Натисніть тут, щоб

купити книгу на сайті

або

замовляйте по телефону:

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський
О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко

Алгебра
і початки аналізу

11 клас

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Богдан
ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.141я72
74.262.21
А94

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор кафедри
математичного аналізу і теорії функцій
Донецького національного університету
Р. М. Тригуб

заслужений вчитель України,
вчитель-методист СФМШ № 17 м. Донецька
В. І. Лисов

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-3199 від 30 червня 2004 р.)

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Алгебра і початки аналізу. 11 клас: Пробний підручник. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. — 384 с.

ISBN 966-692-421-8

Пропонований пробний підручник відповідає програмі з математики для 10 – 11 профільних класів природничо-математичного напряму, рекомендованій Міністерством науки і освіти України (лист Міністерства освіти і науки України № 1/11 – 2511 від 20. 06. 2003 р.). Підручник зорієнтований на профілі природничо-математичного напряму, що передбачають готовність учнів до широкого і свідомого використання знань з математики при вивченні профільних предметів, до продовження навчання і професійної діяльності. Цю орієнтацію забезпечує зміст курсу, характер викладу навчального матеріалу, добірка ілюстрацій і наведені приклади застосування, система вправ та контрольних запитань.

Це видання є продовженням підручника «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (Тернопіль: Навчальна книга – Богдан).

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.141я72

ISBN 966-692-421-8

ПЕРЕДМОВА

Пропонований пробний підручник відповідає програмі з математики для 10 – 11 профільних класів природничо-математичного напряму, рекомендованій Міністерством науки і освіти України (лист Міністерства освіти і науки України № 1/11 – 2511 від 20. 06. 2003 р.). Підручник зорієнтований на профілі природничо-математичного напряму, що передбачають готовність учнів до широкого і свідомого використання знань з математики при вивченні профільних предметів та до продовження навчання і професійної діяльності. Цю орієнтацію забезпечує зміст курсу, характер викладу навчального матеріалу, добірка ілюстрацій і наведені приклади застосування, система вправ та контрольних запитань.

Це видання є продовженням підручника «Алгебра і початки аналізу. 10 клас» (Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003). У ньому автори намагалися дотримуватися тих самих принципових положень, сформульованих у зверненні до читача в підручнику для 10 класу. У підручнику для 11 класу продовжено нумерацію розділів, вправ і рисунків, збережено його структуру, а виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач. Початок і кінець обґрунтування теорем, а також розв'язання прикладів та задач вказано значками ❑ і ■.

До кожного пункту подано контрольні запитання та вправи. Після кожного параграфа наведено додаткові вправи, як правило, трьох рівнів складності. Завдання базового рівня вказано знаком °. Найскладніші завдання позначено зірочкою *.

Підручник передбачає різні рівні оволодіння матеріалом. Матеріал, призначений для учнів, які виявляють підвищений інтерес до предмета, мають намір глибше оволодіти ним, подано петитом або позначено зірочкою *, якщо це стосується пункту в цілому.

Як і в попередньому («Алгебра і початки аналізу. 10 клас»), у цьому підручнику також запропоновано короткі історичні відомості, подані петитом.

Розділ V

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

Основне призначення сучасної математики — моделювання явищ природи, техніки, суспільства, причому поняття функції стосується найважливіших засобів моделювання. З огляду на це природною й актуальною є проблема збагачення класів функцій. У цьому розділі ознайомимося з новими функціями, що будуть введені за допомогою операції піднесення до степеня та оберненої до неї. Властивості і графіки таких функцій вивчають за допомогою методів, використовуваних у попередніх розділах.

У природничих науках і техніці трапляються процеси, зростання або «згасання» яких відбувається швидше, ніж у будь-якої степеневої функції. Такі процеси описують ***показниковими*** *функціями. Для їх вивчення необхідно використати ще одну (окрім добування кореня) операцію, обернену до піднесення до степеня. Її називають* ***логарифмуванням****. Функції, які вводять за допомогою цієї операції, також широко застосовують для опису реальних процесів.*

§ 1. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

У попередніх розділах ви вивчали степеневі функції та їхні окремі класи. Відомо, що швидкість зростання лінійної функції, тобто її похідна, є сталою, квадратичної функції — лінійною функцією, і взагалі будь-яка степенева функція змінюється швидше, ніж її похідна. У природознавстві відкриті закономірності (закони розмноження живих організмів, закони радіоактивного випромінювання, закони руху в гальмуючому середовищі тощо), для вивчення яких потрібні функції, *швидкості зростання котрих пропорційні до самих функцій*. Такими функціями є *показникові*. У цьому параграфі ми введемо показникові функції, вивчатимемо їхні властивості та графіки, розглядатимемо деякі застосування цих функцій.

