О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський
О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко

Алгебра
і початки аналізу

10 клас

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.141я72
74.262.21
А94

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри
математичного аналізу і теорії функцій
Донецького національного університету
Р.М. Тригуб;

заслужений вчитель України,
вчитель-методист СФМШ № 17 м. Донецька
В.І. Лисов

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11–3553 від 11 серпня 2003 р.)

Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К.
А94 Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. — 480 с.

ISBN 978-966-10-0504-3

Пропонований підручник відповідає програмі з математики для 10-го профільного класу, рекомендованій Міністерством освіти і науки України, і орієнтований на профілі природничо-математичного напрямку, які передбачають готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики у профільних предметах, до продовження навчання й оволодіння професійною діяльністю. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

Для учнів класів різних профілів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

ББК 22.141я72

Навчальне видання

АФАНАСЬЄВА Ольга Миколаївна, БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович,
ПАВЛОВ Олександр Леонідович, СЛІПЕНКО Анатолій Костянтинович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

10 КЛАС

Підписано до друку 09.07.2008. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Таймс. Умовн. друк. арк. 27,90. Умовн. фарбо-відб. 27,90.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

«Навчальна книга – Богдан», а/с 529, м. Тернопіль 46008, тел./факс (0352) 52-06-07, 52-19-66, 52-05-48,
publishing@budny.te.ua, www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-0504-3

Звернення до читача

Оскільки читацьку аудиторію даної книги, в основному, складають вчителі математики та учні старших класів, то автори хотіли б звернутися до них із невеличким вступним словом.

Дорогі колеги!

Вашій увазі пропонується підручник з алгебри і початків аналізу, який повністю відповідає чинній програмі для 10–11-х профільних класів. Він складається з двох книг, призначених, відповідно, для 10-го і 11-го класів. Даний підручник орієнтовано, в першу чергу, на профілі природничо-математичного напрямку. Цю орієнтацію забезпечують рівень викладу навчального матеріалу, характер ілюстрацій та приклади застосувань, система вправ і контрольних запитань.

При написанні книги автори дотримувалися певної ідеології, для якої характерним є:

— широке впровадження ідеї математичного моделювання і формування навичок застосування алгебри та елементів математичного аналізу для описання явищ навколишньої дійсності, розв'язання реальних задач;

— підвищена увага до основного поняття сучасної математики — поняття функції, висвітлення її ролі при описанні явищ природи, техніки, економіки, а також феноменів, які вивчаються природничими науками;

— усвідомлення того, що стохастичні закономірності — один із основних засобів пізнання та дослідження навколишнього світу;

— підтримка традиційних для курсу алгебри напрямків (рівняння, нерівності та їх системи, тотожні перетворення, обчисленння), підкреслення їх ролі як при вивченні математики, так і в її застосуваннях;

— усвідомлення того, що основні ідеї математичного аналізу видаються досить простими і наочними, якщо викладати їх на тому інтуїтивному рівні, на якому вони виникли історично і який цілком задовольняє потреби профільної підготовки учнів;

— свідоме уникнення у викладі матеріалу і в основній системі вправ громіздких перетворень тригонометричних, показникових і логарифмічних виразів, спеціальних методів розв'язання рівнянь, нерівностей, систем рівнянь і нерівностей, пов'язаних з цими виразами.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач. Початок і кінець доведень теорем, а також розв'язань прикладів позначено значками ❑ і ■.

До кожного пункту подано контрольні запитання і задачі. Автори свідомо не включали запитання, що вимагають репродуктивних відповідей, вважаючи, що контрольні запитання мають забезпечити активне засвоєння основних понять, відношень і фактів у їхньому взаємозв'язку. Задачі до кожного пункту повинні допомогти засвоєнню матеріалу на різних рівнях. Після кожного параграфа наведено додаткові задачі. Їхнє призначення — забезпечити повноцінну рівневу і профільну диференціацію вивчення алгебри і початків аналізу. Завдання базового рівня відмічено знаком °. Найбільш складні завдання позначено зірочкою *.

Дорогий юний друже!

Навчання у старших класах пов'язане з вибором професії, сфери майбутньої діяльності. Математика супроводжувала тебе протягом усіх років навчання в школі. Ти познайомився з числами, діями над ними, і багато разів мав нагоду скористатися обчисленнями при розв'язанні побутових задач і проблем. Знайомство з елементами алгебри дало тобі не тільки можливість без зайвого клопоту розв'язувати досить складні текстові задачі, звівши їх до лінійних або квадратних рівнянь, але й допомогло записати важливі фізичні та хімічні закони у вигляді формул — зрозумілих і зручних у користуванні. Інакше кажучи, послуговуючись засобами алгебри, ти навчався будувати математичні моделі задач, законів, явищ.

