Книга для самовипробування (Передмова редактора)

Похмурий день 10 листопада 1618 року, здавалося, нічим особливим не відрізнятиметься від багатьох інших, у які 22-річний Рене Декарт виходив на прогулянки голландським містечком Бреда. Та ось його погляд привернув жвавий гурток цікавих, які юрмились біля якоїсь афіші. На афіші пропонувалося для розв'язування усім охочим декілька математичних задач. У ті часи це був доволі поширений вид інтелектуальних розваг. Підійшовши ближче, Декарт захотів прочитати умови задач, але на заваді стало погане знання голландської, якою вони були написані. Тоді він звернувся до ошатно вдягненого й трохи старшого за себе чоловіка, з вигляду місцевого інтелектуала, що стояв трохи осторонь, з проханням перекласти умови задач латиною — тогочасною мовою науки. Якби в Декарта було трохи більше житейського досвіду, то, можливо, за тією цікавістю, з якою чоловік спостерігав за публікою біля афіші, він одразу розгледів би в ньому автора задач. А так він лише пообіцяв йому поділитись розв'язками, якщо їх знайде. Яке ж було здивування Ісаака Бекмана, а саме так звали того чоловіка, коли наступного дня в обумовлений час Декарт приніс йому всі розв'язання. Бекман одразу оцінив інтелектуальний потенціал юнака й узявся за навернення його до високої науки і, першою чергою, — до математики.

У популярній свого часу п'ятитомній енциклопедії французького популяризатора науки XIX ст. Луї Фіґ'є (1819–1894) «Життя славетних учених від античності до нашого часу», а точніше, в нарисі з 4-го тому «Учені XVII століття» (1869 р.), присвяченому Декарту, подається чудова гравюра, якою ілюструється цей епохальний, хоча, можливо, й трохи прикрашений, момент зустрічі Декарта з Бекманом. Такий унікальний приклад пробудження нестримного інтересу до науки в одного з найбільших учених усіх часів — через пропозицію розв'язати кілька складних (тепер ми б сказали, олімпіадних) задач — видався нам настільки символічним, що ми винесли цю гравюру на обкладинку книги, цілковито присвяченої саме таким задачам.

Через рік після зустрічі з Бекманом Декарт у листі до нього з вдячністю писав: «По правді кажучи, саме Ви виволокли мене з ледачості й змусили пригадати те, що я колись знав, але майже забув: коли мої думки відхилилися від серйозних речей, Ви навернули мене на істинний шлях».

Можливо, з часом хтось із теперішніх читачів з такою ж вдячністю згадуватиме й про цю книгу, бо в ній закладені три дуже важливі для цього якості. По-перше — це величезна збірка справді цікавих, часто несподіваних, інколи навіть на позір парадоксальних задач, які істотно розширюють традиційне «шкільне» уявлення про математичні істини та про їхній пошук і обґрунтування. По-друге, подані в першій частині книги задачі систематизовані за основними темами і типами сучасних олімпіадних завдань. По-третє, автор подає дуже багато задач з розв'язаннями, і на цих прикладах читач справді може багато чому самостійно навчитися. При цьому дуже вміло «дозується» необхідний рівень пояснень — з'ясовуючи основні ідеї, автор водночас не обтяжує текст надмірною деталізацією, а залишає читачеві простір для самостійного «додумування».

І все ж, попри всі безсумнівні достойності книги, про які, з-поміж іншого, свідчить і вже третє її видання, читач від самого початку повинен відкинути будь-які ілюзії з приводу легкого й швидкого її проходження. Це — книга для тривалої роботи, в ідеалі на 2–3 роки. І її зовсім не обов'язково опрацьовувати в тій послідовності, яка визначена нумерацією тем у змісті. До однієї й тієї ж теми, а інколи й до окремої задачі, варто повертатися по декілька разів.

Не слід робити й фатальних ставок на успіх у реальних олімпіадних змаганнях. Звісно, прагнути і втішатися своїми перемогами — природно, але варто й пам'ятати, що в олімпіадних змаганнях багато чого визначається позаматематичними факторами, передовсім здатністю до швидкої мобілізації й концентрації. А тому недосягнення на олімпіаді сподіваного результату ще не означає відсутності належних задатків до суто математичної творчості. Яскрава й влучна аналогія із шахами: далеко не кожен міжнародний гросмейстер із шахової композиції або класичних шахів буде таким же успішним у так званих швидких шахах (як і навпаки!). Тому можна сказати, що олімпіадний рух, який набув особливої популярності за останні приблизно 70 років, сприяє залученню молоді до математичної творчості двома способами — на підставі фактичного успіху на олімпіадах відповідного рівня, а також і після вдумливого самостійного аналізу олімпіадних завдань попередніх років. Книга, яку читач тримає в руках, з успіхом може сприяти вирішенню обох цих завдань.

В.О. Тадеєв

Передмова автора

Метою цього посібника є допомога учням при підготовці (можливо, без допомоги вчителя) до участі в обласній чи Всеукраїнській математичній олімпіаді. Тому посібник орієнтується на задачі міських, обласних та національних олімпіад. При відборі задач автор виходив із власного досвіду проведення факультативних занять із розв'язування олімпіадних завдань в Житомирському державному університеті імені Івана Франка, Ліцеї №1 м. Житомира та Житомирському обласному педагогічному ліцеї. А з метою забезпечення достатньої кількості задач для факультативної роботи використано багато завдань, які пропонувалися на Київських, Всеукраїнських та Соросівських олімпіадах. Усього ж у посібнику подано 270 задач із повними розв'язаннями, понад 800 задач із відповідями та вказівками і 100 задач для самостійного розв'язування (без відповідей і без указівок). Як ілюстративний матеріал, наведено приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків за 1997–2002, 2009 та 2024 роки. При цьому в багатьох задачах акцентується увага не на самому розв'язанні, а на тому, як до нього можна прийти. До деяких задач на доведення, розв'язування яких не потребує особливих ідей, указівок не подається.