1.1. СТЕПЕНІ З ДІЙСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

У розділі I ми розглядали степені a^p з раціональними показниками. Нагадаємо їхні означення.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}; \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1, \quad a^1 = a;$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0;$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Властивості степенів з раціональними показниками

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad a^p : a^q = a^{p-q}; \quad \left(a^p\right)^q = a^{pq}; \quad a > 0;$$

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Однак у математиці та при її застосуванні доцільно використовувати степені з довільними дійсними показниками. Проілюструємо це задачею, яку в XV ст. розв'язував французький математик Н. Шуке.

Резервуар має отвір, через який за кожну одиницю часу витікає $\frac{1}{10}$ *частина тієї кількості води, що містилась на початку відліку цієї одиниці часу. За який час резервуар спорожніє наполовину?*

Будемо міркувати так. Якщо початкову кількість води взяти за одиницю виміру, то через одну одиницю часу залишиться $\frac{9}{10}$ початкової кількості води, через дві — $\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^2$, через три — $\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{9}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^3$ і т. ін. Якщо вода витікає неперервно і рівномірно, то через t одиниць часу в резервуарі залишиться $\left(\frac{9}{10}\right)^t$ води. Потрібно знайти таке значення t, при якому $\left(\frac{9}{10}\right)^t=\frac{1}{2}$.

Неважко довести (спробуйте це зробити самостійно), що ні при якому натуральному і навіть раціональному t дана рівність виконуватися не може. За допомогою обчислень можна дійти висновку, що $\left(\frac{9}{10}\right)^6>\frac{1}{2}$, а $\left(\frac{9}{10}\right)^7<\frac{1}{2}$, тобто десь протягом сьомої одиниці часу після початку відліку резервуар спорожніє наполовину. З неперервності процесу витікання води випливає, що існує така мить часу, коли ця рівність справджується. Цілком природно припустити, що кількість води, яка залишається в резервуарі, має дорівнювати $\left(\frac{9}{10}\right)^t$ не тільки при натуральних t. Таким чином, вираз $\left(\frac{9}{10}\right)^t$ — математична модель витікання води з резервуару. Для раціональних значень t зміст цього виразу ми вже знаємо: $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\frac{9}{10}\right)^p}$. Він мусить мати зміст для всіх дійсних значень t. Неперервність витікання води означає, що неперервно змінюється величина $\left(\frac{9}{10}\right)^t$, тому її значення для ірраціонального t може бути як завгодно точно наближене значеннями степеня з раціональними показниками.

Розглянутий приклад підказує ідею введення степеня додатного числа a з ірраціональним показником α. Спробуємо визначити, як слід розуміти, наприклад, $10^{\sqrt{2}}$. Нехай $\{r_n\}$ — послідовність десяткових наближень числа $\sqrt{2}$ з недостачею ($r_1 = 1$; $r_2 = 1,4$; $r_3 = 1,41$; $r_4 = 1,414$; ...), а $\{s_n\}$ — послідовність десяткових наближень для $\sqrt{2}$ з надлишком ($s_1 = 2$; $s_2 = 1,5$; $s_3 = 1,42$; $s_4 = 1,415$; ...). Зрозуміло, що перша послідовність зростаюча, а друга — спадна, причому $r_n < \sqrt{2} < s_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Різниця $s_n - r_n$ менша від будь-якого додатного числа при достатньо великому значенні n.

