ЗАДАЧІ

Розділ 1

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПЛОЩИНІ

Позначення: a, b, c — сторони трикутника; A, B, C — кути, що лежать навпроти цих сторін, відповідно; m_a — медіана сторони a; l_A — бісектриса кута A; h_a — висота, опущена на сторону a; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола; P — периметр багатокутника.

Довжиною бісектриси зовнішнього кута A' відносно внутрішнього кута A трикутника називається відрізок бісектриси, що сполучає точку A і точку перетину бісектриси з продовженням сторони a.

Відношення площ двох трикутників, що мають спільний кут, дорівнює відношенню добутків сторін, що утворюють цей спільний кут.

Формула, що виражає довжину медіани трикутника через довжини його сторін: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Якщо в многокутник можна вписати коло, то його площа $S = pr$, де $P = \frac{p}{2}$ — півпериметр многокутника.

Площа чотирикутника: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, де d_1 і d_2 — довжини його діагоналей, а α — кут між ними.

При розв'язанні планіметричних задач доводиться застосовувати похідні пропорції.

Якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd}$.

Якщо $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}$, то

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n} = \frac{c}{d} \text{ і } \frac{m_1 a_1 \pm m_2 a_2 \pm m_3 a_3 \pm \ldots \pm m_n a_n}{m_1 b_1 \pm m_2 b_2 \pm m_3 b_3 \pm \ldots \pm m_n b_n} = \frac{c}{d},$$

де комбінація знаків береться будь-якою, але однаковою для чисельника і знаменника.

1.1. Навколо правильного трикутника ABC описано коло O радіусом R. Коло O_1 дотикається до двох сторін AB і BC трикутника і кола O. Знайдіть відстань від центра кола O_1 до вершини A.

1.2. Висота рівнобедреного трикутника з кутом α при основі більша від радіуса вписаного в нього кола на m. Визначте основу трикутника і радіус описаного кола.

1.3. Доведіть, що радіус кола, яке ділить навпіл сторони трикутника, вдвічі менший від радіуса кола, описаного навколо цього трикутника.

1.4. У трикутнику сполучені основи бісектрис. Знайдіть відношення площі даного трикутника до площі трикутника, що утворився, якщо сторони даного трикутника співвідносяться як $p : q : l$.

1.5. Дано кути A, B, C трикутника ABC. Нехай коло дотикається до сторін BC, AC і AB трикутника відповідно в точках A_1, B_1, C_1. Знайдіть відношення площі трикутника $A_1B_1C_1$ до площі трикутника ABC.

1.6. Дано трикутник ABC, кути B і C якого співвідносяться як 3 : 1, а бісектриса кута A ділить площу трикутника у співвідношенні 2 : 1. Знайдіть кути трикутника.

1.7. Знайдіть довжину l бісектриси зовнішнього кута відносно кута A трикутника, якщо задано його сторони b і c і кут A між ними ($b \neq c$).

1.8. У трикутнику площею S з гострим кутом α при вершині A бісектриса кута A в p разів менша від радіуса описаного і в q разів більша від радіуса вписаного круга. Знайдіть сторону трикутника, що лежить навпроти кута A.

1.9. У трикутнику ABC проведені бісектриси AM і BN. Нехай O — точка їх перетину. Відомо, що

$$AO : OM = \sqrt{3} : 1, \text{ а } BO : ON = 1 : \left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Знайдіть кути трикутника.

1.10. Всередині кута α узято точку M. Її проекції P і Q на сторони кута віддалені від вершини O кута на відстані $OP = p$ і $OQ = q$. Знайдіть відстані MP і MQ від точки M до сторін кута.

1.11. У гострокутному трикутнику дві висоти дорівнюють 3 см і $2\sqrt{2}$ см, а їхня точка перетину ділить третю висоту у співвідношенні 5 : 1, рахуючи від вершини трикутника. Знайдіть площу трикутника.

1.12. У трикутнику ABC різниця кутів B і C дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Визначте кут C, якщо відомо, що сума сторін AC і AB становить k, а висота, опущена з вершини A, дорівнює h.

1.13. У трикутнику ABC є точка O, така, що кути ABO, BCO і CAO дорівнюють α. Виразіть $\operatorname{ctg}\alpha$ через площу трикутника і його сторони.

1.14. У трикутнику ABC дано різницю φ кутів A і B ($\varphi = A - B > 0$). Відомо, що висота, опущена з C на AB, дорівнює $BC - AC$. Знайдіть кути трикутника.

1.15. Дано довжини висот $AA_1 = h_a$ і $BB_1 = h_b$ трикутника ABC і довжина $CD = l$ бісектриси кута C. Знайдіть кут C.

1.16. У трикутник з основою a і протилежним кутом α вписано коло. Через центр цього кола і кінці основи трикутника проведено друге коло. Знайдіть його радіус.

1.17. Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, то центр кола, вписаного в цей трикутник, і точка перетину його медіан лежать на прямій, паралельній середній за довжиною стороні трикутника.

