Тадеєв В.О.

Шкільний тлумачний словник-довідник з математики

Рекомендовано Міністерством освіти України

Тернопіль
"Навчальна книга — Богдан"

ББК 74.262
Т12

Рецензенти:

Ядренко М. Й. — член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор Національного університету ім. Т. Шевченка;

Хома Г. П. — доктор фізико-математичних наук, професор Тернопільської академії народного господарства;

Кравчук В. Р. — кандидат фізико-математичних наук, доцент Тернопільського державного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

Редактор:

Будний Б.Є.

Т12 ***Тадеєв В.О.*** **Шкільний тлумачний словник-довідник з математики**. — Тернопіль: "Навчальна книга — Богдан", 1999. — 160с.

ISBN 966-7437-51-5

У посібнику подані означення основних понять, сформульовані найважливіші факти (аксіоми, теореми, ознаки, формули тощо) шкільної математики, а також наведені історичні довідки стосовно зародження та становлення математичних ідей, символіки і термінології.

Для учнів та учителів загальноосвітніх шкіл, студентів і викладачів педагогічних навчальних закладів, усіх, хто цікавиться змістом та історією математики.

ISBN 966-7437-51-5 ББК 74.262

Надруковано в Україні

А

Аксіома — *твердження, істинність якого приймається без доведення і яке виступає вихідним при побудові математичної теорії*. У геометрії за допомогою аксіом формулюють основні властивості найпростіших геометричних фігур — точок, прямих і площин. Аксіоми, таким чином, виступають у ролі неявних означень цих фігур.

Вперше термін “аксіома” зустрічається в Арістотеля, отже, в математику він перейшов від давньогрецьких філософів. В дослівному перекладі з грецької це слово означає “повага”, “авторитет”, “достоїнство”, а в науці початково мало значення “самоочевидної незаперечної істини”. Проте після досліджень Лобачевського, пов’язаних з аксіомою паралельних (див. статтю “Паралельні прямі”), терміну “аксіома” надають ширшого значення — як одного з вихідних положень теорії, яке приймається без доведення, але яке може й не бути очевидним чи незаперечним.

Система усіх аксіом теорії називається її аксіоматичною базою, або ***аксіоматикою****. Обов’язковою вимогою до аксіоматики є її* ***несуперечливість****, тобто неможливість встановлення взаємно суперечливих тверджень*.

Алгебра — одна з головних математичних дисциплін (поряд з геометрією і математичним аналізом). Її назва пов’язана з основною проблематикою, якою опікувалась алгебра з часу свого зародження в епоху античності і аж до XIX століття — з розв’язуванням рівнянь. В IX столітті видатний арабський учений Мухаммед аль-Хорезмі зібрав і систематизував способи розв’язування рівнянь 1-го і 2-го степенів, назвавши свій твір “Кітаб аль-джебр аль-мукабала”, що дослівно означало “Книга про відновлення і протиставлення”. В той час від’ємні числа вважались несправжніми і їх застосування всіляко обминали. Тому, наприклад, коли в одній з частин рівняння з’являлось від’ємне число, його неодмінно потрібно було перенести в другу частину. Ця операція і називалась відновленням (аль-джебр), тобто переведенням несправжнього числа у справжнє. Вона і дала назву цілій науці. (Слово “аль-мукабала” — “протиставлення”, у назві твору аль-Хорезмі означало знищення однакових членів в обох частинах рівняння.)

У XII ст. твір аль-Хорезмі переклали латинською мовою, зберігши в його назві лише слово “аль-джебр”, яке значно пізніше в слов’янській транскрипції стали вимовляти як “алгебра”.

Поширення “Алгебри” аль-Хорезмі в середньовічній Європі сприяло зародженню значного інтересу до алгебраїчної проблематики. Цей інтерес позначився вже на одному з перших європейських наукових творів нової доби — “*Leber abaci*” (“Книзі обчислення”) італійського математика Леонардо Пізанського (біля 1170 — після 1228). Щоправда, наукові здобутки Леонардо Пізанського набули поширення пізніше — коли їх систематизував і опублікував в своїй книзі “Сума знань з арифметики, геометрії, відношень і пропорційності” ченець францисканського ордену Лука Пачолі (біля 1445 — біля 1515). Цій книзі, написаній у 1477 р., а виданій у Венеції в 1494 р., судилося стати однією з перших друкованих книг з математики. Вона набула широкого поширення в Європі, а згодом стала загальновизнаною “точкою відліку” для всіх учених, хто ставив собі за мету докласти зусиль для подальшого розвитку науки, зокрема і алгебри.

