

Натисніть тут, щоб  
**купити книгу на сайті**  
або

**замовляйте по телефону:**

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

В.А. Тадеев

# ГЕОМЕТРИЯ

Основания стереометрии

---

# 10 класс

**Двухуровневый учебник  
для профильного обучения математике  
в общеобразовательных  
учебных заведениях**

Учебник для учащихся, которые стремятся знать больше,  
и учителей, желающих учить лучше

Авторизованный перевод с украинского

*Под редакцией проф. В.И. Михайловского*

*Одобрено научно-методической комиссией по математике  
Научно-методического совета по вопросам образования  
Министерства образования и науки, молодёжи и спорта Украины*



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72  
74.262.21  
Т13

Рецензенты:

*доктор физико-математических наук,  
профессор Киевского национального университета им. Тараса Шевченко  
А.Г. Кукуш*

*кандидат физико-математических наук,  
доцент Тернопольского национального педагогического университета им. Владимира Гнатюка  
В.Р. Кравчук*

Учебник занял 2-е место на Всеукраинском конкурсе  
учебников геометрии для профильного обучения,  
организованном Министерством образования и науки Украины в 2010 г.

*Одобрено научно-методической комиссией по математике  
Научно-методического совета по вопросам образования  
Министерства образования и науки, молодёжи и спорта Украины  
(письмо №1.4/18-Г-49 от 02.02.2011 г.)*

**Тадеев В.А.**

**Т13** Геометрия. Основания стереометрии: Двухуровневый учебник для профильного обучения математике в 10-м классе общеобразовательных учебных заведений. / Авторизованный перевод с украинского. — Тернополь: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 424 с.; ил.

**ISBN 978-966-10-1709-1**

Данный учебник соответствует государственному стандарту и действующей программе по математике для обучения на профильном уровне в 10-х классах общеобразовательных учебных заведений, в том числе в специализированных физико-математических школах, лицеях и гимназиях. Может использоваться учениками, которые обучаются на других уровнях, но желают осваивать математику углубленно.

В учебнике значительное внимание уделяется вопросам исторического, мировоззренческого и методологического характера.

*Охраняется законом об авторском праве.  
Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена  
в какой бы то ни было форме без разрешения автора или издательства*

ISBN 978-966-10-1709-1

© Навчальна книга – Богдан,  
имущественные права, 2011

## Предисловие для учеников и учителей

*Я проявлял заботу о том, чтобы дети были вдумчивыми исследователями и открывателями мира, чтобы истина возникала перед ними не как готовый вывод, переданный педагогом, а как яркая картина окружающего мира, которую они пережили с волнующим биением сердца. Если открытие взволновало ребенка, истина становится личным убеждением, которым человек дорожит всю жизнь.*

*Василий Сухомлинский.  
«Сердце отдаю детям»*

*Уважаемые друзья!* Этот учебник составлен в соответствии с действующей программой для профильного обучения в 10-х классах общеобразовательных учебных заведений. Учебный материал структурирован по двум уровням — обязательном и углубленном. Материал углубленного уровня дополняет, расширяет и углубляет обязательное содержание, иллюстрирует решение более сложных задач. Он печатается меньшим шрифтом на малиновом фоне и рассчитан на учеников, проявляющих повышенный интерес к математике и ее применениям, а в будущем планирующих связать с этим свою профессиональную деятельность. Таким образом, каждый ученик, кроме основного содержания, имеет возможность овладевать и дополнительным, соответствующим его интересам и возможностям. Так же и учитель получает дополнительные средства для реализации дифференцированного обучения — важнейшего принципа современного школьного образования.

Возле текстов для углубленного изучения помещены портреты гениальных математиков Михаила Остроградского  и Софьи Ковалевской . Это имеет символическое значение, ведь жизнь этих выдающихся ученых свидетельствует, в частности, о том, что математика одинаково доступна как для мужчин, так и для женщин, а также, что успехи в науке не зависят от места рождения (Остроградский родился на полтавском хуторе, а Ковалевская — в Москве). Биографии этих великих математиков являются ярким примером того, что для достижения успеха нужно быть настойчивым и целеустремленным (и Остроградский, и Ковалевская по разным причинам вначале не получили признания на родине, но благодаря таланту и упорной работе со временем «покорили» всю Европу).

Вторым важным принципом, воплощенным в учебнике, является принцип исторической перспективы, или исторического подхода. Кроме огромного значения для гуманитаризации обучения, для повышения интереса к изучению наук, для воспитания нравственности и уважения к другим народам и культурам, этот принцип имеет еще и важную дидактическую функцию. При его реализации ученики в своем развитии будто проходят важными этапами, которые прошла сама наука, не перескакивая их и не оказываясь время от времени неожиданно на тех уровнях, которые им еще недоступны.

Реализация исторического подхода осуществляется двумя путями. Во-первых, сообщением исторических сведений во время развертывания основного содержания, а во-вторых, — введением специальной рубрики «Страницы истории», в которой излагаются дополнительные сведения о научных исследованиях в разные эпохи, непосредственно связанных с изучаемой темой. Хотя материал этой рубрики не является обязательным для изучения, но он существенно расширяет кругозор учащихся и помогает понять внутренние и внешние мотивы развития математики, а следовательно, содействует более глубокому пониманию оснований этой науки. «Страницы истории» печатаются на светло-красном фоне с изображением музы истории Клио, заимствованным со знаменитой картины Генриха Семирадского «Парнас»



правой руке муза держит книгу и перо, а характерным жестом левой руки побуждает оглянуться назад.

Третьим является принцип межпредметных связей и прикладной направленности обучения. Он дает возможность существенно повысить мотивацию к обучению, а также постоянно поддерживать познавательный интерес учеников. В частности, большое значение в учебнике отводится связям геометрии с классическим искусством и техникой.

