Ю.І. Мальований
Г.М. Возняк
Г.М. Литвиненко

АЛГЕБРА

8 КЛАС

**Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
М18

Мальований Ю.І., Возняк Г.М., Литвиненко Г.М.
М18 Алгебра: Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.
ISBN 978-966-10-0400-8

ББК 22.1я72

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Прот. №1/11-4229 від 08.09.08.)

ISBN 978-966-10-0400-8

ЗМІСТ

III. Квадратні рівняння

§ 5. Квадратні рівняння

Повторення

Люди, не знайомі з алгеброю, не можуть уявити собі тих дивних речей, яких можна досягти за допомогою цієї науки.

Г. Лейбніц

ПЕРЕДМОВА

Юний друже! У 7 класі ти навчився перетворювати одночлени і многочлени, розв’язувати рівняння і їх системи, а також задачі за їх допомогою, дізнався, що таке функція, ознайомився з окремими видами функцій та їх графіками. Тобі вже відомі такі дії, як додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з натуральним показником.

У 8 класі ти дізнаєшся про нову дію — добування кореня з числа, зокрема, квадратного кореня. Твої знання про число доповнять відомості про новий вид чисел, які мають назву ірраціональних. Ти навчишся перетворювати дроби із змінною в знаменнику, розв’язувати нові види рівнянь, дізнаєшся, як записують дуже великі або надто малі числа.

Допомогти тобі в успішному навчанні алгебри має цей підручник. Що треба знати, працюючи з ним?

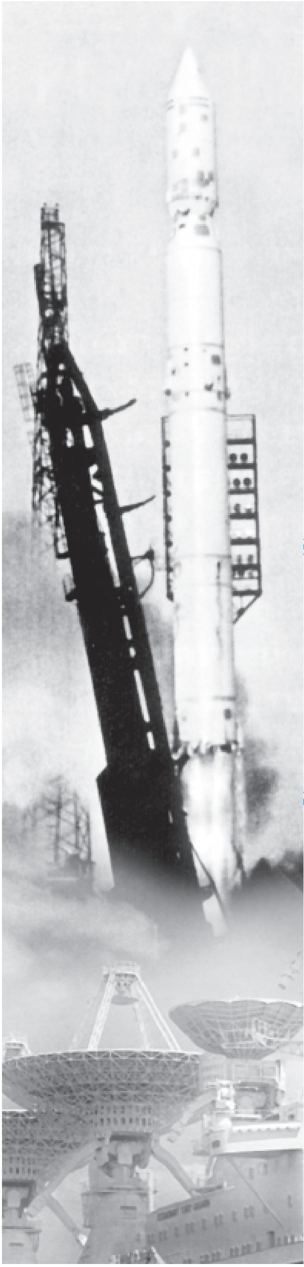
Не поспішай виконувати вправи, не прочитавши текст відповідного пункту, де ти знайдеш необхідні для цього відомості. Там же вміщено зразки розв’язання окремих завдань. Полегшить розуміння тексту відновлення в пам’яті необхідних для цього відомостей, про які йдеться в рубриці «Пригадайте» на початку майже кожного пункту.

Щоб привернути твою увагу до важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом, а також кольором. Означення та властивості, які потрібно запам’ятати, набрано кольоровим шрифтом. Основні формули записані на кольоровій плашці. Послідовність виконання певних дій, перетворень виразів тощо надруковано *курсивом*. Зосередити увагу на найсуттєвішому тобі допоможуть і відповідні запитання для самоперевірки, подані у кінці кожного пункту. У тексті під рубрикою «Увага!» подано застереження, що допоможуть тобі уникнути поширених помилок, яких припускаються учні.

Виконуючи завдання для самоперевірки, вміщені в кінці кожного параграфа, ти зможеш оцінити свої навчальні досягнення.

На рівень складності пропонованих задач і вправ вказують умовні позначки: знак ° біля номера позначає вправи, що відповідають початковому і середньому рівням; * — вправи високого рівня навчальних досягнень. Якщо ж біля номера немає спеціального позначення, то ця вправа відповідає достатньому рівню.

Знаком ▽ позначено початок розв'язання вправи, задачі, обґрунтування твердження, а знаком ▲ — їх кінець.



Розділ I
Раціональні вирази та їх перетворення

1
РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

2
СТЕПІНЬ З ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

1.1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Пригадайте

1. Який вираз називають одночленом? Наведіть приклади.
2. Який вираз називають многочленом? Наведіть приклади.
3. Які з виразів є одночленами:

а) $0,5x^2$; б) $\dfrac{mn}{4}$; в) $\dfrac{3ab^3}{c}$; г) $-\dfrac{2cd^2}{3}$; ґ) $\dfrac{0,3m}{2n^2}$?

● **Які вирази належать до раціональних?** У сьомому класі ви вивчали перетворення одночленів і многочленів та виразів, які не містять дії ділення на змінну або на вираз зі змінною. Такі вирази належать до ***цілих алгебраїчних виразів***.

