

Г.М. Возняк  
Г.М. Литвиненко  
Ю.І. Мальований

# АЛГЕБРА

---

## 9 КЛАС

Підручник  
для загальноосвітніх  
навчальних закладів

За редакцією члена-кореспондента АПН України  
Ю.І. Мальованого

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

**ББК 22.1я72**  
**74.262.21**  
**В53**

Головний редактор  
*Б.С. Будний*

Рецензенти:  
кандидат фізико–математичних наук,  
доцент Тернопільського обласного інституту післядипломної освіти  
*Д.М. Галан*

кандидат педагогічних наук,  
зав. кабінету математики Донецького обласного інституту післядипломної освіти  
*Л.Я. Федченко*  
вчитель математики Оброшинської середньої школи Львівської області,  
вчитель–методист  
*М.О. Марич*

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина даного видання не може бути використана чи відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1/11–3488 від 10.08.2001)*

**Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І.**  
**В53** Алгебра: Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. —  
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 184 с.  
**ISBN 966-7924-53-X**

**ББК 22.1я72**

**ISBN 966-7924-53-X**

© Возняк Г. М., Литвиненко Г. М.,  
Мальований Ю.І., 2003  
© Навчальна книга – Богдан,  
макет, художнє оформлення, 2003

# Зміст

Передмова .....	6
-----------------	---

## I. Нерівності, функції та рівняння

### § 1. Нерівності

1.1. Числові нерівності .....	9
1.2. Властивості числових нерівностей .....	13
1.3. Почленне додавання і множення числових нерівностей .....	16
1.4. Застосування нерівностей для оцінки значень виразу .....	19
1.5. Лінійна нерівність з однією змінною .....	21
1.6. Система лінійних нерівностей з однією змінною .....	28
1.7. Нерівності, що містять модулі .....	34
1.8. Доведення нерівностей .....	38
Запитання для самоперевірки .....	41
Задачі і вправи для самоконтролю .....	41

### § 2. Квадратний тричлен

2.1. Квадратний тричлен та його властивості .....	43
2.2. Розкладання квадратного тричлена на множники .....	45
Запитання для самоперевірки .....	48
Задачі і вправи для самоконтролю .....	49

### § 3. Квадратична функція

3.1. Поняття квадратичної функції .....	50
3.2. Функція $y = x^2 + n$ та її графік .....	51
3.3. Функція $y = (x + m)^2$ та її графік .....	53
3.4. Функція $y = (x + m)^2 + n$ та її графік .....	55
3.5. Функція $y = ax^2$ та її графік .....	57
3.6. Функція $y = a(x + m)^2 + n$ та її графік .....	61
3.7. Функція $y = ax^2 + bx + c$ та її графік .....	64
3.8. Властивості квадратичної функції .....	68
3.9. Перетворення графіків функцій .....	75

Запитання для самоперевірки .....	77
Задачі і вправи для самоконтролю .....	78
<b>§ 4. Нерівності другого степеня з однією змінною</b>	
4.1. Графічний спосіб розв'язування .....	79
4.2. Аналітичний спосіб розв'язування .....	82
4.3. Метод інтервалів .....	86
Запитання для самоперевірки .....	89
Задачі і вправи для самоконтролю .....	89
<b>§ 5. Система рівнянь другого степеня з двома змінними</b>	
5.1. Степінь рівняння з двома змінними .....	90
5.2. Розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними .....	91
5.3. Розв'язування текстових задач .....	97
Запитання для самоперевірки .....	101
Задачі і вправи для самоконтролю .....	101
<b>§ 6. Числові послідовності</b>	
6.1. Послідовності та їх властивості .....	102
6.2. Арифметична прогресія .....	109
6.3. Геометрична прогресія .....	116
6.4. Нескінченна спадна геометрична прогресія .....	122
Запитання для самоперевірки .....	124
Задачі і вправи для самоконтролю .....	125
<b>II. Елементи прикладної математики</b>	
<b>§ 7. Математичне моделювання</b>	
7.1. Приклади математичного моделювання .....	129
7.2. Задачі на відсоткові розрахунки .....	132
<b>§ 8. Наближені обчислення</b>	
8.1. Абсолютна і відносна похибка наближеного значення числа .....	138
8.2. Дії над наближеними значеннями чисел .....	145
Запитання для самоперевірки .....	149
Задачі і вправи для самоконтролю .....	149

**§ 9. Елементи статистики**

9.1. Перші відомості про статистику .....	150
9.2. Графічне зображення статистичних даних .....	154
9.3. Середні значення .....	155
9.4. Мода і медіана .....	161
Запитання для самоперевірки .....	163
Задачі і вправи для самоконтролю .....	163