И, наконец, четвертый важный принцип — это принцип соответствия логики развертывания содержания обучения логике важнейших методов исследований в математике. Геометрия в учебнике представляется не догматически, не как откровение, сошедшее на избранных и передаваемое от учителя к ученикам. Наоборот, учебник постоянно побуждает учеников теоретизировать (что, кстати, в буквальном переводе с греческого означает «присматриваться») и быть активными соучастниками в открытии нового знания. В соответствии с этим, структурные блоки теории почти нигде не начинаются из «готовых» определений новых понятий или формулировок теорем, а большей частью

завершаются ими как результатом проведенного исследования. В учебнике также выдержан надлежащий уровень математической строгости в доказательствах утверждений и в приводимых решениях задач.

Задачи с решениями в значительной мере дополняют основное содержание учебника новыми фактами. Кроме этого, на их примере демонстрируются применения представленных фактов, а в отдельных случаях — и определенные общие подходы к решению задач. Наконец, они служат примерами тех типов задач, которые предлагаются для решения на самостоятельных и контрольных работах, а также образцами оформления решений.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения размещены в конце каждого параграфа или пункта в порядке возрастания сложности. Отдельные, более сложные из них, обозначаются звездочкой, а простейшие (большей частью — устные) — кружочком. Рубрику задач по всему учебнику сопровождает изображение богини мудрости Афины Парфенос



, реконструированное по мотивам знаменитой скульптуры Фидия.

Перед тем, как приступить к решению задач, советуем испробовать себя, давая ответы на вопросы, которые для вас приберегла легендарная птица Сфинкс с головой женщины и телом льва

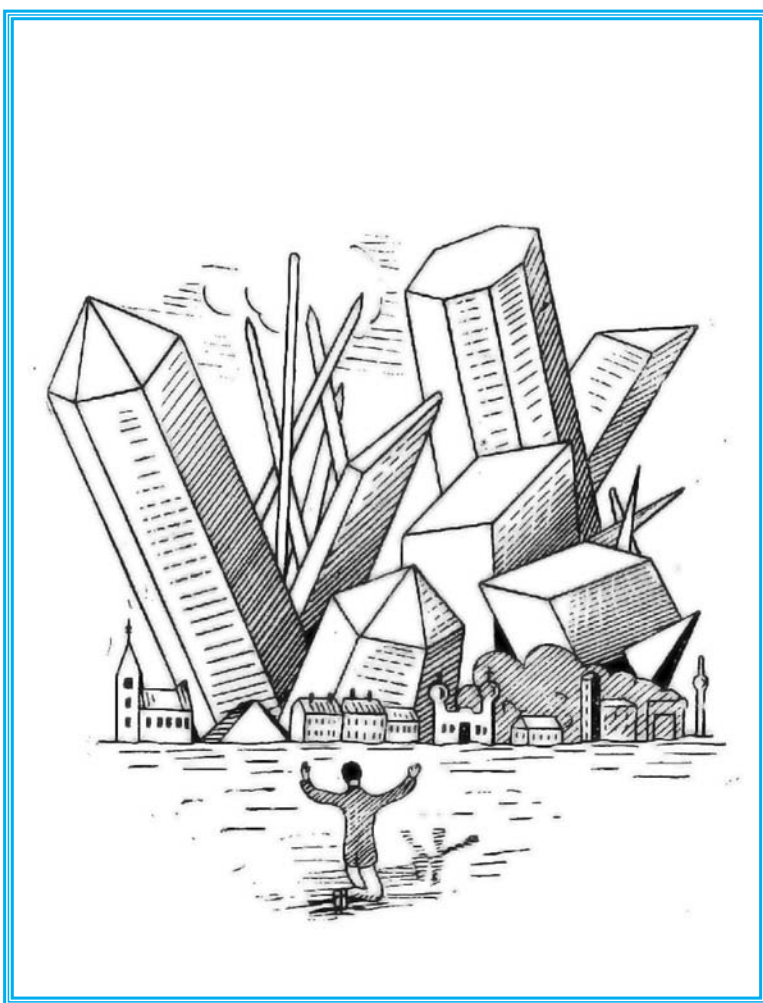


(фрагмент картины Густава Моро «Эдип и Сфинкс»), пропускавшая лишь тех путников, кто правильно отвечал на ее вопросы.

В учебнике представлены также типичные задачи для контрольных работ. Поэтому каждый ученик может заранее надлежащим образом подготовиться к этим испытаниям.

К учебнику отдельно изданы «Уроки по геометрии в 10 классе», содержащие методические рекомендации для учителей, а также дидактические материалы с текстами самостоятельных, контрольных, тестовых и долгосрочных заданий.

*Желаем всем ученикам успехов в изучении, а учителям — вдохновения при обучении одной из древнейших, привлекательнейших и полезнейших наук — геометрии!*



Человек и кристаллы. Рисунок Карела Чапека

## Введение

# О геометрии в общем. Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии

*Для этой цели я изобрел особый, дотоле неизвестный метод преподавания: я пригласил для моего старшего помощника двух преподавателей. При этом один обучал его с начала, с азбуки, а другой — с конца ... Ровно через три недели мой старший помощник донес мне рапортом, что оба преподавателя доучили его до середины, и, таким образом, задача выполнена.*

Андрей Некрасов.  
«Приключения капитана Врунгеля»

— Кажется, — припомнил слоненок, — я про эту математику слышал ...

Григорий Остер. «38 попугаев»

*Уважаемые десятиклассники!* Вы уже три года изучали геометрию в основной школе. Перед продолжением ее изучения в старшей школе уместно провести систематизацию и обобщение изученного, а также окинуть взглядом ближайшие горизонты.

## 1. Что же такое геометрия?

**Из глубин веков.** Геометрия — очень давняя наука. Старше ее среди всех наук можно считать разве что астрономию. Впрочем, когда астрономия из описательного (наблюдательного) уровня перешла на теоретический (прогностический), она всегда пользовалась услугами геометрии.