Алгебраїчні вирази, утворені з чисел і букв за допомогою дій додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, а також ділення на число, відмінне від нуля, називаються *цілими*.

Наприклад: $8a^6$, $3m^2 - 4mn$, $\dfrac{x^2+9}{4}$, $(c - 3d)^2 + 1$.

Алгебраїчний вираз, який містить дію ділення на змінну або на вираз зі змінною, називають *дробовим*.

Дробовими є, наприклад, вирази $\dfrac{x-3y}{a}$, $\dfrac{a}{b+5}-c$, $\dfrac{m-n}{m+n}+\dfrac{1}{(c-3)^2}$.

Усі подані вище цілі і дробові вирази належать до ***раціональних*** виразів.

Раціональними виразами **називають алгебраїчні вирази, при утворенні яких використовують дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з цілим показником.**

Окремий клас раціональних виразів складають дроби.

Раціональний дріб **— це вираз виду $\frac{A}{B}$, де A і B — цілі раціональні вирази.**

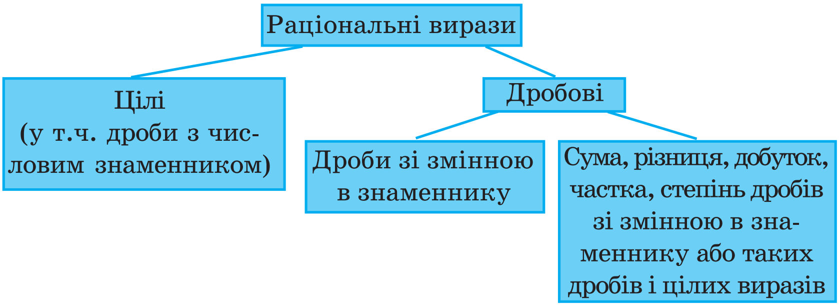
Наприклад: $\frac{a+b}{5}$, $\frac{4x^3-5y}{(x+3)^2}$, $\frac{2}{m-9}$, $\frac{8}{4}$.

Як бачимо, до раціональних дробів належить і ***звичайний дріб***, тобто дріб, чисельник і знаменник якого є натуральними числами.

Слід зазначити, що раціональний дріб належить до цілих виразів, якщо його знаменник не містить змінної, і до дробових — у протилежному випадку.

У наведених вище прикладах дробів перший дріб є цілим виразом, два наступні — дробовими, а останній — звичайним дробом.

Класифікація раціональних виразів має такий вигляд:



● **Що таке «допустимі значення змінних»?** Якщо не вказано додаткових умов, то цілі вирази мають смисл при будь-яких значеннях змінних, що входять до них. Про дробові вирази цього сказати не можна, оскільки вони містять ділення на вираз зі змінною, яка при певних значеннях може перетворювати знаменник в нуль, а на нуль, як відомо, ділити не можна.

Зокрема, вираз $\frac{x-3y}{a}$ не має смислу при $a = 0$; вираз $\frac{a}{b+5}-c$ — при $b = -5$. Отже, у першому виразі змінна a може набувати будь-яких значень, крім 0 ($a \neq 0$), а змінна b у другому виразі — будь-яких значень, крім -5 ($b \neq -5$).

Числові значення, яких може набувати змінна (змінні) в алгебраїчному виразі, називають *допустимими значеннями* змінної (змінних).

Очевидно, що допустимими значеннями змінної c у виразі $\frac{1}{(c-3)^2}$ є всі раціональні числа, крім 3. Це можна записати так: $c \neq 3$. Допустимими значеннями змінних у виразі $\frac{3}{(a-2)(b+1)}$ є всі раціональні числа, крім $a = 2$ і $b = -1$ ($a \neq 2$, $b \neq -1$).

Взагалі, щоб знайти допустимі значення змінних для даного раціонального дробу, треба прирівняти його знаменник до нуля, розв'язати утворене рівняння, а потім виключити його корені з числових значень, яких можуть набувати змінні.

Приклад. Знайти допустимі значення змінної x для дробу $\frac{x-2}{x^2-1}$.

Розв'язання

$x^2 - 1 = 0$; $(x - 1)(x + 1) = 0$; $x - 1 = 0$, $x = 1$; $x + 1 = 0$, $x = -1$.

Відповідь. Допустимими значеннями змінної x є всі числа, крім 1 і –1.

Можливий і такий запис розв'язання цієї вправи:

$x^2 - 1 \neq 0$; $(x - 1)(x + 1) \neq 0$; $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$; $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$.

Відповідь. $x \neq -1$, $x \neq 1$.

Всі наступні властивості і перетворення дробів розглядатимуться лише для допустимих значень змінних, що входять до них. Цей факт або вказують як неодмінну умову (наприклад, $\frac{a}{b} = \frac{5a}{5b}$, $b \neq 0$), або ж маються на увазі в процесі перетворень.

