Д.І. Боднар, Л.М. Буяк, О.Г. Возняк

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ: МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 517.9
ББК 22.16 я73
В64

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Тернопільського національного економічного університету
Недашковський М. О.
доктор фізико-математичних наук, професор
Тернопільського національного технічного університету ім. Івана Пулюя
Кривень В.А.

*Рекомендовано до друку вченою Радою
Тернопільського національного економічного університету
(протокол №1 від 15 березня 2010 року)*

Боднар Д. І., Буяк Л.М., Возняк О. Г.
В64 Диференціальні рівняння: методи розв'язування.
Навчально-методичний посібник. —
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 112 с.

ISBN 978-966-10-1645-2

Посібник містить короткі теоретичні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем, приклади розв'язування завдань та задачі для самостійного розв'язування.

Для студентів напрямів „Комп'ютерна інженерія" та „ Програмна інженерія".

ББК 22.16я73

ISBN 978-966-10-1645-2

§1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЇХНІЙ ПОРЯДОК, ЗАГАЛЬНИЙ І ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ІНТЕГРАЛИ

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y=f(x)$ та її похідні. ***Порядком диференціального рівняння*** називається порядок старшої похідної, яка входить у це рівняння. ***Диференціальне рівняння n-го порядку*** у загальному вигляді записується так: $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$. ***Розв'язком диференціального рівняння*** називається будь-яка функція $y=f(x)$, яка перетворює це рівняння у тотожність. Розв'язок $F(x,y)=0$, заданий у неявному вигляді, називається ***інтегралом диференціального рівняння.*** Графік розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегральною кривою.***

Задача Коші. *Знайти розв'язок* $y=y(x)$ *диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:* $y=y_0$, $y'=y'_0$, $y''=y''_0$, …, $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ *при* $x=x_0$, *де* x_0, y_0, y'_0, y''_0, …, $y_0^{(n-1)}$ — задані числа.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція $y=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right)$, яка має такі властивості: 1) при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2, …, C_n вона перетворює рівняння у тотожність; 2) значення сталих C_1, C_2, …, C_n можна підібрати так, щоб вона задовольняла початкові умови. Загальний розв'язок, який заданий у неявному вигляді $\Phi\left(x,y,C_1,C_2,...,C_n\right)=0$, називається ***загальним інтегралом***. ***Частинним розв'язком диференціального рівняння*** називається розв'язок, який одержується із загального, якщо надати визначені значення довільним сталим, тобто розв'язок вигляду $y=\varphi\left(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)$, де C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 — фіксовані числа. ***Частинним інтегралом диференціального рівняння*** називається інтеграл, який одержується із загального шляхом фіксування довільних сталих: $\Phi\left(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)=0$, де C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 — фіксовані числа.

Приклад 1. Визначити порядок диференціального рівняння:

1) $y''+5y'-4y+2=0$; 2) $x(x-1)y'-(2x-1)y-(2x-1)=0$;

3) $y^{IV}-25y''=0$; 4) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

◄Перше рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, оскільки порядок старшої похідної, яка входить у це рівняння, дорівнює 2, друге — рівнянням першого порядку, бо воно містить тільки першу похідну. Відмітимо, що у першому рівнянні коефіцієнти при y, y', y'' і вільний член є числами, у другому рівнянні вони залежать від x. Третє рівняння є рівнянням четвертого порядку, оскільки порядок старшої похідної дорівнює 4, четверте — рівнянням третього порядку, оскільки третя похідна є старшою похідною, яка міститься у цьому рівнянні. Відмітимо, що третє рівняння не містить y, y', y''' і x, четверте також не містить x.▶

Приклад 2. Перевірити, чи функція $y=e^{-4x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'''+64y=0$.

◀Знайдемо похідні даної функції: $y'=-4e^{-4x}$, $y''=16e^{-4x}$, $y'''=-64e^{-4x}$. Підставляючи вирази для y, y''' у диференціальне рівняння, одержимо тотожність $-64e^{-4x}+64e^{-4x}\equiv 0$. Це означає, що функція $y=e^{-4x}$ є розв'язком рівняння. Цей розв'язок є частинним, бо він не містить довільних сталих.▶

Приклад 3. Перевірити, чи функція $y=C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ задовольняє рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$. Чи є цей розв'язок загальним?