**Повторення**

1. Числа і дії над ними .....	166
2. Тотожні перетворення .....	167
3. Рівняння і системи рівнянь .....	168
4. Нерівності .....	169
5. Функції .....	171
6. Послідовності .....	174
7. Текстові задачі .....	175
Задачі і вправи для самоконтролю .....	176
8. Задачі підвищеної складності .....	176
<b>Відповіді та вказівки</b> .....	179
<b>Формули</b> .....	183

## § 1. НЕРІВНОСТІ

### 1.1. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ

① Вам уже не раз доводилося порівнювати числа. В результаті порівняння встановлюють одне з трьох можливих відношень між двома числами  $a$  і  $b$ :  $a$  більше від  $b$  ( $a > b$ );  $a$  менше від  $b$  ( $a < b$ );  $a$  дорівнює  $b$  ( $a = b$ ).

Ви знаєте, що будь-яке додатне число більше від 0, а будь-яке від'ємне число менше від 0. Тому запис  $a > 0$  означає, що  $a$  — число додатне, а запис  $a < 0$  — що  $a$  — число від'ємне.

На координатній прямій додатні числа розміщені справа від нуля, а від'ємні — зліва. Взагалі, якщо  $a > b$ , то число  $a$  на координатній прямій розміщене правіше від  $b$  (рис. 1).



Рис. 1

Досі строгих означень відношень «більше», «менше», «дорівнює» між двома числами не давалося, хоча вони досить прості і побудовані на використанні значення різниці даних чисел. Як відомо, така різниця може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю. Відповідно,

**число  $a$  більше від числа  $b$ , якщо різниця  $a - b$  додатна:**

$$a > b, \text{ якщо } a - b > 0;$$

**число  $a$  менше від числа  $b$ , якщо різниця  $a - b$  від'ємна:**

$$a < b, \text{ якщо } a - b < 0;$$

**число  $a$  дорівнює числу  $b$ , якщо різниця  $a - b$  дорівнює нулю:**

$$a = b, \text{ якщо } a - b = 0.$$

Враховуючи ці означення, для порівняння будь-яких двох чисел слід утворити їх різницю і визначити її знак.

Розглянувши приклади, спробуємо визначити, що більше:

а)  $\frac{5}{8}$  чи  $\frac{4}{7}$ ?

$$\frac{5}{8} - \frac{4}{7} = \frac{35 - 32}{56} = \frac{3}{56} > 0. \text{ Отже, } \frac{5}{8} > \frac{4}{7}.$$

## 10 Нерівності, функції та рівняння

б)  $-15$  чи  $-17$ ?

$-15 - (-17) = -15 + 17 = 2 > 0$ . Отже,  $-15 > -17$ .

в)  $0,333$  чи  $\frac{1}{3}$ ?

$0,333 - \frac{1}{3} = \frac{333}{1000} - \frac{1}{3} = \frac{999 - 1000}{3000} = -\frac{1}{3000} < 0$ . Отже,  $0,333 < \frac{1}{3}$ .

г)  $7$  чи  $4\sqrt{3}$ ?

Для визначення знака різниці  $7 - 4\sqrt{3}$  перетворимо її, записавши  $7$  як  $4 + 3$ . Маємо:

$$\begin{aligned} 7 - 4\sqrt{3} &= 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \\ &= (2 - \sqrt{3})^2 > 0. \text{ Отже, } 7 > 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

② Два числа, сполучені знаком  $>$  (більше) або  $<$  (менше), утворюють числову **нерівність**.

Приклади:  $3 < 5$ ;  $-1 > -9$ ;  $0 < 4,5$ .

Знаки нерівності  $>$  і  $<$  називають **протилежними**.

Тому нерівності виду  $a > b$  і  $c < d$  (або  $a < b$  і  $c > d$ ) називають нерівностями **протилежного смислу**.

Наприклад,  $\sqrt{5} > 2$  і  $0,3 < \frac{1}{3}$  є нерівностями протилежного смислу; нерівності  $4 < 6,5$  і  $8 > 0$  — так само.

Нерівності виду  $a > b$  і  $c > d$  (або  $a < b$  і  $c < d$ ) називають нерівностями **однакового смислу**.

Наприклад,  $\sqrt{5} > 2$  і  $\pi > 3,1$  — нерівності однакового смислу.