Тысячелетиями продолжалось накопление геометрических фактов опытным путем. Оформление геометрии в стройную научную систему состоялось в Древней Греции в период расцвета ее культуры (VI — IV вв. до н. э.). Греки очень любили связывать истоки своих достижений с давними эпохами. В частности, они считали, что



геометрия перешла к ним из Египта, где она якобы зародилась из необходимости измерения земельных участков после ежегодных разливов реки жизни — Нила. Отсюда и историческое название этой науки — геометрия, что в буквальном переводе с греческого обозначает «измерение земли», «землемерие».

Однако «измерением земли» геометрия в Древней Греции была разве что в том смысле, что греческие ученые в своих исследованиях часто прибегали к черчению фигур на песке. А по сути геометрия превратилась у них в исключительно теоретическую науку о свойствах геометрических фигур, арсенал которой значительно превзошел нужды любых практических измерений. В частности, геометрия «вышла в пространство» и фактически разделилась на две части — плоскостную и пространственную. За плоскостной частью сохранилось ее историческое название — геометрия, а пространственную часть стали называть стереометрией (от греческого «стереос» — пространственный). Такое деление оказалась особенно удобным для обучения, поскольку давало возможность вначале овладевать более простыми для восприятия сведениями о плоских фигурах, а уже потом переходить к более сложным, пространственным фигурам. Это деление через века дошло и до наших дней. Единственное усовершенствование состоит в том, что плоскостную часть геометрии переименовали в планиметрию (латинское слово *plano* означает «плоскость»), а под историческим названием «геометрия» объединили вместе планиметрию и стереометрию.

Таким образом, теперь школьная геометрия состоит из двух частей — геометрии на плоскости (планиметрии) и геометрии в пространстве (стереометрии). В 7–9 классах вы в основном изучали планиметрию, знакомясь лишь с элементами стереометрии. Теперь же начинаете систематическое изучение стереометрии.

**Современное толкование содержания и значения геометрии.** Геометрию в современном значении этого слова можно определить как науку о пространственных формах реального или мыслимого мира. А поскольку пространственные формы еще иначе называют геометрическими фигурами, то, таким образом, геометрия — это наука о геометрических фигурах, а именно: об их видах, свойствах, взаимном расположении, измерении и преобразовании. Сами же геометрические фигуры — это идеальные мыслительные образы. Простейшие из них возникают в нашем сознании при сосредоточении внимания на форме и размерах реальных твердых физических тел и абстрагировании от любых иных их характеристик — цвета, массы, температуры, рода вещества, стоимости и т.п. Более сложные фигуры могут конструироваться сознанием уже без посредничества реальных тел в результате мыслительных операций с простейшими фигурами — объединения, пересечения, дополнения, отрезания, вкладывания, изъятия, перемещения, деформирования и т.п.

В школьном курсе геометрии, называемой элементарной (то есть простейшей) геометрией, ограничиваются лишь очень незначительным набором геометрических фигур. А именно, из плоских фигур изучают точки, прямые, отрезки, полупрямые

(лучи), углы, треугольники, четырехугольники, правильные многоугольники, окружности, круги и некоторые комбинации этих фигур. Плоские фигуры изучаются в 7–9 классах.

Из пространственных фигур ограничиваются изучением прямых и плоскостей в пространстве, простейших многогранников (призм и пирамид), круглых тел (цилиндров, конусов, сферы и шара), а также некоторых комбинаций этих фигур. Пространственные фигуры систематически изучаются в курсе геометрии старшей школы. При этом в 10 классе вы детально будете изучать прямые и плоскости в пространстве, а также простейшие многогранники — призмы и пирамиды. В 11 классе изучение этих вопросов будет углублено с применением координат и векторов. Кроме того, в 11 классе будут изучаться тела вращения — цилиндр, конус и шар, их комбинации с плоскостями и многогранниками, а напоследок — измерение геометрических тел (объемы и площади поверхностей).

Вне элементарной (школьной) геометрии остается огромный объем геометрических знаний. Одни из них возникли вследствие углубленного исследования фигур элементарной геометрии, другие — за счет увеличения арсенала геометрических фигур, третьи — за счет различных преобразований этих фигур. Существуют и такие геометрии, где пространства имеют «искривление» и более высокие размерности. Такую «высшую» геометрию изучают на физико-математических факультетах высших учебных заведений. В такой геометрии проводят свои исследования современные ученые-математики. А применяют ее в физике, астрономии, химии, теоретической и технической механике, инженерии, экономике и т.п. Кроме этого, геометрические идеи имеют многочисленные применения в других направлениях математических исследований — в алгебре, теории чисел, математическом анализе, теории вероятностей, а через них — в еще большем спектре прикладных наук. Но первичным источником для возбуждения пространственного воображения, фантазии и интуиции всегда была и остается обыкновенная элементарная геометрия, которая как раз поэтому и изучается в школе.

Изучая свойства геометрических фигур — идеальных образов, мы вместе с тем получаем определенные знания и о пространственных свойствах реальных предметов и можем применять их при проектировании и эксплуатации. Этим определяется значение геометрии для каждого культурного человека, в особенности для тех, кто в будущем будет профессионально заниматься проектированием и возведением новых объектов.

Важным остается применение геометрии и для решения тех практических задач, которые когда-то послужили одним из мощнейших источников для ее зарождения — для измерения земли. Правда, теперь это применение происходит в основном через посредничество отдельной прикладной инженерной науки — геодезии. С помощью геодезических съемок составляют планы и карты местности, а также осуществляют «привязку» к местности плана любого сооружения или магистрали перед их строительством.

**Пример новейшего применения геометрии.**

Безусловно, о всех упомянутых применениях геометрии вы уже имеете достаточные представления из уроков этой дисциплины и других предметов в предыдущих классах, а также из разнообразнейших источников дополнительной информации. Значительно менее известны принципы геометрического моделирования на уровне тонких структур материи, получающих в современной науке все более широкие применения.

