М.О. Савченко

Розв'язування задач з фізики

Переклад з російської
П. Ф. Пістуна

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН
2004

І. Механіка

1. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ

Методичні рекомендації щодо розв'язування задач

При розв'язуванні задач кінематики слід дотримуватися нижчеподаного порядку виконання дій.

Уважно прочитавши задачу, проаналізуйте її умову. Випишіть значення заданих величин, а також деякі додаткові дані, виявлені в процесі аналізу умови задачі (наприклад, одночасність початку руху тіл, рівність координат тіл у момент їх зустрічі тощо).

Зробіть схематичний рисунок, що відображає описаний у задачі рух. Зобразіть на ньому траєкторію руху, вектори швидкості, прискорення і переміщення.

Оберіть систему координат, пов'язану з тілом відліку, вкажіть напрям координатних осей. Координатні осі вибирають так, щоб проекції векторів на них виражалися якнайпростіше. Оберіть початок відліку часу.

Для розглядуваного руху складіть рівняння, які відображають у векторній формі математичну залежність між зображеними на схемі фізичними величинами. Для подальших розрахунків запишіть ці рівняння в скалярній формі, тобто у проекціях на координатні осі. При цьому потрібно врахувати, що проекція вектора на вісь буде додатною, якщо від проекції початку вектора до проекції його кінця потрібно рухатися вздовж напрямку осі, і від'ємною у протилежному випадку.

Розв'яжіть складену систему рівнянь щодо шуканих величин для отримання розрахункових формул. Для їхньої перевірки в праву частину кожної з них замість буквених позначень фізичних величин підставте позначення одиниць вимірювання цих величин у СІ, виконайте відповідні дії та переконайтеся, що отримане в результаті позначення одиниці відповідає шуканій величині. Якщо ж такої відповідності немає, це означає, що задача розв'язана неправильно.

Над позначеннями одиниць вимірювання фізичних величин можна виконувати дії множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня; виконання дій додавання і віднімання не має змісту.

Якщо в правій частині розрахункової формули міститься алгебраїчна сума, то спочатку перевірте, чи однаковими одиницями виражаються доданки. Якщо однаково, то відповідний вираз треба підставити у формулу замість суми, а потім виконати наступні дії. Пояснимо це з допомогою прикладу.

Нехай у результаті розв'язування задачі отримано розрахункову формулу

$$t = \frac{\sqrt{\upsilon^2 + 2gh}}{g},$$

де t – час, υ – швидкість, g – прискорення вільного падіння, h – висота. Перевіримо, чи можна з цієї формули отримати одиницю часу. Спершу перевіримо кожен доданок:

$$\left[\upsilon^2\right] = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad [g][h] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Доданки виражаються однаково. Отже,

$$\left[\frac{\sqrt{\upsilon^2 + 2gh}}{g}\right] = \frac{\sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{с}.$$

В результаті маємо одиницю часу, що відповідає шуканій величині, позначення якої знаходиться у лівій частині формули, тобто с = $[t]$.

При такій перевірці доцільно використовувати в позначеннях одиниць лише горизонтальну риску, тому що це полегшує виконання потрібних дій.

Переконавшись у тому, що отримані за розрахунковими формулами одиниці – є шуканими, виразіть усі задані значення величин в одиницях СІ, підставте їх у ці формули і виконайте обчислення. При підстановці числові значення величин вважають додатними, оскільки знаки проекцій векторів враховано при записуванні рівнянь.

Проаналізуйте отриманий результат і сформулюйте остаточну відповідь.

Основні закони і формули

Під час змінного руху з постійним прискоренням (рівнозмінного руху) швидкість тіла в будь-який момент часу t визначають за рівнянням

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t,$$

де $\vec{\upsilon}_0$ – початкова швидкість, $\vec{a}$ – прискорення.

