О.Г. Возняк

МЕТОД КООРДИНАТ у геометричних задачах

Навчальний посібник

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
В64

Рецензенти:

доцент кафедри фізики, математики та інформатики
Кременецького гуманітарно-педагогічного інституту ім. Т.Г. Шевченка
Фурман О.А.
старший викладач кафедри математики та методики викладання математики
Тернопільського національного педагогічного університету ім. В.М. Гнатюка
Моховик О.В.

Возняк О.Г.

В64 Метод координат у геометричних задачах. Навч. посібник. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 64 с.

ISBN 978-966-10-3232-2

У посібнику викладено суть методу координат з використанням, зокрема, так званих задач-теорем, в яких залежності між елементами геометричних фігур виражають з допомогою алгебраїчних співвідношень.

Застосування цього методу не потребує додаткових геметричних побудов і розгляду складних конфігурацій і ним можна скористатися при розв'язуванні як планіметричних, так і стереометричних задач.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування, викладачів та студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.1я72

Навчальне видання

ВОЗНЯК Ольга Григорівна

МЕТОД КООРДИНАТ У ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Андрій Кравчук*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.06.2013. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Century Schoolbook.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 3,72. Умовн. фарбо-відб. 3,72.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008 тел./факс
(0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-3232-2

Передмова

Посібник містить 115 геометричних задач, причому частина задач несе на собі теоретичне навантаження, і їм повинна бути приділена особлива увага. Це так звані задачі-теореми, в яких виражені співвідношення та залежності між елементами геометричних фігур можуть бути використані при розв'язуванні інших задач.

Задачі, згідно з теоретичними відомостями, які застосовуються при їхньому розв'язуванні, згруповані у параграфах і наповнені детальними розв'язуваннями.

Щоб навчитися розв'язувати задачі, насамперед потрібно оволодіти загальними прийомами і методами.

Одним із таких загальних методів є координатний метод розв'язування геометричних задач.

Роль і значення цього методу в навчальній практиці невпинно зростає. Суть його полягає в тому, що залежності між елементами геометричної фігури виражають з допомогою алгебраїчних співвідношень.

Застосування координатного методу не потребує розгляду складних геометричних конфігурацій, виконання додаткових побудов та їхнього обґрунтування. Ним можна скористатися при розв'язуванні як планіметричних, так і стереометричних задач.

Розв'язування задач координатним методом починається з побудови прямокутної системи координат, у якій потрібно знайти координати точок і векторів і на цій основі скласти рівняння прямих (у двовимірному просторі) і площини (у тривимірному просторі), визначити відстань між точками, від точки до прямої і площини, кути між прямими і площинами та ін.

У посібнику вміщено геометричні задачі з різних тем (задачі, позначені *, — підвищеної складності), що розв'язуються методом координат, відповіді до них, теоретичний матеріал і методичні вказівки. Посібник адресований учням старших класів та студентам вищих навчальних закладів.

1. Суть координатного методу

Якщо при розв'язуванні геометричної задачі або знаходженні геометричного місця точок, чи виведенні рівнянь для деяких ліній використовують координати певних точок, то кажуть, що користуються ***методом координат***. При знаходженні рівняння лінії розглядають систему координат на площині, а при знаходженні рівняння деякої поверхні розглядають систему координат в тривимірному просторі.

Метод координат інколи поєднують з векторами, розглядаючи вектори, які задані своїми координатами. Проте можна не використовувати поняття вектора, а оперувати тільки координатами певних точок, рівняннями ліній та поверхонь.

Раціональність розв'язування задачі методом координат залежить від того, як розглядувану фігуру розміщено відносно осей координат. Найзручніше цим методом користуватися тоді, коли фігура, яку розглядають, містить прямі кути.

Прямокутну систему координат можна вводити довільно. Наприклад, у правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ систему координат доцільно вибрати так, щоб початок координат містився в центрі O основи піраміди (рис. 1), вісь Oz збігалася з прямою SO, якій належить висота цієї піраміди, вісь абсцис Ox збігалася з прямою AC, якій належить діагональ AC, вісь ординат Oy збігалася з прямою BD, якій належить діагональ BD.

