Передмова

Дану книгу адресовано старшокласникам, студентам технікумів і студентам молодших курсів вузів, що навчаються на нематематичних спеціальностях. Чим пояснити таке широке коло майбутніх потенційних читачів?

У старшокласників вона викличе інтерес, оскільки понад 10 років повноправною складовою шкільних програм з математики стала ймовірнісно-статистична, або, як її ще називають, стохастична змістова лінія. Елементи статистики, ймовірності, комбінаторики вивчають як в 5 – 9 класах, так і в старшій школі. Учні отримують перші уявлення про науку про випадковість. Але в сучасному світі, де багатьма процесами і явищами «керує» випадок, цього недостатньо. Багато рішень, які приймаються державними органами в освіті, медицині, техніці, бізнесі і багатьох інших галузях, залежать від аналізу наявних або зібраних даних. Тому аналіз даних має стати для багатьох старшокласників предметом глибшого вивчення в школі. Статистична культура людини має стати невід'ємною складовою його загальної культури. Кожна людина буде тим успішнішою в житті, чим повніше і глибше вона розумітиме статистичну природу навколишнього світу і його законів.

Сподіваємося, що книга допоможе учням старших класів краще орієнтуватися в таких явищах, як страхування, інвестиції, економіка, які зазнають впливу випадку.

У більшості технікумів комбінаторика, ймовірність і статистика вже давно увійшли до програм з математики. Студентам технікумів, мабуть, буде цікавим сучасний погляд на ці розділи математики, численні застосування ймовірнісно-статистичних методів, про які йдеться в книзі: адже ці методи широко використовуються у всіх галузях, для роботи в яких студенти готуються.

Студенти багатьох вищих навчальних закладів вивчають курс теорії ймовірностей і математичної статистики. Для чого ж адресувати їм цю книгу? Справа в тому, що коли у вищих навчальних закладах вивчають аналітичну геометрію або математичний аналіз, то їх вивчення підготовлене шкільним курсом математики: йдеться про вектори і метод координат в геометрії, функції, похідну й інтеграл у курсі алгебри і початків аналізу. Така пропедевтична підготовка сприяє більш свідомому засвоєнню розділів вищої математики: адже до складних понять і фактів слід повертатися неодноразово, на різних рівнях. Подібна попередня підготовка і в області стохастики потрібна студентам молодших курсів.

Книга може бути використана вчителями загальноосвітніх шкіл у класах з поглибленим вивченням математики, а також для проведення факультативних занять в загальноосвітніх старших класах, у класах економічного профілю та інших профілів. Кожен розділ книги може бути предметом окремого факультативного курсу.

Виклад у даній книзі відрізняється від викладу в традиційних підручниках для вищої школи. По-перше, в посібнику застосовуються різні рівні обґрунтування:

✓ рівень здорового глузду (на це спрямовані численні приклади, порівняння);

✓ «прикладний» рівень обґрунтування;

✓ і, звичайно, формально-логічний рівень.

По-друге, зроблено спробу уникнути рецептурного стилю викладу, особливо при викладі елементів математичної статистики. Головна мета, яку автор ставив перед собою, це довести до читачів основні ідеї статистики, а не рецепти їх застосування. Тому ідеї математичної статистики реалізуються з допомогою порівняно невеликого математичного апарату.

При написанні книги автор дотримувався наступних положень:

– широке впровадження ідеї математичного моделювання і формування вмінь застосування ймовірності і статистики до опису реальних процесів і явищ;

– формування вмінь попередньої обробки статистичного матеріалу із застосуванням сучасної обчислювальної техніки;

– формування різних підходів до розв'язання комбінаторних завдань;

– широке застосування різних означень поняття ймовірності, що дозволяє мати різні джерела введення ймовірності події.

Посібник складається зі вступу, п'яти розділів, додатка, предметного та іменного покажчиків. Перший розділ присвячено описовій статистиці. Разом з навчанням попередній обробці експериментальних даних його метою є попереднє ознайомлення з основними ідеями статистики – вибірковим методом, оцінкою параметрів, перевіркою статистичних гіпотез. Автор прагнув до того, щоб при її вивченні читачі приходили до висновку про випадковий характер багатьох явищ і про необхідність вимірювати цю випадковість.