Якщо рух тіла відбувається у певній площині, цьому векторному рівнянню відповідають два рівняння для проекцій швидкості υ_x і υ_y на координатні осі OX і OY:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \; \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t.$$

Координати тіла в будь-який момент часу t визначають таким чином:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2},$$

де x_0, y_0 – координати в початковий момент часу. Ці формули можна застосувати для описування як прямолінійного, так і криволінійного руху. Важливо, щоб прискорення було постійним за модулем і його напрям не змінювався.

При $\vec{a} = \vec{0}$ наведені вище формули для швидкості та координат описують рівномірний прямолінійний рух.

Проекцію переміщення $\vec{s}$ на вісь OX визначають за рівняннями:

$$s_x = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad s_x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}.$$

Середня швидкість – це векторна величина $\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\vec{s}}{t}$, де $\vec{s}$ – переміщення, здійснене тілом упродовж інтервалу часу t.

Середня швидкість проходження шляху – це скалярна величина $\upsilon_c = \frac{l}{t}$, де l – шлях, пройдений тілом упродовж інтервалу часу t.

Під час руху тіла по колу з постійною за модулем *лінійною швидкістю*, що визначають за рівнянням

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rn = \omega R,$$

прискорення (доцентрове, або нормальне) спрямоване до центра кола, а його модуль становить

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R,$$

де R – радіус кола, T – період обертання, n – частота обертання і ω – кутова швидкість, що дорівнює

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

Якщо під час руху тіла по колу модуль лінійної швидкості υ змінюється, то прискорення тіла (матеріальної точки) в будь-якій точці траєкторії становить векторну суму $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, де $\vec{a}_n$ – *доцентрове (нормальне) прискорення*, спрямоване з цієї точки вздовж радіуса (нормалі до дотичної) до центра кола, що характеризує темп зміни швидкості за напрямком; $\vec{a}_\tau$ – *дотичне (тангенціальне) прискорення*, спрямоване по дотичній, що характеризує темп зміни модуля швидкості. Модуль доцентрового прискорення дорівнює $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$, де υ – модуль лінійної швидкості тіла в даній точці траєкторії, R – радіус кола.

Модуль прискорення визначають таким чином:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Якщо тіло рухається по колу зі сталою за модулем лінійною швидкістю, то $a_\tau = 0$, $a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$.

Класичний закон додавання швидкостей: швидкість тіла відносно нерухомої системи відліку дорівнює векторній сумі швидкості тіла відносно рухомої системи відліку і швидкості рухомої системи відносно нерухомої:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Колона мотоциклістів рухається по шосе зі швидкістю $\upsilon = 10$ м/с, розтягнувшись на відстань $l = 5$ км. Із хвоста і голови колони одночасно виїжджають назустріч один одному два мотоциклісти зі швидкостями відповідно $\upsilon_1 = 20$ м/с і $\upsilon_2 = 15$ м/с. Через які інтервали часу перший мотоцикліст досягне голови, а другий – хвоста колони?

Р о з в ' я з а н н я. Рухому систему відліку пов'яжемо з колоною. За початок системи координат O' візьмемо хвіст колони, а за додатний напрям осі $O'X'$ – напрямок руху колони (рис. 1). Нерухому систему відліку пов'яжемо із землею, початок координат O визначимо в точці, в якій знаходився хвіст колони в момент виїзду мотоциклістів; додатний напрям осі OX збігається з напрямом осі $O'X'$. Позначимо через $\vec{\upsilon}_1'$ і $\vec{\upsilon}_2'$ швидкості першого і другого мотоциклістів у рухомій системі відліку.