◀Знаходимо похідні даної функції: $y'=2C_1e^{2x}+\frac{1}{2}$, $y''=4C_1e^{2x}$. Підставляємо вирази для y, y' і y у шукане рівняння:

$$4C_1e^{2x}-5\left(2C_1e^{2x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4C_1e^{2x}-10C_1e^{2x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{2x}+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Оскільки одержано тотожність, то функція $y=C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є розв'язком даного рівняння. Цей розв'язок не є загальним, бо він містить тільки одну довільну сталу, а порядок рівняння дорівнює 2.▶

Приклад 4. Переконатися у тому, що функція $y=C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є розв'язком рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$.

◀Знайдемо похідні $y'=3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}$, $y''=9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x}$ і, підставивши вирази для y, y' і y'' у дане рівняння, одержуємо тотожність

$$\left(9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x}\right)-5\left(3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x}\right)-5\left(3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}\right)-\frac{5}{2}+6\left(C_1e^{3x}+C_2e^{3x}\right)+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Отже, дана функція є розв'язком диференціального рівняння. Цей розв'язок є частинним, бо він містить лише одну незалежну сталу (сталі C_1 і C_2 у даному випадку не є незалежними: їхню кількість можна зменшити; оскільки сума двох сталих також є сталою, то можна позначити $C_1+C_2=C$), тоді $y=Ce^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.▶

Приклад 5. Довести, що функція $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є загальним розв’язком рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$.

◀Дана функція містить дві незалежні довільні сталі (їхню кількість не можна зменшити, як у попередньому прикладі). Доведемо, що функція задовольняє рівняння, тобто вона є загальним розв’язком даного диференціального рівняння. Оскільки $y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}$, $y''=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}$, то підстановка виразів y, y', y'' у рівняння приводить до тотожності

$$\left(4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}\right)-5\left(2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}-10C_1e^{2x}-15C_2e^{3x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{2x}+6C_2e^{3x}+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$ ▶

Приклад 6. Задано загальний розв’язок $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ диференціального рівняння $y''+9y=0$. Який частинний розв’язок одержується при $C_1=2$, $C_2=3$? При яких значеннях параметрів C_1 і C_2 одержуються частинні розв’язки: $y=\cos 3x$, $y=\sin 3x$?

◀Підставляючи значення $C_1=2$, $C_2=3$ у формулу для загального розв’язку, одержимо частинний розв’язок $y=2\cos 3x+3\sin 3x$. Частинний розв’язок $y=\cos 3x$ одержується із загального при $C_1=1$, $C_2=0$, а частинний розв’язок $y=\sin 3x$ — при $C_1=0$, $C_2=1$.▶

Приклад 7. Довести, що функція $y^2+x^2-Cy=0$ є загальним інтегралом диференціального рівняння $y'\left(y^2-x^2\right)+2xy=0$.

◀Диференціюючи по x дану неявну функцію, одержимо

$$2yy'+2x-Cy'=0,\quad y'(2y-C)=-2x,\quad y'=\frac{2x}{C-2y}.$$

З рівняння $y^2+x^2-Cy=0$ знаходимо сталу $C=\frac{y^2+x^2}{y}$ і підставляємо її вираз у формулу для похідної y': $y'=\dfrac{2x}{\dfrac{y^2+x^2}{y}-2y}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$. Підстановка похідної у диференціальне рівняння приводить до тотожності $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\left(y^2-x^2\right)+2xy\equiv 0$.

Отже, неявна функція $y^2+x^2-Cy=0$, залежна від однієї довільної сталої, є розв’язком диференціального рівняння, тобто є його загальним інтегралом.▶

Приклад 8. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв’язком якого є функція $y=C_1x-C_2$, яка залежить від двох довільних сталих.

◀Двічі диференціюючи дану функцію, виключаємо сталі C_1 і C_2: $y'=C_1$, $y''=0$. Рівняння $y''=0$ задовольняє умову задачі.▶

Приклад 9. Скласти диференціальне рівняння, загальний розв’язок якого має вигляд $y=C_1x-\dfrac{C_2}{x}$.