Пачолі в алгебраїчній частині “Суми”, як і аль-Хорезмі в “Кітаб” доводить читача до розв’язування лінійних і квадратних рівнянь — тобто до матеріалу, яким і зараз завершується початковий курс алгебри. Що ж до рівнянь вищих степенів, які і нині в шкільних підручниках зустрічаються лише епізодично і практично без будь-яких загальних методів для їх розв’язування, то про них Пачолі, беручи для прикладу кубічні рівняння, говорить буквально, що для них “мистецтвом алгебри ще не знайдений спосіб розв’язування”.

Пошуки таких способів привели до необхідності розширення поняття числа — спочатку за рахунок повного визнання від’ємних чисел, а потім — за рахунок введення так званих комплексних чисел, а також строгої аксіоматичної побудови різних числових систем. В результаті *змістом алгебри стала вважатись не тільки теорія розв’язування рівнянь і їх систем, але і способи проведення різноманітних формальних операцій з символами чисел і функцій у відповідності з основними законами цих операцій. Саме такий зміст має термін “алгебра” в сучасному його значенні. При цьому суттєвою ознакою алгебри, яка вирізняє її від аналізу, є те, що в алгебрі не застосовується операція граничного переходу*.

У свій час Франсуа Вієт (1540 — 1603) замість, як він казав, “варварського” (тобто не європейського) терміну “алгебра” пропонував вживати давньогрецьке слово “аналіз”, а Ісаак Ньютон (1643 — 1727) — термін “загальна арифметика”. Терміни ці, однак, не прижились. Можливо, не останню роль у цьому відіграло те, що слово “алгебра” співзвучне з широко вживаним тепер терміном “алгоритм”, який походить від латинізованої форми Алгоритмус імені все того ж аль-Хорезмі, який, як зазначено, заклав основи алгебри. Причому співзвучність тут не тільки фонетична, але й змістовна. Адже алгебраїчні вирази і формули є по суті записами відповідних алгоритмів.

Алгоритм — *правило для розв’язування задач певного класу, що зводиться до чіткої вказівки скінченної послідовності деяких елементарних операцій —* ***кроків*** *алгоритму. Виконання алгоритму приводить від заданих вихідних даних, що можуть змінюватись в певних межах, до шуканого результату*.

Прикладами алгоритмів у математиці, зокрема, є відомі правила додавання і множення чисел “у стовпчик” та ділення “кутом”, обчислення похідної складеної функції, обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца, знаходження коренів квадратного рівняння за формулою $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ тощо. Зрештою, певний алгоритм визначається кожною математичною формулою, якою у явному вигляді виражається шукана величина через деякі параметри.

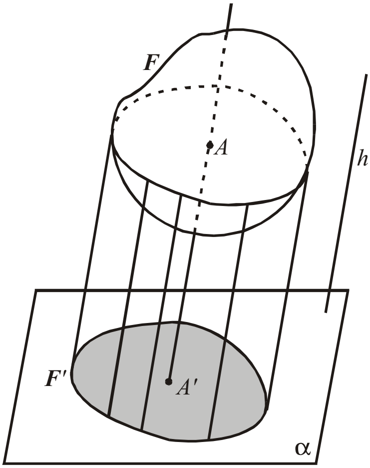

Рис. 112

1. Прямі (відрізки), не паралельні напрямку проектування, зображаються на площині рисунка прямими (відрізками).

2. Паралельні відрізки зображаються паралельними відрізками або відрізками, що лежать на одній і тій же прямій.

3. Зберігається відношення відрізків паралельних прямих або відрізків однієї і тієї ж прямої.

4. Коло, що лежить в площині, не паралельній напрямку проектування, проектується в еліпс — фігуру, яку можна дістати з кола рівномірним стиском до одного з його діаметрів. Форму еліпса нагадують відомі з креслення овали.

Якщо плоска фігура F' з площею S' є ортогональною проекцією плоскої фігури F з площею S, то $S' = S \cos \varphi$, де кут φ — кут між площинами фігур F і F' (**формула для площі ортогональної проекції плоскої фігури**).

Первісна функція *для даної функції $f(x)$ на заданому проміжку — така функція $F(x)$, визначена на цьому проміжку, похідна якої дорівнює $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.*

Знаходження первісної функції $F(x)$ за даною її похідною $f(x)$ називається **інтегруванням** функції $f(x)$. Операція інтегрування не однозначна: якщо для заданої функції $f(x)$ існує хоч би одна первісна $F(x)$, то їх існує і нескінченно багато; всі первісні мають вигляд $F(x) + C$, де C — довільне дійсне число. Сукупність $F(x) + C$ усіх первісних для функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції f і позначається $\int f(x)dx$.