Як і числові рівності, числові нерівності можуть бути **правильними** і **неправильними**. Наприклад, нерівності  $2 < 7$ ,  $0,5 > \frac{1}{3}$  є прави-

льними, а нерівності  $1 > 2$ ,  $3 < -0,8$ ,  $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$  — неправильні.

③ У процесі розв'язування задач та доведення тверджень користуються такими очевидними властивостями.



### Запитання для самоперевірки

1. Які способи розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною ви знаєте?
2. Поясніть суть графічного способу розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною. Проілюструйте свої міркування, розв'язавши нерівність  $2x^2 + 7x - 4 > 0$ .
3. Як розв'язати аналітичним способом нерівність другого степеня у випадку, коли квадратний тричлен у лівій частині нерівності:
  - а) можна розкласти на лінійні множники;
  - б) не можна розкласти на лінійні множники.
4. Скільки розв'язків може мати нерівність другого степеня з однією змінною?
5. На прикладі нерівності  $(x + 2)(x - 1,5)(x - 3,5) \leq 0$  поясніть, як розв'язують нерівності методом інтервалів.



### Задачі і вправи для самоконтролю

- 1°. Розв'яжіть графічним способом нерівність:
 

а) $x^2 + 8x + 15 > 0$ ;	б) $2x^2 - x - 6 \leq 0$ ;
в) $9x^2 + 6x + 1 > 0$ ;	г) $-x^2 + 10x - 25 \leq 0$ ;
г) $3x^2 + 5x + 7 < 0$ ;	д) $4x^2 + x + 2 > 0$ .
- 2°. Розв'яжіть аналітичним способом нерівність:
 

а) $(x - 2)(x + 5) > 0$ ;	б) $(x + 1)(3 - x) < 0$ ;
в) $x^2 + 4x + 5 > 0$ ;	г) $-x^2 + x - 3 > 0$ .
3. Розв'яжіть нерівність:
 

а°) $x^2 - 3x > 0$ ;	б°) $x^2 < 36$ ;
в) $3x^2 - 7x - 40 \leq 0$ ;	г°) $(x + 1)(x - 2)(x - 6) > 0$ ;
г) $(x - \pi)(2 + x)\sqrt{4 - x} \leq 0$ ;	д) $4x^3 - 14x^2 - 30x > 0$ ;
в) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x - 60} < 0$ ;	г) $\frac{x^2 - 2x - 35}{ x  + 3} \geq 0$ .
4. Знайдіть область визначення функції:
 

а°) $y = \sqrt{(5 - x)(x - 4)}$ ;	б) $y = \sqrt{9x - x^2}$ ;
в) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x^2 - 2x - 5}}$ ;	г) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}$ .



## 90 Нерівності, функції та рівняння

5. При яких значеннях  $a$  графік функції  $y = x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1$  повністю розміщений над віссю абсцис?
- 6\*. При яких значеннях  $b$  нерівність  $3bx^2 - 4(b - 1)x + 2b - 5 > 0$  є правильною для всіх дійсних  $x$ ?
- 7\*. Якими мають бути сторони прямокутників із площею  $144 \text{ м}^2$ , щоб їхній периметр був більшим від  $50 \text{ м}$ ?

## § 5. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

### 5.1. СТЕПІНЬ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Розглянемо рівняння з двома змінними:

а)  $2x = 5y - 2$ ;

б)  $x^2 - 6xy = 4$ ;

в)  $xy^2 + 7x^2 = 4xy^2 - 2$ ;

г)  $x(3y^2 - xy^3) + 4 = x^2 - 5x^2y^3$ .

Кожне з них шляхом перетворень, що не порушують рівносильності, можна звести до такого вигляду, щоб у лівій їх частині був многочлен, а у правій — нуль.

Для рівнянь а) і б) необхідне перетворення полягає у перенесенні всіх членів рівняння в одну частину:

а)  $2x - 5y + 2 = 0$ ;

б)  $x^2 - 6xy - 4 = 0$ .

Для рівняння в) це перетворення доповнюється зведенням подібних членів:

в)  $xy^2 + 7x^2 - 4xy^2 + 2 = 0$ ;  $-3xy^2 + 7x^2 + 2 = 0$ .

У рівнянні г), крім уже названих перетворень, потрібно ще й розкрити дужки:

г)  $x(3y^2 - xy^3) + 4 - x^2 + 5x^2y^3 = 0$ ;  $4x^2y^3 + 3xy^2 - x^2 + 4 = 0$ .

Якщо рівняння з двома змінними можна звести до зазначеного вигляду, то *степенем* цього рівняння називають *ступінь многочлена у його лівій частині, тобто суму показників степенів змінних у тому члені, де вона найбільша*.