◀Диференціюючи дану функцію, одержимо: $y'=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}$, $y''=-\dfrac{2C_2}{x^3}$. З рівнянь $y=C_1x-\dfrac{C_2}{x}$, $y'=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}$ виключаємо C_1. Помноживши друге рівняння на x і віднявши від нього перше, одержимо $xy'-y=\dfrac{2C_2}{x}$. Додавши це рівняння до рівняння $y''=-\dfrac{2C_2}{x^3}$, помноженого на x^2, виключимо C_2: $xy'-y+y''x^2=0$. Одержане рівняння є шуканим.▶

Приклад 10. Знайти диференціальне рівняння сукупності кривих $y=Cx^4$.

◀Диференціюючи дану функцію, одержуємо $y'=4Cx^3$. Підставляючи сюди вираз $C=\dfrac{y}{x^4}$, одержаний з даного рівняння, знаходимо шукане диференціальне рівняння $y'=4\cdot\dfrac{y}{x^4}\cdot x^3$, або $y'=\dfrac{4y}{x}$.▶

Визначити порядок диференціального рівняння.

1. $y'+p(x)y=q(x)$. 2. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.

3. $y'''-ay''+by'+cy=0$. 4. $y^{V}+y^{IV}-y=0$.

5. Загальний розв’язок диференціального рівняння $y''-4y'+3y=0$ має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. Знайти частинні розв’язки у випадках:

а) $C_1=0$, $C_2=1$; б) $C_1=1$, $C_2=0$; в) $C_1=1$, $C_2=-2$.

6. Загальний інтеграл диференціального рівняння $2xyy'=y^2-x^2$ має вигляд $x^2+y^2-Cx=0$. Знайти частинні інтеграли при $C=4$, $C=-6$, $C=-8$, $C=10$ і побудувати їх.

З’ясувати, чи функція є розв’язком диференціального рівняння.

7. $xy'=2y$, $y=5x^2$. 8. $y''=x^2+y^2$, $y=\dfrac{1}{x^2}$. 9. $(x+y)dx+xdy=0$, $y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$.

10. $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$. 11. $y''-2y'+y=0$, а) $y=xe^x$, б) $y=x^2e^x$.

Перевірити, чи функція задовольняє диференціальне рівняння; з'ясувати, яким розв'язком вона є — загальним чи частинним.

12. $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$.

13. $\ln x\ln y=C$, $y\ln y+x\ln xy'=0$.

14. $y=Ce^{-2x}$, $y'+2y=0$.

15. $x^2+2xy=C$, $(x+y)+xy'=0$.

16. $y=x\left(\ln x^2+C\right)$, $xy'-y=2x$. 17. $y=\frac{(x+1)^4}{2}+(x+1)^2$, $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$.

18. $x^2+y^2=C^2$, $x+yy'=0$. 19. $y^2-x^2-2y=0$, $y'\left(x^2+y^2\right)-2xy=0$.

20. $y=-x-\frac{\sin 2x}{2}$, $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. 21. $y=C_1x+C_2x^2$, $x^2y''-2xy'+2y=0$.

22. $y=C_1e^x\sin x$, $y''-2y'+2y=0$. 23. $y=C_1\sin 7x+C_2\cos 7x$, $y''+49y=0$.

24. $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$, $xy'''=2$.

25. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$, $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

Перевірити, чи для диференціального рівняння співвідношення є інтегралами.

26. $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C^2$. 27. $(x-y+1)y'=1$, $y=x+Ce^y$.

Знайти диференціальне рівняння сукупності кривих.

28. $y=Cx$. 29. $y=Cx^2$. 30. $y^2=2Cx$. 31. $x^2+y^2=C^2$. 32. $y=Ce^x$.

33. $y=C\sin x$. 34. $x^3=C\left(x^2-y^2\right)$. 35. $y^2+\frac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. 36. $\ln\frac{x}{y}=1+Cy$.

Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція.

37. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}$.

38. $y=C_1\sin 5x+C_2\cos 5x$.

39. $y=C_1+C_2\sin\left(x+C_3\right)$.

40. $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-3x}$.

41. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3e^{3x}$.

42. $y=C_1e^{-3x}+C_2\cos 2x$.