елементи в кожній. Впорядкована ця вибірка чи ні? В якому випадку вона буде вибіркою з поверненням і в якому – вибіркою без повернення?

3.3.1. Впорядковані вибірки (розміщення)

Підрахуємо кількість впорядкованих вибірок з поверненням з n елементів по r. Перший елемент вибірки можна отримати n способами, при будь-якому способі його вибору другий елемент вибирається також n способами (нагадаємо: вибір з поверненням!) і т. д. За правилом множення, **кількість упорядкованих вибірок з поверненням з *n* елементів по *r* дорівнює n^r** (такі вибірки також називають ***розміщеннями з повторенням,*** а їхню кількість позначають $\overline{A_n^r}$). Отже,

$$\overline{A_n^r} = n^r.$$

✓ ***Чи можна утворити впорядковані вибірки з поверненням з n елементів по r, якщо r > n?***

Нехай наслідками досліду є впорядковані вибірки без повернення з n елементів по r $(r \le n)$. Їх називають також ***розміщеннями з n елементів по r,*** а їхню кількість позначають A_n^r. Знайдемо, чому дорівнює A_n^r. Перший елемент можна вибрати n різними способами, для вибору другого елементу вже існує $n-1$ можливість і т. д. Останній r-й елемент вибирають після виймання $(r-1)$-го елементу, тобто з $(n-(r-1))$ елементів, що залишилися. Отже, застосовуючи правило множення, отримаємо, що кількість впорядкованих вибірок без повернення з n елементів по r дорівнює

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

✓ ***Чому дорівнює A_n^1; A_5^2?***

Приклад 1. Навмання набирають телефонний номер, що складається з 5 цифр. Знайти ймовірність того, що цей номер складається з різних цифр, якщо жоден з телефонних номерів не починається з 0.

☐ Наслідки досліду, що розглядається в даному прикладі, мають вигляд

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), \quad a_1 \ne 0, \; a_i = 0, 1, \dots, 9, \; i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

де a_i — i-а цифра номера. За правилом множення, їхня кількість дорівнює $N = 9 \cdot 10^4$. Всі результати рівноможливі. Подія A «телефонний номер складається з різних цифр» відбувається при будь-якому з $N(A) = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ наслідків. Тому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 10^4} = 0{,}3024. \ \blacksquare$$

✓ ***Чи можна розглядати в даному прикладі телефонні номери як упорядковані вибірки (з поверненням або без повернення) з 10 елементів по 5?***

Приклад 2. Поїзду, в одному з вагонів якого знаходяться 10 пасажирів, належить зробити 15 зупинок. Якою є ймовірність того, що всі ці пасажири вийдуть на різних зупинках?

□ Для розв'язання задачі можна звернутися до класичної ймовірнісної моделі. Потрібно знайти загальну кількість наслідків досліду, припустити, що наслідки рівноможливі і підрахувати кількість наслідків, при яких настає шукана подія.

Проілюструємо на цьому завданні загальну схему розв'язання комбінаторних задач, що зводяться до вибору. Ця схема має наступний вигляд.

1) З'ясувати, що є дослідом, про який йдеться в умові задачі.

2) Навести декілька прикладів вибірок — наслідків цього досліду, закодувавши об'єкти, що фігурують в умові.

3) Установити, чи впорядковані ці вибірки або ні.

4) Установити, чи є ці вибірки з поверненням або без повернення.

5) З'ясувати, з якої кількості елементів вони утворені.

6) З'ясувати, скільки елементів містить кожна вибірка.

7) Застосувати відповідну формулу.

У даній задачі йдеться про вибір зупинки кожним із 10 пасажирів. Позначимо зупинки числами 1, 2, 3, ..., 15. Наслідками цього досліду є, наприклад, вибірки $\left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{10}\right)$, $\left(\underbrace{1, 2, \ldots, 10}_{10}\right)$, $\left(\underbrace{1, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 4, 8, 12}_{10}\right)$.

Перша з них означає, що всі 10 пасажирів вийшли на першій зупинці, друга — перший пасажир вийшов на першій зупинці, другий — на другій, і т.д., десятий — на десятій. Зміст останнього прикладу тепер зрозумілий: перший, другий і сьомий пасажири вийшли на першій зупинці і т.д. Ці вибірки впорядковані, оскільки, наприклад,

6. Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл із середнім a і з дисперсією σ^2, то випадкова величина $Z = \frac{X - a}{\sigma}$ має стандартний нормальний розподіл, тобто нормальний розподіл з нульовим середнім і з одиничною дисперсією.