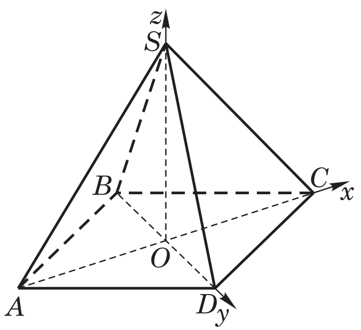

Рис. 1

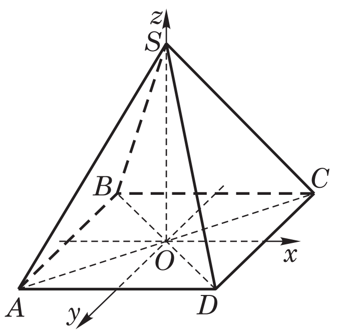

Рис. 2

Можна вибрати систему координат по-іншому. Вісь Oz розміщується так, що їй належить висота SO піраміди $SABCD$ (рис. 2). Осі Ox належить серединний перпендикуляр сторони CD, а осі Oy належить серединний перпендикуляр сторони AD піраміди $ABCD$.

Прямокутну систему координат можна розмістити так, щоб початок координат був розміщений в одній із вершин основи $ABCD$. Нехай точка B є початком координат, тоді сторона BC належатиме осі абсцис Ox, а сторона AB — осі ординат Oy (рис. 3).

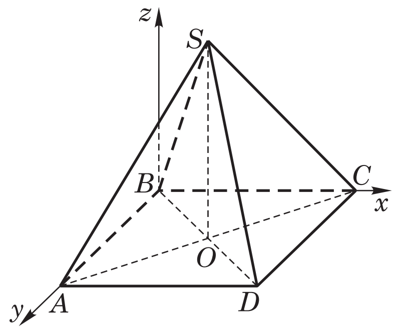

Рис. 3

Якщо кожне ребро основи $ABCD$ в усіх трьох випадках дорівнює $a = 1$, а висота $SO = h = 2$, то в першому випадку (рис. 1) координати кожної вершини піраміди будуть наступними:

$A(-0{,}5\sqrt{2}; 0; 0)$, $B(0; -0{,}5\sqrt{2}; 0)$,
$C(0{,}5\sqrt{2}; 0; 0)$, $D(0; 0{,}5\sqrt{2}; 0)$, $S(0; 0; 2)$.

У другому випадку (рис. 2) координати кожної вершини піраміди будуть такі: $A(-0{,}5; 0{,}5; 0)$, $B(-0{,}5; 0{,}5; 0)$, $C(0{,}5; -0{,}5; 0)$, $D(0{,}5; 0{,}5; 0)$, $S(0; 0; 2)$.

У третьому випадку (рис. 2): $A(0; 1; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$, $S(0{,}5; 0{,}5; 2)$.

Слід відмітити, що результат розв'язування задачі не залежить від вибору системи координат. Але від вдалого її вибору залежить раціональний шлях розв'язання задачі, легкість одержання необхідного результату. Тому, перш ніж вводити систему координат, необхідно глибоко проаналізувати зміст задачі, встановити, координати яких точок площини чи простору треба визначити, рівняння якої лінії треба скласти, і подумати, в якій з вибраних систем координат можна розв'язати задачу з найменшою затратою часу і розумових сил. Загальних рекомендацій (правил) тут немає. Кожна задача вимагає індивідуального підходу.

Нагадаємо основні теоретичні положення, на яких базується застосування координатного методу до розв'язання задач з геометрії

4.3. Рівняння кола

43. Складемо рівняння кола з центром у точці $A(a; b)$ і з радіусом r (рис. 23). Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ на колі. Відстань від неї до центра A дорівнює r.

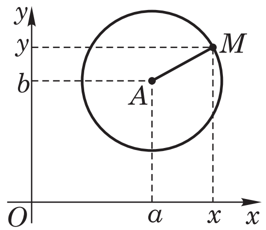

Рис. 23

Тоді на підставі формули для відстані між двома точками знайдемо рівняння кола в стандартній формі:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

Тепер піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Це і є рівняння кола стандартної форми.