Еще выдающийся философ Платон в IV в. до н.э., обобщая и развивая взгляды пифагорейцев, учил о существовании четырех основных стихий — огня, воздуха, воды и земли, из которых, в соответствующих пропорциях, составляется все сущее. Мельчайшим структурным элементам этих стихий Платон приписывал формы правильных многогран-



Платон

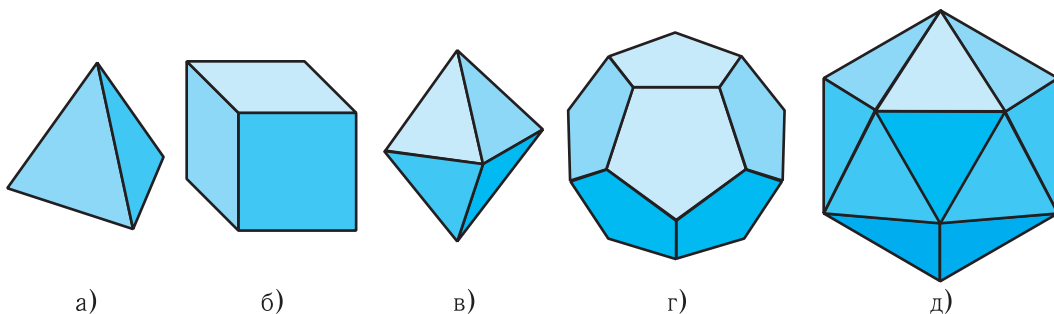


Рис. 1

ников (рис. 1), а именно: огню — форму тетраэдра (рис. 1, а), воздуху — октаэдра (рис. 1, в), воде — куба (рис. 1, б), а земли — икосаэдра (рис. 1, д). А поскольку в то время уже было известно, что в геометрии вообще возможно существование пяти видов правильных многогранников, то форму пятого — додекаэдра (рис. 1, г), — Платон отвел для всего Космоса (отголоском этой идеи стало изображение додекаэдра на известной картине Сальвадора Дали «Тайная вечеря», воспроизведенной на 2-ом форзаце этого учебника).

К этим представлениям давних мудрецов могли привести наблюдения за естественными многогранниками — кристаллами (рис. 2). Например, горный хрусталь Аристотель считал закаменелым льдом, а Плиний писал о нем, что «гладкость граней его настолько совершенна, что того никаким искусством создать невозможно».

В Средневековье представления о том, что именно в кристаллах скрытаны все тайны бытия, нашли свое отражение в приписывании им сверхъестественной чудодейственной силы. Не случайно в одной из старинных легенд о чернокнижнике Фаусте, послуживших Гёте первоисточником для его знаменитого произведения, доктор Фауст беседует с духом по имени «Кристаллос».

По-своему свое восхищение кристаллами передал знаменитый чешский писатель Карел Чапек, рисунок которого «Человек и кристаллы» помещен на заставке к этому введению (с. 6) и на обложке учебника.

Первые попытки научного объяснения удивительно точных многогранных форм естественных кристаллов относятся еще к XVII–XVIII вв. А наибольшим достижением в изучении кристаллов на основании визуального наблюдения стало создание в середине XIX в. французским физиком и кристаллографом Огюстом Браве (1811–1863) так называемой решетчатой теории.

В 1849 г. Браве, который, по словам Владимира Вернадского, «смотрел на природу глазами геометра», после многочисленных наблюдений и измерений кристаллов опубликовал трактат «Исследование о многогранниках симметричной формы». В нем он, в частности, выдвинул продуктивную гипотезу о том, что в основе правильных геометрических форм кристаллов лежат правильные многогранные формы их внутренней структуры. Базис этой структуры, по Браве, образует решетка, состоящая из закономерно расположенных узлов (центров масс корпускул, или атомов). Браве считал, что в про-