§2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння відносно шуканої функції та її першої похідної. У загальному вигляді це рівняння можна записати так:

$$F\left(x,y,y'\right)=0. \tag{2.1}$$

Якщо рівняння (2.1) розв'язне відносно y', то

$$y'=f(x,y), \text{ або } dy=f(x,y)dx. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) можна записати так: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. ***Розв'язком диференціального рівняння першого порядку*** **(2.1)** називається функція $y=y(x)$,

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}, \tag{3.17}$$

якщо k_1 і k_2 — різні дійсні числа;

$$y=(C_1+C_2x)e^{k_1x}, \tag{3.18}$$

якщо $k_1=k_2$;

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x), \tag{3.19}$$

якщо $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ — комплексні числа.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-3y'-4y=0$ і виділити частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови: $y=-1$, $y'=6$ при $x=0$.

◀Характеристичне рівняння (3.16) для даного рівняння набуває вигляду $k^2-3k-4=0$. Оскільки це рівняння має різні дійсні корені $k_1=-1$, $k_2=4$, то відповідно до формули (3.17) загальний розв'язок даного диференціального рівняння такий: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$. Щоб знайти частинний розв'язок, підставимо початкові дані у вирази для y і y', де $y'=-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}$. Це приводить до системи рівнянь: $-1=C_1+C_2$ і $6=-C_1+4C_2$, звідки визначаються значення довільних сталих: $C_1=-2$, $C_2=1$. Отже, шуканий частинний розв'язок визначається формулою $y=-2e^{-x}+e^{4x}$.▶

Приклад 2. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y''-4y'+4y=0$.

◀Характеристичне рівняння $k^2-4k+4=0$ має рівні корені $k_1=k_2=2$. Відповідно до формули (3.18) одержуємо загальний розв'язок початкового рівняння $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$.▶

Приклад 3. Проінтегрувати диференціальне рівняння $2y''+y'+y=0$.

◀Характеристичне рівняння $2k^2+k+1=0$ має комплексні корені $k_1=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{7}}{4}$, $k_2=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{7}}{4}$. Відповідно до формули (3.19) знаходимо загальний розв'язок $y=e^{-\frac{x}{4}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{4}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)$.▶

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-5y'=0$.

◀Характеристичне рівняння $k^2-5k=0$ має корені $k_1=0$, $k_2=5$. На підставі формули (3.17) загальний розв'язок початкового рівняння визначається формулою $y=C_1+C_2e^{5x}$.▶

Приклад 5. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y''+9y=0$.

◄Характеристичне рівняння $k^2+9=0$ має уявні корені $k_1=3i$, $k_2=-3i$. Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.►

Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. $y''-4y'+3y=0$. 2. $y''+2y'-8y=0$. 3. $y''+3y'+2y=0$. 4. $y''-4y'=0$.
5. $y''-2y'+y=0$. 6. $y''+8y'+16y=0$. 7. $y''-4y'+13y=0$. 8. $y''-9y=0$.
9. $y''+6y'+25y=0$. 10. $y''+9y=0$. 11. $y''-16y=0$. 12. $y''-2y'-2y=0$.
13. $y''+6y'+13y=0$. 14. $y''-6y'+9y=0$. 15. $3y''-2y'-8y=0$.
16. $4y''-8y'+5y=0$. 17. $4y''+4y'+y=0$. 18. $y''-5y'+6y=0$.
19. $y''-y'=0$. 20. $y''+y=0$. 21. $y''-2y'+2y=0$. 22. $y''+4y'+13y=0$.
23. $y''+2y'+y=0$. 24. $y''-4y'+2y=0$. 25. $y''+y'-y=0$.
26. $3y''-y'+y=0$. 27. $y''-5y'-6y=0$. 28. $y''+4y'+4y=0$.

Знайти інтегральну криву однорідного диференціального рівняння, яка дотикається до прямої у точці.

29. $y''-y=0$, $M_0(0;0)$, $y=x$. 30. $y''-4y'+3y=0$, $M_0(0;2)$, $2x-2y+9=0$.

Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку та виділити частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови.