Загальна форма рівняння кола має такий вигляд:

$$x^2-2ax+a^2+y^2+2by+b^2=r^2 \text{ або } x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$$

де $c=a^2+b^2-r^2$.

44. Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння:

$$x^2+y^2-10x+8y+5=0.$$

Розв'язування. Зводимо дане рівняння до стандартної форми:

$$(x-5)^2+(y+4)^2-25-16+5=0,$$
$$(x-5)^2+(y+4)^2=36.$$

Це рівняння як геометричне місце точок визначатиме коло, центр якого — точка $C(5; -4)$ і радіус якого $r=6$.

45. Визначте геометричне місце такого рівняння:

$$x^2+y^2-6x+8y+25=0.$$

Розв'язування. Робимо таку саму операцію, що і в попередній задачі. Зведемо дане рівняння до стандартної форми:

$$(x-3)^2+(y+4)^2+25-16-9=0,$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2=0.$$

Як бачимо, це рівняння набуло стандартної форми, з якої видно, що геометричним місцем точок буде точка $(3; -4)$.

46. Знайдіть центр і радіус кола: $x^2+y^2+4x-6y+24=0$.

Розв'язування. У стандартному вигляді це рівняння матиме такий вигляд: $(x+2)^2+(y-3)^2=-11$.

Як бачимо, $r^2=-11<0$, а це означає, що геометричне місце точок є уявним.

47. Кінці стержня AB довжиною l переміщаються по сторонах прямого кута (рис. 24). Яку лінію опише центр O відрізка AB? Напишіть рівняння цієї лінії.

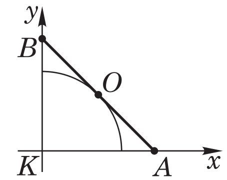

Рис. 24

Розв'язування. $x^2+y^2=\dfrac{l^2}{4}$, $x>0$, $y>0$.

Точка O опише чверть кола з центром у точці K з радіусом $r=0{,}5l$.

48. Точка M рухається так, що в будь-який момент часу її відстань до точки $A(6; 0)$ в три рази більша від відстані до точки $B\left(\dfrac{2}{3};0\right)$. Знайдіть рівняння траєкторії руху точки M.

Розв'язування. Координати точки M позначимо через x, y, тобто $M(x; y)$.

Згідно з умовою задачі, $AM=3BM$.

Запишемо відстані AM і BM через координати точок:

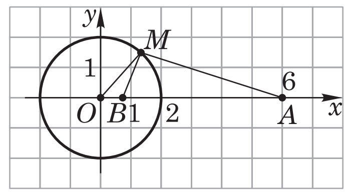

Рис. 25

$$AM=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2},$$

$$BM=\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y-0)^2}.$$

Підставимо ці вирази в попередню геометричну рівність $AM=3BM$:

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=3\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2}.$$

Спростимо це рівнння:

$$x^2-12x+36+y^2=9\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+y^2\right),$$

$$8x^2+8y^2=32,$$

$$x^2+y^2=4.$$

Отже, рівнянням, що задовольняє умову задачі, буде рівняння кола з центром у точці $(0; 0)$ і з радіусом $r=2$ (рис. 25).

49. Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, точку $M(1; 0)$ і дотикається до даного кола, визначеного рівнянням $x^2 + y^2 = 9$.

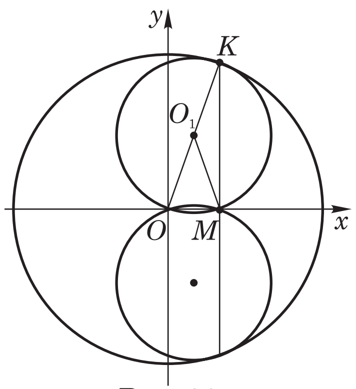

Рис. 26

Розв'язування. Центр даного кола міститься в початку координат, радіус його дорівнює 3 (рис. 26). Оскільки точка дотику двох кіл і їхні центри лежать на одній прямій, то діаметром шуканого кола є відрізок $OK = 3$.

Радіус цього кола дорівнює 1,5.

$|OO_1| = |O_1M|$,

$x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2$,

$x = \dfrac{1}{2}$, де (x, y) — координати центра O_1.