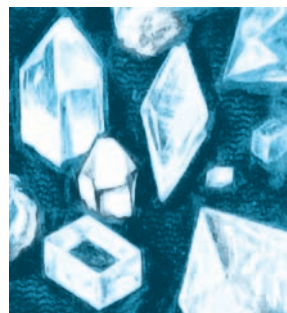


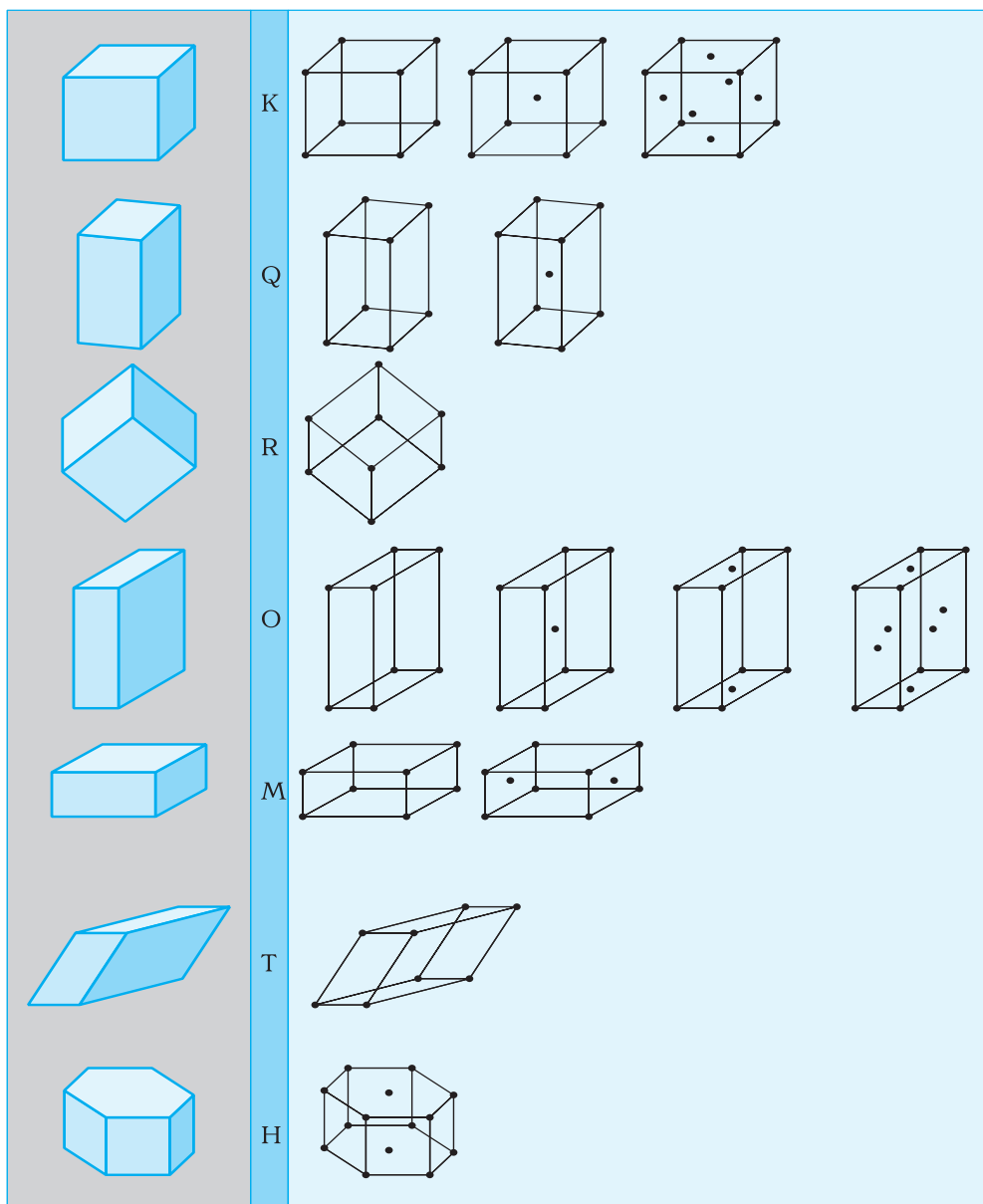
Рис. 2



Огюст Браве

*Приложения полезны и фактически необходимы для теории, потому что они ставят перед теорией новые вопросы. Можно сказать, что приложения и теория находятся в том же отношении, как лист и дерево: дерево держит лист, но лист питает дерево.*

Жак Адамар



Фундаментальные формы кристаллов (слева) и соответствующие им 14 видов кристаллических решеток Браве. Сверху вниз: куб, прямоугольный параллелепипед с квадратной основой (правильная четырехугольная призма), ромбоэдр, прямоугольный параллелепипед общего вида, прямой параллелепипед с основой в форме параллелограмма, косой параллелепипед общего вида, правильная шестиугольная призма.

Рис. 3

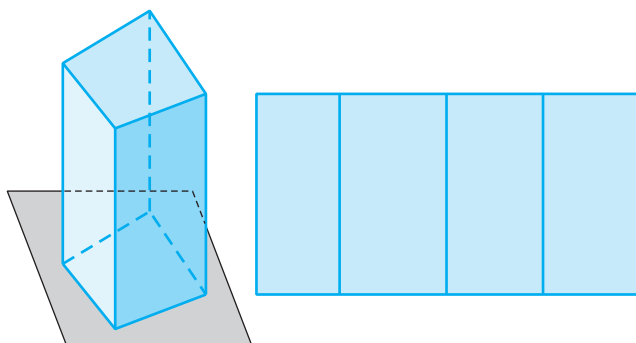


Рис. 2.201

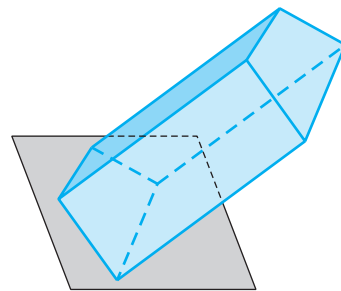


Рис. 2.202

вычисления будут очень громоздкими. Даже задать в числах определяющие угловые и линейные размеры призмы непросто. На комплексном же чертеже все это осуществить чрезвычайно легко.

Для примера, построим развертку наклонной четырехугольной призмы. Пусть  $ABCD$  — основание призмы,  $l$  — ее боковое ребро,  $l_1$  — проекция бокового ребра на плоскость основания (рис. 2.203).

По этим данным построим комплексный чертеж призмы. Для упрощения будем считать, что нижнее основание  $ABCD$  призмы  $ABCDKLM$  лежит в горизонтальной плоскости проекций  $H$ , а боковые ребра и их ортогональные проекции на плоскость основания — параллельны вертикальной плоскости проекций  $V$ . Тогда горизонтальные проекции  $A_1B_1C_1D_1$  и  $K_1L_1M_1N_1$  оснований призмы, а также вертикальные проекции ее боковых ребер и проекции боковых ребер на плоскость основания изобразятся в натуральную величину, причем горизонтальные проекции  $A_1K_1$ ,  $B_1L_1$ ,  $C_1M_1$ ,  $D_1N_1$  боковых ребер будут параллельными осями проекций  $x$  (рис. 2.204).

Для построения искомой развертки будем последовательно определять истинный вид каждой ее боковой грани. В свою очередь, для определения истинного вида каждой боковой грани разобьем ее диагональю на два равных треугольника, затем определим истинные длины всех сторон этих треугольников и построим их по трем сторонам на отдельном рисунке.