31. $y''+4y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$. 32. $y''-5y'+4y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=8$.
33. $y''+2y'=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. 34. $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.
35. $y''+3y'=0$, $y(0)=0$, $y'(3)=0$. 36. $y''+\pi^2 y=0$, $y(0)=0$, $y'(1)=0$.
37. $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=0$. 38. $9y''-y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Якщо у рівнянні (3.13) $\varphi(x)$ не дорівнює тотожно нулю, то воно називається ***неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами***; це рівняння можна звести до вигляду

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{3.20}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.20) знаходиться за формулою

$$y=y_0+\bar{y}, \tag{3.21}$$

де y_0 — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y''+py'+qy=0, \tag{3.22}$$

а $\bar{y}$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.20).

У найпростіших випадках, коли функція $f(x)$, яка входить у рівняння (3.20), є показниковою або многочленом, вказаний частинний розв'язок знаходиться за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Якщо

$$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x), \tag{3.23}$$

де $P_m(x)$ — многочлен степеня m, то частинний розв'язок рівняння (3.20) знаходиться у вигляді

$$\bar{y}=e^{\alpha x}M_m(x), \tag{3.24}$$

де $M_m(x)$ — многочлен того самого степеня m з невизначеними коефіцієнтами, коли α не є коренем характеристичного рівняння для рівняння (3.22), і у вигляді

$$\bar{y}=xe^{\alpha x}M_m(x) \text{ або } \bar{y}=x^2e^{\alpha x}M_m(x), \tag{3.25}$$

коли α — відповідно простий або кратний корінь характеристичного рівняння. Якщо

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right), \tag{3.26}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, найбільша степінь яких m, то частинний розв'язок рівняння (3.20) знаходиться у вигляді

$$\bar{y}=e^{\alpha x}\left(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x\right), \tag{3.27}$$

коли $\alpha+i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, і у вигляді

$$\bar{y}=xe^{\alpha x}\left(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x\right), \tag{3.28}$$

де $M(x)$ і $N(x)$ — многочлени степеня m, коли $\alpha+i\beta$ — простий корінь вказаного рівняння. Якщо

$$f(x)=P_n(x), \tag{3.29}$$

де $P_n(x)$ — многочлен n-го степеня, то частинний розв'язок рівняння (3.20) шукається у вигляді

$$\bar{y}=Q_n(x), \tag{3.30}$$

якщо $\alpha=0$ не є коренем характеристичного рівняння, і у вигляді

$$\bar{y}=xQ_n(x), \tag{3.31}$$

якщо $\alpha=0$ — простий корінь характеристичного рівняння. Якщо

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x), \tag{3.32}$$

де $f_1(x)$, $f_2(x)$ є функції вигляду (3.23), (3.26) і (3.29), а $\bar{y}_1$ і $\bar{y}_2$ є частинними розв'язками відповідно рівнянь $y''+py'+qy=f_1(x)$ і $y''+py'+qy=f_2(x)$, то

$$\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2 \tag{3.33}$$

є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (3.20).

У загальному випадку частинний розв'язок рівняння (3.20) знаходиться за допомогою ***методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа).*** Якщо $y=C_1y_1+C_2y_2$ є загальним розв'язком однорідного рівняння (3.15), то загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.20) шукається у вигляді

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2\,. \tag{3.34}$$

Функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (3.35)$$

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' + 2y' + 5y = 16e^{-3x}$.

◀Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$ має комплексні корені $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$. Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд $y_0 = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. Знайдемо частинний розв’язок початкового рівняння. Оскільки $f(x) = 16e^{-3x}$ (тобто $f(x) = e^{\alpha x} P_0(x) = ae^{\alpha x}$, де $a = 16$, $\alpha = -3$) і $\alpha = -3$ не є коренем характеристичного рівняння, то відповідно до формули (3.24) частинний розв’язок шукаємо у вигляді $\bar{y} = Ae^{-3x}$. Знайшовши похідні цієї функції $\bar{y}' = -3Ae^{-3x}$, $\bar{y}'' = 9Ae^{-3x}$ і підставивши вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ у початкове рівняння, одержимо $9Ae^{-3x} + 2 \cdot \left(-3Ae^{-3x}\right) + 5Ae^{-3x} = 16e^{-3x}$, $8Ae^{-3x} = 16e^{-3x}$. Оскільки $\bar{y}$ — розв’язок рівняння, то остання рівність виконується для всіх x, тобто є тотожністю, $8Ae^{-3x} \equiv 16e^{-3x}$, звідки $8A = 16$, $A = 2$. Таким чином, частинний розв’язок такий: $\bar{y} = 2e^{-3x}$. На підставі формули (3.21) одержуємо загальний розв’язок початкового рівняння

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2e^{-3x}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$.