Оскільки третє видання книги доповнено новими задачами, то воно має певні відмінності від попередніх видань. Зокрема, змінено номери деяких задач та проведено стилістичне редагування.Крім того, істотно перегруповано задачі для самостійного розв'язування у другій частині. Цілком новими є доповнення, пов'язані з нерівностями Мюрхеда і Карамати в параграфах 14 і 31, а також варіанти завдань обласної та Всеукраїнської математичних олімпіад 2024-го року.

Поряд з номером кожної задачі в дужках указуються класи, для яких цю задачу можна пропонувати (проте у зв'язку з розбіжностями в навчальних програмах та зміною кількості класів цю вказівку потрібно коригувати). Для багатьох задач указується також, на яких олімпіадах і в якому році вони пропонувалися (клас зазначається на час проведення олімпіади). При цьому прийнято такі скорочення: ММО — Міжнародна математична олімпіада, УМО — Українська (Всеукраїнська) математична олімпіада, ВТЮМ — Всеукраїнський турнір юних математиків, КМО — Київська (міська) математична олімпіада, ОМО — обласна математична олімпіада, СМО — Соросівська математична олімпіада.

Для економії часу при проведенні занять математичного гуртка краще, щоб учні опрацювали теоретичний матеріал та задачі з розв'язаннями вдома, а під час занять розв'язували ті задачі, які подані в посібнику без розв'язань. Роботу з посібником варто поєднувати з роботою над рекомендованою літературою та опрацюванням завдань попередніх олімпіад. Актуальна інформація про різноманітні математичні змагання доступна на сайті Київських та Всеукраїнських олімпіад і турнірів із математики: *https://matholymp.com.ua.*

Корисним для підготовки до обласних та національних математичних олімпіад може бути журнал "У світі математики", в якому публікується інформація про Міжнародні та Всеукраїнські олімпіади, про математичні олімпіади Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. В цьому журналі публікуються також змістовні статті про специфічні підходи до розв'язування олімпіадних задач (окремі з яких теж можуть стати матеріалом для заняття математичного гуртка), а також розповіді про різноманітні новітні досягнення в математиці та про застосування сучасної математики в техніці, економіці, фінансовій сфері, природознавстві, соціальних науках тощо.

Засвоєння методів розв'язування олімпіадних задач вимагає від учнів напруженої, активної та кропіткої самостійної роботи. У цьому зв'язку варто завжди пам'ятати пораду відомого математика Дьордя Поя: *"Розв'язування задач — це практичне мистецтво, схоже на плавання, катання на лижах або на гру на фортепіано; навчитись його можна, тільки беручи приклад з кращих зразків та постійно практикуючись… Але знайте: якщо ви хочете навчитись плавати, то сміло заходьте у воду, а якщо хочете навчитись розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх*".

Зичу всім читачам успіхів, творчого задоволення, оригінальних ідей та красивих розв'язків.

Автор

Кожна розв'язана мною задача ставала зразком, який служив потім для розв'язування інших задач.

Рене Декарт

Частина I

Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач

Розв'язування олімпіадних завдань може стати основою для підготовки до майбутньої наукової діяльності, незважаючи на те, що ці задачі зазвичай не потребують знань, які виходять за межі шкільної програми. Такі задачі, як правило, сформульовані так, що вони не належать до жодного зі стандартних типів задач шкільного курсу математики. Тому розв'язування кожної з них потребує особливого підходу, знаходження якого вимагає від учня інтенсивної творчої праці. Вміння розв'язувати нестандартні задачі свідчить про глибоке володіння математичним апаратом, а це набагато важливіше, ніж тільки готові факти, запас яких завжди можна поповнити за допомогою різноманітних довідників.

При розв'язуванні нестандартних задач часто допомагають такі загальні підходи:

1) надати задачі іншого вигляду, більш зручного для розв'язування;

2) розглянути частковий, простіший випадок, а потім узагальнити ідею розв'язання;

3) припустити, що твердження задачі — хибне. Якщо з цього припущення отримаємо протиріччя, то це означатиме, що твердження задачі насправді є істинним — доведення від супротивного;

4) розбити задачу на декілька простіших підзадач;

5) узагальнити задачу. Часто дослідження більш загальної проблеми вимагає менших зусиль, ніж її часткового випадку — "парадокс винахідника".

У цій частині книги розглядаються деякі специфічні підходи до розв'язування нестандартних задач. Звичайно, найкращий спосіб для засвоєння певного методу розв'язування задач — це "відкрити" його самостійно. Але "відкривати велосипед" у XXI столітті — не зовсім раціонально, а для розв'язання нових проблем краще використовувати вже відомі методи.

§ 1. ІНДУКЦІЯ І МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Що таке ***індукція***? Найпростіша відповідь: перехід від окремого до загального. Розглянемо це на добре відомому прикладі.

✔ Задача 1.1 (9–11). Знайти формулу для суми

$$B_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Розв'язання. Обчислимо B_n за шести перших значень n. Маємо: $B_1 = 1, B_2 = 5, B_3 = 14, B_4 = 30, B_5 = 55, B_6 = 91$. Помітити закономірність важко. Проте нам відома формула для суми перших n натуральних чисел:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2} .$$

Позначимо $A_n = \frac{(n+1)n}{2}$ і порівняємо B_n з A_n. Для цього знайдемо їхнє відношення. $\frac{B_1}{A_1} = 1,\ \frac{B_2}{A_2} = \frac{5}{3},\ \frac{B_3}{A_3} = \frac{7}{3},\ \frac{B_4}{A_4} = \frac{9}{3},\ \frac{B_5}{A_5} = \frac{11}{3},\ \frac{B_6}{A_6} = \frac{13}{3}$.