Возьмем, для примера, боковую грань  $ABLK$ , имеющую в качестве горизонтальной проекции параллелограмм  $A_1B_1L_1K_1$ . Проведя в этой грани диагональ  $BK$ , рассмотрим треугольник  $ABK$ . Длина его стороны

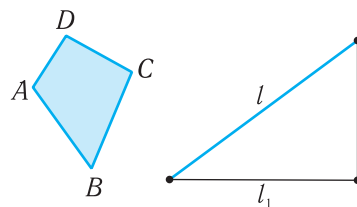


Рис. 2.203

*Но в чем же состоит могущество математики, как не в возможности абстрагирования и оперирования абстрактными понятиями? Вот почему, как я считаю, следует напомнить, что значительный прогресс в математике всегда был связан со способностью подняться в сферу абстракций.*

Жан Дьедонне



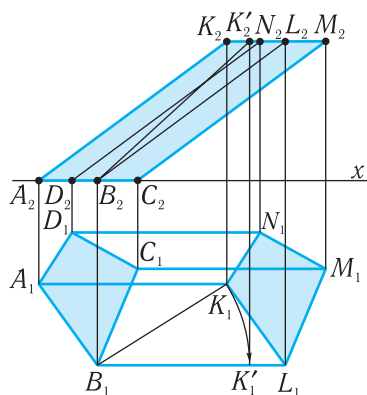


Рис. 2.204

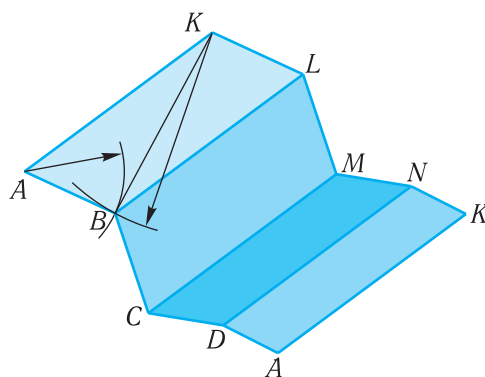


Рис. 2.205

$AB$  равна заданной стороне основания  $A_1B_1$ , длина стороны  $AK$  — заданной длине бокового ребра (равной  $A_2K_2$ ). Определив истинную длину стороны  $BK$  по ее проекциям  $B_1K_1$  и  $B_2K_2$ , построим треугольник  $ABK$  по трем сторонам. После этого легко построи-ся параллелограмм  $ABLK$  (рис. 2.205). Аналогично строим остальные параллелограммы  $BCML$ ,  $CDNM$  и  $DAKN$ , и построение будет завершено.



## СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

**Гаспар Монж (1746–1818) — великий революционер в науке и в жизни**

В одном из писем к своему именитому соотечественнику, ученому-энциклопедисту Жану Лерону Д'Аламберу (1717–1783), датированному 1772 г., выдающийся математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) писал: «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия идет к некоторому упадку?.. Я считаю, что шахта становится слишком глубокой и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут найдены *новые рудоносные жилы*. Физика и химия дают теперь сокровища, неизмеримо лучшие, которые легче эксплуатировать; поэтому представляется, что все полностью обратились в эту сторону и, возможно, что места по геометрии в Академии наук станут когда-то тем, чем ныне являются кафедры арабского



Жан Лерон Д'Аламбер

языка в университетах». Тогда Лагранж еще не догадывался, что «новая рудоносная жила» уже открыта и что это открытие осуществил его младший коллега по Парижской Академии наук Гаспар Монж.

На жизненном пути и в научной карьере этого исполина своей эпохи удивительным, а иногда и превратным образом отразились все ее противоречивые, светлые и трагические страницы.

Гаспар Монж родился в семье мелкого торговца, однако благодаря своим феноменальным способностям смог закончить один из самых престижных тогдашних заведений реального образования — Королевскую инженерную академию в Мезьере, а потом и стать профессором в ней. Ни в одном из университетов Франции математика и физика не преподавались тогда лучше, чем там.

Вместе с тем там же Монж соприкоснулся и с трагическим делением людей по происхождению и имущественному состоянию. Несмотря на наилучшие успехи в обучении, дверь перед ним в высший офицерский класс как перед выходцем из третьего сословия была закрыта. Эта юношеская драма на всю жизнь оставила глубокий след в душе Монжа. Не потому ли Монж с таким воодушевлением встретил Великую французскую революцию, а потом и стал одним из вдохновенных защитников ее идеалов?

В начале революции Монж вступает в Патриотическое общество, потом — в Народное, наконец — в Якобинский клуб — наиболее радикальное тогдашнее политическое движение. В 1792 г., когда образовалось первое республиканское правительство, Монж получает в нем одну из самых ответственных должностей Морского министра и занимает ее на протяжении 8 бурных революционных месяцев. В конце 1793 г. его привлекают к организации военной промышленности. В то время, как его ученик по геометрии легендарный «организатор побед» Лазар Карно (1753–1823) обеспечивал победы революции на многочисленных фронтах, Гаспар Монж организовывал материальные ресурсы для вооружения и содержание войск. В частности, он организовал добычу селитры для производства пороха (до этого ее импортировали), а также массовое литье пушек. Поэтому своими побе-



Жозеф Луи Лагранж



Гаспар Монж



Лазар Карно



дами революционная армия была обязана не только Карно, но и его великому учителю Монжу.

С осени 1794 г. начинается новый ответственный период в общественно-политической деятельности Монжа, связанный с созданием в Париже знаменитой Политехнической школы. В школе, которую Монж называл своим «маленьким шедевром», велось усиленное преподавание математики, механики и химии с целью форсированного обновления военных и гражданских инженерных кадров. Монж стал душой этой школы, на протяжении 20 лет был ее директором, сам преподавал в ней и собственным примером, энтузиазмом и безграничным патриотизмом зажигал сердца молодых воспитанников. «Для того, чтобы освободить французский народ от зависимости от иностранной индустрии, в которой он находился до настоящего времени, необходимо прежде всего направить народное образование на изучение предметов, требующих точности», — такими словами открывал Монж свою «Начертательную геометрию», первые издания которой предназначались как раз для воспитанников Политехнической школы. Политехническая школа стала уникальным учебным заведением во всей мировой истории. Она существует и поныне, вот уже свыше 200 лет. Ее выпускниками в разные времена был целый ряд светочей мировой науки, выдающихся организаторов промышленного производства, цвет французского генералитета и даже три президента французской республики.

Во времена Директории Монж сблизился с молодым генералом Наполеоном Бонапартом, в котором усматривал истинного продолжателя идеалов революции. Со временем симпатия переросла в крепкую и бескорыстную дружбу, продолжавшуюся до самого конца их активной общественной жизни. По этому поводу известный немецкий историк математики Дирк Стройк (1894–1991) очень метко заметил: «На протяжении всей своей жизни Монж сохранял верность трем вещам: геометрии, революции и Наполеону».