◀Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння визначається формулою $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Для знаходження частинного розв’язку неоднорідного рівняння скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Оскільки $\alpha = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, то відповідно до формули (3.24) шукаємо частинний розв’язок у вигляді $\bar{y} = e^{3x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$. Знаходимо похідні $\bar{y}' = e^{3x}\left(3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C\right)$, $\bar{y}'' = e^{3x}\left(9Ax^2 + 3(4A + 3B)x + 2A + 6B + 9C\right)$ і підставимо вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ у початкове рівняння. Одержимо:

$$\left(9Ax^2 + 3(4A + 3B)x + 2A + 6B + 9C\right)e^{3x} - 3\left(3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C\right)e^{3x} +$$
$$+ 2\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x} = \left(x^2 + x\right)e^{3x}, \; 2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C \equiv x^2 + x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти обидвох частин цієї тотожності, маємо систему рівнянь для визначення невідомих A, B, C: $2A = 1$, $6A + 2B = 1$, $2A + 3B +$

$+2C=0$, звідки $A=0{,}5$, $B=-1$, $C=1$. Отже, частинний розв’язок має вигляд $\bar{y}=\left(0{,}5x^2-x+1\right)e^{3x}$. На підставі формули (3.21) одержуємо загальний розв’язок початкового рівняння $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+0{,}5\left(x^2-2x+2\right)e^{3x}$.►

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''-14y'+49y=-7xe^{2x}$.

◄Характеристичне рівняння $k^2-14k+49=0$ має рівні корені $k_1=k_2=7$. Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння визначається формулою $y_0=\left(C_1+C_2x\right)e^{7x}$. Оскільки $\alpha=2$ не є коренем характеристичного рівняння, то відповідно до формули (3.24) шукаємо частинний розв’язок у вигляді $\bar{y}=\left(Ax+B\right)e^{2x}$. Знаходимо похідні $\bar{y}'=\left(2Ax+2B+A\right)e^{2x}$, $\bar{y}''=4\left(Ax+B+A\right)e^{2x}$, підставляємо вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ у початкове рівняння і одержимо:

$$4\left(Ax+B+A\right)e^{2x}-14\left(2Ax+2B+A\right)e^{2x}+49\left(Ax+B\right)e^{2x}\equiv-7xe^{2x},$$

$$25Ax+25B-10A\equiv-7x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти обидвох частин цієї тотожності, маємо систему рівнянь для визначення невідомих A, B: $25A=-7$, $25B-10A=0$, звідки $A=-\dfrac{7}{25}$, $B=-\dfrac{14}{125}$. Отже, частинний розв’язок початкового рівняння має вигляд: $\bar{y}=\left(-\dfrac{7}{25}x-\dfrac{14}{125}\right)e^{2x}$. На підставі формули (3.21) одержуємо загальний розв’язок $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{7x}-\dfrac{1}{125}\left(35x+14\right)e^{2x}$.►

Приклад 4. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y''-y'-12y=e^{4x}$.

◄Характеристичне рівняння $k^2-k-12=0$ має корені $k_1=-3$, $k_2=4$, тому загальний розв’язок однорідного рівняння $y''-y'-12y=0$ визначається формулою $y_0=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$. Функція $f\left(x\right)=e^{4x}$ одержується з формули (3.23) при $P_0\left(x\right)=a=1$, $\alpha=4$. Оскільки $\alpha=4$ — простий корінь характеристичного рівняння, то відповідно до формули (3.25) частинний розв’язок шукаємо у вигляді $\bar{y}=Axe^{4x}$. Підставляючи у початкове рівняння вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, де $\bar{y}'=Ae^{4x}+4Axe^{4x}$, $\bar{y}''=8Ae^{4x}+16Axe^{4x}$, одержимо:

$$\left(8Ae^{4x}+16Axe^{4x}\right)-\left(Ae^{4x}+4Axe^{4x}\right)-12Axe^{4x}\equiv e^{4x},\ 7Ae^{4x}\equiv e^{4x},$$