Але навколишній світ є надто складним і різноманітним, щоб усі процеси, які відбуваються в ньому, можна було змоделювати за допомогою досить скромного математичного апарату, розглянутого в курсі алгебри основної школи. Тому головною метою алгебраїчної підготовки в старшій школі є суттєве розширення і поглиблення набутих математичних знань. Зокрема, значно збільшиться перелік функцій, за допомогою яких моделюються процеси, що відбуваються у природі та суспільстві. Втім, змінилася навіть сама назва навчального предмета. Тепер ти вивчатимеш не алгебру, а алгебру і початки аналізу. Ти матимеш змогу познайомитись із наймогутнішим засобом дослідження функцій (а отже, і явищ та процесів, змодельованих ними) — математичним аналізом. У цьому курсі наповниться новим змістом загалом знайоме тобі слово «ймовірність», і елементи теорії ймовірностей та статистики стануть засобом дослідження явищ природи, економіки, суспільних процесів.

Читання цієї книги не є легкою прогулянкою. Деякі фрагменти математичних доведень тобі доведеться опрацювати самостійно. Не лінуйся, адже старанність і наполегливість допоможуть тобі отримати зброю, з якою не страшно пірнути у життєвий вир і сміливо прямувати до своєї мети.

Бажаємо тобі успіхів в оволодінні алгебраїчними, функціональними, ймовірнісно-статистичними методами пізнання навколишнього світу та в підготовці до майбутньої практичної діяльності!

Вступ

Розвиток суспільства і математики

Однією з характерних особливостей нашого часу є широке застосування математики у різних галузях діяльності людини. Без математики не обійтися при проектуванні та будівництві споруд, виробництві приладів та їх деталей, важливу роль відіграє ця наука у плануванні економічної діяльності, керуванні технологічними процесами, роботою підприємств тощо.

Суттєве прискорення процесу математизації науки, техніки, господарської діяльності розпочалося в середині XX століття. Воно пов'язане зі створенням електронно-обчислювальних машин, автоматизацією процесів виробництва, новітніми технологіями, істотними змінами у характері праці людини.

Математика стала універсальним засобом моделювання та дослідження навколишнього світу, надійним знаряддям розв’язування практичних задач. Тому вивчення математики, її застосувань є невід’ємним складником формування світогляду людини та підготовки сучасного фахівця — кваліфікованого робітника, техніка, інженера, економіста тощо.

Практика — основне джерело розвитку математики

Очевидно, математика виникла на ранній стадії розвитку людства під впливом потреб практики. Розвиток ремесел, землеробства, торгівлі й обміну, навігації, управління державою потребував удосконалення вимірювань і розрахунків.

Неможливо точно відповісти на питання, коли саме було сформовано перші математичні поняття. Однак є переконливі писемні свідчення (папіруси, глиняні таблички), які підтверджують високий рівень математичних знань у могутніх цивілізаціях Стародавнього Сходу — Єгипті та Вавилоні (II тис. до н.е.). Тогочасна математика мала яскраво виражений конкретний характер. Її досягнення дійшли до нас у вигляді господарських задач, у яких зазвичай ідеться про вимірювання площ і об'ємів, про підрахунки врожаю і величини податку, про обчислення, пов'язані зі сплатою боргів та ін.

Приблизно у VII ст. до н.е. провідну роль у давньому світі почала відігравати грецька цивілізація. Розквіт науки і мистецтва у Стародавній Греції супроводжувався плідними теоретичними дослідженнями. Намагання стародавніх греків зрозуміти будову Всесвіту, визначити роль і місце людини у природі й суспільстві привели до утвердження нових форм раціонального мислення. У математиці ця форма мислення виражалась у прагненні довести всі твердження, виходячи з невеликої кількості початкових. До тих часів математика мала «рецептурний» характер. Тож обґрунтування узвичаєних практичних «рецептів» і стало одним з основних завдань грецьких математиків. Уже в III ст. до н. е. Евклід створив свою книгу «Начала», у якій в дедуктивній формі виклав основи тогочасної математики. Упродовж двох тисячоліть Евклідові «Начала» вважалися взірцем строгості математичних міркувань й істотно впливали на розвиток суспільства. Втім, аксіоматичний метод, за допомогою якого Евклід виклав основи геометрії, і досі залишається загальновизнаним.