Справедливе твердження: Для будь-якої неперервної функції існує первісна.

Термін “первісна функція” — модернізований варіант більш раннього терміну “примітивна функція”, який інколи ще й досі зустрічається у деяких навчальних посібниках для вищої школи. Термін “примітивна функція” ввів у 1797 р. французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736 — 1813), маючи на увазі дослівне значення латинського слова *primitivus* — як “початковий”. Первісну $F(x)$ справді можна вважати початковою для $f(x)$ у тому розумінні, що $f(x)$ утворюється з $F(x)$ диференціюванням.

Перетворення *фігури F у фігуру F' — взаємно однозначна відповідність між точками цих фігур, тобто така відповідність, при якій для довільної точки A фігури F існує і єдина відповідна їй точка A' фігури F', а для довільної точки B' фігури F' існує і єдина точка B фігури F, для якої ця точка B' є відповідною.* Зокрема, перетворенням фі-

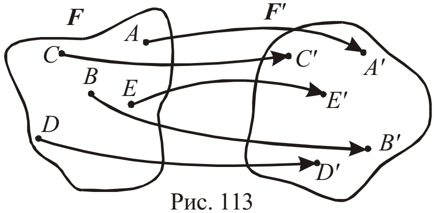

Рис. 113

гури F, яка складається із скінченної кількості точок, може бути лише така фігура F', яка складається з такої самої кількості точок. Відповідність між точками таких фігур можна вказати за допомогою стрілок (рис. 113).

Як приклади перетворень фігур з нескінченною кількістю точок на рис. 114 показано перетворення півкола у його діаметр, відрізка у відрізок та півкола (без його кінцевих точок) у пряму. A і A' — відповідні точки у цих перетвореннях.

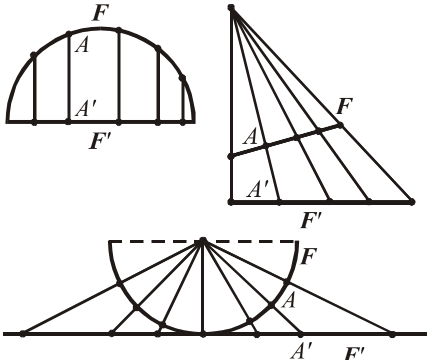

Рис. 114

Найважливішими перетвореннями, які вивчаються у шкільному курсі геометрії, є ***переміщення (рухи)*** *і* ***перетворення подібності****. Власне, геометрію можна охарактеризувати як науку про властивості геометричних фігур, що зберігаються при переміщеннях і перетвореннях подібності.*

Перетворення подібності — *перетворення фігури F у фігуру F', при якому відстані між точками змінюються в одну й ту ж саму кількість разів. Це означає, що коли довільні точки X, Y фігури F переходять у точки X', Y' фігури F', то $X'Y' = k \cdot XY$, де число $k > 0$ — одне і те ж для будь-якої пари точок X, Y і відповідної їм пари точок X', Y'* (рис. 115). *Число k називається* ***коефіцієнтом подібності****.* Якщо $k = 1$, то перетворення подібності, очевидно, є рухом.

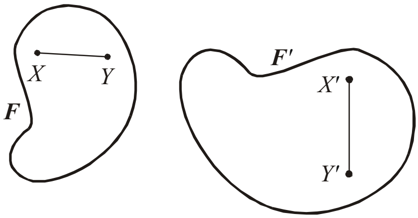

Рис. 115

Перетворення подібності переводить прямі у прямі (причому, паралельні прямі — у паралельні прямі), півпрямі у півпрямі, відрізки у відрізки, зберігає величини кутів.

Перетворення подібності широко застосовується на практиці при виконанні креслень і технічних рисунків, побудові планів місцевості, географічних карт тощо. Такі зображення дістають шляхом перетворень подібності, застосованих до теоретично отриманих (наприклад, шляхом ортогонального проектування на кілька площин проекцій) зображень у натуральну величину. Коефіцієнт подібності при цьому прийнято називати **масштабом** (від німецького *Maβstab* — жердина для вимірювання, мірка).

Периметр (від грецьких слів "пері" — "навколо" і "метрео" — "вимірюю") — *сума довжин усіх сторін многокутника або ланок ламаної.*

Перпендикуляр *до даної прямої, проведений (опущений) з даної точки, — відрізок прямої, перпендикулярної до заданої прямої, який одним із своїх кінців має дану точку, а другим — точку перетину вказаних прямих (****основу*** *перпендикуляра).* На рис. 116 зображено перпендикуляр AB, проведений з точки A до прямої a; точка B — основа цього перпендикуляра, прямі a і AB — взаємно перпендикулярні.