Послідовність $\{10^{r_n}\}$ зростаюча, а послідовність $\{10^{s_n}\}$ спадна, причому $10^{r_n} < 10^{s_n}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Справді, оскільки $r_{n+1} > r_n > 0$, то $r_{n+1} = r_n + \alpha$, де α — додатне раціональне число, яке можна подати у вигляді $\alpha = \dfrac{k}{l}$, $k,\ l \in \mathbb{N}$. Таким чином, $10^{r_{n+1}} = 10^{r_n+\alpha} = 10^{r_n} \cdot 10^{\alpha} > 10^{r_n}$, бо $10^{\alpha} = 10^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{10^k} > 1$. Так само доводять інші твердження.

Обчислимо за допомогою калькулятора перші члени послідовностей $\{10^{r_n}\}$ і $\{10^{s_n}\}$. Результати обчислень подано в таблиці.

r_n	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
10^{r_n}	10	25,1189	25,7040	25,9418	25,9537	25,9543
$10^{s_n} - 10^{r_n}$	90	6,5039	0,5987	0,0598	0,0060	0,0006
10^{s_n}	100	31,6228	26,3027	26,0016	25,9597	25,9549
s_n	2	1,5	1,42	1,415	1,4142	1,41422

Аналіз таблиці підтверджує, що послідовність $\{10^{r_n}\}$ зростає, а послідовність $\{10^{s_n}\}$ спадає. Різниця $10^{s_n} - 10^{r_n}$ зменшується при збільшенні n, тобто ці послідовності наближуються одна до одної. Так, вже при $n = 6$ різниця чисел 10^{r_n} і 10^{s_n} менша від 0,001. Природно припустити, що існує число, яке більше від усіх 10^{s_n} і менше від усіх 10^{r_n}, $n \in \mathbb{N}$. Це число і позначають через $10^{\sqrt{2}}$.

Звичайно, наведене міркування не є строгим математичним доведенням, бо ми не можемо виписати і порівняти довільні члени згаданих послідовностей. Про існування числа $10^{\sqrt{2}}$ може свідчити й фізичне тлумачення виразу 10^t. Неважко підібрати задачу, де деяка фізична величина змінюється неперервно за законом 10^t. Неперервність зміни цієї величини вказує на те, що і вираз 10^t має фізичний зміст для довільного дійсного числа t.

Розглянемо ще один подібний приклад, який показує, як слід розуміти вираз $(0,3)^{\sqrt{2}}$. Як і раніше, будуємо дві послідовності $(0,3)^{r_n}$ і $(0,3)^{s_n}$, де $\{r_n\}$ і $\{s_n\}$ — послідовності десяткових наближень для $\sqrt{2}$ відповідно з недостачею і надлишком, причому для всіх n $(0,3)^{s_n} < (0,3)^{r_n}$ і різниця $(0,3)^{r_n} - (0,3)^{s_n}$ при зростанні n прямує до нуля.

Тому існує і при цьому єдине число γ, що задовольняє кожну з нерівностей $(0,3)^{r_n} < \gamma < (0,3)^{s_n}$. Це число γ і береться за $(0,3)^{\sqrt{2}}$.

Узагальнимо розглянуті приклади. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — послідовність десяткових наближень ірраціонального числа α з недостачею, а β_1, β_2, $\ldots, \beta_n, \ldots$ — послідовність десяткових наближень цього числа α з надлишком.

Якщо $a > 1$, то степінь a^α числа a з додатним ірраціональним показником α слід розуміти як число, що більше від усіх чисел $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots, a^{\alpha_n}, \ldots$ і менше від усіх чисел a^{β_1}, a^{β_2}, …, a^{β_n}, …, $n \in \mathbb{N}$.

Якщо $0 < a < 1$, то степінь a^α числа a з додатним ірраціональним показником α слід розуміти як число, що більше

від усіх чисел $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, ..., a^{\beta_n}, ...$ і менше від усіх чисел $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, ..., a^{\alpha_n}, ...,\ n \in \mathbb{N}$.

1^α за означенням дорівнює 1.

Якщо $a > 0$ і α — додатне ірраціональне число, то вважатимемо, що

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Останнє означення є коректним, оскільки для всіх додатних a і α вираз a^α відмінний від нуля, тобто $a^\alpha > 0$.

Властивості степеня з раціональним показником, наведені вище, повністю зберігаються і для степеня з ірраціональним показником.