звідки $7A=1$, $A=\dfrac{1}{7}$. Отже, $\bar{y}=\dfrac{1}{7}xe^{4x}$. На підставі формули (3.21) одержуємо загальний розв’язок $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}+\dfrac{1}{7}xe^{4x}$, або $y=C_1e^{-3x}+\left(C_2+\dfrac{1}{7}x\right)e^{4x}$.►

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$y^{(0)} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 x \\ -(C_1 + C_2) - C_2 x \end{pmatrix} e^{3x}$. Оскільки f містить множник e^{3x}, причому $\alpha = 3$ є коренем характеристичного рівняння кратності 2, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\bar{y} = x \begin{pmatrix} A_1 x^2 + B_1 x + D_1 \\ A_2 x^2 + B_2 x + D_2 \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} A_1 x^3 + B_1 x^2 + D_1 x \\ A_2 x^3 + B_2 x^2 + D_2 x \end{pmatrix} e^{3x}$, а не у вигляді $\bar{y} = x^2 \begin{pmatrix} A_1 x + B_1 \\ A_2 x + B_2 \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} A_1 x^3 + B_1 x^2 \\ A_2 x^3 + B_2 x^2 \end{pmatrix} e^{3x}$. Підставивши $\bar{y}$ у початкову систему і скоротивши на e^{3x}, одержуємо матричну рівність

$$3\begin{pmatrix} A_1 x^3 + B_1 x^2 + D_1 x \\ A_2 x^3 + B_2 x^2 + D_2 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3A_1 x^2 + 2B_1 x + D_1 \\ 3A_2 x^2 + 2B_2 x + D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 x^3 + B_1 x^2 + D_1 x \\ A_2 x^3 + B_2 x^2 + D_2 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \end{pmatrix},$$

яку запишемо у вигляді рівностей

$$A_1 x^3 + B_1 x^2 + D_1 x + 3A_1 x^2 + 2B_1 x + D_1 = -A_2 x^3 - B_2 x^2 - D_2 x + x + 1,$$

$$-A_2 x^3 - B_2 x^2 - D_2 x + 3A_2 x^2 + 2B_2 x + D_2 = A_1 x^3 + B_1 x^2 + D_1 x + 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему

$A_1 = -A_2$, $B_1 + 3A_1 = -B_2$, $D_1 + 2B_1 = -D_2 + 1$, $D_1 = 1$, $-A_2 = A_1$, $-B_2 + {}$ ${}+3A_2 = B_1$, $-D_2 + 2B_2 = D_1 + 2$, $D_2 = 0$, з якої знаходимо $A_1 = -0{,}5$, $A_2 = 0{,}5$, $B_1 = 0$, $B_2 = 1{,}5$, $D_1 = 1$, $D_2 = 0$. Отже, $\bar{y} = x \begin{pmatrix} -0{,}5x^2 + 1 \\ 0{,}5x^2 + 1{,}5x \end{pmatrix} e^{3x}$ і шуканий розв'язок запишеться у вигляді $y = y^{(0)} + \bar{y} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 x - 0{,}5x^3 + x \\ -(C_1 + C_2) - C_2 x + 0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 \end{pmatrix} e^{3x}$ або

$$y_1 = (C_1 + C_2 x - 0{,}5x^3 + x)e^{3x}, \quad y_2 = (-(C_1 + C_2) - C_2 x + 0{,}5x^3 + 1{,}5x^2)e^{3x}. \blacktriangleright$$

Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами.