Видно, що при перших n правильна рівність $\frac{B_n}{A_n} = \frac{2n+1}{3}$. Ця гіпотеза отримана *за індукцією*. Якщо вона правильна, то матимемо:

$$B_n = A_n \frac{(2n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Спробуємо довести нашу гіпотезу. Очевидно, що для її справдження достатньо, щоб $B_{n+1} - B_n = (n+1)^2$, або

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)^2 ,$$

у чому неважко переконатись безпосереднім обчисленням. Отже,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (1)$$ ■

Проаналізуємо, чому для довільного $n \in N$ справджується рівність (1)?

Цю рівність можна вважати ***рядом пронумерованих тверджень***:

$$T_1: \quad 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6},$$

$$T_2: \quad 1^2 + 2^2 = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6},$$

....

$$T_n: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$T_{n+1}: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

....

Чому всі ці твердження істинні?

По-перше, твердження T_1, T_2, T_3 ми перевірили (до речі, можна обмежитись T_1, якби рівність (1) вже була дана в готовому вигляді).

По-друге, з істинності твердження T_n випливає істинність твердження T_{n+1}.

Це нагадує вишикуваний ряд кісточок доміно: ви штовхаєте одну кісточку — вона збиває другу, друга — третю і так доти, доки не впадуть усі.

Така схема доведення ряду пронумерованих тверджень називається ***методом математичної індукції.*** При користуванні цим методом потрібно доводити дві теореми:

(Б)**:** *перше твердження, або кілька перших тверджень, є істинними;*

(П)**:** *з істинності довільно взятого твердження випливає істинність наступного.*

Зауважимо, що при доведенні теореми (П) можна користуватися істинністю кількох (можливо, всіх) попередніх тверджень.

Теорема (Б) називається ***базою індукції***, теорема (П) — ***індукційним переходом***.

Схеми доведення методом математичної індукції можуть відрізнятися. Найбільш поширена схема: (Б) — T_1, (П) — $T_n \to T_{n+1}$. Часто використовуються схеми: (Б) — T_1, (П) — $T_1, T_2, \ldots, T_n \to T_{n+1}$ або (Б) — T_1, T_2, (П) — $T_n \to T_{n+1}$.

Особливо зазначимо, що з істинності як завгодно великої кількості перших тверджень $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ще не випливає істинність твердження T_n при довільному $n \in N$. Наприклад, розглянувши перші члени послідовності $a_n = n^2 - n + 41$, $n \geq 1$, отримуємо: $a_1 = 41$, $a_2 = 43$,

$a_3 = 47$, ..., звідки можна зробити неправильний висновок, ніби всі члени цієї послідовності є простими числами. Але це не так: $a_{41} = 41^2$ є складеним числом.

Іноді для перевірки правдоподібних тверджень потрібно докласти неабияких зусиль. Наприклад, тривалий час залишалось неперевіреним припущення про те, що числа вигляду $F_n = 2^{2^n} + 1, n \in N$, є простими (вперше це припущення сформулював в XVII столітті відомий математик П'єр Ферма). Лише через кілька десятків років Леонард Ейлер показав, що при $n = 5$ отримуємо складене число $F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Метод математичної індукції в елементарній математиці застосовується до багатьох задач, серед яких можна виділити три важливі групи: ***доведення рівностей, доведення нерівностей, задачі на подільність.*** Також можуть бути комбіновані задачі. Розглянемо кілька прикладів.

✔ **Задача 1.2 (9–10).** Довести, що для довільного $n \in N$ та довільних чисел $a, b \in R$ виконується рівність:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = \frac{n}{a(a+nb)}. \qquad (2)$$

Розв'язання. При $n = 1$ твердження очевидне.

Покажемо, що з істинності рівності (2) (твердження T_n) випливає істинність твердження T_{n+1}, тобто що

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} = \frac{n+1}{a(a+(n+1)b)}.$$

Перетворимо ліву частину твердження T_{n+1}, використовуючи твердження T_n:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} = \frac{n}{a(a+nb)} + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} =$$

$$= \frac{na + n(n+1)b + a}{a(a+nb)(a+(n+1)b)} = \frac{(n+1)a + n(n+1)b}{a(a+(n+1)b)(a+nb)} = \frac{n+1}{a(a+(n+1)b)}.$$

За принципом математичної індукції, рівність (2) правильна для довільного $n \in N$. ■

✔ **Задача 1.3 (9–10).** Для довільного $n \in N$ довести нерівність

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \qquad (3)$$

Розв'язання. При $n=1$ маємо: $\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Покажемо, що з істинності нерівності (3) (твердження T_n) випливає істинність твердження T_{n+1}, тобто нерівність

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\cdot (2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Оцінимо ліву частину цієї нерівності, використовуючи оцінку (3). Маємо:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\cdot (2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Очевидно, що для істинності твердження T_{n+1} достатньо, щоб справджувалась нерівність $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, яка рівносильна при $n \in N$ очевидній нерівності $(2n+1)(2n+3) \le (2n+2)^2$.

За принципом математичної індукції, нерівність (3) правильна для довільного $n \in N$. ■

✔ **Задача 1.4 (9).** Довести, що при довільному $n \in N$ число $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9.

Розв'язання. При $n=1$ маємо очевидне твердження T_1: число $4+15-1=18$ ділиться на 9.

Покажемо, що з твердження T_n (твердження задачі) випливає твердження T_{n+1}: "$4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ ділиться на 9". Маємо:

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4\cdot 4^n + 15n + 15 - 1 =$$
$$= (4^n + 15n - 1) + 3\cdot 4^n + 15 = (4^n + 15n - 1) + 3\cdot (4^n + 5).$$

Тому з урахуванням істинності твердження T_n, для істинності твердження T_{n+1} достатньо, щоби при довільному $n \in N$ число $(4^n + 5)$ ділилося на 3. Це твердження можна доводити окремо так само методом математичної індукції, але є простіший шлях: $4^n = (3+1)^n$, тому при діленні на 3 дає остачу 1, звідки $(4^n + 5)$ ділиться на 3.