Покажемо на прикладі, як таке перенесення виконується. Наведемо міркування на користь того, що для довільних ірраціональних чисел α і β

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

❑ Припустимо, що $a > 1$. Випадок $0 < a < 1$ досліджується аналогічно. Розглянемо послідовність десяткових наближень $\{r_n\}$ і $\{s_n\}$ з недостачею та надлишком для числа α і послідовність десяткових наближень $\{t_n\}$ та $\{u_n\}$ з недостачею і надлишком для числа β, тобто

$$r_n < \alpha < s_n,\ \ t_n < \beta < u_n.$$

Згідно з властивостями степенів з раціональними показниками, маємо: $a^{r_n} \cdot a^{t_n} = a^{r_n+t_n},\ \ a^{s_n} \cdot a^{u_n} = a^{s_n+u_n}$.

Як відомо, сумою дійсних чисел α і β називають таке дійсне число γ, яке при будь-якому цілому невід'ємному n задовольняє нерівність

$$r_n + t_n < \gamma < s_n + u_n.$$

Можна довести, що таке число існує і при тому лише одне. Обмежимось тим, що покажемо, як це означення суми дає змогу знаходити її наближене значення з будь-якою точністю.

Нехай $\alpha = 2{,}37456813\ ...$, $\beta = 3{,}15217891\ ...$. Тоді

$r_1 + t_1 = 5{,}4 < \alpha + \beta < 5{,}6 = s_1 + u_1$;
$r_2 + t_2 = 5{,}52 < \alpha + \beta < 5{,}54 = s_2 + u_2$;
$r_3 + t_3 = 5{,}526 < \alpha + \beta < 5{,}528 = s_3 + u_3$;
$r_4 + t_4 = 5{,}5266 < \alpha + \beta < 5{,}5268 = s_4 + u_4$;
$r_5 + t_5 = 5{,}52673 < \alpha + \beta < 5{,}52675 = s_5 + u_5$;

...

Отже, можна написати п'ять знаків після коми для суми

$$\alpha + \beta = 5{,}52674 \pm 0{,}00001.$$

Позначаючи через p_n і q_n десяткові наближення числа $\alpha + \beta$ відповідно з недостачею та надлишком, у розглянутому прикладі матимемо:

$p_1 = 5{,}5 \geq 5{,}4 = r_1 + t_1$;

$p_2 = 5{,}52 \geq 5{,}52 = r_2 + t_2$;

$p_3 = 5{,}526 \geq 5{,}526 = r_3 + t_3$;

$p_4 = 5{,}5267 \geq 5{,}5266 = r_4 + t_4$;

...

Аналогічно отримаємо:

$q_1 = 5{,}6 \leq 5{,}6 = s_1 + u_1$;

$q_2 = 5{,}53 \leq 5{,}54 = s_2 + u_2$;

$q_3 = 5{,}527 \leq 5{,}528 = s_3 + u_3$;

$q_4 = 5{,}5267 \leq 5{,}5268 = s_4 + u_4$;

...

Розглянутий приклад дає змогу припустити, що справджуються такі нерівності:

$$r_n + t_n \leq p_n < \alpha + \beta < q_n \leq s_n + u_n. \qquad (1)$$

Справді, неважко побачити, що наближення p_n або дорівнює сумі $r_n + t_n$, або більше від неї на 10^{-n}. Так само наближення q_n або дорівнює сумі $s_n + u_n$, або менше від неї на 10^{-n}.

З нерівностей (1) випливає:

$$a^{r_n + t_n} \leq a^{p_n} < a^{\alpha+\beta} < a^{q_n} \leq a^{s_n + u_n}. \qquad (2)$$

Із властивостей степенів з раціональними показниками і властивостей нерівностей випливає, що

$$a^{r_n} \cdot a^{t_n} < a^{\alpha} \cdot a^{\beta} < a^{s_n} \cdot a^{u_n}$$

або

$$a^{r_n + t_n} < a^{\alpha} \cdot a^{\beta} < a^{s_n + u_n}. \qquad (3)$$

Порівнюючи нерівності (2) і (3) та враховуючи єдиність степеня з ірраціональним показником, отримаємо: $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$. ■

При обґрунтуванні інших властивостей степеня з ірраціональним показником також використовують ідею наближення його за допомогою степенів з раціональними показниками.