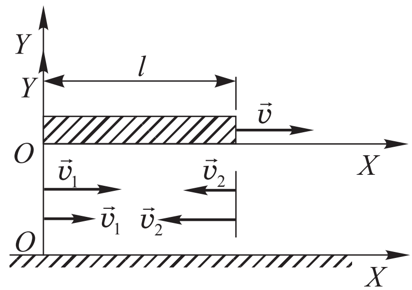

Рис. 1

Згідно із законом додавання швидкостей, $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_2' + \vec{\upsilon}$. Звідси:

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}, \;\; \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}.$$

Знайдемо проекції векторів $\vec{\upsilon}_1'$ і $\vec{\upsilon}_2'$ на вісь $O'X'$, ураховуючи при цьому, що проекція різниці двох векторів дорівнює різниці їхніх проекцій (на одну і ту саму вісь):

$$\upsilon_1' = \upsilon_1 - \upsilon, \; -\upsilon_2' = -\upsilon_2 - \upsilon, \text{ або } \upsilon_2' = \upsilon_2 + \upsilon.$$

Запишемо рівняння, що виражає залежність координати першого мотоцикліста від часу t:

$$x_1' = (\upsilon_1 - \upsilon)t. \qquad (1)$$

У момент часу $t = t_1$ мотоцикліст досягне голови колони і його координата $x_1' = l$. З рівняння (1) отримаємо $l = (\upsilon_1 - \upsilon)t_1$. Звідси:

$$t_1 = \frac{l}{\upsilon_1 - \upsilon}. \qquad (2)$$

Залежність координати другого мотоцикліста від часу виражає рівняння

$$x_2' = l - (v_2 + v)t. \qquad (3)$$

У момент часу $t = t_2$ другий мотоцикліст досягне хвоста колони, координата якого $x_2' = 0$. З рівняння (3) одержимо $0 = l - (v_2 + v)t_2$. Звідси:

$$t_2 = \frac{l}{v_2 + v}. \qquad (4)$$

З формул (2) і (4) знайдемо $t_1 = 5 \cdot 10^2$ с, $t_2 = 2 \cdot 10^2$ с.

Цю задачу можна розв'язати іншим способом. Розглядаючи рух колони мотоциклістів відносно нерухомої системи відліку, запишемо рівняння для координат першого (x_1) і другого (x_2) мотоциклістів, а також для координат голови (x_3) і хвоста (x_4) колони:

$$x_1 = v_1 t,\ x_2 = l - v_2 t,\ x_3 = l + vt,\ x_4 = vt.$$

У момент часу $t = t_1$, коли перший мотоцикліст досягне голови колони, матимемо $x_1 = x_3$, тобто

$$v_1 t_1 = l + v t_1,\ \ t_1 = \frac{l}{v_1 - v}.$$

Другий мотоцикліст досягне хвоста колони в момент часу $t = t_2$, при цьому $x_2 = x_4$, або

$$l - v_2 t_2 = v t_2,\ \ t_2 = \frac{l}{v_2 + v}.$$

Таким чином, незалежно від вибору системи відліку, результати однакові.

2. Два потяги ідуть назустріч один одному по паралельних коліях зі швидкостями $v_1 = 12$ м/с і $v_2 = 18$ м/с. Пасажир першого потяга зауважує, що другий потяг пройшов повз нього за $t = 8$ с. Яка довжина другого потяга?

Р о з в ' я з а н н я. Пов'яжемо рухому систему відліку з першим потягом. За початок координат O' оберемо місце перебування пасажира, за додатний напрям осі $O'X'$ – напрямок руху другого потяга. Нерухома система відліку пов'язана із землею (рис. 2). Згідно із законом додавання швидкостей, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1$, де $\vec{v}_2'$ – швидкість другого потяга відносно першого. Звідси: $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Знайдемо проекцію вектора $\vec{v}_2'$ на вісь $O'X'$:

$$v_2' = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1.$$

У момент часу t координату хвоста другого потяга визначають за рівнянням

$$x' = -l + (v_2 + v_1)t.$$

У момент часу $t = t_1$, коли хвіст другого потяга проходить повз точку, в якій перебуває пасажир першого потяга, $x' = 0$, тобто $0 = -l + (v_2 + v_1)t_1$. Звідси:

$$l = (v_2 + v_1)t_1.$$

Виконавши обчислення, отримаємо, що $l = 2{,}4 \cdot 10^2$ м.