За принципом математичної індукції, твердження задачі істинне для довільного $n \in N$. ■

✔ **Задача 1.5 (ОМО[1])-1996, 11).** Послідовність $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ побудована таким чином, що $a_0 = 0, a_1 = k, a_{n+2} = k^2 a_{n+1} - a_n$ для всіх $n \geq 0$ (k — деяке натуральне число). Довести, що при довільному $n \geq 0$ число $(a_{n+1}^2 + a_n^2)$ ділиться на число $(a_{n+1} \cdot a_n + 1)$.

Розв'язання. Знайдемо перші члени послідовності та перевіримо твердження задачі при перших значеннях n. Маємо: $a_2 = k^3, a_3 = k^5 - k$, $a_4 = k^7 - 2k^3$. Результати зручно записати у вигляді таблиці:

n	$a_{n+1}^2 + a_n^2$	$a_{n+1} \cdot a_n + 1$
0	$k^2 + 0^2 = k^2$	1
1	$k^6 + k^2 = k^2(k^4 + 1)$	$k^4 + 1$
2	$k^{10} - k^6 + k^2 = k^2(k^8 - k^4 + 1)$	$k^8 - k^4 + 1$

Виникає гіпотеза, що при кожному n = 0; 1; 2; ... виконується рівність

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = k^2(a_{n+1} \cdot a_n + 1)$$

(твердження T_n). Оскільки твердження T_0, T_1, T_2 правильні, то достатньо довести, що з твердження T_n випливає твердження T_{n+1}, тобто

$$a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 = k^2(a_{n+2} \cdot a_{n+1} + 1).$$

Маємо:

$$\begin{aligned}a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 &= (k^2 a_{n+1} - a_n)^2 + a_{n+1}^2 = k^4 a_{n+1}^2 - 2k^2 a_{n+1} a_n + \\ &+ (a_n^2 + a_{n+1}^2) = k^4 a_{n+1}^2 - 2k^2 a_{n+1} \cdot a_n + k^2(a_{n+1} \cdot a_n + 1) = \\ &= k^2(k^2 a_{n+1}^2 - a_{n+1} a_n + 1) = k^2(a_{n+1}(k^2 a_{n+1} - a_n) + 1) = \\ &= k^2(a_{n+1} a_{n+2} + 1).\end{aligned}$$

За принципом математичної індукції, твердження T_n правильне при довільному n = 0; 1; 2; ..., що рівносильно твердженню задачі. ■

[1]) Тут і далі, в частині 1 зі скороченням ОМО подані завдання, що пропонувались на Житомирській обласній математичній олімпіаді.

✔ **Задача 1.6 (9–11).** Довести, що в опуклому n-кутнику не можна вибрати більше n діагоналей так, щоб будь-які дві з них мали спільну точку.

Розв'язання. Доведемо більш загальне твердження: в опуклому n-кутнику не можна вибрати більше n сторін та діагоналей так, щоб будь-які дві з них мали спільну точку. При $n = 3$ твердження очевидне. Припустимо, що це твердження правильне для довільного опуклого n-кутника та, використовуючи це, доведемо його для довільного $(n+1)$-кутника.

Припустимо, що для $(n+1)$-кутника це твердження не є правильним. Якщо з кожної вершини $(n+1)$-кутника виходить не більше двох вибраних сторін чи діагоналей, то всього їх вибрано не більше ніж $n+1$. Тому з деякої вершини A виходить хоча б три вибраних сторони чи діагоналі AB, AC, AD. Нехай AC лежить між AB і AD. Оскільки будь-яка сторона чи діагональ, яка виходить з точки C і відмінна від CA, не може одночасно перетинати AB і AD, то з точки C виходить лише одна вибрана діагональ CA.

Відкинувши точку C разом з діагоналлю CA, отримаємо опуклий n-кутник, в якому вибрано більше n сторін та діагоналей, будь-які дві з яких мають спільну точку. Отже, маємо протиріччя з припущенням, що твердження задачі правильне для довільного опуклого n-кутника.

Отже, для $(n+1)$-кутника це твердження не є правильним. За принципом математичної індукції, твердження правильне для довільного опуклого n-кутника. ■

✔ **Задача 1.7 (УМО-1965, 10).** У шаховому турнірі брало участь n шахістів. Кожний шахіст зустрічався з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилась унічию. Довести, що за результатами турніру всіх шахістів можна перенумерувати у такому порядку, щоб кожен попередній був переможцем наступного.

Розв'язання. При $n = 1$ та при $n = 2$ твердження задачі очевидні. Позначимо загальне твердження задачі через T_n.

Доведемо, що з істинності тверджень T_1, T_2, ..., T_n випливає істинність твердження T_{n+1}. Нехай у шаховому турнірі брало участь $n+1$ шахістів, кожні два шахісти грали між собою рівно один раз, причому жодна партія не закінчилась унічию. Можливі випадки.

1) Є шахіст A, який переміг усіх інших учасників турніру. Тоді з істинності твердження T_n випливає, що цих шахістів можна перенумерувати в такому порядку, щоб кожен попередній був переможцем наступного. Залишається записати цей список після шахіста A.

2) Такого шахіста A немає. Розглянемо тоді шахіста B, який має і виграші, і програші (такий шахіст обов'язково існує). Нехай він виграв у m шахістів. З істинності твердження T_m випливає, що цих шахістів можна перенумерувати (список 1) в такому порядку, щоб кожен попередній був переможцем наступного. Також з істинності твердження T_{n-m} випливає, що $n-m$ шахістів, яким програв шахіст B, можна перенумерувати (список 2) у такому порядку, щоб кожен попередній був переможцем наступного. Тоді потрібну нумерацію $n+1$ шахістів можна записати так: список 2, шахіст B, список 1.

За принципом математичної індукції, твердження задачі правильне для довільного $n \in N$. ■

✔ **Задача 1.8 (2 СМО-1995, 10).** Чи можливо множину натуральних чисел, відмінних від 1, розбити на дві непорожні підмножини таким чином, щоб для будь-яких чисел m і n (можливо, рівних) з однієї з підмножин число $mn-1$ належало тій самій підмножині?