Далі використовуватимемо властивості степенів для довільних дійсних показників. Зокрема, вони можуть бути корисними при перетворенні виразів, що містять степені.

Приклад 1

Обчислити наближено: 1) $5^{-\sqrt{3}}$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{3}}$.

❑ 1) $5^{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{5^{\sqrt{3}}}\approx\dfrac{1}{16,2}\approx 0,062;$ 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\sqrt{3}}=\left(5^{-1}\right)^{-\sqrt{3}}=5^{\sqrt{3}}\approx 16,2.$ ■

Для наближеного обчислення степеня було використано калькулятор.

Приклад 2

Спростити вираз і обчислити його значення (у разі необхідності можна скористатися калькулятором):

1) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}};$ 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\sqrt{5}}\cdot 2^{3\sqrt{5}};$ 3) $\left(5^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}.$

❑ 1) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}}=\left(\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)}\right)^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}\approx 2,67;$

2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\sqrt{5}}\cdot 2^{3\sqrt{5}}=\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\right)^{3\sqrt{5}}=1^{3\sqrt{5}}=1;$

3) $\left(5^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}=5^{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=5^{1-3}=5^{-2}=\dfrac{1}{25}.$ ■

При введенні степеня з ірраціональним показником для окремих прикладів ми будували зростаючу і спадну послідовності, що прямують до певного числа. Це число було взято як значення відповідного степеня. Такі приклади, математичний досвід та інтуїція дали змогу сформулювати загальне означення степеня.

Інший підхід до означення степеня з ірраціональним показником пов'язаний з використанням поняття границі послідовності, яке ми використовуватимемо у подальших розділах курсу.

Нагадаємо, що *нескінченні послідовності — функції, задані на множині* $\mathbb{N}$ *натуральних чисел*. Фактично з поняттям границі послідовності ми ознайомились раніше. Так, сума нескінченної спадної геометричної прогресії визначалась як число, до якого прямує сума її перших n членів.

Розглядаючи у п. 1.1 (розділ I) послідовності x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n... і $x_0', x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n' \ldots$ десяткових наближень дійсного числа x з недостачею і надлишком, ми дійшли висновку, що модулі різниць $|x - x_n|$, $|x - x_n'|$ можуть бути як завгодно малими числами при достатньо великому n. Цей приклад підказує ідею визначення границі послідовності.

Спочатку пояснимо цю ідею на прикладах. Обчислимо члени послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, де $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 100, 1000$. Результати обчислень внесемо у таблицю.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
a_n	1,0	0,50	0,333	0,25	0,20	0,167	0,143	0,125	0,111	0,10	0,01	0,001
b_n	1,5	1,67	1,75	1,80	1,83	1,86	1,88	1,89	1,90	1,91	1,99	1,999

Таким чином, при великих значеннях n члени послідовності $\{a_n\}$ близькі до 0, а члени $\{b_n\}$ — до 2. Кожній з наближених рівностей $a_n \approx 0$, $b_n \approx 2$ можна забезпечити довільну наперед задану точність, якщо значення n взяти достатньо великими. Переконаємося у цьому. Так, щоб наближена рівність $b_n \approx 2$ виконувалася з точністю до 0,01, тобто щоб $|b_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < 0,01$, достатньо взяти $n > 99$. Аналогічні міркування правильні також для послідовності $\{a_n\}$.

Число a називають границею послідовності $\{a_n\}$ при $n \to \infty$, якщо наближеній рівності $a_n \approx a$ можна забезпечити довільну наперед задану точність для всіх достатньо великих значень n.

Символічно це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Для розглянутих прикладів маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Послідовності, що мають границю при $n \to \infty$, називають ***збіжними***.

Здійснюючи міркування, аналогічні тим, які були виконані для послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, та беручи до уваги, наведені у п. 1.1 (розділ I), переконаємось, що якщо $\{r_n\}$ і $\{s_n\}$ — послідовності десяткових наближень числа x з недостачею і надлишком, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$, тобто наближеним рівностям $x \approx r_n$, $x \approx s_n$ можна забезпечити довільну наперед задану точність.