$|OO_1| = 1{,}5$, $x^2 + y^2 = 2{,}25$,

$0{,}25 + y^2 = 2{,}25$, $y = \pm\sqrt{2}$.

Остаточно дістаємо такі два рівняння кола, які задовольняють умову задачі:

$$(x - 0{,}5)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 2{,}25,$$

$$(x - 0{,}5)^2 + \left(y + \sqrt{2}\right)^2 = 2{,}25.$$

50. Через довільну точку A меншого з двох концентричних кіл, радіуси яких R і r, проведено довільну пряму, яка не проходить через центр кіл і перетинає більше з них у точках B і C. Перпендикуляр до BC, проведений через точку A, перетинає менше коло в точці M. Знайдіть суму $AM^2 + AB^2 + AC^2$.

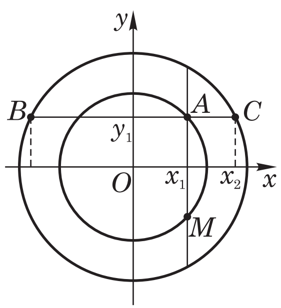

Рис. 27

Розв'язування. Введемо прямокутну систему координат так, щоб вісь абсцис була паралельна BC, а центр кіл O був початком координат. В обраній системі координати точок A, M, C і B: $A(x_1; y_1)$, $M(x_1; -y_2)$; $C(x_2; y_1)$, $B(-x_2; y_1)$ (рис. 27).

Знайдемо шукану суму: $AM^2 + AB^2 + AC^2 = (2y_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 4y_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 = 4y_1^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 = 2\left(x_1^2 + y_1^2\right) + 2\left(x_2^2 + y_1^2\right)$.

Оскільки $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, а $x_2^2 + y_2^2 = R^2$, то

$$AM^2 + AB^2 + AC^2 = 2\left(R^2 + r^2\right).$$

51. У ромб $ABCD$ з кутом 45° вписано коло з радіусом R. Доведіть, що для довільної точки M кола має місце рівність $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2{,}5AB^2$.

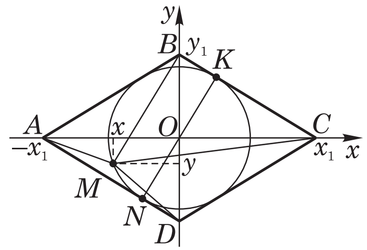

Рис. 28

Доведення. Введемо прямокутну систему координат так, щоб діагоналі ромба лежали на осях координат (рис. 28). Введемо позначення координат точок: $M(x; y)$, $C(x_1; 0)$, $A(-x_1; 0)$, $B(0; y_1)$, $D(0; -y_1)$.

$AM^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (x + x_1)^2 + y^2 + x^2 + (y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2 + y^2 + x^2 + (y + y_1)^2 = x^2 + 2xx_1 + x_1^2 + y^2 + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 + x_1^2 - 2xx_1 + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + 2y_1y + y_1^2 = 4x^2 + 4y^2 + 2x_1^2 + 2 = 4(x^2 + y^2) + 2\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 4R^2 + 2BC^2 = (2R)^2 + 2BC^2 = KN^2 + 2BC^2 = (BC \cdot \sin 45°)^2 + 2BC^2 = \dfrac{1}{2}AB^2 + 2AB^2 = 2{,}5AB^2$.

52. Знайдіть множину точок, сума квадратів відстаней від двох даних точок M і N ($MN = a$) є величина стала, що дорівнює квадрату даного відрізка b.

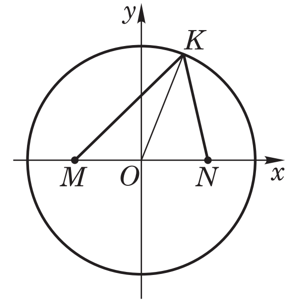

Рис. 29

Розв'язування. Виберемо прямокутну систему координат так, щоб вісь абсцис збігалася з прямою MN, а вісь ординат проходила через середину O відрізка MN (рис. 29). Тоді $M\left(-\dfrac{a}{2}; 0\right)$ і $N\left(\dfrac{a}{2}; 0\right)$. Позначивши будь-яку точку шуканої множини $K(x; y)$, визначимо:

$$MK^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2;\ NK^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2.$$

Враховуючи, що згідно з умовою задачі $MK^2 + NK^2 = b^2$, дістанемо:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = b^2.$$

$\overline{C_1A} = (1;\ 2;\ 0)$, $\left|\overline{C_1A}\right| = \sqrt{5}$,

$\overline{C_1C} = (1;\ -1;\ -2)$, $\left|\overline{C_1C}\right| = \sqrt{6}$.

$$\cos\widehat{AC_1C} = \frac{1-2+0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{30}} = -\frac{\sqrt{30}}{30} \approx -0{,}1826.$$

$\angle AC_1C = 180° - 79° = 101°$.