Елементи математичної статистики

Вибіркою об'єму n з деякого розподілу називають сукупність взаємно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, кожна з яких має цей розподіл.

Оцінною функцією для параметра називають довільну функцію від елементів вибірки. Її значення від реалізації вибірки називають ***оцінкою параметра***.

Оцінну функцію деякого параметра генеральної сукупності називають ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання дорівнює цьому параметру. В іншому випадку її називають ***зміщеною***.

Вибіркове середнє $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ є незміщеною оцінною функцією математичного сподівання генеральної сукупності a.

Відносна частота події є незміщеною оцінною функцією ймовірності цієї події.

Оцінну функцію деякого параметра генеральної сукупності називають ***спроможною***, якщо з імовірністю, скільки завгодно близькою до 1, при достатньо великому n різницю між нею і параметром за модулем можна зробити меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа ε. Оцінна функція, що не має цієї властивості, називають ***неспроможною***.

Вибіркове середнє є спроможною оцінною функцією математичного сподівання.

Відносна частота події є спроможною оцінною функцією ймовірності цієї події.

Інтервал $\left(\overline{p} - \frac{h}{2\sqrt{n}}; \overline{p} + \frac{h}{2\sqrt{n}}\right)$ є ***довірчим інтервалом для ймовірності p*** деякої події ***з довірчою ймовірністю*** $1 - \frac{1}{h^2}$. Число $\frac{h}{2\sqrt{n}}$ називають ***точністю оцінки*** $\overline{p}$, а число $1 - \frac{1}{h^2}$ — ***надійніс-***

тю цієї оцінки, число $2\cdot\frac{h}{2\sqrt{n}}=\frac{h}{\sqrt{n}}$ — ***довжиною довірчого інтервалу*** ($\bar{p}$ — відносна частота події).

Схема перевірки статистичних гіпотез

1. Формулюють нульову гіпотезу.

2. Отримують фактичні дані про події, щодо яких було сформульовано нульову гіпотезу.

3. Визначають імовірність того, що отриманий результат міг бути отриманий за умови, що нульова гіпотеза є правильною.

4. Якщо ймовірність отримання даного результату за умови, що нульова гіпотеза є правильною, є малою, нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості, що дорівнює цій імовірності.

5. Визнають, що і в тому випадку, коли відхиляється і коли не відхиляється нульова гіпотеза, можливий певний ризик.

Якщо відхиляється нульова гіпотеза у разі, коли вона є правильною, то кажуть, що має місце ***помилка першого роду***.

Якщо ж нульова гіпотеза не відхиляється в той час, коли вона є неправильною, то має місце ***помилка другого роду***.

Інший порядок перевірки статистичних гіпотез

1. Формулюють нульову та альтернативну гіпотези H_0 і H_1.

2. Вибирають деяку подію S (так звану критичну область або критерій для гіпотези H_0).

3. Призначають рівень значущості, тобто число, що дорівнює ймовірності настання події S за умови, що нульова гіпотеза є правильною.

4. Проводять дослід. Якщо в результаті цього досліду відбувається подія S, то гіпотезу H_0 відхиляють. Якщо подія S не відбувається, то гіпотезу на рівні значущості α не відхиляють.

Список використаної літератури

1. Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л. Математика для техникумов на базе среднего образования: Учеб. пособие. — М: Издательство физико-математической литературы, 2005.
2. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Алгебра і початки аналізу, 10 клас. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2004.
3. Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2008 (Школьный курс математики).
4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
5. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.
6. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1964.
7. Даймend С. Мир вероятностей. — М.: Статистика, 1970.
8. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.
9. Кимбл Г. Как правильно пользоваться статистикой. — М.: Финансы и статистика, 1982.
10. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
11. Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. — М.: Наука, 1967.
12. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. — М.: Мир, 1969.
13. Сигел Эндрю Ф. Практическая бизнес-статистика.: Пер. с англ. — Москва – Санкт-Петербург – Киев, 2002.
14. Скороход А. В. Вероятность вокруг нас. — Киев, Наукова думка, 1980.
15. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.

Зміст