Розв'язання. Припустимо, що можливо. Нехай A і B — такі підмножини, причому $2 \in A$. Очевидно, що числа m і m^2-1 належать одній підмножині. Тоді послідовно отримуємо: $2^2-1=3 \in A,\ 3^2-1=8 \in A$, $2 \cdot 8-1=15 \in A$. Але $15=4^2-1$, тому $4 \in A$. Аналогічно отримуємо $2 \cdot 3-1=5 \in A,$ $2 \cdot 4-1=7 \in A,$ $4 \cdot 9-1=35 \in A,$ тому $6 \in A$. Виникає припущення, що всі числа належать множині A. Щоб довести це, спочатку методом математичної індукції покажемо, що при довільному $n \in N$ непарні числа $2^n+1,\ 2^n+3,\ 2^n+5, \ldots,\ 2^{n+1}-1$ та число 2^n належать множині A (твердження T_n).

База індукції доведена.

Покажемо, що з тверджень $T_1,\ T_2, \ldots,\ T_n$ випливає твердження T_{n+1}, тобто, що непарні числа $2^{n+1}+1,\ 2^{n+1}+3,\ 2^{n+1}+5,\ \ldots,\ 2^{n+2}-1$ і число 2^{n+1} також належать множині A.

Нехай a — таке непарне число, що $2^{n+1}+1 \le a \le 2^{n+2}-1$. Тоді існують такі натуральне $p \le n$ і непарне k, що $a=2^p \cdot k-1$. Якщо $k \ge 3$, то $1 \le p \le n$, $k < 2^{n+1}$, і за припущенням, $2^p \in A, k \in A$, тому $a \in A$. Якщо ж $k = 1$, то $a = 2^{n+2} - 1 = 2^n \cdot 4 - 1 \in A$, тому що $4 \in A$, і за припущенням, $2^n \in A$.

Доведемо, що число 2^{n+1} належить множині A.

Якщо n — парне число, то 2^{n+1} при діленні на 3 дає остачу 2, тобто $2^{n+1} = 3k - 1$, причому $k < 2^{n+1}$ — деяке непарне число (бо інакше число 2^{n+1} мало би бути непарним). Враховуючи, що $3 \in A$ і, за припущенням, $k \in A$, отримуємо, що $2^{n+1} \in A$.

Якщо ж n — непарне число, то 2^{n+2} при діленні на 3 дає остачу 2, тобто $2^{n+2} = 3k - 1$, причому $k < 2^{n+1}$ — деяке непарне число. Тому аналогічно отримуємо $2^{n+2} \in A$.

Оскільки $2^n \in A$, $2^{n+2} \in A$, то також число $2^{n+2} \cdot 2^n - 1 = 2^{n+2} \cdot 2^n - 1 = \left(2^{n+1}\right)^2 - 1 \in A$, а тому й $2^{n+1} \in A$.

За принципом математичної індукції, всі непарні числа, відмінні від 1, та числа вигляду 2^n належать множині A.

Нехай m — парне число. Тоді непарне число $m^2 - 1 \in A$, за доведеним вище, а тому $m \in A$.

Отже, всі натуральні числа, відмінні від 1, належать множині A і тому B — порожня множина.

Відповідь: указане розбиття є неможливим. ■

Задачі для самостійного розв'язування

✏ **Задача 1.9 (8–9).** У квадраті 128×128 вирізали одну клітинку 1×1. Довести, що отриману фігуру можна замостити фігурами, які є кутиками з трьох клітинок 1×1.

✏ **Задача 1.10 (9).** Довести що число, записане 243 одиницями, ділиться на 243.

✏ **Задача 1.11 (КМО-1970, 9).** Довести, що при довільному натуральному n число $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ ділиться на 8.

✏ **Задача 1.12 (9–10).** Довести, що при довільному $n \in N$ число $2^{3^n} + 1$ ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n+2}.

✏ **Задача 1.13 (9–10)** (підсилення задачі 1.3). Довести нерівність:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

✏ **Задача 1.14 (9–10).** Довести, що при всіх додатних x і при довільному натуральному n справджується нерівність:
$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\ge n+1.$$

✏ **Задача 1.15 (9–10).** Довести, що при довільному натуральному $n\ge 2$ справджується нерівність:
$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

✏ **Задача 1.16* (9–11).** Довести, що серед довільних 2^{n+1} натуральних чисел можна вибрати рівно 2^n чисел, сума яких ділиться на 2^n.

✏ **Задача 1.17 (9–10).** Довести, що при всіх натуральних m і n справджується нерівність $2^{m+n-2}\ge mn$.

✏ **Задача 1.18 (9–10).** Відомо, що $x+\dfrac{1}{x}$ — ціле число. Довести, що при довільному $n\in N$ число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ теж ціле.

✏ **Задача 1.19 (9–11).** Довести, що при всіх натуральних n справджується нерівність:
$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

✏ **Задача 1.20 (9–10).** Довести, що число $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1995}$ можна подати у вигляді $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, $a, b\in Z$, причому $3a^2-2b^2=1$.

✏ **Задача 1.21 (9–10).** Для всіх натуральних $n\ge 2$ довести нерівність:
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

✏ **Задача 1.22 (ОМО-1995, 10).** Про дійсне число k та послідовність дійсних чисел $u_0; u_1; u_2; \ldots$ відомо, що $u_0=1$, $u_{1995}=100$, $u_1\cdot u_2>0$, $u_{n-1}\cdot u_{n+1}=k\cdot u_n$ для всіх натуральних n. Знайти k.

✏ **Задача 1.23 (УМО-1967, 10).** Довести, що
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$
(тут знак кореня вживається рівно n разів).

✏ **Задача 1.24 (9–10).** Обчислити суму:

1) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$; 2) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.

✏ **Задача 1.25 (9–10).** Довести, що при довільному $n\in N$ справджується рівність: $1\cdot 9+2\cdot 27+3\cdot 81+\ldots+n\cdot 3^{n+1}=\dfrac{(2n-1)\cdot 3^{n+2}+9}{4}$.