Кроме «Начертательной геометрии» Монж осуществил немало других научных открытий. В частности, упомянутый в начале этого очерка Лагранж



Наполеон Бонапарт



Ученик Политехнической школы во времена Монжа и Наполеона.

На флаге, врученном школе Наполеоном, лозунг: «Все для отчизны, наук и славы».

## Содержание

|                                                                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие для учеников и учителей .....                                                                    | 3          |
| <b>Введение. О геометрии в общем. Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии .....</b>          | <b>7</b>   |
| 1. Что же такое геометрия? .....                                                                             | 7          |
| 2. Аксиоматика планиметрии .....                                                                             | 19         |
| <i>Страницы истории.</i> 1. Как измеряли длины в разные времена .....                                        | 29         |
| 2. Как измеряли углы в разные времена .....                                                                  | 39         |
| 3. О неоднозначности аксиоматики геометрии .....                                                             | 44         |
| <i>Страницы истории.</i> А.Д. Александрова и А.В. Погорелов — две вершинные фигуры в геометрии XX в. ....    | 51         |
| 4. Первые следствия из аксиом об измерении и откладывании углов: свойства смежных и вертикальных углов ..... | 55         |
| 5. Признаки равенства треугольников .....                                                                    | 57         |
| 6. Признак параллельных прямых .....                                                                         | 61         |
| 7. Сумма углов треугольника и многоугольника .....                                                           | 62         |
| 8. Система опорных фактов планиметрии .....                                                                  | 64         |
| 9. Об основных типах и методах решения геометрических задач .....                                            | 75         |
| 1. Классический геометрический метод .....                                                                   | 75         |
| 2. Алгебраический метод .....                                                                                | 76         |
| 3. Координатный метод .....                                                                                  | 79         |
| 4. Векторный и векторно-координатный методы .....                                                            | 88         |
| <i>Для тех, кто хочет знать больше</i>                                                                       |            |
| Примеры применения векторов для расширения инструментария метода координат .....                             | 96         |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                             | 99         |
| <b>Раздел I. Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них .....</b>                                    | <b>103</b> |
| §1. Аксиомы стереометрии .....                                                                               | 104        |
| <i>Страницы истории</i>                                                                                      |            |
| Несколько штрихов к «портрету» геометрии .....                                                               | 115        |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                                    | 117        |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                             | 117        |
| §2. Способы задания плоскостей .....                                                                         | 119        |
| <i>Страницы истории</i>                                                                                      |            |
| Как Паскаль стал геометром .....                                                                             | 122        |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                                    | 124        |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                             | 124        |
| §3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве .....                                                   | 125        |
| <i>Страницы истории</i>                                                                                      |            |
| Геродот и Аристотель о происхождении геометрии .....                                                         | 133        |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                                    | 134        |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                             | 135        |
| <i>Примерные задачи для контрольной работы №1</i> .....                                                      | 137        |
| §4. Взаимное расположение прямой и плоскости .....                                                           | 138        |
| <i>Страницы истории</i>                                                                                      |            |
| Платон и Аристотель о содержании геометрии .....                                                             | 143        |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                                    | 146        |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| Задачи и упражнения .....                                            | 146 |
| §5. Взаимное расположение двух плоскостей .....                      | 148 |
| Страницы истории .....                                               |     |
| Фалес и идея логического обоснования в геометрии .....               | 157 |
| Проверь себя .....                                                   | 160 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 160 |
| §6. Разбиение пространства плоскостью на два полупространства .....  | 162 |
| Страницы истории .....                                               |     |
| М.В. Остроградский (1801–1862) .....                                 | 164 |
| Проверь себя .....                                                   | 165 |
| Примерные задачи для контрольной работы №2 .....                     | 166 |
| §7. Задачи на построение в стереометрии .....                        | 167 |
| Страницы истории .....                                               |     |
| Пифагор и пифагорейцы .....                                          | 173 |
| Проверь себя .....                                                   | 178 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 179 |
| §8. Применения проектирования для изображения пространственных фигур |     |
| на плоскости .....                                                   | 180 |
| 8.1. Параллельное проектирование и его свойства .....                | 180 |
| 8.2. Принципы построения изображений стереометрических фигур         |     |
| в параллельной проекции .....                                        | 184 |
| Для тех, кто хочет знать больше .....                                |     |
| 8.3*. Понятие о центральном проектировании и перспективе .....       | 190 |
| Страницы истории .....                                               |     |
| 1, Евклид и его «Начала» .....                                       | 196 |
| 2. Усовершенствование «Начал» Лежандром .....                        | 200 |
| Проверь себя .....                                                   | 201 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 201 |
| §9. Простейшие многогранники и их сечения .....                      | 203 |
| 9.1. Тетраэдр .....                                                  | 204 |
| Проверь себя .....                                                   | 208 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 208 |
| 9.2. Параллелепипед .....                                            | 209 |
| Проверь себя .....                                                   | 213 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 214 |
| 9.3. Пирамида .....                                                  | 214 |
| Проверь себя .....                                                   | 220 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 221 |
| 9.4. Призма .....                                                    | 221 |
| Проверь себя .....                                                   | 224 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 224 |
| 9.5. Построение сечений многогранников .....                         | 224 |
| Страницы истории .....                                               |     |
| Феофан Прокопович (1681–1736) .....                                  | 231 |
| Проверь себя .....                                                   | 231 |
| Задачи и упражнения .....                                            | 234 |
| Примерные задачи для контрольной работы №3 .....                     | 236 |