У Стародавній Греції були зроблені відкриття, які на багато століть визначили напрямки розвитку математики. Поряд із досягненнями теоретичного характеру, тогочасні вчені мали багато суто практичних здобутків. Найвидатнішим представником прикладної науки історики вважають Архімеда. Він був не тільки математиком, а й талановитим інженером. Його праці з обчислення площ і об'ємів стали підґрунтям для сучасних методів математики.

Останній період розвитку античного суспільства пов'язаний із впливом Римської імперії, де, на відміну від Греції, математикою цікавились мало. Після прийняття християнства у V ст. н.е. римський імператор Юстиніан навіть заборонив заняття математикою під загрозою смерті.

Після занепаду Римської імперії центр математичних досліджень перемістився на Схід. Найбільш значними досягненнями середньовічної математики є запровадження в Індії сучасної десяткової позиційної системи запису чисел, введення понять від'ємних чисел і нуля, створення арабськими математиками (аль Караджі, аль Біруні, аль Хайамі та ін.) основ алгебри, яка згодом виділилась у самостійний розділ математики. Математичні дослідження на Сході мали арифметико-алгебраїчний характер і були більш прикладними, ніж за доби античності (зокрема, арабські математики істотно розвинули тригонометрію з огляду на необхідність астрономічних досліджень та потреб навігації).

У той час, як Схід продовжував розвиватись, Західна Європа поступово занепадала. Феодальні чвари, низький рівень культури і виробництва ажніяк не сприяли розвитку науки. Вивчення математики в культурних центрах того часу — монастирях — обмежувалось студіюванням арифметики.

На початку XII ст. економічне життя Заходу активізується, встановлюються торговельні зв'язки зі Сходом. Через арабів Європа знайомиться з працями грецьких учених, в європейських країнах пожвавлюється інтерес до математики.

Кінець середньовіччя (XV–XVI ст.) у Західній Європі характеризується бурхливими змінами, пов'язаними з розпадом феодального суспільства і формуванням ринкових відносин. Розвиток промисловості, торгівлі, мореплавства, друкарської справи привів до розквіту культури, мистецтва і науки. Математика стає важливим засобом наукового Відродження. В процесі активних занять арифметикою вчені створили сучасну алгебраїчну символіку. Важливий внесок у цю справу зробив Франсуа Вієт. Одночасно з розвитком символіки поглиблюється поняття про число. Практична необхідність здійснення громіздких розрахунків призвела до створення десяткових дробів і логарифмів.

Уже в епоху Відродження почалося використання різних машин і механізмів на мануфактурах, у будівництві, гірничій справі тощо. Відтак з'явилися передумови для розвитку теоретичної механіки та вивчення механічного руху. Вчені мусили подбати про створення відповідного категоріального апарату. На початку XVII ст. Р.Декарт ввів у науковий обіг поняття змінної величини. Відтоді основним об'єктом математики стало поняття функції. Зусиллями Ньютона, Лейбніца, їхніх учнів і послідовників для вивчення функціональної залежності було розроблено новий математичний апарат. Його застосування у процесі розв'язування задач механіки, астрономії та інших наук надовго визначило подальші шляхи розвитку математики.

Розвиток ринкових відносин у XVIII і XIX століттях супроводжувався перебудовою виробництва з застосуванням парових машин, інших технічних засобів. Розвиток математики у той час був тісно пов'язаний з технічною революцією, вимогами практики. Створення геометричних теорій, розвиток поняття про число, вивчення функцій стимулювалися необхідністю вирішення науково-технічних проблем в царині кораблебудівництва і мореплавства, балістики, гідротехніки, геодезії, картографії, астрономії.

З часом безпосередній вплив практики на розвиток математики дещо зменшився. Однак становлення різних природничих і технічних наук, передусім — фізики, було тісно пов'язане з удосконаленням математичних методів, розширенням сфери їхнього застосування.

Важливим джерелом розвитку математики є її внутрішні потреби, спрямовані на систематизацію теорій, їх узагальнення, вдосконалення наукових методів і т.п. На різних етапах розвитку математики це джерело відігравало більшу чи меншу роль у порівнянні з безпосередніми запитами практики.

Розвиток математики в XIX ст. визначався як її внутрішніми потребами, так і потребами практики. Яскраві результати були одержані і на тому, і на іншому шляху. Нерідко абстрактні математичні теорії з часом ставали прикладними. Так, наприклад, неевклідова геометрія, творцями якої були німець К. Ф. Гаусс, угорець Я. Больяї та росіянин М. І. Лобачевський, постала на ґрунті намагань удосконалити «Начала» Евкліда. На початку XX ст. це відкриття стало невід'ємною частиною сучасних фізичних теорій.