✏ **Задача 1.26 (11).** На площині дано $2n + 1$ точок, які є вершинами деякого опуклого $(2n + 1)$-кутника. Побудувати $(2n + 1)$-кутник, для якого ці точки є серединами сторін.

✏ **Задача 1.27 (11).** Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}$ задана рекурентним способом:

$$a_1=a_2=1 \text{ і } a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{2^n}$$

для всіх $n\in N$. Довести, що $a_n<3$ для довільного $n\in N$.

✏ **Задача 1.28 (9–10).** Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентним способом: $a_1=1$, $a_2=5$ і $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ для всіх $n\in N$. Довести, що для довільного $n\in N$ виконується рівність: $a_n=3^n-2^n$.

✏ **Задача 1.29 (10–11).** Довести, що n площин ділять простір не більше, ніж на $\dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ частин.

✏ **Задача 1.30 (УМО-1981, 9).** Після піднесення до степеня та зведення подібних членів число $\left(\sqrt{13}-1\right)^{1981}$ зводиться до вигляду $a+b\sqrt{13}$, де a, b — цілі числа. Довести, що числа a і b діляться на 2^{1980}.

✏ **Задача 1.31 (5 СМО-1998, 9).** Нехай $a_1; a_2; \ldots; a_n$ — попарно різні натуральні числа.

1) Довести нерівність $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\ge(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$.

2) Знайти всі набори $a_1; a_2; \ldots; a_n$, для яких справджується рівність.

✏ **Задача 1.32 (5 СМО-1998, 9).** У кожній вершині опуклого 1998-кутника розміщені жетони, на кожному з яких написано ціле число (на різних жетонах числа можуть бути і різними, і однаковими). Сума всіх цих чисел дорівнює 1. Вибирають вершину і збирають жетони, рухаючись проти годинникової стрілки доти, доки сума чисел на зібраних жетонах додатна. Чи можна вибрати вершину так, щоб, стартуючи з неї, зібрати всі жетони?

✏ **Задача 1.33 (5 СМО-1998, 10).** Про функцію f, яка визначена на множині всіх дійсних чисел, відомо, що:

1) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ для $0 \le x \le 2$;

2) $f(x)=f(x+2)$ для всіх $x \in R$.

Довести, що для дійсних чисел $x_1; x_2; \ldots; x_n$, для яких $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, справджується нерівність

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \ge 1.$$

✏ **Задача 1.34 (УМО-2000, 10–11).** У деякий нульовий момент часу в початку прямокутної системи координат Oxy знаходиться вірус грипу. Через одну хвилину він ділиться на чотири таких самих віруси, кожний з яких переміщується на одиницю довжини: один — вище, один — нижче, один — лівіше і один — правіше в системі координат. Таке перетворення відбувається через кожну хвилину з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються. Розглянемо такий процес від початкового (нульового) моменту часу до моменту 2000 хвилин включно.

1) Скільки разів на протязі інтервалу часу від моменту 1 хвилина включно до моменту 2000 хвилин включно загальна кількість вірусів буде набувати свого мінімального значення на цьому інтервалі часу?

2) Скільки вірусів будуть існувати в момент часу 2000 хвилин (одразу після взаємознищення вірусів у цей момент часу)?

✏ **Задача 1.35 (8–9).** Довести, що коли n точок не лежать на одній прямій, то серед прямих, які їх сполучають, не менше n різних.

✏ **Задача 1.36 (2 СМО-1995, 10).** На прямій вибрали n різних точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Нехай M — множина середин відрізків A_iA_j, $1 \le i < j \le n$. З якої найменшої кількості різних точок може складатися множина M?

✏ **Задача 1.37 (УМО-1971, 10).** Кожне з чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k$ є сумою квадратів двох цілих чисел. Довести, що добуток $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$ також є сумою квадратів двох цілих чисел.

Вказівки та відповіді до задач

1.9. *Вказівка*: провести індукцію по квадратах $2^n \times 2^n$. **1.10.** *Вказівка*: $243 = 3^5$, провести індукцію по числах з 3^n одиниць. **1.14.** *Вказівка*: перевірити нерівність при $n = 1$, $n = 2$ та провести індукцію від n до $n + 2$). **1.16.** *Вказівка*: індукційний перехід проводиться так: розіб’ємо 2^{n+1} чисел на дві групи по 2^n чисел в кожній. За припущенням, в кожній із цих груп можна вибрати по 2^{n-1} чисел, сума яких ділиться на 2^{n-1}. Потім з 2^n чисел, які залишилися, можна вибрати третій набір з 2^{n-1} чисел, сума яких ділиться на 2^{n-1}. Нехай суми чисел у вибраних наборах дорівнюють $2^{n-1}a$, $2^{n-1}b$, $2^{n-1}c$. Серед чисел a, b, c є два числа однакової парності. Відповідні їм набори об’єднуємо в один набір з 2^n чисел, сума яких ділиться на 2^n. **1.20.** *Вказівка*: провести індукцію по непарних показниках степеня від m до $m + 2$. **1.21.** *Вказівка*: довести точнішу нерівність: а саме, що ліва частина нерівності не перевищує $1 - \frac{1}{n}$. **1.22.** *Вказівка*: покажіть, що послідовність періодична. **1.24.** *Відповідь*: 1) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; 2) $n^2(2n^2 - 1)$. **1.26.** *Вказівка*: при доведенні кроку індукції від $2n + 1$ точки до $2n + 3$ точок $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{2n+3}$ використати припущення індукції стосовно точок $A_1, A_2. \ldots, A_{2n}, A$, де A — четверта вершина паралелограма $A_{2n+1}A_{2n+2}A_{2n+3}A$. **1.27.** *Вказівка*: довести індукцією від n до $n + 2$ більш загальне твердження: $a_n < 3 - \frac{12}{2^n}$. **1.30.** *Вказівка*: розгляньте послідовності таких цілих чисел a_n, b_n, для яких $\left(\sqrt{13} - 1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{13}$. Тоді $a_{n+1} = 12a_{n-1} - 2a_n$, $b_{n+1} = 12b_{n-1} - 2b_n$. **1.31.** *Відповідь*: 2) при $a_k = k$, $k = 1; 2; \ldots; n$. **1.32.** *Вказівка*: при доведенні індуктивного переходу деякі дві сусідні вершини (такі, що в першій із них при русі проти годинникової стрілки записано додатне число) об’єднайте в одну. **1.33.** *Вказівка*: доведіть більш загальну нерівність $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq\ \geq f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Схема доведення: (Б) — $T_1; T_2$, (П) — $T_2; T_n \to T_{n+1}$. **1.34.** *Вказівка*: доведіть, що через $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$ хвилин, $k_1 > k_2 > \ldots > k_m \geq 0 \geq 0$, на площині після взаємознищення залишиться 4^m вірусів. *Відповідь*: 1) 11 разів; 2) 4096 вірусів. **1.36.** *Вказівка*: у випадку, коли координати даних точок утворюють арифметичну прогресію, множина M складається рівно з $2n - 3$ різних точок. Доведіть методом математичної індукції, що з меншої кількості точок множина M складатись не може. *Відповідь*: $2n - 3$. **32.30.** *Вказівка*: використайте рівність $\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right) = \\ = \left(a_1a_2 - b_1b_2\right)^2 + \left(a_1b_2 + b_1a_2\right)^2$.