113. Знайдіть найбільшу величину кута між площиною бічної грані правильної чотирикутної піраміди і бічним ребром, яке не належить цій грані.

Розв'язування. Знайдемо кут α між бічним ребром SA і площиною бічної грані SDC (рис. 54).

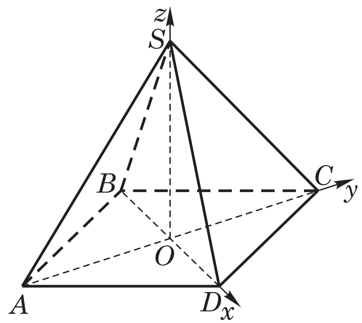

Рис. 54

Введемо систему координат так, щоб $S(0;\ 0;\ h)$, $D(a;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ a;\ 0)$, де $OA = OC = OD = a$, $SO = h$.

Рівняння площини SDC має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1.$$

$$\sin\alpha = \cos\left(\widehat{\vec{h},\overrightarrow{AS}}\right) =$$

$$= \frac{1+1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\cdot\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{a^2+h^2}{a^2}+\frac{a^2+h^2}{a^2}+\frac{a^2+h^2}{h^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3+\frac{2h^2}{a^2}+\frac{a^2}{h^2}}}.$$

Кут α, а отже, і sin α набуватиме найменшого значення тоді, коли вираз $\frac{2h^2}{a^2}+\frac{a^2}{h^2}$ набуватиме найменшого значення.

З цією метою потрібно дослідити функцію $f(h) = \frac{2h^2}{a^2}+\frac{a^2}{h^2} = \frac{2h^2}{a^2} - a^2h^{-2}$.

$$f'(h) = \frac{4h}{a^2} - 2a^2h^{-3} = \frac{4h}{a^2} - \frac{2a^2}{h^3} = \frac{4h^4-2a^4}{a^2h^3} = 0,$$

$4h^4 - 2a^4 = 0$,

$4h^4 = 2a^4$,

$h = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$.

Знайдемо значення sin α при $h = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$.

$$\sin\alpha = \cos\left(\widehat{\vec{h},\overrightarrow{AS}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3+\frac{\sqrt{2}a^2}{a^2}+\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} =$$

$= \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$. Отже, $\alpha = \arcsin 2\left(\sqrt{2}-1\right) \approx \arcsin 0{,}8284$.

Звідси $\alpha \approx 55°56'$.

Задачі для самостійного розв'язування

114. Знайдіть кут між діагоналлю BD_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і діагоналлю A_1D його грані, якщо $AD = a$, $BC = b$, $DD_1 = c$.

Відповідь. $\left(\widehat{BD_1, A_1D}\right) = \arccos\frac{\left|a^2-c^2\right|}{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}}$.

115*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут між площинами AB_1N і DC_1M, де M — середина AB, $N \in BC$, причому $|BN| : |NC| = 3 : 1$.

Відповідь. $\rho = \arccos\frac{8\sqrt{34}}{51}$.

Використана література

1. Бевз Г.П.. Методика розв'язування стереометричних задач. Київ: Радянська школа, 1988 — 192 с.
2. Возняк Г.М., Возняк О.Г. Прикладні задачі: від теорії до практики. Тернопіль: Мандрівець, 2003. — 136 с.
3. Крайзман М.Л.. Розв'язування геометричних задач методом координат. К: Радянська школа, 1983 — 128 с.
4. Стеценко П.Є. Курс вищої математики для технікумів, інститутів: Навч.-метод. посіб. — К. : Генеза, 2002. — 312 с.

Зміст