В XIX ст. з'явились нові умови для розвитку математики: демократизація вищої освіти, створення умов для праці математиків-професіоналів, збільшення числа дослідників, створення потужних математичних шкіл в університетах, випуск великої кількості наукових журналів і т.д. Ці зміни значною мірою стимулювалися промисловою і технічною революціями.

Ще більшу роль у вивченні навколишнього світу та в суспільстві загалом відіграє математика XX ст. Її можливості істотно зросли внаслідок створення електронно-обчислювальних машин. Сучасний етап розвитку суспільства характеризується значним розширенням сфер застосування математики. Це, зокрема, ілюструє створення таких наукових дисциплін, як математична економіка, математична лінгвістика і т.п. Потреби практичної діяльності стимулювали створення нових математичних теорій: теорії інформації, лінійного програмування, оптимального керування, дослідження операцій, випадкових процесів і ін.

Чим же пояснюється розмаїття застосувань математики й універсальність її методів? По-перше, математика послуговується досить загальними і чіткими об'єктами для описання навколишніх явищ (геометричні фігури, числа, рівняння, вектори тощо).

А, по-друге, вченими розроблено низку потужних методів дослідження математичних об'єктів: метод координат, алгебраїчні методи, методи математичного аналізу і ін.

Таким чином, математика є зручною і ефективною мовою для описання і дослідження закономірностей реальності.

Математичне моделювання

Застосування математики для описання і дослідження процесів і явищ дійсності ставить нас перед необхідністю знайти відповідь на питання: «А в чому полягає сутність розв’язання прикладної задачі за допомогою математики?». Власне, це ми зараз і розглянемо.

Усім вам доводилось застосовувати математичні знання для розрахунку швидкості заповнення басейну, часу виконання роботи та ін. Ці застосування передбачають заміну реальних об’єктів і відношень між ними математичними об’єктами (функціями, рівняннями, геометричними фігурами) і відношеннями між ними.

Для цього необхідно передусім виділити суттєві характеристики реальних об’єктів і відношень між ними, а тоді — саме їх замінити математичними об’єктами і зв’язками. Процес такого заміщення називають математичним моделюванням.

Математичними моделями звичайно називають наближені описання якогось класу явищ зовнішнього світу, виражені за допомогою математичних понять і відношень між ними. Математичною моделлю вільного падіння тіла на землю є функція

$$h = h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t,$$

де h — висота, м; v_0 — початкова швидкість, м/с; g — прискорення вільного падіння, м/с^2; h_0 — початкова висота тіла, м; t — час, с. Ця функція описує залежність відстані тіла від землі в момент часу t за умови, що тіло знаходиться на висоті h_0 в момент часу $t = 0$. А якщо нас цікавить питання: «Коли тіло впаде на землю?», то його математичною моделлю є задача: знайти значення t, при якому

$$h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 0.$$

Застосування математики при розв’язанні практичних задач зводиться до їх перекладу мовою математики, розв’язання одержаної математичної задачі, тлумачення розв’язку.

Розглянемо задачу, яка демонструє застосування методу математичного моделювання на практиці. Побудова математичних моделей ґрунтується на нехтуванні неістотними властивостями об’єктів чи понять, які моделюються. Наприклад, у багатьох випадках вільне падіння тіла можна вивчати за припущеннями:

1) земля — інерційна система;
2) прискорення вільного падіння є сталою величиною;

3) земля є плоскою;

4) опір повітря можна не враховувати;

5) структуру і розміри тіла можна не враховувати.

Ці припущення, як нам підказує досвід, є природними і слушними за певних умов (тіло має невеликі розміри, воно симетричне, початкова швидкість невелика і т.п.).

Створення математичних моделей базується на використанні законів, що характеризують процес. Це можуть бути закони фізики, хімії, біології чи інших наук. У розглянутому прикладі необхідно скористатися другим законом Ньютона, який описує рух тіла під дією сили.

Математична задача, до якої звелося визначення часу падіння тіла з висоти h_0 , має, як ми бачили, вигляд квадратного рівняння:

$$h_0 - \frac{gt^2}{2} - v_0 t = 0.$$

Оскільки дискримінант цього рівняння $D = v_0^2 + 2gh_0$ додатний, то рівняння має два корені:

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Щоправда, математичні задачі, що виникають при моделюванні, не завжди такі прості, як наведена вище. Наприклад, якщо враховувати силу опору повітря при падінні тіла, то залежність висоти від часу і рівняння для знаходження часу падіння будуть значно складнішими. Необхідно мати певні математичні знання і навички, щоб досліджувати математичні моделі. Використання математики для вивчення економічних, соціальних процесів, інші нетрадиційні сфери її застосувань вимагають розробки нових ідей і методів. У цьому проявляється вплив практики на розвиток математики у наш час.

