. Степінь з довільним дійсним показником та його властивості. Степеневі функції, їхні властивості та графіки	35
2.2. Показникова функція, її властивості та графік. Логарифми	39
2.3. Логарифмування і потенціювання виразів. Логарифмічна функція, її властивості та графік. Похідна логарифмічної функції	42
2.4. Показникові та логарифмічні рівняння	45
2.5. Показникові та логарифмічні нерівності	48

Розділ 3. Дидактичні матеріали	50
3.1. Завдання тестового опитування з теми «Показникова і логарифмічна функції».....	50
3.2. Відповіді на завдання тестового опитування з теми «Показникова і логарифмічна функції»	64
3.3. Завдання контрольної роботи з теми «Показникова і логарифмічна функції».....	65
3.4. Зразок розв'язання варіанта контрольної роботи	74
3.5. Усні вправи з теми «Показникова та логарифмічна функції»	76
3.6. Додаткові вправи з теми «Показникова та логарифмічна функції»	82
Список літератури.....	84
Додатки	85
Додаток 1. Історична довідка з теми «Показникова функція».....	85
Додаток 2. Історична довідка з теми «Логарифмічна функція»	86
Додаток 3. Використання показникової функції при вивченні явищ навколишнього середовища	89
Додаток 4. Використання засобів мультимедіа	91