● **Уточнюємо означення тотожності.** З огляду на сказане, проаналізуємо таке означення тотожності: тотожність — це рівність, правильна при *всіх* значеннях змінних, що входять до неї.

Коли йдеться про цілі вирази, то питань не виникає, бо вони мають смисл при *всіх* значеннях змінних, які входять до них. А чи правомірне це означення стосовно дробових виразів? Очевидно, ні, бо ми вже знаємо, що при певних значеннях змінних дробові вирази можуть не мати смислу. Отже, в даному випадку мова має йти не про всі значення змінних, а лише про ті, при яких дані вирази мають смисл, тобто про *допустимі* значення змінних. Тобто тотожність — це рівність, правильна при *всіх допустимих* значеннях змінних, що входять до неї.

Для цілих виразів це означення не суперечить попередньому, бо в них допустимими є всі значення змінних.

● **Коли дріб дорівнює нулю?** Часто доводиться визначати, при яких значеннях змінної значення дробу дорівнює нулю. Це ті значення, які перетворюють значення чисельника в нуль, і, звичайно, є допустимими для даного дробу. Тобто дріб

$$\frac{A}{B} = 0, \text{ коли } A = 0, \text{ а } B \neq 0. \qquad (1)$$

Приклад. При яких значеннях m дріб $\frac{m^2 - 9}{m^2 + 3m}$ дорівнює нулю?

▽ Знайдемо, при яких значеннях m чисельник дробу дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $m^2 - 9 = 0$.

$m^2 - 9 = 0$; $(m - 3)(m + 3) = 0$, $m - 3 = 0$ або $m + 3 = 0$; звідки $m = 3$ або $m = -3$.

З'ясуємо, чи одержані значення змінної m є допустимими для даного дробу. Це можна зробити, обчисливши значення знаменника дробу при $m = 3$ і $m = -3$. Якщо в результаті дістанемо 0, то дане значення змінної не є допустимим. Отже,

якщо $m = 3$, то $m^2 + 3m = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18$;

якщо $m = -3$, то $m^2 + 3m = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 0$.

Бачимо, що значення $m = -3$ не є допустимим і його слід вилучити.

Отже, дріб дорівнює 0 при $m = 3$. ▲

З'ясувати, чи є дані значення змінної допустимими для даного дробу можна й інакше. Спочатку встановлюють всі допустимі значення змінної, а потім порівнюють з ними дані значення.

У нашому випадку маємо:

$m^2 + 3m \neq 0$ або $m(m + 3) \neq 0$; звідки $m \neq 0$ і $m \neq -3$.

З двох значень $m = 3$ і $m = -3$, при яких чисельник дробу дорівнює нулю, допустимим є лише перше.

Надалі встановлювати, чи є дане значення змінної допустимим для певного дробу, можна будь-яким із наведених способів. Однак у випадку, коли знаменник є досить складним виразом і знайти його корені непросто, доцільніше користуватися першим способом.

Зауваження. Вимога встановити, при яких значеннях змінної вираз $\frac{A}{B}$ дорівнює нулю, рівносильна вимозі розв'язати рівняння $\frac{A}{B}=0.$

Запитання для самоперевірки

1. Які вирази належать до раціональних?
2. У чому полягає відмінність між цілим і дробовим раціональним виразом?
3. Що таке раціональний дріб?
4. Чи може раціональний дріб бути цілим виразом? Наведіть приклади.
5. Як встановити допустимі значення змінної для даного дробу?
6. За якої умови дріб дорівнює нулю?

Задачі та вправи

1°. Випишіть окремо цілі вирази, дробові вирази і дроби:

а) $\frac{2}{5-x}$; **б)** $2\frac{3}{8}$; **в)** $a^2 - 2ab + 5$;

г) $\frac{x^3-8x}{x^2+3x}$; **ґ)** $\frac{6m}{m+5}-1$; **д)** $\frac{c^2+cd-d^3}{4}$;

е) $\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$; **є)** $4x^2-\frac{a}{2}$; **ж)** $2a^3-\frac{1}{3b-1}$.

2°. Які з даних виразів є цілими виразами, а які — дробовими:

а) $\frac{5a}{a+x}$; **б)** $\frac{x^2}{y^2}+x$; **в)** $\frac{m-2}{5}$;

г) $\frac{1}{8}$; **ґ)** $\frac{b-c}{c+2}$; **д)** $\frac{b^3-3b^2-0,5b}{0,75}$?

3°. Запишіть вирази у вигляді дробів:

а) $4\frac{1}{2}$; **б)** $3,7$; **в)** $-\frac{4}{9}$; **г)** 2;

ґ) a; **д)** $a - b$; **е)** $\frac{1}{2}a+a$; **є)** $2b-\frac{3}{4}b$.