§ 2. ПІДРАХУНОК ДВОМА СПОСОБАМИ

Цей метод застосовується не лише при розв'язуванні олімпіадних задач. Зокрема його використовують при складанні рівнянь для знаходження невідомих величин у так званих текстових (або сюжетних) задачах.

✔ **Задача 2.1.** Знайти кількість діагоналей опуклого n-кутника.

Розв'язання. З кожної вершини виходять $(n-3)$ діагоналі. Помноживши їх на кількість вершин, отримаємо $n(n-3)$. Але при такому підрахунку кожна діагональ рахується двічі. Тому кількість діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

✔ **Задача 2.2. (ОМО-1997, 10).** За круглим столом сидять 30 учнів. Кожен із них або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун. При опитуванні 12 учнів сказали, що рівно один з їхніх сусідів брехун, а решта сказали, що обидва сусіди — брехуни. Скільки брехунів сидять за столом?

Розв'язання. Проаналізуємо відповіді учнів. Відповіді залежать від того, яким є сам учень і хто його сусіди. Можливі такі розміщення по трійках: БПБ, БПП, ППБ, ППП, БББ, ПБП, ББП, ПББ. Але розміщення БББ та ПБП неможливі внаслідок умови, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун, а розміщення ППП не було, оскільки не було відповіді: «Немає жодного брехуна». При п'яти можливих розміщеннях відповіді були такі: БПБ — 2, БПП — 1, ППБ — 1, ББП — 2, ПББ — 2. Неважко помітити, що в кожному випадку опитуваний учень правильно називав кількість брехунів у трійці учнів, усередині якої він сидить. При цьому кожен брехун називався 3 рази — собою та своїми двома сусідами. В усіх відповідях згадувалося $12 \cdot 1 + 18 \cdot 2 = 48$ брехунів. Отже, загальна кількість брехунів дорівнює 48 : 3 = 16. ■

✔ **Задача 2.3. (ОМО-2001, 10–11).** Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин — у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний (білий — на чорний, а чорний — на білий) у неї та ще у двох сусідніх із нею вершин. Чи можливо за декілька таких кроків зафарбувати всі вершини початкового 2001-кутника в білий колір?

Розв’язання. Припустимо, що таке фарбування можливе. Помічаємо, що після кожного кроку кількість чорних вершин або змінюється на 1, або зменшується на 3. Оскільки на початку є 1 чорна вершина, а в кінці — жодної, то кількість таких кроків має бути непарним числом.

Позначимо вершини початкового багатокутника через A_1, A_2, ..., A_{2001}. Нехай у процесі перефарбовування вершина A_k $(k = 1,2,...,2001)$ обиралася a_k разів за “центральну”. Тоді загальна кількість кроків $S = a_1 + a_2 + ... + a_{2001}$ має бути непарним числом.

Нехай на початку описаного процесу вершину A_1 пофарбовано в чорний колір. Тоді вершина A_1 змінювала свій колір непарну кількість разів, а всі інші вершини — парну кількість. З іншого боку, сума $a_1 + a_2 + a_3$ дорівнює кількості змін кольору вершини A_2, сума $a_4 + a_5 + a_6$ дорівнює кількості змін кольору вершини A_5 ,..., сума $a_{1999} + a_{2000} + a_{2001}$ — кількості змін кольору вершини A_{2000}. Тому загальна кількість кроків

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + ... + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001})$$

має бути парним числом. Прийшли до протиріччя.

Отже, перефарбування за допомогою описаного процесу неможливе. ■

Задачі для самостійного розв’язування

✏ **Задача 2.4. (7–8).** Чи можна сполучити 5 міст дорогами так, щоб кожне місто було сполучене з трьома іншими?

✏ **Задача 2.5. (7–8).** У кожній клітинці прямокутної таблиці розміром $m \times k$ клітинок написано число. Сума чисел у кожному рядку і в кожному стовпчику дорівнює 1. Чи обов’язково $m = k$?

✏ **Задача 2.6 (8–9).** Знайти суму коефіцієнтів багаточлена

$$\left(x^3 - 2x^2 + x + 1\right)^{30}.$$

✏ **Задача 2.7. (7–9).** У місті відмінників від кожної площі відходять рівно 5 вулиць. Довести, що число площ є парним, а число вулиць ділиться на 5.

✏ **Задача 2.8 (7–8).** У класі 21 лижник, 14 баскетболістів та 11 плавців. Відомо, що кожен спортсмен займається двома видами спорту. Скільки в класі спортсменів?