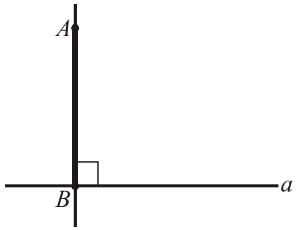

Рис. 116

Інколи **перпендикуляром** до прямої називають не тільки відповідний відрізок, але й пряму, яка містить цей відрізок (див., наприклад, термін "серединний перпендикуляр"). У відповідності з цим, пряма AB на рис. 116 є перпендикуляром до прямої a, проведеним через точку A. Для заданої точки A і прямої a такий перпендикуляр єдиний.

Перпендикуляр і похила до площини. *Відрізок AA_1, що сполучає дану точку A з точкою A_1 площини α, який лежить на прямій AA_1, перпендикулярній до α, називається* ***перпендикуляром до площини*** α*, опущеним з даної точки A* (рис. 117). *При цьому точка A_1 називається* ***основою перпендикуляра*** *AA_1, а довжина відрізка AA_1 —* ***відстанню*** *від точки A до площини α.*

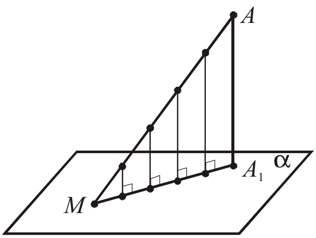

Рис. 117

Відрізок AM, який сполучає дану точку A з точкою M площини α, який не є перпендикуляром до α, називається ***похилою****, проведеною з точки A до площини* α (рис. 117). *Точка M називається* ***основою похилої****. Відрізок A_1M, який сполучає основи A_1 перпендикуляра і M похилої, проведених з однієї точки A до площини α, називається* ***проекцією похилої*** *AM на площину α*. Проекція похилої є геометричним місцем ортогональних проекцій усіх точок похилої на задану площину.

Теорема про три перпендикуляри. Якщо пряма a площини α перпендикулярна до похилої AM, то вона ж перпендикулярна і до проекції A_1M похилої на площину. І навпаки, якщо пряма площини перпендикулярна до проекції похилої, то вона ж перпендикулярна і до самої похилої (рис. 118).

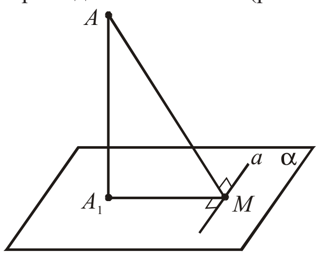

Рис. 118

Назву цієї теореми визначили три перпендикуляри: AM і A_1M — до прямої a і AA_1 — до площини α.

Півплощина — *множина точок площини, що лежать по один бік від даної прямої площини —* ***граничної прямої*** *(або* ***границі****) цієї півплощини.* Вважається, що точки граничної прямої півплощини також належать цій півплощині. На рис. 119 точки A і B належать одній і тій же півплощині з граничною прямою a (тобто

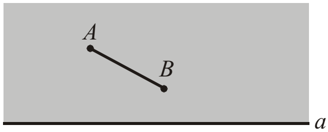

Рис. 119

лежать по один бік від прямої a), оскільки відрізок AB не перетинає пряму a.

Півпряма (або **промінь**) — *частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки —* ***початкової точки*** *півпрямої (або* ***початку*** *променя). Вважається, що початкова точка півпрямої також належить півпрямій. Позначають півпрямі або малими, або двома великими латинськими літерами, з яких перша — початкова точка півпрямої, а друга — яка-небудь інша її точка*. Наприклад, промінь a на рис. 120 можна позначити також через AB. *Дві різні півпрямі однієї і тієї ж прямої зі спільною початковою точкою називаються* ***доповняльними півпрямими***.

Півпрямі співнапрямлені і протилежно напрямлені. *Дві півпрямі називаються* ***однаково напрямленими*** *(або* ***співнапрямленими****), якщо існує паралельне перенесення, яке одну з них переводить в іншу. Дві півпрямі називаються* ***протилежно*** *напрямленими, якщо одна з них співнапрямлена з півпрямою, доповняльною до іншої*.