1.18. У трикутнику ABC радіус вписаного кола дорівнює r, сторона BC більша від r у k разів, а висота, опущена на цю сторону, більша від r вчетверо. Знайдіть півпериметр p, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, сторони b і c.

1.19. Кути C, A, B трикутника ABC утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2. Нехай O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, K — центр зовнішньовписаного кола, що дотикається до сторони AC, L — центр зовнішньовписаного кола, що дотикається до сторони BC. Доведіть, що трикутники ABC і OKL подібні.

1.20. У трикутнику ABC кути A, B і C утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2. Доведіть, що

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1.21. Доведіть, що якщо P, Q, R — відповідно точки перетину кожної зі сторін BC, CA, AB (або їх продовжень) трикутника ABC з деякою прямою, то

$$\frac{BR \cdot AQ \cdot PC}{AR \cdot QC \cdot BP} = 1$$

(теорема Менелая).

1.22. Точка D знаходиться на стороні BC трикутника ABC. Доведіть, що

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$$

(теорема Стюарта).

1.23. На сторонах трикутника ABC узяті точки P, Q і R так, що три прямі AP, BQ і CR перетинаються в одній точці. Доведіть, що

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(теорема Чеви).

1.24. Через довільну точку O, узяту всередині трикутника ABC, проведені прямі DE, FK, MN, паралельні відповідно AB, AC, BC, причому F і M лежать на AB, E і K — на BC, N і D — на AC. Доведіть, що

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

1.25. Через центр O правильного трикутника ABC провели довільну пряму. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин трикутника до цієї прямої не залежить від розміщення прямої.

1.26. Навколо трикутника ABC, в якому $a = 2$, $b = 3$ і кут $C = 60°$, описано коло. Визначте радіуси кіл, що проходять через дві вершини трикутника і центр описаного кола.

1.27. Сторони трикутника зв'язані співвідношенням $a^2 = c(b + c)$. Доведіть, що кут A удвічі більший від кута C.

1.28. Нехай O — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Доведіть, що якщо $OA^2 = OB \cdot OC$, то

$$\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}.$$

1.29. Площа S трикутника ABC задовольняє співвідношення $S = a^2 - (b - c)^2$. Знайдіть кут A.

1.30. На сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані квадрати. Доведіть, що відстань між центрами квадратів, побудованих на бічних сторонах, дорівнює відстані від центра квадрата, побудованого на основі, до протилежної вершини трикутника.

1.31. У трикутнику ABC одиничної площі проведений відрізок AD, що перетинає медіану CF у точці M, причому $FM = \frac{1}{4}CF$. Знайдіть площу трикутника ABD.

1.32. Доведіть, що добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних сторін ***(теорема Птолемея)***.

1.33. Відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює їхній піврізниці. Знайдіть суму кутів при більшій основі трапеції.

1.34. Через центр квадрата $ABCD$ провели пряму, що перетинає сторону AB у точці N, причому $AN : NB = 1 : 2$. На цій прямій узяли довільну точку M, яка лежить всередині квадрата. Доведіть, що відстані від точки M до сторін квадрата AB, AD, BC і CD, узяті в названому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

1.35. Квадрат і правильний трикутник, які мають спільну вершину, вписані в коло одиничного радіуса. Знайдіть площу, покриту і квадратом, і трикутником.

1.36. У коло вписані трапеція і рівнобедрений гострокутний трикутник площею S таким чином, що більша основа трапеції співпадає з діаметром кола, а бічні сторони паралельні бічним сторонам трикутника. Середня лінія трапеції дорівнює l. Знайдіть висоту трапеції.

1.37. Знайдіть відношення площі трапеції $ABCD$ до площі трикутника AOD, де O — точка перетину діагоналей трапеції, якщо відомо, що $\dfrac{BC}{AD} = p$.

1.38. Два правильні многокутники з периметрами a і b описані навколо кола, а третій правильний многокутник вписаний в це коло. Другий і третій многокутники мають кожен удвічі більше сторін, ніж перший. Знайдіть периметр третього многокутника.

1.39. Усередині кута AOB, меншого від π, дано точку M, що знаходиться на відстані a від вершини кута. Відрізок OM утворює кути α і β зі сторонами кута AOB. Знайдіть радіус R кола, що проходить через M і відсікає на сторонах кута AOB хорди, що дорівнюють $2a$.

1.40. Із зовнішньої точки A провели дві взаємно перпендикулярні січні ABD і ACE до кола з центром O. Площі трикутників ABC і ADE співвідносяться як $m : n$. Визначте величини дуг BC і DE, кожна з яких менша від півкола.

1.41. З точки A, що лежить на колі радіуса r, проведено дві хорди AC і AB. Ці хорди лежать по один бік від діаметра кола, що проходить через точку A. Довжина більшої хорди дорівнює b, а кут BAC дорівнює α. Знайдіть радіус кола, яке дотикається до хорд AB і AC та дуги BC.