1. $\begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 3y + t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -y + e^{3t}, \\ y' = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = -y + e^{t}, \\ y' = x + e^{-t}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2 + xe^{2x}, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + e^{3x}. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y_1' = -y_2 + x^2 + 6x + 1, \\ y_2' = y_1 - 3x^2 + 3x + 1. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2 + xe^{2x}, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + e^{3x}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^{x}. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 4y_2, \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + 3e^{x}. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - 5e^{x}\sin x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}, \\ y_2' = y_1 + y_2 + 5e^{-x}. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 2e^{x}, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - 3e^{4x}. \end{cases}$ 13. $\begin{cases} y_1' = y_2 + 2e^{x}, \\ y_2' = y_1 + x^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y_1'=-y_1+2y_2+1, \\ y_2'=-2y_1+3y_2. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} y_1'=y_2-5\cos x, \\ y_2'=2y_1+y_2. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} y_1'=y_1-y_2+8x, \\ y_2'=5y_1-y_2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y_1'=2y_1-4y_2+4e^{-2x}, \\ y_2'=2y_1-2y_2. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} y_1'=4y_1+y_2-e^{2x}, \\ y_2'=-2y_1+y_2. \end{cases}$ 19. $\begin{cases} y_1'=3y_1-2y_2+x, \\ y_2'=3y_1-4y_2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y_1'=y_1+2y_2, \\ y_2'=y_1-5\sin x. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} y_1'=2y_1-y_2, \\ y_2'=-2y_1+y_2+18x. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} y_1'=4y_1-3y_2+\sin x, \\ y_2'=2y_1-y_2-2\cos x. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y_1'=2y_1+4y_2-8, \\ y_2'=3y_1+6y_2. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2, \\ y_2'=y_1-2y_2+2\sin x. \end{cases}$ 25. $\begin{cases} y_1'=y_1-y_2+2\sin x, \\ y_2'=2y_1-y_2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} y_1'=2y_1-y_2, \\ y_2'=y_1+2e^x. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} y_1'=y_1+2y_2+16xe^x, \\ y_2'=2y_1-2y_2. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2+e^x, \\ y_2'=-2y_1+2x. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y_1'=3y_1+2y_2+4e^{5x}, \\ y_2'=y_1+2y_2. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} y_1'=y_1+y_2-\cos x, \\ y_2'=-2y_1-y_2+\sin x+\cos x. \end{cases}$

Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами за допомогою методу варіації довільних сталих.

31. $\begin{cases} y_1'=y_2+\mathrm{tg}^2 x-1, \\ y_2'=-y_1+\mathrm{tg}\, x. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} y_1'=y_1-y_2+\dfrac{1}{\cos x}, \\ y_2'=2y_1-y_2. \end{cases}$ 33. $\begin{cases} y_1'=3y_1-2y_2, \\ y_2'=2y_1-y_2+15e^x\sqrt{x}. \end{cases}$

34. $\begin{cases} y_1'=2y_2-y_1, \\ y_2'=4y_2-3y_1+\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}. \end{cases}$ 35. $\begin{cases} y_1'=-4y_1-2y_2+\dfrac{2}{e^x-1}, \\ y_2'=6y_1+3y_2-\dfrac{3}{e^x-1}. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бараненков Г.С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под редакцией Б.П. Демидовича. М.: Физматгиз, 1959.
2. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Росвузиздат, 1962.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Физматгиз, 1961.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.
5. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1976.
6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1–3. М.: Физматгиз, 1959, 1960.
9. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1954.

ЗМІСТ

§1. Диференціальні рівняння, їхній порядок, загальний і частинний розв'язки та інтеграли 3

§2. Диференціальні рівняння першого порядку 7

2.1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними 8

2.2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку 13

2.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку 20

2.4. Диференціальні рівняння у повних диференціалах 28

2.5. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь, їхнє розв'язання 34

§3. Диференціальні рівняння другого порядку 42

3.1. Найпростіші типи інтегровних диференціальних рівнянь другого порядку і випадки пониження порядку 42

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами 48

3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами 50

§4. Диференціальні рівняння *n*-го порядку 63

4.1. Рівняння, які допускають пониження порядку 64

4.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами 67

4.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами 71

§5. Системи диференціальних рівнянь 84

5.1. Нормальні системи лінійних диференціальних рівнянь 84

5.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 89

5.3. Застосування матриць до розв'язування однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 97

5.4. Застосування матриць до розв'язування неоднорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 106

Література 110

Навчальне видання

БОДНАР Дмитро Ількович
БУЯК Леся Михайлівна
ВОЗНЯК Ольга Григорівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ: МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 1.12.2010. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century SchoolBook. Умовн. друк. арк. 6,51. Умовн. фарбо-відб. 6,51.

Видавництво "Навчальна книга – Богдан"
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м.Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66; (067) 350-18-70
publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1645-2

9 789661 016452