Отже, рівняння а) — першого степеня; рівняння б) — другого степеня; рівняння в) — третього степеня; рівняння г) — п'ятого степеня.

Зауважимо, що рівняння, всі члени якого мають однаковий степінь, а вільний член дорівнює нулю, називається *однорідним*.

Наприклад, рівняння  $2x^2 - 4y^2 + 3xy = 0$  є однорідним.

Загальний вигляд повного рівняння другого степеня з двома змінними є таким:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0,$$

причому коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і  $c$  не можуть дорівнювати нулю одночасно, бо тоді рівняння буде не другого, а першого степеня.



### Задачі і вправи

**242°.** Визначте степінь рівняння:

- а)  $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 4$ ;      б)  $x^3 + 3y^2 + 2xy = 0$ ;  
 в)  $5x^2 - 4y^2 - 2x + 7y + 9 = 0$ ;      г)  $3xy^2 - 4y + 7 = 0$ ;  
 г)  $6y^2 + xy - 5x^2 = 7$ ;      д)  $xy^2 - x^2 + 3y = 0$ .

Знайдіть будь-які два розв'язки рівняння (243–244).

**243°.** а)  $xy = 12$ ;      б)  $x^2 - y^2 = 0$ ;      в)  $x^2 - y = 0$ ;  
 г)  $x - xy = 0$ ;      г)  $x - xy = 2$ ;      д)  $x^2 + y^2 = 9$ .

**244.** а)  $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ ;      б)  $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$ ;  
 в)  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$ ;      г)  $4x^2 - 4xy + y^2 = 0$ ;  
 г)  $x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0$ ;      д)  $(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$ ;  
 е)  $(x^2 + y^2)(y + 1) = 0$ ;      є)  $(x^2 + y^2)(2x - 1) = 0$ .

**245\*.** Складіть рівняння з двома змінними, яке:

- а) не має розв'язків;      б) має один розв'язок;  
 в) має два розв'язки;      г) має більше двох розв'язків.

**246.** Які з даних рівнянь є однорідними?

- а)  $x^2 - 3xy + y^2 = 0$ ;      б)  $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ ;  
 в)  $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$ ;      г)  $x^2 - 3xy + y = 0$ ;  
 г)  $x^2 - 3xy + y^2 = 2x$ ;      д)  $x^2 - 3xy + 4y = 0$ .

## 5.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

① Систему рівнянь другого степеня з двома змінними можуть утворювати два рівняння, кожне з яких є рівнянням другого степеня, або якщо одне з них є рівнянням другого, а друге — першого степеня.

Єдиного способу розв'язування таких систем не існує. Зазвичай застосовуються різні способи розв'язування систем: підстановки, додавання, деякі штучні прийоми. Проілюструємо це на прикладах.

## ФОРМУЛИ

### 1. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ

Для будь-яких цілих  $m$ ,  $n$  і додатних  $a$  і  $b$  справедливі рівності:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad a^n : a^m = a^{n-m}; \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^0 = 1.$$

### 2. МНОГОЧЛЕНИ

Для будь-яких  $a$  і  $b$  справедливі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

### 3. ВЛАСТИВОСТІ КВАДРАТНИХ КОРЕНІВ

Для будь-якого натурального  $n$  та невід'ємних  $a$  і  $b$  справедливі рівності:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0; \end{cases} \quad \sqrt{a^{2n}} = |a|^n.$$

### 4. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

де  $x_1$  і  $x_2$  — корені квадратного рівняння.



*Навчальне видання*

Возняк Григорій Михайлович  
Литвиненко Григорій Миколайович  
Мальований Юрій Іванович

(Тему «Елементи статистики» підготувала Ольга Григорівна Возняк)

## **АЛГЕБРА**

**Підручник для 9 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів**

*За редакцією члена-кореспондента АПН України*

*Ю.І. Мальованого*

Головний редактор *Б.С. Будний*

Редактор *Г.Є. Безкорвайний*

Технічний редактор *І.О. Козуб*

Художник *В.А. Басалига*

Комп'ютерна верстка *А.В. Кравчук*

Підписано до друку 8.07.2003. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10,69. Умовн. фарбо-відб. 21,39.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців  
ДК №370 від 21.03.2001 р.

46008, м.Тернопіль, вул. Танцорова, 14. А/с 529.

тел./факс (0352) 43-00-46; 25-18-09; 25-37-53

E-mail: *publishing@budny.te.ua*

*www.bohdan-books.com*