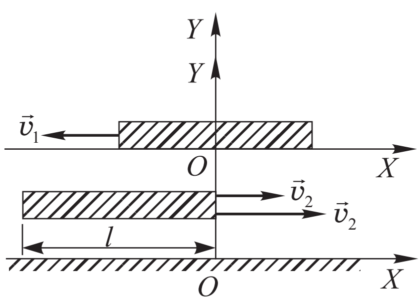

Рис. 2

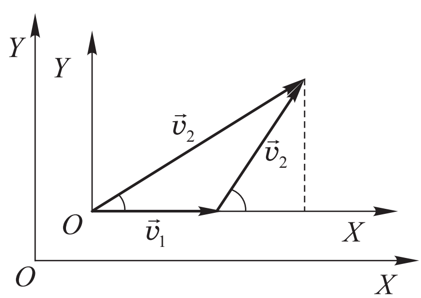

Рис. 3

3. У морі два кораблі пливуть зі швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ під кутом α один відносно іншого. Визначити швидкість другого корабля відносно першого.

Р о з в ' я з а н н я . Рухому систему координат $X'O'Y'$ пов'яжемо з першим кораблем, взявши за додатний напрям осі $O'X'$ напрямок швидкості першого корабля відносно води (рис. 3). Нерухома система координат XOY пов'язана з водою. В системі $X'O'Y'$ другий корабель рухається зі швидкістю $\vec{v}_2'$. Згідно із законом додавання швидкостей, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1$, звідки: $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. У проекціях на осі координат

$O'X'$ і $O'Y'$ одержимо:

$$v'_{2x'} = v_2 \cos\alpha - v_1, \quad v'_{2y'} = v_2 \sin\alpha.$$

Знаючи проекції вектора $\vec{v}\,'_2$, знаходимо його модуль:

$$v'_2 = \sqrt{\left(v_2 \cos\alpha - v_1\right)^2 + \left(v_2 \sin\alpha\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}.$$

Напрям вектора $\vec{v}\,'_2$ визначається кутом β, для якого знайдемо:

$$\cos\beta = \frac{v'_{2x'}}{v'_2} = \frac{v_2 \cos\alpha - v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}}.$$

4. Літак злітає в повітря під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з постійною швидкістю $v = 60$ м/с. Якої висоти h він досягне через $t_1 = 10$ с і на яку відстань (у горизонтальному напрямку) віддалиться від місця злітання?

Р о з в ’ я з а н н я. Систему координат пов’яжемо із землею, обравши початок координат у точці злітання і спрямувавши вісь OX горизонтально, а вісь OY – вертикально вгору (рис. 4).

Виразимо залежність координат літака від часу:

$$x = v_x t = vt\cos\alpha, \quad y = v_y t = vt\sin\alpha.$$

У момент часу $t = t_1$ матимемо $x_1 = s$, $y_1 = h$. Отже,

$$s = vt_1\cos\alpha, \quad s = 5{,}2 \cdot 10^2 \text{ м};$$

$$h = vt_1\sin\alpha, \quad h = 3{,}0 \cdot 10^2 \text{ м}.$$

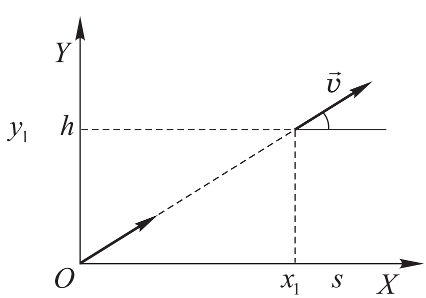

Рис. 4

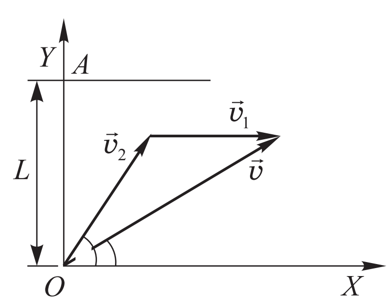

Рис. 5