Розв'язання одержаної при моделюванні математичної задачі не завершує розв'язування даної прикладної задачі, для якої було побудовано математичну модель. Одержані результати використовуються для прийняття якихось рішень чи прогнозування перебігу процесу, що вивчається. А отже, потрібна впевненість у тому, що одержаними результатами можна скористатись для цих цілей. Інакше кажучи, необхідно переконатися у відповідності побудованої моделі явищу, яке вивчається (в тій мірі, якої вимагає дана задача).

Розглянемо, наприклад, падіння каменя, кинутого у колодязь, рух парашутиста у вільному падінні, спуск кабіни космічного корабля в атмосфері. Зрозуміло, що точність розрахунків і складність моделей, які використовуються у даних прикладах, різні. Однак, і глибину колодязя, і швидкість приземлення космічного апарата належить розрахувати максимально вірогідно.

Дослідження адекватності математичної моделі явищу, яке вивчається, з’ясування того, наскільки близькі до реальних результати, одержані за допомогою математичної моделі, є найбільш складним і відповідальним етапом математичного моделювання. На цьому етапі існуюча модель може зазнати змін, які роблять її більш реальною, досконалою, хоча, як правило, і більш складною. Наприклад, врахувавши у розглянутій задачі те, що земля має форму кулі і обертається навколо власної осі, а тверде тіло вільно падає на землю з великої висоти, можна зробити усі розрахунки значно точніше, ніж за допомогою розглянутої раніше формули. Необхідність уточнення математичних моделей визначається вимогами практики.

Підбиваючи підсумки, можна сказати, що процес математичного моделювання загалом складається з трьох етапів:

1) вибір чи побудова математичної моделі для описання даної задачі;

2) дослідження побудованої моделі, тобто розв’язування математичної задачі;

3) тлумачення результатів дослідження, встановлення відповідності одержаного результату цілям досліджень.

При необхідності уточнюється сама математична модель і результати, які з неї випливають.

Роль математики у підготовці фахівців

Підготовка кваліфікованих фахівців неможлива без ґрунтовних математичних знань. Вивчення багатьох спеціальних предметів неможливе без володіння певним математичним апаратом.

Основою застосування математики, як уже зазначалося, є процес математичного моделювання. До цієї діяльності ви готувались, вивчаючи курс математики в основній школі. Там створювався запас математичних моделей, формувалися навички їх побудови та дослідження.

У даному курсі передбачається систематизація, поглиблення і розширення знань, одержаних в основній школі, а також вдосконалення навичок моделювання. Для моделювання реальних об’єктів і відношень, з якими ви матимете справу при вивченні інших дисциплін та в майбутній професійній діяльності, необхідно суттєво розширити засоби побудови і дослідження математичних моделей. Ця книга допоможе вам у досягненні поставленої мети.

Перевір свою готовність до вивчення алгебри і початків аналізу

Тест для діагностики рівня стандарту алгебраїчної підготовки учнів основної школи

1. Обчисліть $2{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{4}$.

А. 460. **Б.** 6900. **В.** 690. **Г.** 69.

2. Обчисліть $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

А. $-\frac{27}{8}$. **Б.** $-\frac{8}{27}$. **В.** $\frac{8}{27}$. **Г.** $\frac{27}{8}$.

3. Порівняйте числа $a = -2{,}423$ і $b = -2{,}243$.

А. $a = b$. **Б.** $a < b$. **В.** $a > b$.
Г. Порівняти неможливо.

4. Обчисліть значення виразу $\frac{a^2-1}{2}$ при $a = -\sqrt{2}$.

А. $-\frac{1}{2}$. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** $\frac{3}{2}$. **Г.** $-\frac{3}{2}$.

5. Обчисліть значення виразу $\frac{x^3}{8}$ при $x = 2\sqrt{2}$.

А. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **Б.** $\sqrt{2}$. **В.** $4\sqrt{2}$. **Г.** $2\sqrt{2}$.

6. Обчисліть значення виразу $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ при $x = -11$.

А. $\pm\frac{1}{5}$. **Б.** $\frac{1}{25}$. **В.** $\pm\frac{1}{25}$. **Г.** $\frac{1}{5}$.

7. Порівняйте числа: $a = 5\sqrt{2}$ і $b = \sqrt{45}$.

А. $a > b$. **Б.** $a < b$. **В.** $a = b$.
Г. Порівняти неможливо.