✏ **Задача 2.9 (ОМО-2001, 8).** Турист пройшов половину шляху між пунктами A і B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B — зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до A він 2/3 цього шляху пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямку від A до B, а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. Знайти відстань між пунктами A і B, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від A до B. (Вказана середня швидкість дорівнює відношенню відстані від A до B до всього часу руху в напрямку від A до B.)

✏ **Задача 2.10 (ОМО-2000, 8).** На дні озерця б'ють з постійною потужністю джерела. Стадо з 12 слонів випиває озерце за 4 хвилини, а стадо з 9 слонів — за 6 хвилин. Певного дня до озерця підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють усю воду з цього озерця? (Об'єм води в озерці на початку водопою є завжди однаковим.)

✏ **Задача 2.11 (8).** З пунктів M і N одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи A і B. При зустрічі виявилось, що пішохід A пройшов на 6 км більше. Пішохід A прийшов у пункт N через 4,5 години, а пішохід B у пункт M — через 8 годин після зустрічі. Знайти відстань MN.

✏ **Задача 2.12 (ОМО-2000, 10).** Сільський гіпнотизер Іван Карпович розводить індиків і курей. Внаслідок його експериментів десята частина індиків вважає, що вони — кури, а десята частина курей вважає, що вони — індики. Якщо брати загалом, то п'ята частина птахів Івана Карповича вважає себе індиками. А якою насправді є частка індиків у його пташнику?

✏ **Задача 2.13 (9–10).** Від залізничної станції до пляжу 4,5 км. Хлопчик вирушив від станції до пляжу одночасно з рейсовим автобусом. Через 15 хвилин хлопчик зустрів автобус, який повертався від пляжу, і встиг ще пройти 9/28 км від місця першої зустрічі з автобусом, коли його наздогнав той самий автобус, який доїхав до станції і знову повертався до пляжу. Знайти швидкості хлопчика і автобуса, вважаючи їх постійними, а також, що ні хлопчик, ні автобус не зупинялись, але біля пляжу і на станції автобус щоразу зупинявся на 4 хвилини.

✏ **Задача 2.14 (9–10).** Кілька робітників виконують певну роботу за 14 днів. Якби їх було на 4 більше і кожний працював щодня на 1 год довше, то ту саму роботу було б виконано за 10 днів. Якби їх було ще на 6 чоловік більше і кожний працював би щодня ще на 1 год довше, то цю роботу було б виконано за 7 днів. Скільки було робітників і скільки годин протягом дня вони працювали?

✏ **Задача 2.15 (8–9).** У пробірці знаходяться марсіанські амеби трьох типів: A, B, C. Дві амеби будь-яких двох різних типів можуть злитись в одну амебу третього типу. Після деякої кількості таких злиттів у пробірці виявилась одна амеба. Який її тип, якщо відомо, що спочатку амеб типу A було 20, типу B — 21, а типу C — 22?

✏ **Задача 2.16 (8).** Турист вийшов із табору о 15-ій годині і повернувся о 21-ій годині тим самим шляхом. Яку відстань він пройшов, якщо він не зупинявся, а його швидкість по рівній дорозі дорівнювала 4 км/год, при русі вгору — 3 км/год, при русі вниз — 6 км/год?

✏ **Задача 2.17 (8–9).** У двох посудинах знаходився розчин солі різної концентрації. Об'єм першої посудини на 3 л менший, ніж об'єм другої. З кожної посудини взяли одночасно по 2 л розчину і взятий з першої посудини розчин перелили в другу посудину, а з другої — в першу. Після цього концентрації розчинів в обох посудинах зрівнялися. Скільки літрів розчину було в обох посудинах?

✏ **Задача 2.18 (9–10).** З пункту A в пункт B через однакові проміжки часу вирушають три автомобілі. Вони прибувають до пункту B одночасно, потім вирушають до пункту C, який знаходиться на відстані 120 км від пункту B. Перший автомобіль прибуває туди через годину після другого. Третій автомобіль, прибувши до C, відразу ж повертає назад і за 40 км від C зустрічає першого. Визначити швидкість першого автомобіля, вважаючи, що на всій трасі швидкість кожної машини була сталою.

✏ **Задача 2.19 (4 СМО-1997, 10).** У будинку живуть 200 мешканців. Деякі з них дружать між собою. Кількість пар друзів у кожній трійці мешканців є непарною. Знайти найменшу можливу кількість пар друзів серед мешканців будинку.

Вказівки та відповіді до задач

2.4. *Відповідь*: ні. **2.5.** *Відповідь*: так. **2.6.** *Відповідь*: 1. **2.8.** *Відповідь*: 23. **2.9.** *Відповідь*: 12 км. **2.10.** *Відповідь*: 12 хв. **2.11.** *Відповідь*: 42 км. **2.12.** *Відповідь*: індики становлять восьму частину птахів. **2.13.** *Відповідь*: 3 км/год і 45 км/год. **2.14.** *Відповідь*: 20 робітників і 6 год. **2.15.** *Відповідь*: тип B. **2.16.** *Відповідь*: 24 км. **2.17.** *Відповідь*: 3 л та 6 л. **2.18.** *Відповідь*: 30 км/год. **2.19.** *Вказівка*: розгляньте мешканців A і B, які не дружать між собою, та розбийте інших мешканців на дві групи: тих, які дружать з A, і тих, які дружать з B. У цих групах мешканці попарно дружать між собою. *Відповідь*: 9900.

Зміст

Частина II
Приклади завдань математичних олімпіад

В оформленні обкладинки використано гравюру з 4-го тому «Учені XVII століття» знаменитої науково-популярної енциклопедії Луї Фіг'є (Louis Figuier) «Життя славетних учених від античності до XIX століття» («Vies Des Savants Illustres Depuis l'Antiquité Jusqu'au Dix-Neuvième Siècle), виданого в Парижі у 1869 р. Гравюра передає історичний момент зустрічі Рене Декарта зі своїм майбутнім наставником Ісааком Бекманом біля афіші з умовами математичних задач.