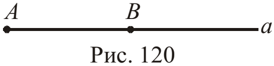

Рис. 120

Півпрямі AB і CD, що не лежать на одній прямій, співнапрямлені тоді і тільки тоді, коли вони лежать на паралельних прямих по один бік від прямої AC, що проходить через їхні початки (рис. 121а).

Півпрямі AB і CD, які не лежать на одній прямій, протилежно напрямлені тоді і тільки тоді, коли вони лежать на паралельних прямих по різні боки від прямої AC, що проходить через їхні початки (рис. 121б).

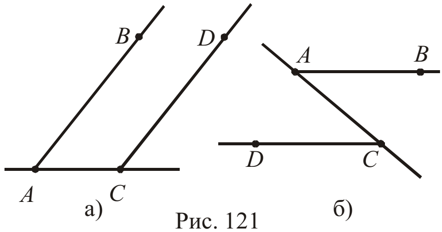

Рис. 121

Піраміда — *многогранник, одна з граней якого (****основа*** *піраміди) є деяким плоским многокутником, а решта граней (****бічні грані*** *піраміди) — трикутники зі спільною вершиною (****вершина*** *піраміди)*. Це описове означення. Конструктивно піраміду можна означити як *многогранник, що є геометричним місцем відрізків SX зі спільним кінцем S (****вершиною*** *піраміди), інші кінці X яких належать деякому плоскому многокутнику (****основі*** *піраміди), площина якого не містить точки S* (рис. 122). *При цьому відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються* ***бічними ребрами*** *піраміди*.

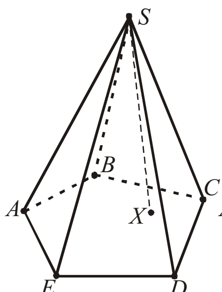

Рис. 122

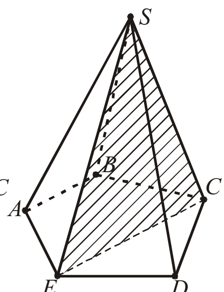

Рис. 123

Числова послідовність — *множина занумерованих чисел, розміщених у порядку зростання їх номерів:*

$$a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ a_{n+1};\ \ldots$$

або скорочено $\{a_n\}$. *Числа* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *з яких складається послідовність, називаються її* ***членами****, число* a_n — ***n-ним членом послідовності***.

Задати числову послідовність — означає вказати спосіб або правило, за яким для кожного номера n можна знайти n-ний член послідовності. Отже, числова послідовність — це деяка функція $a_n = f(n)$, *областю визначення якої є множина N натуральних чисел.*

Найчастіше числові послідовності задають формулою **загального** (тобто n-го) **члена** або **рекурентною формулою**. У першому випадку у явному вигляді задається вираз $f(n)$, за яким для кожного n можна безпосередньо обчислити відповідне значення a_n. Наприклад, числову послідовність $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ можна задати формулою $a_n = \frac{1}{n}$.

Рекурентні формули (від латинського *recurro* — "біжу назад", "вертаюсь"; *recurrens* — "зворотний") дають змогу обчислювати кожен наступний член послідовності, починаючи з деякого, через обчислені перед тим або задані попередні члени.

Наприклад, дуже поширена у науково-популярній літературі **послідовність Фібоначчі** означається так: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, а при $n \geq 3$ $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, тобто перші два члени цієї послідовності дорівнюють одиниці, а починаючи з третього, кожен наступний член дорівнює сумі двох попередніх. Неважко обчислити як завгодно велику кількість членів цієї послідовності:

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55;\ 89;\ \ldots$$

Фактично, за допомогою рекурентних формул означаються арифметична та геометрична прогресії.

Для дослідження послідовності найзручніше мати формулу її загального члена. Через те, зокрема, у школі знаходять формули для загальних членів арифметичної та геометричної прогресій. Проте задача ця може бути і непростою. Наприклад, формулу для загального члена послідовності Фібоначчі математики шукали кілька століть. Вона виявилась досить складною:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Навчальне видання

Тадеєв Василь Олександрович

Шкільний тлумачний словник-довідник з математики

Головний редактор Будний Б.Є.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською Програмою сприяння освіті в галузі точних наук (ISSEP), грант №APU071107

Підписано до друку 16.07.99р. Друк офсетний. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 9,3. Умовн. фарб-відб. 9,3. Обл. друк. арк. 2,325.
Зам.

Видавництво "Навчальна книга – Богдан". 282008,
м. Тернопіль, вул. Танцорова, 11, а/с 534
Свідоцтво №24637417 від 13.11.1997р.
тел.: (0352) 43-00-46; тел./факс: (0352) 25-18-09;
E-mail: *publishing@budny.te.ua*