**Раздел II. Углы и расстояния в пространстве и в многогранниках .....239**

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §10. Угол между двумя прямыми в пространстве .....                                                     | 240 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 245 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 246 |
| §11. Угол между прямой и плоскостью. Перпендикулярность прямой и плоскости .....                       | 247 |
| <i>Для тех, кто хочет знать больше</i>                                                                 |     |
| 11.1*. Об углах, образованных прямой с плоскостью (ищем ведущую идею) .....                            | 247 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 250 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 251 |
| 11.2. Перпендикулярность прямой и плоскости .....                                                      | 251 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 256 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 256 |
| 11.3. Построение перпендикулярных прямой и плоскости .....                                             | 257 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 263 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 263 |
| 11.4. Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью их к плоскости .....                    | 264 |
| <i>Страницы истории</i>                                                                                |     |
| О важнейших вехах в истории учения о параллельных прямых .....                                         | 266 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 274 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 274 |
| 11.5. Ортогональное проектирование и теорема о трех перпендикулярах .....                              | 276 |
| <i>Страницы истории</i>                                                                                |     |
| Из истории теоремы о трех перпендикулярах .....                                                        | 279 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 280 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 280 |
| 11.6. Наклонный отрезок и перпендикуляр к плоскости .....                                              | 281 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 286 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 287 |
| 11.7. Угол между прямой и плоскостью .....                                                             | 288 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 294 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 294 |
| 11.8. Углы параллельных прямых с плоскостью и прямой с параллельными плоскостями .....                 | 295 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 298 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 298 |
| 11.9. Другое измерение углов между прямой и плоскостью .....                                           | 299 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 300 |
| <i>Примерные задачи для контрольной работы №4</i> .....                                                | 301 |
| §12. Расстояние между фигурами .....                                                                   | 303 |
| 12.1. Основное определение .....                                                                       | 303 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 306 |
| 12.2. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью и между двумя параллельными плоскостями ..... | 307 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 310 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                                                       | 310 |
| 12.3. Высота пирамиды и призмы .....                                                                   | 311 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                                                              | 313 |

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.4. Прямые и правильные призмы .....                                 | 313 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 317 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 317 |
| 12.5. Правильные пирамиды и пирамиды с равными боковыми ребрами .....  | 318 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 323 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 323 |
| 12.6. Площади поверхностей призм и пирамид .....                       | 325 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 330 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 331 |
| 12.7. Расстояние между скрещивающимися прямыми .....                   | 332 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 336 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 336 |
| <i>Для тех, кто хочет знать больше</i>                                 |     |
| 12.8*. Прямоугольные и ортоцентрические тетраэдры .....                | 337 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 343 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 343 |
| <i>Для тех, кто хочет знать больше</i>                                 |     |
| 12.9*. Равногранные тетраэдры .....                                    | 344 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 348 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 348 |
| Примерные задачи для контрольной работы №5 .....                       | 349 |
| §13. Двугранные углы. Угол между двумя плоскостями .....               | 351 |
| 13.1. Двугранные углы .....                                            | 351 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 357 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 357 |
| 13.2. Угол между двумя плоскостями .....                               | 359 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 362 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 363 |
| 13.3. Перпендикулярность двух плоскостей .....                         | 364 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 368 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 369 |
| 13.4. Площадь ортогональной проекции плоской фигуры .....              | 370 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 375 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 375 |
| 13.5. Двугранные углы в многогранниках .....                           | 376 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 385 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 385 |
| <i>Для тех, кто хочет знать больше</i>                                 |     |
| 13.6*. Моделирование пространства на плоскости по методу Монжа .....   | 387 |
| Страницы истории                                                       |     |
| Гаспар Монж (1746–1818) — великий революционер в науке и в жизни ..... | 401 |
| <i>Проверь себя</i> .....                                              | 404 |
| <i>Задачи и упражнения</i> .....                                       | 405 |
| Примерные задачи для контрольной работы №6 .....                       | 405 |
| Ответы .....                                                           | 407 |
| Краткий словарь имен авторов высказываний и цитат .....                | 410 |
| Предметный указатель .....                                             | 415 |



*Учебное издание*

ТАДЕЕВ Василий Александрович

## **ГЕОМЕТРИЯ**

### **Основания стереометрии**

Двухуровневый учебник для профильного обучения математике  
в 10-м классе общеобразовательных учебных заведений

Авторизованный перевод с украинского  
Под редакцией В.И. Михайловского

Главный редактор *Богдан Будный*

Редактор *Владимир Дячун*

Художник обложки *Ростислав Крамар*

Дизайн и компьютерная верстка *Андрея Кравчука*

Подписано к печати 1.11.2010. Формат 70×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Antiqua.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 35,96. Усл. кр.-отп. 29,0. Уч.-изд. л. 58,0.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоство про внесення до Державного реєстру видавців

ДК № 370 від 21.03.2001 р.

«Навчальна книга – Богдан», а/с 529, м. Тернопіль 46008

тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70

*publishing@budny.te.ua*

*www.bohdan-books.com*

---

В оформлении обложки использованы: гравюра Мориса Эшера «Рептилии», рисунок Карела Чапека «Человек и кристаллы», а также «Кубок Кеплера», символизирующий в геометрической форме гармонию «небесных сфер». На заднем плане — знаменитые египетские пирамиды и пирамида нового комплекса парижского Лувра.

На 1-м форзаце — фреска Рафаэля «Афинская школа». Изображенные на ней персонажи (в частности — в центре композиции — Платон и Аристотель, на переднем крае слева с раскрытой книгой в руках — Пифагор, левее от него — старик Фалес, правее с циркулем — Евклид, а на переднем крае справа, также с циркулем, склонившись над чертежом, — Архимед) жили в разные времена и в разных частях античного мира. Но все вместе они были причастны к созданию неотъемлемого и важнейшего духовного атрибута этого мира — дедуктивной науки. Геометрии в этой науке принадлежала ведущая роль.

На 2-м форзаце — картина испанского сюрреалиста XX в. Сальвадора Дали «Тайная вечеря». Известный библейский сюжет изображен здесь на фоне гигантского правильного многогранника — додекаэдра, символизировавшего в античной натурфилософии гармонию Вселенной (Космос).